



---

# MODÉLISATION ET TARIFICATION DE TRANCHES DE CDO SYNTHÉTIQUES

PROJET D'OPTION MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

---

*Auteurs:* Alexandre BRIARD  
Lucas HAYASHI SILVA XAVIER  
Yanis JOUVAIN

*Tuteur:* Mathieu RIBATET

NANTES, 08 DÉCEMBRE 2025



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané . . . . .	2
1.2.1	Espace probabilisé et filtration . . . . .	2
1.2.2	Intérêts composés, numéraire et taux instantanés . . . . .	3
1.2.3	Hypothèses sur $r_t$ . . . . .	4
1.2.4	Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre . . . . .	6
1.3	Le modèle de crédit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Produits dérivés de crédit</b>	<b>8</b>
2.1	Credit Default Swap . . . . .	8
2.1.1	Description du produit . . . . .	8
2.1.2	Évaluation de la marge d'un CDS . . . . .	9
2.2	Collateralized Debt Obligation . . . . .	10
2.2.1	Titrisation . . . . .	11
2.2.2	Les produits synthétiques . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modélisation du risque de défaut</b>	<b>13</b>
3.1	Les modèles à intensité . . . . .	13
3.2	Modélisation du risque d'un CDS . . . . .	14
3.3	Défauts corrélés . . . . .	15
3.3.1	Modèles de copules . . . . .	15
3.3.2	Modèles à intensité stochastique . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Pricing des tranches de CDO synthétiques</b>	<b>17</b>
4.1	Structure et définition mathématique des tranches . . . . .	17
4.2	Perte espérée et distribution des pertes . . . . .	17
4.3	Valorisation des tranches et calcul du spread . . . . .	18
4.3.1	Jambe premium . . . . .	18
4.3.2	Jambe protection . . . . .	18
4.3.3	Spread équitable . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>19</b>
5.1	Simulation des taux d'intérêts . . . . .	19
5.1.1	Simulation du modèle de Vasicek . . . . .	19
5.1.2	Simulation du modèle CIR . . . . .	20
5.2	Calibration des copules . . . . .	21
5.2.1	Copule gaussienne à un facteur . . . . .	21
5.2.2	Modèle de Vasicek . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Application numérique</b>	<b>23</b>
6.1	Tarification de tranches . . . . .	23
6.1.1	Jeu de données . . . . .	23
6.1.2	Copule gaussienne . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

## Table des figures

1	Schéma de transaction d'un CDS sans défaut . . . . .	9
2	Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut . . . . .	9
3	Mécanisme d'émission d'un CDO . . . . .	11
4	Distribution des tranches et effet " <i>waterfall</i> " d'un CDO . . . . .	12
5	Perte du portefeuille en fonction de la corrélation implicite $\rho$ pour différentes tranches du CDX NA IG Series 19 . . . . .	23
6	Comparaison pour chaque tranche des spreads observés et calculés par copule gaussienne à un facteur . . . . .	25
7	Evolution du coefficient de corrélation implicite pour la copule gaussienne à un facteur . . . . .	25
8	Correlation implicite par tranche pour la copule gaussienne à un facteur . . . . .	26

**Liste des tableaux**

- 1 Spreads de 4 tranches du CDX NA IG Series 19 et les spreads des CDS associés . 24

*“How do you explain to an innocent citizen of the free world the importance of a credit default swap on a double-A tranche of a subprime-backed collateralized debt obligation ?”*

— Michael Lewis, *The Big Short : Inside the Doomsday Machine*

## 1 Introduction

### 1.1 Motivation

Depuis les années 1990, le développement des marchés de crédit a donné naissance à une classe de produits dérivés complexes destinés à transférer, mutualiser et redistribuer le risque de défaut : les *Collateralized Debt Obligations* (CDO) ou titre de créance collatéralisé en français. Initialement introduits par des institutions financières telles que *Drexel Burnham Lambert* à la fin des années 1980, puis massivement développés par *J.P. Morgan* au cours de la décennie suivante, les CDO avaient pour ambition d'optimiser l'allocation du risque de crédit en permettant la titrisation de portefeuilles d'actifs hétérogènes. Ils offraient aux investisseurs la possibilité de prendre des expositions ajustées au risque grâce à une structure hiérarchisée en tranches (*equity*, *mezzanine* et *senior*), chacune absorbant une fraction distincte des pertes éventuelles.

Les *CDO synthétiques*, reposant non pas sur des obligations physiques mais sur des contrats de *Credit Default Swap* (CDS), ont marqué une étape importante dans cette évolution. Présentés comme plus flexibles, plus liquides et plus rapides à structurer, ils permettaient aux institutions financières d'accroître ou de couvrir leurs expositions sur des portefeuilles de crédit sans détenir directement les actifs sous-jacents. Cette innovation a contribué à l'expansion rapide du marché des produits structurés au cours des années 2000.

Cependant, la crise financière de 2007–2008 a mis en lumière les risques systémiques liés à ces instruments. Leur complexité intrinsèque, la difficulté d'estimer correctement les corrélations de défaut et les limites du modèle de copule gaussienne largement utilisé à l'époque ont conduit à une sous-estimation significative des risques réels associés à certaines tranches, en particulier les tranches *mezzanine* et *senior*. Ces insuffisances de modélisation et de calibration ont joué un rôle non négligeable dans l'amplification de la crise.

Dans ce contexte, une compréhension rigoureuse des mécanismes de valorisation des CDO synthétiques, notamment des modèles de dépendance et des dynamiques de défaut, demeure essentielle. La capacité à tarifier correctement ces instruments est déterminante pour la gestion du risque et la stabilité financière. Le présent rapport s'inscrit dans cette perspective : il vise à étudier, formaliser et comparer plusieurs approches de modélisation du risque de défaut et de tarification des tranches synthétiques, en particulier les modèles à copules et les modèles à intensité.

### 1.2 Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané

#### 1.2.1 Espace probabilisé et filtration

Nous nous plaçons dans un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ . La filtration  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représente l'information disponible sur les marchés financiers à l'instant  $t$ . Nous modélisons l'instant de défaut par une variable aléatoire  $\tau$  positive définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ . Cette variable aléatoire n'a a priori aucune raison d'être un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt. En effet, le défaut n'est pas toujours visible à l'instant même par l'information sur les marchés. Nous introduisons ainsi le processus stochastique  $H_t := \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$  appelé processus de défaut qui vaut 1 si le défaut est déjà survenu et 0 sinon. Il est alors possible de générer la filtration engendrée par ce processus  $\mathbb{H} := (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$  où  $\mathcal{H}_t = \sigma(H_s : s \leq t) = \sigma(\{\tau \leq s\} : s \leq t)$  de sorte que chaque fonction  $H_t$

soit  $\mathcal{H}_t$ -mesurable. Soit la filtration  $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ , c'est à dire pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{H}_t)$ . D'un point de vue pratique nous venons d'enrichir les informations du marché du minimum d'informations nécessaires pour rendre le processus de défaut mesurable.[2]

### 1.2.2 Intérêts composés, numéraire et taux instantanés

**Cas déterministe** Considérons un taux annuel constant  $r \in \mathbb{R}$ , un capital initial  $N_0 = 1$  et cherchons à calculer le capital au temps  $T$  avec  $n$  compositions par an :

$$B_T^{(n)} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} \quad (1.1)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} = e^{rT} \quad (1.2)$$

Donc le capital en capitalisation continue est :

$$B_T = e^{rT} \quad (1.3)$$

A présent découpons l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  sous-intervalles :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n} \quad (1.4)$$

Et supposons sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}[$  le taux constant et égal à  $r(t_i)$ . Nous pouvons alors définir le schéma d'Euler explicite tel que :

$$\begin{cases} B_0^{(n)} = 1 \\ B_{t_{i+1}}^{(n)} = B_{t_i}^{(n)} (1 + r(t_i) \Delta t) \end{cases} \quad (1.5)$$

solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{B}_t = r(t) B_t \quad (1.6)$$

Sous l'hypothèse d'intégrabilité de  $r$  sur  $[0, T]$ , par le théorème de Cauchy-Lipschitz<sup>1</sup> il existe une unique solution à ce problème que l'on nommera *numéraire* : un actif sans risque  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  vérifiant

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad (1.7)$$

Ce numéraire nous offre une mesure de la valeur monétaire au temps  $t$ , pour 1€ placé en banque au temps initial on récupère  $B_t$  au temps  $t$ .

**Cas stochastique** Cette définition s'étend naturellement dans le cas où  $r_t$  suit le processus stochastique de *taux instantané* (ou *taux court*)  $(r_t)_{t \geq 0}$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- **(H1) Adaptation et mesurabilité** :  $r_t$  est  $(\mathcal{F}_t)$ -progressivement mesurable.
- **(H2) Bornes ou conditions d'intégrabilité** :  $\int_0^T |r_s| ds < \infty$  p.s., ce qui garantit que  $B_t > 0$  est bien défini et continu.

