Modélisation et tarification de tranches de CDO synthétiques

Projet d'option mathématiques appliquées

Auteurs: Alexandre BRIARD
Lucas HAYASHI SILVA XAVIER
Yanis JOUVAIN

Tuteur: Mathieu RIBATET

Nantes, 08 décembre 2025

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1 Introduction

1.1 Motivation

Depuis les années 1990, le développement des marchés de crédit a donné naissance à une classe de produits dérivés complexes destinés à transférer, mutualiser et redistribuer le risque de défaut : les *Collateralized Debt Obligations* (CDO) ou titre de créance collatéralisé en français. Initialement introduits par des institutions financières telles que *Drexel Burnham Lambert* à la fin des années 1980, puis massivement développés par *J.P. Morgan* au cours de la décennie suivante, les CDO avaient pour ambition d'optimiser l'allocation du risque de crédit en permettant la titrisation de portefeuilles d'actifs hétérogènes. Ils offraient aux investisseurs la possibilité de prendre des expositions ajustées au risque grâce à une structure hiérarchisée en tranches (*equity*, *mezzanine* et *senior*), chacune absorbant une fraction distincte des pertes éventuelles.

Les *CDO synthétiques*, reposant non pas sur des obligations physiques mais sur des contrats de *Credit Default Swap* (CDS), ont marqué une étape importante dans cette évolution. Présentés comme plus flexibles, plus liquides et plus rapides à structurer, ils permettaient aux institutions financières d'accroître ou de couvrir leurs expositions sur des portefeuilles de crédit sans détenir directement les actifs sous-jacents. Cette innovation a contribué à l'expansion rapide du marché des produits structurés au cours des années 2000.

Cependant, la crise financière de 2007–2008 a mis en lumière les risques systémiques liés à ces instruments. Leur complexité intrinsèque, la difficulté d'estimer correctement les corrélations de défaut et les limites du modèle de copule gaussienne largement utilisé à l'époque ont conduit à une sous-estimation significative des risques réels associés à certaines tranches, en particulier les tranches *mezzanine* et *senior*. Ces insuffisances de modélisation et de calibration ont joué un rôle non négligeable dans l'amplification de la crise.

Dans ce contexte, une compréhension rigoureuse des mécanismes de valorisation des CDO synthétiques, notamment des modèles de dépendance et des dynamiques de défaut, demeure essentielle. La capacité à tarifier correctement ces instruments est déterminante pour la gestion du risque et la stabilité financière. Le présent rapport s'inscrit dans cette perspective : il vise à étudier, formaliser et comparer plusieurs approches de modélisation du risque de défaut et de tarification des tranches synthétiques, en particulier les modèles à copules et les modèles à intensité.

1.2 Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané

1.2.1 Espace probabilisé et filtration

Nous nous plaçons dans un cadre continu en temps sur un horizon fini $[0, T]$, muni d'un espace probabilisé complet

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},),$$

où la filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfait les conditions usuelles :

— Continuité à droite : $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$
— Complétude : Soit N un ensemble négligeable, alors $N \subset \mathcal{F}_0$

Tous les processus considérés sont supposés adaptés à $(\mathcal{F}_t)$ c'est à dire, pour tout processus $(X_t)_{t\geq 0}$, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

1.2.2 Actifs et numéraire

On suppose l'existence d'un *numéraire* : un actif sans risque $B = (B_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right), \tag{1}$$

où r_t est le *taux instantané* (ou *taux court*). Par définition, le processus $(r_t)_{t\geq 0}$ vérifie les hypothèses suivantes :

- **(H1) Adaptation et mesurabilité :** r_t est $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable.
- **(H2) Bornes ou conditions d'intégrabilité :** $\int_0^T |r_s| \, ds < \infty$ p.s., ce qui garantit que $B_t > 0$ est bien défini et continu.
- **(H3) Modélisation stochastique :** r_t est généralement supposé être une diffusion de la forme :
$$dr_t = \mu(t, r_t) \, dt + \sigma(t, r_t) \, dW_t, \tag{2}$$
où (W_t) est un Brownien sous $\mathbb{P}$, et les coefficients μ, σ satisfont des conditions de Lipschitz et croissance linéaire assurant l'existence et l'unicité forte de la solution.

