



---

# MODÉLISATION ET TARIFICATION DE TRANCHES DE CDO SYNTHÉTIQUES

PROJET D'OPTION MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

---

*Auteurs:* Alexandre BRIARD  
Lucas HAYASHI SILVA XAVIER  
Yanis JOUVAIN

*Tuteur:* Mathieu RIBATET

NANTES, 08 DÉCEMBRE 2025



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané . . . . .	2
1.2.1	Espace probabilisé et filtration . . . . .	2
1.2.2	Intérêts composés, numéraire et taux instantanés . . . . .	3
1.2.3	Processus de prix des actifs risqués . . . . .	4
1.2.4	Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre . . . . .	5
1.3	Le modèle de crédit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Produits dérivés de crédit</b>	<b>6</b>
2.1	Le marché du crédit risqué . . . . .	6
2.1.1	Les obligations risquées . . . . .	6
2.1.2	Spread de crédit . . . . .	6
2.1.3	Notations de crédit . . . . .	6
2.2	Credit Default Swap . . . . .	6
2.2.1	Description du produit . . . . .	6
2.2.2	Évaluation de la marge d'un CDS . . . . .	7
2.3	Collateralized Debt Obligation . . . . .	9
2.3.1	Titrisation . . . . .	9
2.3.2	Les produits synthétiques . . . . .	11
2.3.3	Un exemple de CDO synthétique . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modélisation du risque de défaut</b>	<b>12</b>
3.1	Défaut individuel . . . . .	12
3.2	Risques idiosyncratique et systémique . . . . .	12
3.3	Modèles d'intensité . . . . .	12
3.4	Modélisation de la dépendance de défaut . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Valorisation d'une tranche de CDO</b>	<b>12</b>
4.1	Lignes de cashflow . . . . .	12
4.2	Expected Tranche Loss . . . . .	12
4.3	Spread de tranche . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Modèle de tarification</b>	<b>12</b>
5.1	Approche à copule . . . . .	12
5.2	Approche à intensité . . . . .	12
5.3	Monte Carlo . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Application numérique</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

**Table des figures**

1	Schéma de transaction d'un CDS sans défaut . . . . .	7
2	Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut . . . . .	7
3	Mécanisme d'émission d'un CDO . . . . .	10
4	Distribution des tranches et effet " <i>waterfall</i> " d'un CDO . . . . .	10

## Liste des tableaux

*“How do you explain to an innocent citizen of the free world the importance of a credit default swap on a double-A tranche of a subprime-backed collateralized debt obligation ?”*

— Michael Lewis, *The Big Short : Inside the Doomsday Machine*

## 1 Introduction

### 1.1 Motivation

Depuis les années 1990, le développement des marchés de crédit a donné naissance à une classe de produits dérivés complexes destinés à transférer, mutualiser et redistribuer le risque de défaut : les *Collateralized Debt Obligations* (CDO) ou titre de créance collatéralisé en français. Initialement introduits par des institutions financières telles que *Drexel Burnham Lambert* à la fin des années 1980, puis massivement développés par *J.P. Morgan* au cours de la décennie suivante, les CDO avaient pour ambition d'optimiser l'allocation du risque de crédit en permettant la titrisation de portefeuilles d'actifs hétérogènes. Ils offraient aux investisseurs la possibilité de prendre des expositions ajustées au risque grâce à une structure hiérarchisée en tranches (*equity*, *mezzanine* et *senior*), chacune absorbant une fraction distincte des pertes éventuelles.

Les *CDO synthétiques*, reposant non pas sur des obligations physiques mais sur des contrats de *Credit Default Swap* (CDS), ont marqué une étape importante dans cette évolution. Présentés comme plus flexibles, plus liquides et plus rapides à structurer, ils permettaient aux institutions financières d'accroître ou de couvrir leurs expositions sur des portefeuilles de crédit sans détenir directement les actifs sous-jacents. Cette innovation a contribué à l'expansion rapide du marché des produits structurés au cours des années 2000.

Cependant, la crise financière de 2007–2008 a mis en lumière les risques systémiques liés à ces instruments. Leur complexité intrinsèque, la difficulté d'estimer correctement les corrélations de défaut et les limites du modèle de copule gaussienne largement utilisé à l'époque ont conduit à une sous-estimation significative des risques réels associés à certaines tranches, en particulier les tranches *mezzanine* et *senior*. Ces insuffisances de modélisation et de calibration ont joué un rôle non négligeable dans l'amplification de la crise.

Dans ce contexte, une compréhension rigoureuse des mécanismes de valorisation des CDO synthétiques, notamment des modèles de dépendance et des dynamiques de défaut, demeure essentielle. La capacité à tarifier correctement ces instruments est déterminante pour la gestion du risque et la stabilité financière. Le présent rapport s'inscrit dans cette perspective : il vise à étudier, formaliser et comparer plusieurs approches de modélisation du risque de défaut et de tarification des tranches synthétiques, en particulier les modèles à copules et les modèles à intensité.