---

1. En posant  $f(t, B) = r(t)B$ ,  $r$  est localement bornée sur  $[0, T]$  donc  $f$  est localement lipschitzienne et continue presque partout par rapport à la deuxième variable ce qui vérifie les hypothèses du théorème.



- **(H3) Modélisation stochastique :**  $r_t$  est généralement supposé être une diffusion de la forme :

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dW_t, \quad (1.8)$$

où  $(W_t)$  est un Brownien sous  $\mathbb{P}$ , et les coefficients  $\mu, \sigma$  satisfont des conditions de Lipschitz et croissance linéaire assurant l'existence et l'unicité forte de la solution.

Cette fois, nous définissons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ dB_t = r_t B_t dt \end{cases} \quad (1.9)$$

Cette EDS est en réalité une équation différentielle aléatoire puisqu'elle ne comporte pas de terme de diffusion mais ses coefficients sont aléatoires. Nous cherchons ainsi à déterminer le champ mesurable

$$B : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.10)$$

vérifiant, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$B_t(\omega) = 1 + \int_0^t r_s(\omega) B_s(\omega) ds, \quad \text{p.s.} \quad (1.11)$$

Remarquons que pour  $\omega \in \Omega$  fixé cette égalité est déterministe, l'intégrale est de Lebesgue classique.

Cette fois, en posant  $f(t, x, \omega) = r_t(\omega)x$  nous vérifions que  $f$  est continue et localement lipschitzienne en  $x$  et intégrable en  $t$ , il existe donc une unique solution chemin par chemin à notre équation différentielle par le théorème de Carathéodory<sup>2</sup> pour les EDO. En séparant les variables et en résolvant pour tout  $\omega \in \Omega$  vérifiant **(H2)** nous obtenons la solution suivante :

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad \text{p.s.} \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Hypothèses sur $r_t$

On rappelle que  $r_t$  est généralement supposé être une diffusion de la forme :

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dW_t, \quad (1.13)$$

Plusieurs modèles existent dans la littérature pour modéliser le taux instantané. Parmi les plus connus, on peut citer :

- Le modèle de Vasicek :  $\mu(t, r_t) = a(b - r_t)$  et  $\sigma(t, r_t) = \sigma$ , où  $a, b$ , et  $\sigma$  sont des constantes positives. Ce modèle permet des taux négatifs.
- Le modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross) :  $\mu(t, r_t) = a(b - r_t)$  et  $\sigma(t, r_t) = \sigma\sqrt{r_t}$ , assurant que les taux restent positifs.

---

2. Dans le cas stochastique  $(r_t)_{t \geq 0}$  suit un processus non continu de manière générale mais mesurable donc le théorème de Carathéodory s'applique mais pas Cauchy-Lipschitz.

**Modèle de Vasicek** Dans le modèle de Vasicek, le taux instantané  $r_t$  suit la diffusion linéaire :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (1.14)$$

où :

- $a > 0$  est la vitesse de retour à la moyenne (mean-reversion),
- $b \in \mathbb{R}$  est le niveau moyen vers lequel le taux tend,
- $\sigma > 0$  est la volatilité du taux,
- $W_t$  est un Brownien standard.

**Hypothèses sur  $r_t$  :**

- **Adaptation et mesurabilité :**  $r_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté et progressif.
- **Lipschitz et croissance linéaire :** pour assurer l'existence et l'unicité de la solution :

$$|\mu(t, r) - \mu(t, r')| \leq K|r - r'|, \quad |\mu(t, r)| + |\sigma| \leq K(1 + |r|), \quad (1.15)$$

ce qui est satisfait avec  $\mu(t, r) = a(b - r)$  et  $\sigma$  constant.

- **Intégrabilité :**

$$\int_0^T |r_s| ds < \infty \quad \text{p.s.}, \quad (1.16)$$

garantissant que le numéraire

$$B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right) \quad (1.17)$$

est bien défini et strictement positif.

**Solution analytique :**

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s, \quad (1.18)$$

avec

$$\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \quad \text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (1.19)$$

**Modèle CIR (Cox–Ingersoll–Ross)** Le modèle de Cox–Ingersoll–Ross (CIR) est défini par la dynamique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad (1.20)$$

où  $a, b, \sigma > 0$  et  $r_0 > 0$ .

**Hypothèses et propriétés du processus  $r_t$  :**

- Le processus  $(r_t)_{t \geq 0}$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté et à trajectoires continues.
- Les coefficients  $\mu(r) = a(b - r)$  et  $\sigma(r) = \sigma \sqrt{r}$  ne sont pas globalement lipschitziens au voisinage de 0. Toutefois, l'équation différentielle stochastique admet une solution forte unique non négative.

— Sous la condition :

$$2ab \geq \sigma^2, \quad (1.21)$$

la borne 0 est inatteignable et l'on a  $r_t > 0$  presque sûrement pour tout  $t > 0$ .

— En particulier, les trajectoires étant continues et positives, on a pour tout horizon fini  $T$  :

$$\int_0^T r_s ds < \infty \quad \text{p.s.}, \quad (1.22)$$

ce qui garantit que le numéraire

$$B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right)$$

est bien défini et strictement positif.

### Solution du processus et loi marginale.

Contrairement au modèle de Vasicek, il n'existe pas de représentation explicite du type intégrale stochastique fermée pour  $r_t$ . Néanmoins, la loi marginale de  $r_t$  est connue explicitement :  $r_t$  suit une loi du  $\chi^2$  non centrale (après renormalisation). Plus précisément, pour tout  $t > 0$ , la distribution conditionnelle de  $r_t$  sachant  $r_0$  est une loi du  $\chi^2$  non centrale.

Cette propriété permet notamment une simulation exacte du processus, sans schéma d'Euler.

**Conclusion et ouverture vers d'autres modèles** Les modèles de Vasicek et de CIR constituent deux cadres de référence pour la modélisation du taux court. Ils permettent tous les deux d'obtenir des formules semi-explicites pour les prix des obligations zéro-coupon. Cependant, ces modèles reposent sur des hypothèses structurelles relativement simples, ce qui peut limiter leur capacité à reproduire finement la structure par terme observée sur les marchés.

Dans la littérature, on retrouve des modèles plus généraux, tels que le modèle de Hull–White, qui introduit des paramètres dépendant du temps, ou encore les modèles multifactoriels, comme le modèle G2++ permettant de mieux capturer la dynamique de la courbe des taux. Néanmoins, les modèles de Vasicek et de CIR conservent un intérêt majeur dans un cadre pédagogique car ils permettent de simuler efficacement les trajectoires du taux court.

### 1.2.4 Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre

**Définition 1.1** (Martingale locale). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. Un processus adapté *càdlàg*<sup>3</sup>  $(M_t)_{t \geq 0}$  est appelé *martingale locale* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\tau_n \rightarrow +\infty \quad \text{p.s.},$$

et que, pour tout  $n$ , le processus arrêté

$$(M_{\min(t, \tau_n)})_{t \geq 0}$$

---

3. Un processus *càdlàg* est un processus dont les trajectoires sont presque sûrement continues à droite et dont des limites à gauche existent partout.

est une martingale (intégrable) par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ .

Soit  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  un actif risqué. Sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , sa dynamique est supposée être une *semi-martingale*, c'est-à-dire un processus pouvant être décomposé en une *locale martingale* et un processus adapté càdlàg à variations locales finies. On note les prix actualisés par le numéraire :

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}. \quad (1.23)$$

**Définition 1.2** (Mesures équivalentes). Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur l'espace mesurable  $(X, \mathcal{F})$  et notons

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) = 0\}, \quad \mathcal{N}_\nu := \{A \in \mathcal{F} \mid \nu(A) = 0\}$$

les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont dites *équivalentes* si  $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$  et nous noterons  $\mu \sim \nu$ .

Selon le théorème fondamental de l'évaluation des actifs [1], l'hypothèse *Absence of free lunch with vanishing risk*<sup>4</sup> (NFLVR) est équivalente à l'existence d'une probabilité  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$  (appelée *mesure équivalente martingale* ou *mesure risque-neutre*) telle que les prix actualisés  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$  soient des *martingales locales* sous  $\mathbb{P}^*$ .

Nous pouvons à présent remarquer que le processus de défaut  $H$  abordé section 1.2.1 est une  $\mathbb{G}$ -sous-martingale, pour cela nous écrivons que pour tout  $t \leq s$  :

$$\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}} = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \quad (1.24)$$

En prenant l'espérance conditionnelle et en utilisant la  $\mathbb{G}$ -mesurabilité de  $H$  :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[H_s \mid \mathcal{G}_t] = H_t + \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \mid \mathcal{G}_t] \geq H_t \quad (1.25)$$

Nous avons ainsi montré la propriété de sous-martingale.

### 1.3 Le modèle de crédit

Nous cherchons à présent à connaître le prix juste  $\Pi_X(t, T)$  (i.e. sans prime de risque) à payer en  $t$  pour acheter un actif ayant une revendication ou *payoff*  $X \in L^1(\mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$  en  $T$ .