Ce numéraire nous offre une mesure de la valeur monétaire au temps t, pour 1€ placé en banque au temps initial on récupère B_t au temps t. L'évolution de la valeur monétaire dépend des taux d'intérêts, dans un modèle réaliste où les taux instantanés varient constamment nous sommes obligés d'intégrer un processus stochastique ce qui explique la forme de l'équation (1).

1.2.3 Processus de prix des actifs risqués

Soit $S = (S_t)_{t\geq 0}$ un actif risqué. Sous la probabilité historique $\mathbb{P}$, sa dynamique est supposée être une semi-martingale, typiquement un processus de diffusion :

$$dS_t = S_t\big(b_t \, dt + \sigma_t \, dW_t\big), \tag{3}$$

où (b_t) est la dérive ou "*drift*" (prime de risque incluse) et (σ_t) la volatilité.

On note les prix actualisés par le numéraire :

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}. \tag{4}$$

1.2.4 Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre

Nous faisons l'hypothèse fondamentale :

- **(H4) Absence de free lunch with vanishing risk (NFLVR).**

Selon le théorème fondamental de l'évaluation des actifs [1], l'hypothèse NFLVR est équivalente à l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ (appelée *mesure équivalente martingale* ou *mesure risque-neutre*) telle que les prix actualisés soient des *martingales locales* sous $\mathbb{P}^*$:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} \quad \text{est un } \mathbb{P}^*\text{-local martingale.}$$

Sous cette mesure, la dynamique de S_t s'écrit :

$$dS_t = S_t\big(r_t\,dt + \sigma_t\,dW_t^*\big), \tag{5}$$

où (W_t^*) est un Brownien sous $\mathbb{P}^*$.

1.2.5 Espérance risque-neutre

Nous cherchons à présent à connaître le prix juste $\Pi_t(X)$ (i.e. sans prime de risque) à payer en t pour acheter un actif ayant une revendication ou *payoff* $X \in L^1(\mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ en T.

Nous commençons donc par actualiser la valeur de X en T par le numéraire B_T (car 1€ demain vaut moins que 1€ aujourd'hui) et nous estimons cette quantité inconnue en prenant son espérance sous un univers sans prime de risque conditionnellement à l'information disponible en t c'est à dire $\mathcal{F}_t$. En normalisant par le numéraire à l'instant présent nous obtenons :

$$\Pi_t(X) = B_t\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{B_T}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{6}$$

Cette formule suit directement de la propriété de martingale de $(\tilde{S}_t)$ et de l'unicité de la mesure $\mathbb{P}^*$ dans un marché complet.

1.3 Le modèle de crédit

1.3.1 Les risques

La gestion du risque en finance repose traditionnellement sur quatre catégories principales :

Le risque de marché : Il correspond aux pertes potentielles dues aux variations défavorables des facteurs de marché tels que les taux d'intérêt, les spreads de crédit, les devises ou les prix des actions. Il affecte directement la valorisation des portefeuilles et constitue une composante essentielle du risque des produits dérivés.

Le risque de crédit : Il désigne la possibilité qu'une contrepartie fasse défaut sur ses engagements contractuels. Il inclut non seulement le risque de défaut en lui-même, mais également l'incertitude sur le taux de recouvrement et la dégradation éventuelle de la qualité de crédit des emprunteurs.

Le risque de liquidité : Il concerne la difficulté à acheter ou vendre un actif rapidement sans affecter significativement son prix. Il se manifeste lorsque les marchés deviennent disfonctionnels, peu profonds ou soumis à des tensions importantes, rendant coûteuse ou impossible l'exécution de transactions.