### 1.2 Cadre probabiliste et hypothèses sur le taux instantané

#### 1.2.1 Espace probabilisé et filtration

Nous nous plaçons dans un cadre continu en temps sur un horizon fini  $[0, T]$ , muni d'un espace probabilisé complet

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}),$$

où la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  satisfait les conditions usuelles :

- Continuité à droite :  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$
- Complétude : Soit  $N$  un ensemble négligeable, alors  $N \subset \mathcal{F}_0$

Tous les processus considérés sont supposés adaptés à  $(\mathcal{F}_t)$  c'est à dire, pour tout processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

### 1.2.2 Intérêts composés, numéraire et taux instantanés

**Cas déterministe** Considérons un taux annuel constant  $r \in \mathbb{R}$ , un capital initial  $N_0 = 1$  et cherchons à calculer le capital au temps  $T$  avec  $n$  compositions par an :

$$N_T^{(n)} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} \quad (1)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} = e^{rT} \quad (2)$$

Donc le capital en capitalisation continue est :

$$N_T = e^{rT} \quad (3)$$

A présent découpons l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  sous-intervalles :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n} \quad (4)$$

Et supposons sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  le taux constant et égal à  $r(t_i)$ . Nous pouvons alors définir le schéma d'Euler explicite tel que :

$$\begin{cases} N_0^{(n)} = 1 \\ N_{t_{i+1}}^{(n)} = N_{t_i}^{(n)} (1 + r(t_i) \Delta t) \end{cases} \quad (5)$$

solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{N}_t = r(t) N_t \quad (6)$$

Sous l'hypothèse d'intégrabilité de  $r$  sur  $[0, T]$ , par le théorème de Cauchy-Lipschitz<sup>1</sup> il existe une unique solution à ce problème que l'on nommera *numéraire* : un actif sans risque  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  vérifiant

$$N_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad (7)$$

Ce numéraire nous offre une mesure de la valeur monétaire au temps  $t$ , pour 1€ placé en banque au temps initial on récupère  $N_t$  au temps  $t$ .

**Cas stochastique** Cette définition s'étend naturellement dans le cas où  $r_t$  suit le processus stochastique de *taux instantané* (ou *taux court*)  $(r_t)_{t \geq 0}$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- **(H1) Adaptation et mesurabilité** :  $r_t$  est  $(\mathcal{F}_t)$ -progressivement mesurable.
- **(H2) Bornes ou conditions d'intégrabilité** :  $\int_0^T |r_s| ds < \infty$  p.s., ce qui garantit que  $B_t > 0$  est bien défini et continu.

1. En posant  $f(t, N) = r(t)N$ ,  $r$  est localement bornée sur  $[0, T]$  donc  $f$  est localement lipschitzienne et continue presque partout par rapport à la deuxième variable ce qui vérifie les hypothèses du théorème.



- **(H3) Modélisation stochastique :**  $r_t$  est généralement supposé être une diffusion de la forme :

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dW_t, \quad (8)$$

où  $(W_t)$  est un Brownien sous  $\mathbb{P}$ , et les coefficients  $\mu, \sigma$  satisfont des conditions de Lipschitz et croissance linéaire assurant l'existence et l'unicité forte de la solution.

Cette fois, nous définissons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} N_0 = 1 \\ dN_t = r_t N_t dt \end{cases} \quad (9)$$

Cette EDS est en réalité une équation différentielle aléatoire puisqu'elle ne comporte pas de terme de diffusion mais ses coefficients sont aléatoires. Nous cherchons ainsi à déterminer le champ mesurable

$$N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad (10)$$

vérifiant, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$N_t(\omega) = 1 + \int_0^t r_s(\omega) N_s(\omega) ds, \quad \text{p.s.} \quad (11)$$

Remarquons que pour  $\omega \in \Omega$  fixé cette égalité est déterministe, l'intégrale est de Lebesgue classique.

Cette fois, en posant  $f(t, x, \omega) = r_t(\omega)x$  nous vérifions que  $f$  est continue et localement lipschitzienne en  $x$  et intégrable en  $t$ , il existe donc une unique solution chemin par chemin à notre équation différentielle par le théorème de Carathéodory<sup>2</sup> pour les EDO. En séparant les variables et en résolvant pour tout  $\omega \in \Omega$  vérifiant **(H2)** nous obtenons la solution suivante :

$$N_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad \text{p.s.} \quad (12)$$

### 1.2.3 Processus de prix des actifs risqués

**Définition 1.1** (Martingale locale). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. Un processus adapté càdlàg<sup>3</sup>  $(M_t)_{t \geq 0}$  est appelé *martingale locale* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\tau_n \rightarrow +\infty \quad \text{p.s.},$$

et que, pour tout  $n$ , le processus arrêté

$$(M_{\min(t, \tau_n)})_{t \geq 0}$$

est une martingale (intégrable) par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ .

2. Dans le cas stochastique  $(r_t)_{t \geq 0}$  suit un processus non continu de manière générale mais mesurable donc le théorème de Carathéodory s'applique mais pas Cauchy-Lipschitz.

3. Un processus càdlàg est un processus dont les trajectoires sont presque sûrement continues à droite et dont des limites à gauche existent partout.

Soit  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  un actif risqué. Sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , sa dynamique est supposée être une *semi-martingale*, c'est-à-dire un processus pouvant être décomposé en une *locale martingale* et un processus adapté càdlàg à variations locales finies, typiquement un processus de diffusion :

$$dS_t = S_t(b_t dt + \sigma_t dW_t), \quad (13)$$

où  $(b_t)$  est la dérive ou "drift" (prime de risque incluse) et  $(\sigma_t)$  la volatilité.

On note les prix actualisés par le numéraire :

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}. \quad (14)$$

#### 1.2.4 Hypothèse d'absence d'arbitrage et existence de la mesure risque-neutre

**Définition 1.2** (Mesures équivalentes). Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur l'espace mesurable  $(X, \mathcal{F})$  et notons

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) = 0\}, \quad \mathcal{N}_\nu := \{A \in \mathcal{F} \mid \nu(A) = 0\}$$

les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont dites *équivalentes* si  $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$  et nous noterons  $\mu \sim \nu$ .

Selon le théorème fondamental de l'évaluation des actifs [1], l'hypothèse *Absence of free lunch with vanishing risk*<sup>4</sup> (NFLVR) est équivalente à l'existence d'une probabilité  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$  (appelée *mesure équivalente martingale* ou *mesure risque-neutre*) telle que les prix actualisés soient des *martingales locales* sous  $\mathbb{P}^*$  :

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{N_t} \quad \text{est une } \mathbb{P}^*\text{-locale martingale.}$$

Sous cette mesure, la dynamique de  $S_t$  s'écrit :

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma_t dW_t^*), \quad (15)$$

où  $(W_t^*)$  est un processus de Wiener sous  $\mathbb{P}^*$ .

### 1.3 Le modèle de crédit

Nous cherchons à présent à connaître le prix juste  $\Pi_X(t, T)$  (i.e. sans prime de risque) à payer en  $t$  pour acheter un actif ayant une revendication ou *payoff*  $X \in L^1(\mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$  en  $T$ .

Nous commençons donc par actualiser la valeur de  $X$  en  $T$  par le numéraire  $B_T$  (car 1€ demain vaut moins que 1€ aujourd'hui) et nous estimons cette quantité inconnue en prenant son espérance sous un univers sans prime de risque conditionnellement à l'information disponible en  $t$  c'est à dire  $\mathcal{F}_t$ . En normalisant par le numéraire à l'instant présent nous obtenons :

$$\Pi_X(t, T) = N_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{X}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (16)$$

---

4. Cette hypothèse est complexe à définir mathématiquement et ne nous apporte rien d'intéressant, en revanche c'est celle-ci qui justifie l'existence de la mesure équivalente risque-neutre. Nous pouvons l'interpréter comme une absence de stratégie ayant un gain sans risque réel ou investissement initial.

Cette formule suit directement de la propriété de martingale de  $(\tilde{S}_t)$ .

A partir de cette formule il est possible de définir l'obligation zéro-coupon (i.e. à prix juste) sans risque, il s'agit d'un actif ayant une revendication de 1€ au temps  $T$  dont la valeur est donnée par

$$B(t, T) = N_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{1}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (17)$$

Il est alors possible de rentrer le terme  $N_t$  dans l'espérance puisque celui-ci est constant conditionnellement à l'information  $\mathcal{F}_t$  et en remplaçant par l'expression du numéraire nous obtenons :

$$B(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (18)$$

Si le risque de contrepartie de l'émetteur du zéro-coupon n'est pas nul, l'évaluation du zéro-coupon doit tenir compte de la possibilité du défaut de celui-ci : deux nouveaux risques entrent en jeu :

- l'instant de défaut,
- la perte en cas de défaut (*Loss Given Default*).