Nous commençons donc par actualiser la valeur de  $X$  en  $T$  par le numéraire  $B_T$  (car 1€ demain vaut moins que 1€ aujourd'hui) et nous estimons cette quantité inconnue en prenant son espérance sous un univers sans prime de risque conditionnellement à l'information disponible en  $t$  c'est à dire  $\mathcal{F}_t$ . En normalisant par le numéraire à l'instant présent nous obtenons :

$$\Pi_X(t, T) = N_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.26)$$

Cette formule suit directement de la propriété de martingale de  $(\tilde{S}_t)$ .

4. Cette hypothèse est complexe à définir mathématiquement et ne nous apporte rien d'intéressant, en revanche c'est celle-ci qui justifie l'existence de la mesure équivalente risque-neutre. Nous pouvons l'interpréter comme une absence de stratégie ayant un gain sans risque réel ou investissement initial.

A partir de cette formule il est possible de définir l'obligation zéro-coupon (i.e. à prix juste) sans risque, il s'agit d'un actif (une dette) ayant une revendication de 1€ au temps  $T$  dont la valeur est donnée par

$$D(t, T) = N_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{1}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.27)$$

Il est alors possible de rentrer le terme  $N_t$  dans l'espérance puisque celui-ci est constant conditionnellement à l'information  $\mathcal{F}_t$  et en remplaçant par l'expression du numéraire nous obtenons :

$$D(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.28)$$

Si le risque de contrepartie de l'émetteur du zéro-coupon n'est pas nul, l'évaluation du zéro-coupon doit tenir compte de la possibilité du défaut de celui-ci : deux nouveaux risques entrent en jeu :

- l'instant de défaut,
- la perte en cas de défaut (*Loss Given Default*).

La perte en cas de défaut s'exprime comme un taux de recouvrement  $R$  éventuellement aléatoire et d'une hypothèse de recouvrement. Nous notons  $D_\tau(t, T)$  la valeur en  $t$  d'un zéro-coupon risqué de maturité  $T$  et  $\tau$  l'instant de défaut de l'émetteur de ce titre. Il existe plusieurs hypothèses de recouvrement en théorie des mathématiques financières mais nous utiliserons la plus courante dite *recovery of par value* et qui consiste en le recouvrement à l'instant de défaut d'une fraction  $R$  du nominal du titre. Ainsi la valeur est donnée par

$$D_\tau(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\{t < \tau < T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.29)$$

## 2 Produits dérivés de crédit

### 2.1 Credit Default Swap

#### 2.1.1 Description du produit

Un *Credit Default Swap* (CDS) ou plus simplement *swap* est un produit dérivé du crédit et peut être vu comme l'élément fondamental (ou sous-jacent) des produits plus exotiques comme les CDO synthétiques que nous verrons plus tard.

Sa fonction principale est de transférer le risque de crédit de référence d'une entreprise  $C$  (*entité de référence*) entre deux contreparties  $A$  et  $B$ . Dans le contrat standard, l'une des parties en question, disons  $A$ , achète une protection contre le risque de perte en cas de défaut de l'entité de référence  $C$ . Ce défaut est déclenché par un événement de crédit formel spécifié dans le contrat. Cet événement peut être la faillite de l'entreprise, un défaut de paiement ou la restructuration de sa dette.

La protection est valable jusqu'à la maturité du swap. En échange de cette protection, l'acheteur  $A$  verse périodiquement (en général, tous les 3 mois) au vendeur  $B$  une prime et ce jusqu'au défaut de  $C$  ou jusqu'à maturité du swap. La jambe du swap correspondante est appelée *premium leg*.

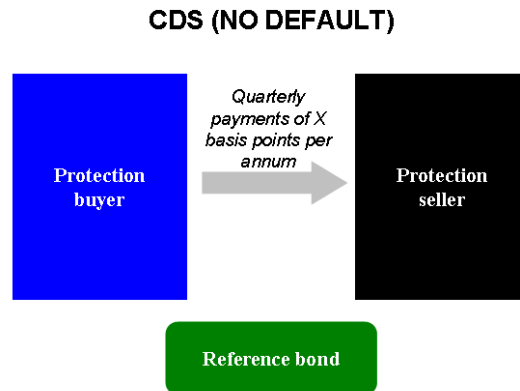


FIGURE 1 – Schéma de transaction d'un CDS sans défaut

Si le défaut intervient avant la maturité du swap, le vendeur de protection effectue un paiement à l'acheteur de protection. Ce paiement équivaut à la différence entre le nominal de la dette couverte par le swap et le taux de recouvrement observé à l'instant du défaut. Cette fois la jambe du swap correspondante est appelée *protection leg*.

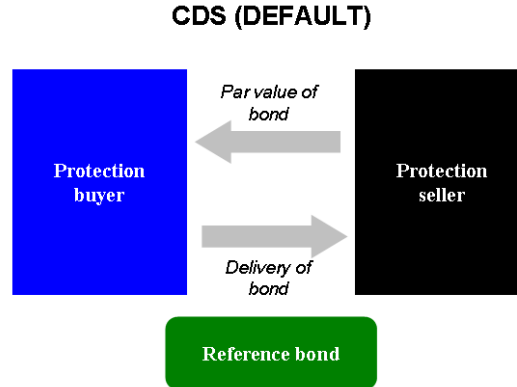


FIGURE 2 – Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut

### 2.1.2 Évaluation de la marge d'un CDS

Considérons un CDS de maturité  $T > 0$  sur une entité de référence, portant sur un notional  $N > 0$ . On note  $(T_k)_{k=1,\dots,m}$  les dates de paiement de la jambe de prime (généralement trimestrielles), avec  $0 < T_1 < \dots < T_m = T$ . La fraction d'année associée au coupon  $k$  selon la convention du marché est notée  $\delta_k = T_k - T_{k-1}$ . Considérons  $\tau$  le temps de défaut de l'entité de référence, défini comme un temps d'arrêt, nous y associons un taux de recouvrement noté  $R \in [0, 1]$ .

**Jambe fixe (premium leg).** À chaque date de coupon  $T_k$ , l'acheteur de protection paie un montant proportionnel au *spread* (ou marge)  $s$  (exprimé en taux annuel), au notional et à la fraction d'année. Ce paiement n'a lieu que si l'entité de référence n'a pas fait défaut avant  $T_k$ , c'est-à-dire si  $\tau > T_k$ . La valeur présente sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  de la jambe fixe est donc :

$$JF(s) = s N \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}} \right]. \quad (2.1)$$

**Jambe variable (protection leg).** En cas de défaut à un temps aléatoire  $\tau \leq T$ , le vendeur de protection verse la *loss given default* :

$$LGD = N(1 - R). \quad (2.2)$$

La valeur présente de la jambe de protection ou jambe variable est alors

$$JV = N(1 - R) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_T} \right]. \quad (2.3)$$

**Détermination du spread.** Un CDS s'échange à valeur nulle à l'initiation. Le spread  $s^*$  est donc défini par l'égalité :

$$JF(s^*) = JV. \quad (2.4)$$

On obtient :

$$s^* = (1 - R) \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_T} \right]}{\sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}} \right]}. \quad (2.5)$$

Ce spread constitue la prime d'assurance annuelle qui égalise la valeur actualisée des paiements fixes et celle du paiement contingent versé en cas de défaut de l'entité sous-jacente.

## 2.2 Collateralized Debt Obligation

Les *Collateralized Debt Obligations* ou CDO sont des produits obligataires adossés à des dettes, résultant d'un mécanisme relativement complexe d'ingénierie financière appelé *titrisation* (*securitization*). A partir d'un panier de titres de dette (de 50 à 10000 créances), l'émetteur synthétise des actifs obligataires. Les CDO se distinguent selon la nature de la dette sous-jacente : s'il s'agit de produits obligataires, on parle de "*Collateralized Bond Obligations*" ou CBO. Dans le cas où le panier est constitué uniquement de titres de prêts, on parle de "*Collateralized Loan Obligations*" ou CLO. Bien entendu, dans le cas général, le panier est mixte. Depuis sa création dans le milieu des années 1990, le marché des CDO n'a cessé de se développer. En 2000, il dépassait les 100 Milliards de dollars d'émission.

Après la crise des *subprimes* de 2008 les CDO ont été pointés du doigt pour leur manque de transparence et difficultés d'évaluation des risques. Suite à cela le marché a chuté considérablement cependant aujourd'hui ce marché représente toujours 23,4 milliards d'euros et les projections actuelles lui prédisent près de 69 milliards d'euros en 2033.

Nous présentons dans cette partie les enjeux du processus de titrisation ainsi que ses mécanismes, puis les techniques récentes liées à la génération synthétique de tranches utilisées en trading de corrélation.

### 2.2.1 Titrisation

La titrisation est une technique financière qui consiste à transférer à des investisseurs des actifs financiers tels que des créances (par exemple des factures émises non soldées, ou des prêts en cours), en les transformant, par le passage à travers une structure *ad hoc* — souvent un *Special Purpose Vehicle*, une entité spécialement dédiée à absorber les risques de ces produits — en titres financiers émis sur le marché des capitaux.