Le risque opérationnel : Il regroupe l'ensemble des pertes résultant de défaillances humaines, techniques, organisationnelles ou liées à des événements externes. Il inclut notamment les erreurs de traitement, les défauts de contrôle interne, les cyberattaques, ainsi que les risques juridiques.

Ces quatre dimensions constituent la base de toute analyse robuste du risque financier et permettent de comprendre les différentes sources d'incertitude auxquelles les institutions sont exposées.

Une estimation fiable de ces risques est de la plus grande importance afin de mesurer les risques de crédit contenu dans les portefeuilles et donc les pertes potentielles. De plus elle permet de connaître la sensibilité des divers instruments financiers et ainsi de contrôler son exposition au risque. C'est sur ces bases quantitatives que les diverses institutions mesures leurs performances et diversifient leurs investissement afin de se protéger.

Enfin c'est sur ces modèles que peuvent se baser les agences de régulations afin de s'assurer que les institutions possèdent suffisamment de fonds propres pour amortir les potentielles crises financières.

1.3.2 Modèles du risque de crédit

La modélisation du risque de crédit s'appuie traditionnellement sur l'étude d'un actif fondamental : l'obligation zéro-coupon risquée, dont la valorisation doit intégrer la possibilité de défaut de l'émetteur. Deux grandes familles de modèles permettent de décrire l'apparition du défaut et la valeur de la dette risquée :

— les modèles structurels,
— les modèles à forme réduite.

Une troisième catégorie intervient dans le cadre des produits de crédit plus complexes : les modèles de corrélation des instants de défaut, requis notamment pour l'évaluation des produits dérivés exotiques de crédit (*basket*, CDO, etc.).

Cadre général de valorisation. Dans toute la suite, l'évaluation s'effectue sous la probabilité risque-neutre. On se place sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ où est défini le processus de taux d'intérêt instantané $(r_t)_{t\geq 0}$ et où $\mathbb{P}^*$ désigne une probabilité risque-neutre.

La valeur d'un actif contingent est donnée par l'espérance actualisée de ses flux futurs sous $\mathbb{P}^*$ (cf. 1.2.5).

Hypothèses de recouvrement. La valorisation d'un zéro-coupon risqué $D(t,T)$ dépend de l'instant de défaut τ et du taux de recouvrement aléatoire R. Plusieurs hypothèses de recouvrement sont possibles :

— *Fractional Recovery of Par Value* : au défaut, une fraction R du nominal est immédiatement récupérée.
— *Fractional Recovery of Treasury Value* : le montant recouvré à défaut est reçu à maturité.
— *Fractional Recovery of Market Value* : au moment du défaut, une fraction R de la valeur juste avant défaut $D(\tau^-, T)$ est versée.

Modèles structurels. Introduits par Merton (1974), ils reposent sur la modélisation du bilan de l'entreprise. Le défaut survient lorsque la valeur des actifs devient insuffisante pour honorer la dette. Les zéro-coupons risqués apparaissent alors comme des produits dérivés sur la valeur des actifs. La qualité de crédit dépend donc de trois variables fondamentales :

— la valeur totale des actifs,
— la volatilité de ces actifs,
— le levier d'endettement.

Ces modèles sont largement utilisés dans la pratique, notamment via l'approche Moody's KMV, et établissent un lien direct entre risque equity et risque de crédit.