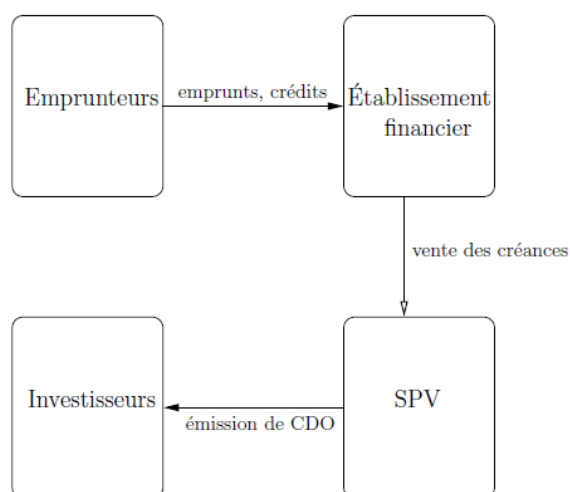


FIGURE 3 – Mécanisme d'émission d'un CDO

L'intérêt est multiple, premièrement il permet à l'émetteur de crédit de transférer ces actifs et donc ces risques à une autre entité, il n'a donc pas besoin d'accumuler des liquidités pour couvrir les risques de défaut. Deuxièmement ces produits peuvent, comme nous le verrons ensuite, être les sous-jacents de produits dérivés. Enfin, le plus grand intérêt est le découpage des CDO en *tranches* de différents niveaux de risques à partir de sous-jacents de notations à priori quelconques. Elles se décomposent sous cette forme :

- la tranche *junior* ou *equity* supporte les premières pertes sur l'ensemble de créances. Il s'agit donc d'un produit très risqué, payant un spread très élevé à l'investisseur. Il s'agit d'un produit purement spéculatif ;
- la tranche intermédiaire, dite *mezzanine* supporte les pertes au delà de la tranche equity, c'est un produit moyennement risqué, offrant un spread intéressant ;
- la tranche *senior* supporte les pertes restantes, si elles ont lieu. Elle est la moins soumise au risque de crédit, et offre donc un coupon faible.



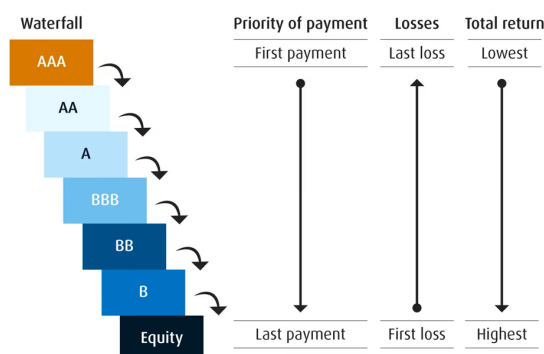


FIGURE 4 – Distribution des tranches et effet "waterfall" d'un CDO

### 2.2.2 Les produits synthétiques

Devant le développement impressionnant du marché des CDO et la demande de produits de corrélation de plus en plus forte de la part des investisseurs, des techniques d'ingénierie financière ont donné naissance au concept des CDO synthétiques.

De l'utilisation originelle dans les stratégies de gestion de fonds propres, les CDO deviennent peu à peu des produits d'investissement spéculatifs.

Le principe de la titrisation synthétique est de constituer des produits tranchés à partir, non plus d'un ensemble de crédits ou créances, mais d'un ensemble de CDS. Ceci revient à dire que l'organisme émetteur crée une exposition au risque de crédit et de corrélation en prenant des positions sur un ensemble de CDS.

L'intérêt mais également le plus grand risque de ces produits est qu'il n'est plus adossé à un crédit en tant que tel mais véritablement à un CDS, swaps qui peuvent être émis en quantités illimitées et souvent non rapportée sur un même crédit — en 2006 selon le journaliste Gregory Zuckerman il y avait 5 fois plus de CDO synthétiques que classiques adossés à des prêts *subprime* sur le marché. De plus, là où l'intestisseur d'un *cash* CDO classique engage les fonds *ex ante* c'est à dire avant le défaut éventuel en achetant la tranche, l'investisseur d'un CDO synthétique engage les fonds *ex post* et donc uniquement en cas de défaut. Ainsi, sans vérification de sa solvabilité, celui-ci peut s'exposer à un remboursement très important sur un grand nombre de swap pour lesquels il ne s'attendait pas à ce qu'il y ait défaut (typiquement les tranches *senior* d'un CDO synthétique à priori sans risque).

En effet, dans le cas classique les sous-jacents constituant un CDO sont décorréllés géographiquement, typiquement les crédits et les CDS associés à ceux-ci proviennent de zones géographiques diverses. La probabilité que tous ces swaps s'activent au sein du CDO est donc infime en théorie et donc les tranches supérieures ne devraient jamais être impactées même pour des crédits de très mauvaise qualité.

### 3 Modélisation du risque de défaut

#### 3.1 Les modèles à intensité

L'intuition générale des modèles à intensité est basée sur la décomposition de Doob-Meyer qui assure l'existence d'une décomposition unique du processus de défaut  $H$  défini section 1.2.1 de la forme  $H_t = M_t + A_t$  où  $M_t$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale et  $A_t$  est un processus  $\mathbb{G}$ -prévisible croissant. Cette propriété est à l'origine de l'hypothèse selon laquelle il existe un unique processus  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$   $\mathbb{F}$ -adapté appelé intensité de défaut tel que le processus  $M_t$  défini comme

$$M_t := H_t - \int_0^t \mathbb{1}_{\{u \leq \tau\}} \lambda_u du \quad (3.1)$$

soit une  $\mathbb{G}$ -martingale. [2]

A présent prenons  $0 \leq t \leq T$ , par la propriété de martingale en prenant l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[M_T - M_t | \mathcal{G}_t] = 0$ , donc

$$\mathbb{E}[H_T - H_t | \mathcal{G}_t] = \mathbb{E} \left[ \int_t^T \mathbb{1}_{\{u \leq \tau\}} \lambda_u du \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (3.2)$$

Or  $H_T - H_t = \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}}$  donc

$$\mathbb{E}[H_T - H_t | \mathcal{G}_t] = \mathbb{P}(t < \tau \leq T | \mathcal{G}_t) \quad (3.3)$$

Et par positivité de l'intégrande et par hypothèse que  $\lambda$  est  $\mathbb{F}$ -adapté, en utilisant le théorème de Fubini

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T \mathbb{1}_{\{u < \tau\}} \lambda_u du \middle| \mathcal{G}_t \right] = \int_t^T \lambda_u \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{u < \tau\}} | \mathcal{G}_t] du \quad (3.4)$$

Or pour  $u \geq t$ , nous avons  $\mathbb{1}_{\{u < \tau\}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}}$  et comme  $\{\tau > t\} \in \mathcal{G}_t$  :

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{u < \tau\}} | \mathcal{G}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{P}(\tau > u | \mathcal{F}_t) \quad (3.5)$$

Nous obtenons l'égalité

$$\mathbb{P}(t < \tau \leq T | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \int_t^T \lambda_u \mathbb{P}(\tau > u | \mathcal{F}_t) du \quad (3.6)$$

Or en remarquant qu'aucune information liée à  $\{\tau > T\}$  n'est dans  $\mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau \leq s\} : s \leq t)$  nous pouvons établir un dernier résultat :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t < \tau \leq T | \mathcal{G}_t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} (1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t]) \\ &= \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} (1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t]) \\ &= \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} (1 - \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t)) \end{aligned}$$

Finalement en posant  $f(t, u) = \mathbb{P}(\tau > u | \mathcal{F}_t)$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$1 - f(t, T) = \int_t^T \lambda_u f(t, u) du \quad (3.7)$$

Et en dérivant l'équation précédente nous obtenons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_u f(t, u) = -\lambda_u f(t, u) \\ f(t, t) = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = \exp \left( - \int_t^T \lambda_u du \right), \quad \text{p.s.} \quad (3.9)$$

Nous reconnaissons la probabilité qu'il n'y ait aucun saut pendant un intervalle de temps  $T - t$  sur le processus de Poisson non homogène  $H$  d'intensité stochastique  $\lambda$ .

### 3.2 Modélisation du risque d'un CDS

La détermination du prix d'un Credit Default Swap repose sur la modélisation probabiliste du temps de défaut de l'entité de référence. L'objectif de cette section est d'établir le cadre théorique permettant de dériver la loi de probabilité du temps de défaut, afin de calculer le spread équitable du contrat.