Modèles à forme réduite. Dans ces modèles, le défaut est considéré comme un événement imprévisible, caractérisé par un *taux de hasard* (ou intensité de défaut) $(\lambda_t)_{t\geq 0}$. Le cas le plus simple est celui d'un défaut gouverné par un processus de Poisson d'intensité constante λ. Dans ce cadre :

$$\mathbb{P}[\tau > t] = e^{-\lambda t}, \qquad \mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}, \tag{7}$$

et la probabilité conditionnelle de défaut infinitésimale est :

$$\mathbb{P}[\tau \in (t, t + \Delta t) \mid \tau > t] = \lambda\, \Delta t + o(\Delta t). \tag{8}$$

L'intensité peut être rendue dépendante de variables de marché (taux, spreads) ou de caractéristiques propres à l'entreprise (notation). Ces modèles sont aujourd'hui centraux dans la valorisation des produits dérivés de crédit.

Modèles de corrélation. Pour traiter des portefeuilles de crédits (basket, CDO, tranches), il est nécessaire de modéliser la dépendance entre instants de défaut, ce qui conduit aux modèles de corrélation des défauts.

2 Produits dérivés de crédit

2.1 Le marché du crédit risqué

2.1.1 Les obligations risquées

2.1.2 Spread de crédit

2.1.3 Notations de crédit

2.2 Credit Default Swap

2.2.1 Description du produit

Un *Credit Default Swap* (CDS) ou plus simplement *swap* est un produit dérivé du crédit et peut être vu comme l'élément fondamental (ou sous-jacent) des produits plus exotiques comme les CDO synthétiques que nous verrons plus tard.

Sa fonction principale est de transférer le risque de crédit de référence d'une entreprise C (*entité de référence*) entre deux contreparties A et B. Dans le contrat standard, l'une des parties en question, disons A, achète une protection contre le risque de perte en cas de défaut de l'entité de référence C. Ce défaut est déclenché par un évènement de crédit formel spécifié dans le contrat. Cet événement peut être la faillite de l'entreprise, un défaut de paiement ou la restructuration de sa dette.

La protection est valable jusqu'à la maturité du swap. En échange de cette protection, l'acheteur A verse périodiquement (en général, tous les 3 mois) au vendeur B une prime et ce jusqu'au défaut de C ou jusqu'à maturité du swap. La jambe du swap correspondante est appelée *premium leg*.

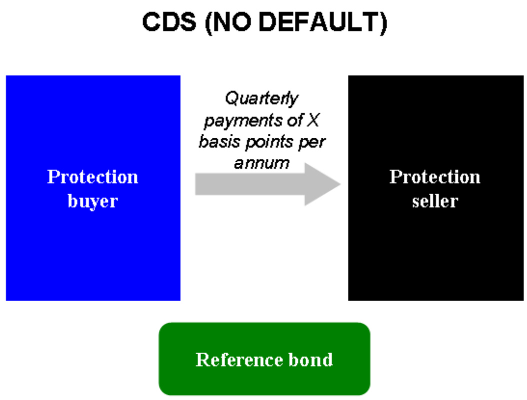

FIGURE 1 – Schéma de transaction d'un CDS sans défaut

Si le défaut intervient avant la maturité du swap, le vendeur de protection effectue un paiement à l'acheteur de protection. Ce paiement équivaut à la différence entre le nominal de la dette couverte par le swap et le taux de recouvrement observé à l'instant du défaut. Cette fois la jambe du swap correspondante est appelée *protection leg*.

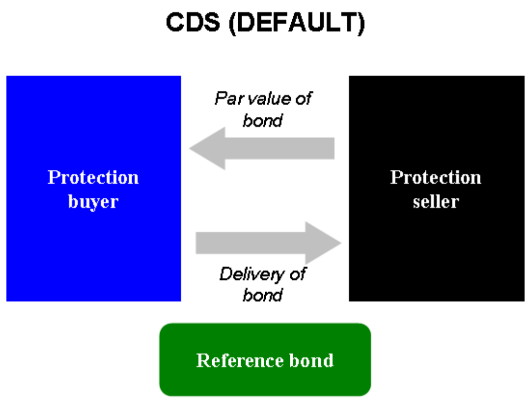

FIGURE 2 – Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut

2.2.2 Évaluation de la marge d'un CDS

Considérons un CDS de maturité $T > 0$ sur une entité de référence, portant sur un notionnel $N > 0$. On note $(T_k)_{k=1,\dots,m}$ les dates de paiement de la jambe de prime (généralement trimestrielles), avec $0 < T_1 < \cdots < T_m = T$. La fraction d'année associée au coupon k selon la convention du marché est notée $\delta_k = T_k - T_{k-1}$. Considérons τ le temps de défaut de l'entité de référence, défini comme un temps d'arrêt, nous y associons un taux de recouvrement noté $R \in [0, 1]$.