Considérons un CDS de maturité  $T$  portant sur un notionnel  $N$ , avec un taux de recouvrement  $R$  et un spread  $s$ . Le spread de marché équitable est déterminé grâce à l'égalité entre la valeur actualisée de la jambe premium (2.1) et celle de la jambe protection (2.3). Pour modéliser le temps de défaut, nous reprenons le résultat (3.9) et prenons l'espérance risque-neutre sur  $\mathcal{F}_t$  il est possible d'écrire :

$$\mathbb{P}^*(\tau > t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda(s) ds \right) \right]. \quad (3.10)$$

Lorsque l'intensité est déterministe,  $\lambda(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , la probabilité de survie devient

$$\mathbb{P}^*(\tau > t) = \exp \left( - \int_0^t \lambda(s) ds \right). \quad (3.11)$$

Les valeurs actualisées des jambes (2.1) et (2.3) peuvent alors être calculées semi-analytiquement. Le cas particulier d'une intensité constante  $\lambda(t) = \lambda$  conduit à une loi exponentielle  $\mathbb{P}^*(\tau > t) = e^{-\lambda t}$  et en effectuant l'hypothèse d'un taux constant  $r_t = r$  il est possible d'obtenir une expression analytique pour le spread. En effet, considérons que la prime est payée jusqu'au défaut, la jambe fixe s'écrit alors

$$\begin{aligned} \text{JF}(s) &= s N \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbb{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}} \right] \\ &= s N \sum_{k=1}^m \delta_k e^{-(r+\lambda)T_{i+1}} \\ &\approx s N \int_0^T e^{-(r+\lambda)u} du \\ &= s N \frac{1 - e^{-(r+\lambda)T}}{r + \lambda} \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la même manière la jambe variable s'écrit

$$\begin{aligned}
 JV &= N(1 - R) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_\tau} \right] \\
 &= N(1 - R) \int_0^T \lambda e^{-(r+\lambda)u} du \\
 &= N(1 - R) \frac{\lambda}{r + \lambda} \left( 1 - e^{-(r+\lambda)T} \right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

En égalisant les deux termes nous obtenons le *fair spread* qui satisfait l'égalité du triangle

$$s^* = (1 - R)\lambda \tag{3.14}$$

En pratique, il existe deux manière de procéder pour calibrer le modèle à intensité : soit en utilisant les spreads de marché des CDS pour en déduire l'intensité de défaut, soit en modélisant directement l'intensité comme un processus stochastique et en calibrant ses paramètres à partir de données historiques ou de prix de marché. Dans le premier cas, la probabilité de défaut est alors sous la mesure risque neutre, tandis que dans le second nous travaillons sous la mesure historique.

### 3.3 Défauts corrélés

#### 3.3.1 Modèles de copules

La valorisation des tranches de CDO synthétiques requiert la modélisation de la distribution jointe des temps de défaut  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  du portefeuille. Les distributions marginales  $F_i(t) = \mathbb{P}^*(\tau_i \leq t)$  étant connues, il reste à spécifier la structure de dépendance. Le théorème de Sklar stipule qu'il existe une fonction de copule  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = C(F_1(\tau_1), F_2(\tau_2), \dots, F_n(\tau_n)). \tag{3.15}$$

La copule  $C$  encode la structure de dépendance indépendamment des marginales.

**Copule gaussienne.** La copule gaussienne suppose que les variables  $\Phi^{-1}(F_i(\tau_i))$  suivent une loi normale multivariée de matrice de corrélation  $\Sigma$ , où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Elle s'écrit

$$C_\Sigma^{\text{Gauss}}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \tag{3.16}$$

avec  $\Phi_\Sigma$  la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ . En pratique, on impose souvent une corrélation uniforme  $\rho$  entre toutes les paires d'entités, réduisant le nombre de paramètres à un seul. L'absence de formule analytique pour la distribution des pertes nécessite une simulation Monte Carlo. L'algorithme génère un vecteur  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , puis applique les transformations

$$U_i = \Phi_\Sigma(Z_i), \quad \tau_i = F_i^{-1}(U_i), \tag{3.17}$$

pour obtenir des scénarios de défaut corrélés permettant d'estimer les prix par moyenne empirique.

**La copule de Student.** Une extension importante de la copule gaussienne est la copule de Student, qui s'écrit

$$C_{\Sigma, \nu}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{\Sigma, \nu}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)), \quad (3.18)$$

où  $t_{\nu}$  désigne la fonction de répartition de la loi de Student univariée à  $\nu$  degrés de liberté, et  $t_{\Sigma, \nu}$  celle de la loi de Student multivariée. Le paramètre  $\nu$  contrôle l'épaisseur des queues de distribution : plus  $\nu$  est faible, plus les queues sont épaisses, capturant ainsi une dépendance extrême plus forte entre les défauts. Lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ , la copule de Student converge vers la copule gaussienne. Cette propriété permet de mieux modéliser les défauts simultanés observés lors des périodes de stress financier, où la copule gaussienne tend à sous-estimer les événements de queue. La simulation numérique de la copule de Student est analogue à la méthode précédente.

### 3.3.2 Modèles à intensité stochastique

Les modèles de copules présentent plusieurs limitations : structure de dépendance statique, absence de facteurs économiques explicites, et sous-estimation de la dépendance de queue. Une approche alternative décompose l'intensité de défaut de chaque entité  $i$  en

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^{\text{idio}}(t) + \beta_i \lambda^{\text{syst}}(t), \quad (3.19)$$

où  $\lambda_i^{\text{idio}}(t)$  est la composante idiosyncratique,  $\lambda^{\text{syst}}(t)$  le facteur systémique commun, et  $\beta_i \geq 0$  la sensibilité au risque systémique.

Les intensités sont modélisées par des processus stochastiques. Pour capturer les chocs macroéconomiques brutaux et les variations discontinues du risque de crédit, nous utilisons un processus de diffusion avec sauts pour le facteur systémique :

$$d\lambda^{\text{syst}}(t) = \kappa(\theta - \lambda^{\text{syst}}(t)) dt + \sigma \sqrt{\lambda^{\text{syst}}(t)} dW(t) + dJ(t), \quad (3.20)$$

où  $\kappa > 0$  est la vitesse de retour à la moyenne,  $\theta > 0$  le niveau de long terme,  $\sigma > 0$  la volatilité,  $W(t)$  un mouvement brownien, et  $J(t)$  un processus de Poisson composé modélisant les sauts. Le processus de sauts s'écrit

$$J(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} Y_i, \quad (3.21)$$

où  $P(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\ell$  et les  $Y_i \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\mu}\right)$  sont des variables aléatoires i.i.d. représentant l'amplitude des sauts. Cette spécification permet de capturer à la fois la dynamique continue du risque via la composante diffusion et les événements de crise via les sauts. On appelle un processus de cette forme (3.20) un processus basique affine de paramètre  $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, \ell)$ . [3]

La corrélation entre défauts émerge naturellement via le facteur commun  $\lambda^{\text{syst}}(t)$  : lorsque le risque systémique s'élève, toutes les intensités augmentent simultanément, générant une dépendance dynamique et capturant la dépendance de queue observée empiriquement. Les coefficients présentés précédemment peuvent alors être ajustés afin d'approcher au mieux les observations empiriques. Des travaux ont été réalisés afin de trouver des valeurs convenables pour les coefficients  $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, \ell)$  ainsi que des incertitudes sur ceux-ci, des tables de valeurs peuvent être trouvées dans Duffie et Gârleanu (1999).

La difficulté réelle de ces modèles réside dans la méconnaissance des intensités de défaut idiosyncratiques propres mais également des coefficients de sensibilité au risque systémique. Une première approximation par classe peut-être réalisée en regroupant les différents actifs et en leur attribuant des intensités et sensibilités par groupes (par notation de crédit par exemple). Cependant ceci exige une analyse statistique historique fine de ces classes qui n'est pas toujours possible. De plus, l'appartenance à une classe n'est pas nécessairement définitive, en effet il existe des modèles markoviens de transitions de classes permettant de prendre en compte des probabilités de changement d'état des différents sous-jacents du portefeuille.

## 4 Pricing des tranches de CDO synthétiques

### 4.1 Structure et définition mathématique des tranches

Un CDO synthétique est structuré sur un portefeuille de référence composé de  $n$  entités, chacune associée à un CDS. Notons  $N_i$  le notionnel de l'entité  $i$ ,  $R_i$  son taux de recouvrement, et  $\tau_i$  son temps de défaut. Le notionnel total du portefeuille s'écrit  $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n N_i$ . La perte cumulée du portefeuille à l'instant  $t$  est définie par

$$L(t) = \sum_{i=1}^n N_i(1 - R_i)\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \quad (4.1)$$

Cette quantité représente la somme des pertes effectives dues aux défauts survenus avant ou à l'instant  $t$ . Il est commode de normaliser cette perte en proportion du notionnel total et d'introduire le taux de perte du portefeuille

$$\ell(t) = \frac{L(t)}{N_{\text{tot}}} = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^n N_i(1 - R_i)\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \quad (4.2)$$

Le capital du CDO est divisé en tranches caractérisées par leurs points d'attachement et de détachement. Une tranche  $[K_1, K_2]$  est définie par un point d'attachement inférieur  $K_1$  et un point de détachement supérieur  $K_2$ , avec  $0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$ . La tranche absorbe les pertes du portefeuille comprises entre  $K_1 \cdot N_{\text{tot}}$  et  $K_2 \cdot N_{\text{tot}}$ . La perte de la tranche à l'instant  $t$  s'exprime comme

$$L_{\text{tranche}}(t) = \min(\max(L(t) - K_1 N_{\text{tot}}, 0), (K_2 - K_1) N_{\text{tot}}), \quad (4.3)$$

ou de manière équivalente en termes normalisés

$$\ell_{\text{tranche}}(t) = \min(\max(\ell(t) - K_1, 0), K_2 - K_1). \quad (4.4)$$

La tranche subit des pertes uniquement lorsque le taux de perte du portefeuille dépasse son point d'attachement inférieur  $K_1$ , et ces pertes sont plafonnées à l'épaisseur de la tranche  $K_2 - K_1$ . En pratique, les CDO synthétiques sont structurés en plusieurs tranches de subordination différente. Par exemple, une distribution de tranches classiques pourrait prendre la forme suivante : Equity [0%, 5%], Mezzanine [5%, 12%], Senior [12%, 15%], et Super-Senior [15%, 100%].

### 4.2 Perte espérée et distribution des pertes

L'évaluation d'une tranche de CDO repose sur la connaissance de la distribution de probabilité de sa perte  $L_{\text{tranche}}(t)$  sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ . Une quantité centrale est la perte espérée de la tranche à la maturité  $T$ , définie par

$$\mathbb{E}L_{\text{tranche}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[L_{\text{tranche}}(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\min(\max(L(T) - K_1 N_{\text{tot}}, 0), (K_2 - K_1) N_{\text{tot}})]. \quad (4.5)$$

Le calcul de cette espérance nécessite la connaissance de la distribution jointe des temps de défaut  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , obtenue par les modèles de copule ou d'intensité stochastique présentés précédemment.

Pour calculer la perte espérée, il est utile d'introduire la fonction de répartition de la perte du portefeuille. Notons  $F_L(x, t) = \mathbb{P}^*(L(t) \leq x)$  la probabilité que la perte cumulée à l'instant  $t$  n'excède pas  $x$ . La perte espérée de la tranche peut alors s'exprimer comme une intégrale faisant intervenir cette distribution. En effet, en notant  $\ell = L/N_{\text{tot}}$  le taux de perte normalisé, nous avons

$$\text{EL}_{\text{tranche}} = N_{\text{tot}} \int_{K_1}^{K_2} \mathbb{P}^*(\ell(T) > x) dx. \quad (4.6)$$

La distribution  $F_L(x, t)$  n'admet généralement pas de forme analytique, sauf dans des cas très particuliers. Le calcul numérique de cette distribution et de l'expected loss repose sur les méthodes de simulation de Monte Carlo.

### 4.3 Valorisation des tranches et calcul du spread

Une tranche de CDO synthétique peut être vue comme un CDS dont le sous-jacent est le portefeuille de référence, mais avec une subordination définie par les points d'attachement et de détachement. L'acheteur de protection sur une tranche paie un spread périodique  $s$  et reçoit une compensation en cas de pertes affectant la tranche. Le vendeur de protection perçoit le spread et s'engage à compenser les pertes de la tranche.

La valorisation de la tranche repose sur l'égalité entre la valeur actualisée de la jambe premium ou jambe fixe (payée par l'acheteur de protection) et la valeur actualisée de la jambe protection ou jambe variable (payée par le vendeur). Cette condition d'absence d'arbitrage permet de déterminer le spread équitable de la tranche.

#### 4.3.1 Jambe premium

L'acheteur de protection paie le spread  $s$  de manière périodique aux dates  $t_1, t_2, \dots, t_m = T$ , avec une fréquence généralement trimestrielle. Le paiement à chaque date est proportionnel au notionnel restant de la tranche, c'est-à-dire à la partie de la tranche qui n'a pas encore subi de pertes. Le notionnel restant à l'instant  $t_i$  est

$$N_{\text{restant}}(t_i) = (K_2 - K_1)N_{\text{tot}} - L_{\text{tranche}}(t_i). \quad (4.7)$$

La valeur actualisée de la jambe premium s'écrit

$$\text{JF}(s) = s \sum_{i=1}^m \delta_i \mathbb{E}^* \left[ \frac{N_{\text{restant}}(t_i)}{B_{t_i}} \right], \quad (4.8)$$

où  $\delta_i = t_i - t_{i-1}$  est la fraction d'année entre deux paiements et  $B_{t_i}$  est le numéraire.

#### 4.3.2 Jambe protection

Le vendeur de protection s'engage à compenser les pertes subies par la tranche. Lorsqu'un défaut survient dans le portefeuille et que la perte cumulée du portefeuille atteint ou dépasse le point d'attachement de la tranche, le vendeur effectue un paiement correspondant à

l'augmentation de la perte de la tranche. La valeur actualisée de la jambe protection s'exprime comme

$$JV = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \int_0^T \frac{dL_{\text{tranche}}(t)}{B_t} \right], \quad (4.9)$$

où  $dL_{\text{tranche}}(t)$  représente l'incrément de perte de la tranche à l'instant  $t$ . En pratique, cette intégrale est approchée par une somme discrète sur les dates d'observation :

$$JV \approx \sum_{i=1}^m \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{L_{\text{tranche}}(t_i) - L_{\text{tranche}}(t_{i-1})}{B_{t_i}} \right]. \quad (4.10)$$

### 4.3.3 Spread équitable

Le spread équitable  $s^*$  de la tranche est déterminé par la condition d'absence d'arbitrage imposant l'égalité entre les deux jambes :

$$PF(s^*) = JV. \quad (4.11)$$

En explicitant cette condition et en isolant  $s^*$ , nous obtenons

$$s^* \approx \frac{\sum_{i=1}^m \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [B_{t_i}^{-1} (L_{\text{tranche}}(t_i) - L_{\text{tranche}}(t_{i-1}))]}{\sum_{i=1}^m \delta_i \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [B_{t_i}^{-1}] [(K_2 - K_1) N_{\text{tot}} - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [L_{\text{tranche}}(t_i)]]}. \quad (4.12)$$

## 5 Méthodes numériques

### 5.1 Simulation des taux d'intérêts

**Principe général de la simulation et différence entre les modèles.** Dans les deux cas, les formules utilisées pour simuler  $r_{t+\Delta t}$  correspondent à l'échantillonnage de la loi de transition exacte du taux court, et non à un schéma de discrétisation de type Euler.

Dans le modèle de Vasicek, l'équation étant linéaire, le processus est gaussien et la loi conditionnelle de  $r_{t+\Delta t}$  sachant  $r_t$  est normale, ce qui conduit à une formule de simulation explicite. Dans le modèle CIR, le coefficient de diffusion dépend de  $\sqrt{r_t}$ , l'équation n'est plus linéaire et la loi conditionnelle de transition est une loi du  $\chi^2$  non centrale.

La différence entre les expressions de simulation provient donc directement de la structure des équations différentielles stochastiques des deux modèles.

#### 5.1.1 Simulation du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est linéaire et admet une solution explicite sous forme d'intégrale stochastique :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a}} Z_t, \quad (5.1)$$

où  $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  est une variable aléatoire normale standard indépendante.

**Méthode de simulation :**



1. Choisir un pas de temps  $\Delta t$  et un horizon final  $T$ .
2. Initialiser  $r_0$ .
3. Générer des variables normales  $Z_0, Z_1, \dots$ .
4. Calculer itérativement  $r_{t+\Delta t}$  à partir de  $r_t$  en utilisant la formule ci-dessus.

**Calcul du numéraire dans le modèle de Vasicek** On rappelle que le numéraire associé au marché monétaire est défini par

$$B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right). \quad (5.2)$$

Dans le cadre du modèle de Vasicek, le processus  $(r_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien à trajectoires continues et vérifie la propriété d'intégrabilité

$$\int_0^T |r_s| ds < \infty \quad \text{p.s.}$$

comme établi dans la section précédente.

Par conséquent, pour toute trajectoire simulée  $(r_{t_k})_{k=0, \dots, N}$ , une approximation naturelle du numéraire s'obtient par une discrétisation de l'intégrale :

$$B_{t_{k+1}} = B_{t_k} \exp(r_{t_k} \Delta t), \quad B_0 = 1, \quad (5.3)$$

où  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ .

Cette formule découle directement de la définition intégrale de  $B_t$  et du fait que, pour des trajectoires continues, la somme de Riemann

$$\sum_{k=0}^{N-1} r_{t_k} \Delta t$$

converge presque sûrement vers  $\int_0^T r_s ds$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Ainsi, la simulation exacte du taux court  $r_t$  dans le modèle de Vasicek permet de calculer de manière cohérente le numéraire par simple intégration numérique le long des trajectoires simulées.

### 5.1.2 Simulation du modèle CIR

Le modèle CIR ne possède pas de solution intégrale simple, mais il est possible de simuler  $r_t$  de manière exacte grâce à la relation avec la loi du  $\chi^2$  non centrale.

#### Méthode de simulation :

1. Choisir un pas de temps  $\Delta t$  et un horizon  $T$ .
2. Initialiser  $r_0 > 0$ .

3. À chaque pas, générer  $r_{t+\Delta t}$  selon :

$$r_{t+\Delta t} = \frac{\sigma^2(1 - e^{-a\Delta t})}{4a} \chi_\nu^2(\lambda),$$

$$\text{où } \nu = \frac{4ab}{\sigma^2} \text{ et } \lambda = \frac{4ar_te^{-a\Delta t}}{\sigma^2(1-e^{-a\Delta t})}.$$

- La simulation des trajectoires du modèle de Vasicek est simple et rapide grâce à la solution analytique.
- Le modèle CIR garantit la positivité du taux, mais nécessite la génération de variables  $\chi^2$  non centrales.