Jambe fixe (premium leg). À chaque date de coupon T_k, l'acheteur de protection paie un montant proportionnel au *spread* (ou marge) s (exprimé en taux annuel), au notionnel et à la fraction d'année. Ce paiement n'a lieu que si l'entité de référence n'a pas fait défaut avant T_k, c'est-à-dire si $\tau > T_k$. La valeur présente sous la mesure risque-neutre $\mathbb{P}^*$ de la jambe fixe est donc :

$$\mathrm{JF}(s) = s\, N \sum_{k=1}^{m} \delta_k\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}}\right]. \tag{9}$$

Jambe variable (protection leg). En cas de défaut à un temps aléatoire $\tau \le T$, le vendeur de protection verse la *loss given default* :

$$\mathrm{LGD} = N(1 - R). \tag{10}$$

La valeur présente de la jambe de protection ou jambe variable est alors

$$\mathrm{JV} = N(1 - R)\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}}{B_\tau}\right]. \tag{11}$$

Détermination du spread. Un CDS s'échange à valeur nulle à l'initiation. Le spread s^* est donc défini par l'égalité :

$$\mathrm{JF}(s^*) = \mathrm{JV}. \tag{12}$$

On obtient :

$$s^* = (1 - R)\, \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}}{B_\tau}\right]}{\sum_{k=1}^{m} \delta_k\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}}\right]}.$$

Cas particulier : modèle à intensité déterministe. Dans un cadre standard où le taux sans risque est constant : $r_t = r$ et l'intensité de défaut est une fonction déterministe : $\lambda : t \mapsto \lambda(t)$ la probabilité de survie est :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right), \tag{13}$$

et la densité de défaut sous la mesure risque-neutre est $\lambda(t)\, S(t)$.

Alors la jambe variable est donnée par :

$$\mathrm{JV} = N(1 - R) \int_0^T e^{-rt} \lambda(t)\, S(t)\, dt, \tag{14}$$

et la jambe fixe par :

$$\mathrm{JF}(s) = s\,N \sum_{k=1}^{m} \delta_k\, e^{-rT_k} S(T_k). \tag{15}$$

Le spread s'écrit :

$$s^* = (1-R)\,\frac{\int_0^T e^{-rt}\lambda(t)\,S(t)\,dt}{\sum_{k=1}^{m} \delta_k\, e^{-rT_k} S(T_k)}. \tag{16}$$

Ce spread constitue la prime d'assurance annuelle qui égalise la valeur actualisée des paiements fixes et celle du paiement contingent versé en cas de défaut de l'entité sous-jacente.

2.3 Collateralized Debt Obligation

2.3.1 Titrisation

2.3.2 Les produits synthétiques

2.3.3 Un exemple de CDO synthétique

3 Modélisation du risque de défaut

3.1 Défaut individuel

3.2 Risques idiosyncratique et systémique

3.3 Modèles d'intensité

3.4 Modélisation de la dépendance de défaut

4 Valorisation d'une tranche de CDO

4.1 Lignes de cashflow

4.2 Expected Tranche Loss

4.3 Spread de tranche

5 Modèle de tarification

5.1 Approche à copule

5.2 Approche à intensité

5.3 Monte Carlo

6 Application numérique

7 Conclusion

Références

[1] Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Annal.*, 123 (1994), 463-520.