**Calcul du numéraire dans le modèle CIR** Dans le modèle de Cox–Ingersoll–Ross, le numéraire est également défini par

$$B_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right). \quad (5.4)$$

Sous les hypothèses du modèle, et en particulier sous la condition de Feller  $2ab \geq \sigma^2$ , le processus  $r_t$  est strictement positif et à trajectoires continues.

On a donc, pour tout horizon fini  $T$ ,

$$\int_0^T r_s ds < \infty \quad \text{p.s.}$$

ce qui garantit que le numéraire est bien défini et strictement positif.

Comme dans le cas de Vasicek, le calcul du numéraire repose sur une approximation de l'intégrale par une discrétisation temporelle. Pour une grille régulière  $(t_k)$ , on pose

$$B_{t_{k+1}} = B_{t_k} \exp(r_{t_k} \Delta t), \quad B_0 = 1. \quad (5.5)$$

Cette approximation est justifiée par la continuité presque sûre de  $r_t$ , qui assure la convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale stochastique déterministe

$$\int_0^t r_s ds.$$

Le fait que la simulation du processus CIR soit effectuée à l'aide de sa loi exacte à chaque pas de temps ne modifie pas ce calcul : l'intégrale du taux court ne possède pas de loi fermée simple et doit être évaluée numériquement le long des trajectoires simulées.

## 5.2 Calibration des copules

### 5.2.1 Copule gaussienne à un facteur

Nous cherchons à calibrer une copule gaussienne à partir des spreads de CDS observés sur les 10 dates fournies. Pour cela nous allons chercher à minimiser la norme euclidienne entre les

spreads observés et les spreads calculés à partir de la copule gaussienne. Nous allons utiliser la fonction d'optimisation de Scipy `scipy.optimize.minimize` pour trouver les paramètres de la copule gaussienne qui minimisent cette norme.

Afin de simplifier le problème d'optimisation, dans une première étape nous allons supposer que les corrélations entre les différents CDS sont toutes égales, c'est à dire que la matrice de corrélation est de la forme

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

où  $\rho$  est le paramètre de corrélation implicite que nous allons calibrer. Nous sommes donc dans le cas de l'approximation d'un portfolio homogène.

Pour le trouver nous procédons en deux temps, premièrement nous utilisons une grille de paramètres sur laquelle nous calculons les spreads pour chaque tranche par une méthode de Monte-Carlo en échantillonnant des temps de défauts du vecteur aléatoire  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Puis sur une région plus restreinte nous utilisons l'algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) pour trouver le minimum de la norme euclidienne entre les spreads observés et les spreads calculés à partir de la copule gaussienne. Il s'agit d'une méthode approchée de la méthode de Newton dite de "quasi-Newton".

### 5.2.2 Modèle de Vasicek

Dans le cas d'un portfolio homogène, grand et suffisamment diversifié, il est possible de faire l'approximation de Vasicek ou LHP (*Large Homogeneous Portfolio*) qui permet de calculer les pertes espérées et donc les spreads pour chaque tranche en fonction de la corrélation implicite. Pour cela on considère un portefeuille de crédit homogène de taille  $n$ . La dépendance des défauts est décrite par un modèle gaussien à un facteur :

$$X_i = \sqrt{\rho} Z + \sqrt{1 - \rho} \varepsilon_i, \quad (5.7)$$

où  $Z, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sont indépendantes et  $\rho \in (0, 1)$ .

Un défaut avant la date  $t$  est défini par

$$\tau_i \leq t \iff X_i \leq \Phi^{-1}(p(t)), \quad (5.8)$$

où  $p(t)$  est la probabilité de défaut marginale.

Conditionnellement à  $Z = z$ , on a

$$X_i | Z = z \sim \mathcal{N}(\sqrt{\rho} z, 1 - \rho), \quad (5.9)$$

d'où

$$q(z, t) := \mathbb{P}(\tau_i \leq t | Z = z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p(t)) - \sqrt{\rho} z}{\sqrt{1 - \rho}}\right). \quad (5.10)$$

Or nous savons que pour un notionnel unitaire et un taux de recouvrement constant  $R$  la perte du portefeuille est

$$L_N(t) = (1 - R) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \quad (5.11)$$

Et conditionnellement à  $Z = z$ , les variables  $\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$  sont i.i.d. de loi Bernoulli( $q(z, t)$ ). Ainsi par la loi forte des grands nombres,

$$L_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{P.s.}} L(t) := (1 - R) q(Z, t). \quad (5.12)$$

Nous avons ainsi trouvé une formule explicite pour la perte du portefeuille entier en fonction de la corrélation implicite  $\rho$ . Pour calculer l'espérance sur  $Z$  totale ou bien sur une tranche nous pourrions par exemple utiliser une méthode de quadrature de Gauss-Hermite.

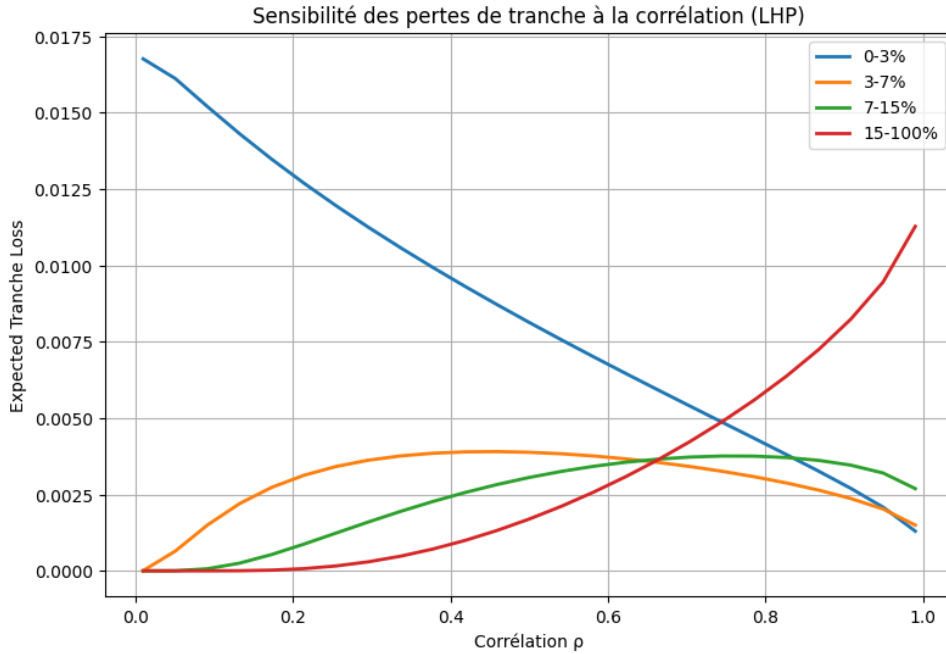


FIGURE 5 – Perte du portefeuille en fonction de la corrélation implicite  $\rho$  pour différentes tranches du CDX NA IG Series 19

## 6 Application numérique

### 6.1 Tarification de tranches

#### 6.1.1 Jeu de données

Pour notre étude nous étudierons  $Q = 4$  tranches du CDO synthétique CDX NA IG Series 19, il possède quatre différentes maturités (3, 5, 7 and 10 ans) et est basé sur un portefeuille de  $n = 125$  contrats CDS. Nous utiliserons les données fournies Table (1) par Okhrin et Xu (2017) pour la maturité  $T = 5$  ans sur 10 dates fournies entre 01/06/2014 et le 15/03/2015.

Date	0–3%	3–7%	7–15%	15–100%	CDS
2014/06/01	4.250	2.000	0.036	0.014	39
2014/07/03	3.750	1.375	0.048	0.015	37
2014/08/15	4.094	1.719	0.050	0.014	38
2014/09/23	3.750	1.375	0.056	0.012	37
2014/10/11	5.775	1.810	0.050	0.012	41
2014/11/17	4.188	0.985	0.057	0.015	35
2014/12/01	3.183	0.747	0.060	0.016	32
2015/01/07	7.065	0.875	0.055	0.013	39
2015/02/10	7.559	0.563	0.055	0.014	37
2015/03/15	6.874	0.073	0.064	0.015	34

TABLE 1 – Spreads de 4 tranches du CDX NA IG Series 19 et les spreads des CDS associés

Le taux d'intérêt est pris constant à  $r = 0.0014$  en accord avec la moyenne du LIBOR sur les dates considérées et le taux de recouvrement est fixé à  $R = 0.4$  en accord avec la politique de l'entreprise Markit qui administre l'indice de ces produits. [4] Les taux de recouvrement moyens observés pour les obligations corporate senior unsecured sur longue période sont autour de 35–40 %, selon les données historiques de Moody's Investors Service. Ces statistiques justifient l'usage conventionnel d'un taux de recouvrement de 40 % dans la calibration des modèles de CDS. [5]

### 6.1.2 Copule gaussienne

Dans cette partie nous allons exposer les premiers résultats obtenus pour un modèle simple de copule gaussienne sous hypothèse d'un portefeuille homogène.

Les résultats de calibrations sur les données présentées en section (6.1.1) sont présentés Figure (6) et montrent un résultat connu de la littérature : le modèle gaussien présente des queues de distributions indépendantes et n'arrive donc pas à simuler correctement les événements rares de défauts corrélés, les tranches equity sont bien approximées mais les autres tranches sont surévaluées par rapport aux spreads observés.

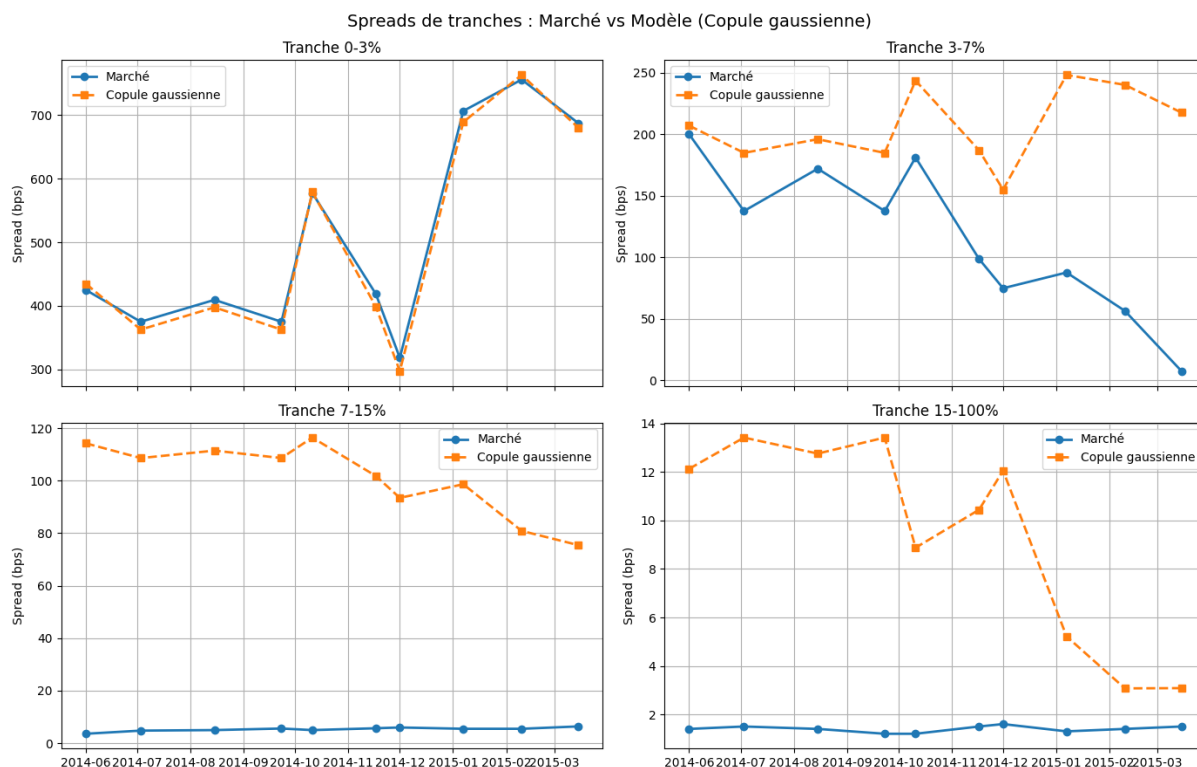


FIGURE 6 – Comparaison pour chaque tranche des spreads observés et calculés par copule gaussienne à un facteur

Nous pouvons voir Figure (7) que la corrélation implicite du modèle gaussien est très élevée oscillant autour de 0,7 pour les différentes dates. Cette forte corrélation explique la surévaluation des tranches mezzanine et senior, le modèle gaussien doit compenser l'absence de queues de distribution dépendantes par une forte corrélation pour simuler les défauts corrélés nécessaires à la tarification de ces tranches.

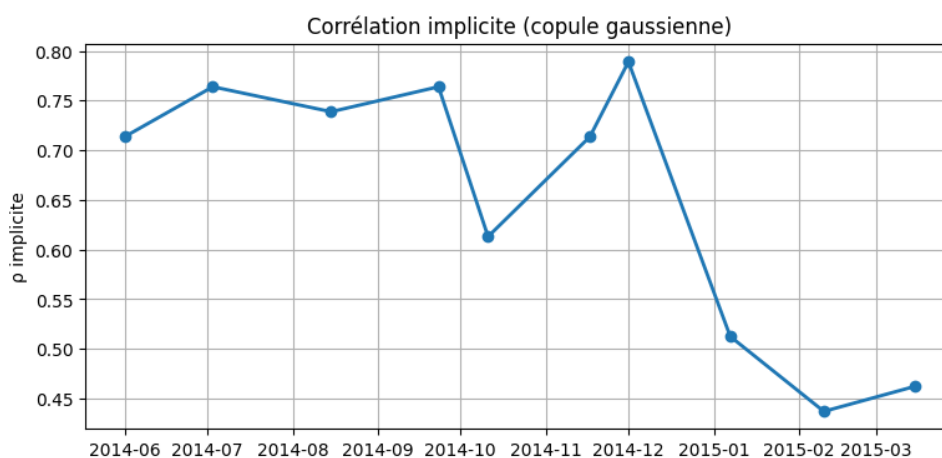


FIGURE 7 – Evolution du coefficient de corrélation implicite pour la copule gaussienne à un facteur

La Figure (8) montre que la corrélation implicite par tranche forme un "smile" caractéristique des modèles à copule gaussienne, la tranche equity (0–3 %) nécessite une corrélation implicite importante, la tranche senior également, tandis que les tranches mezzanine (3–7 % et 7–15 %) nécessitent une corrélation implicite plus faible. Ce phénomène peut être expliqué de deux manières différentes : soit le modèle de copule implicite est bien plus complexe que le modèle gaussien ou bien le marché des tranches de CDO synthétiques est illiquide et les spreads observés ne sont pas fiables, ce qui expliquerait les difficultés de calibration du modèle gaussien.

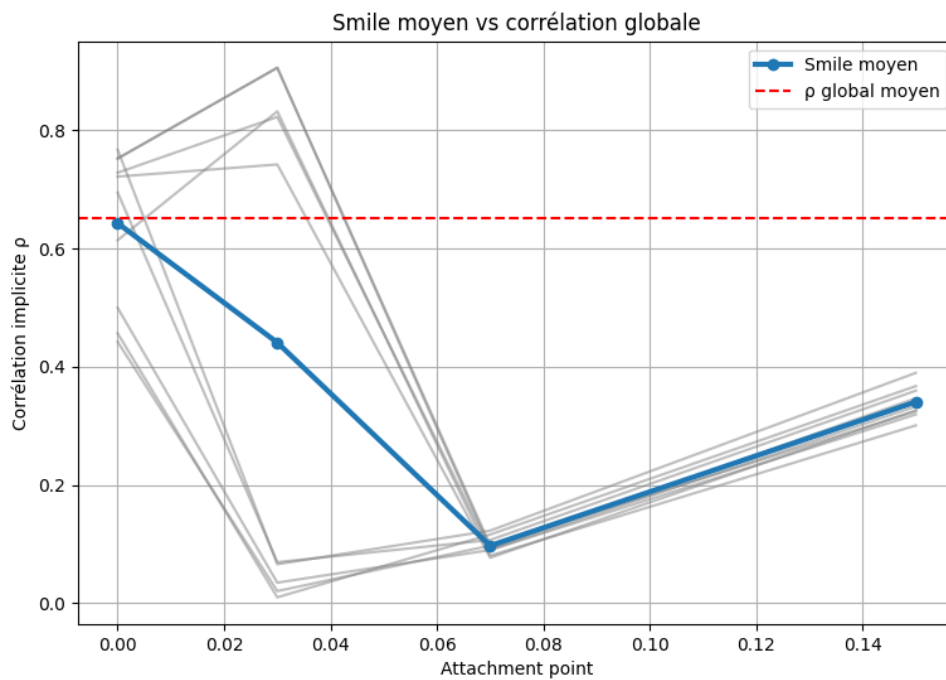


FIGURE 8 – Corrélation implicite par tranche pour la copule gaussienne à un facteur

## 7 Conclusion

## Références

- [1] Delbaen F., Schachermayer W. (1994), A general version of the fundamental theorem of asset pricing.
- [2] Le Page D., Pistre N., *et al.* (2000), Risque de défaut : Une Approche Intensité.
- [3] Duffie D., Gârleanu N. (1999), Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations.
- [4] Ohkrin O., Xu Y. F. (2017), A Comparison Study of Pricing Credit Default Swap Index Tranches with Convex Combination of Copulae.
- [5] Direction Générale du Trésor et de la Politique Economique (2009), The Credit Default Swap (CDS) Market