La perte en cas de défaut s'exprime comme un taux de recouvrement  $R$  éventuellement aléatoire et d'une hypothèse de recouvrement. Nous notons  $D(t, T)$  la valeur en  $t$  d'un zéro-coupon risqué de maturité  $T$  et  $\tau$  l'instant de défaut de l'émetteur de ce titre. Il existe plusieurs hypothèses de recouvrement en théorie des mathématiques financières mais nous utiliserons la plus courante dite *recovery of par value* et qui consiste en le recouvrement à l'instant de défaut d'une fraction  $R$  du nominal du titre

$$D(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\{t < \tau < T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (19)$$

## 2 Produits dérivés de crédit

### 2.1 Le marché du crédit risqué

#### 2.1.1 Les obligations risquées

#### 2.1.2 Spread de crédit

#### 2.1.3 Notations de crédit

### 2.2 Credit Default Swap

#### 2.2.1 Description du produit

Un *Credit Default Swap* (CDS) ou plus simplement *swap* est un produit dérivé du crédit et peut être vu comme l'élément fondamental (ou sous-jacent) des produits plus exotiques comme les CDO synthétiques que nous verrons plus tard.

Sa fonction principale est de transférer le risque de crédit de référence d'une entreprise  $C$  (*entité de référence*) entre deux contreparties  $A$  et  $B$ . Dans le contrat standard, l'une des parties en question, disons  $A$ , achète une protection contre le risque de perte en cas de défaut de l'entité de référence  $C$ . Ce défaut est déclenché par un événement de crédit formel spécifié dans le contrat. Cet événement peut être la faillite de l'entreprise, un défaut de paiement ou la restructuration de sa dette.

La protection est valable jusqu'à la maturité du swap. En échange de cette protection, l'acheteur A verse périodiquement (en général, tous les 3 mois) au vendeur B une prime et ce jusqu'au défaut de C ou jusqu'à maturité du swap. La jambe du swap correspondante est appelée *premium leg*.

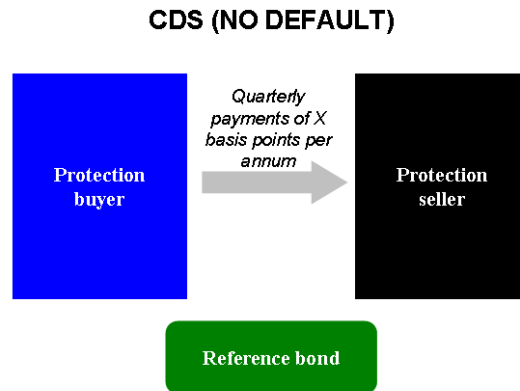


FIGURE 1 – Schéma de transaction d'un CDS sans défaut

Si le défaut intervient avant la maturité du swap, le vendeur de protection effectue un paiement à l'acheteur de protection. Ce paiement équivaut à la différence entre le nominal de la dette couverte par le swap et le taux de recouvrement observé à l'instant du défaut. Cette fois la jambe du swap correspondante est appelée *protection leg*.

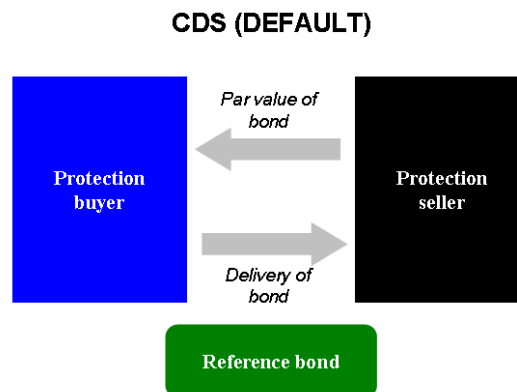


FIGURE 2 – Schéma de transaction d'un CDS dans le cas d'un défaut

### 2.2.2 Évaluation de la marge d'un CDS

Considérons un CDS de maturité  $T > 0$  sur une entité de référence, portant sur un notionnel  $N > 0$ . On note  $(T_k)_{k=1,\dots,m}$  les dates de paiement de la jambe de prime (généralement trimestrielles), avec  $0 < T_1 < \dots < T_m = T$ . La fraction d'année associée au coupon  $k$  selon la

convention du marché est notée  $\delta_k = T_k - T_{k-1}$ . Considérons  $\tau$  le temps de défaut de l'entité de référence, défini comme un temps d'arrêt, nous y associons un taux de recouvrement noté  $R \in [0, 1]$ .

**Jambe fixe (premium leg).** À chaque date de coupon  $T_k$ , l'acheteur de protection paie un montant proportionnel au *spread* (ou marge)  $s$  (exprimé en taux annuel), au notionnel et à la fraction d'année. Ce paiement n'a lieu que si l'entité de référence n'a pas fait défaut avant  $T_k$ , c'est-à-dire si  $\tau > T_k$ . La valeur présente sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  de la jambe fixe est donc :

$$\text{JF}(s) = s N \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}} \right]. \quad (20)$$

**Jambe variable (protection leg).** En cas de défaut à un temps aléatoire  $\tau \leq T$ , le vendeur de protection verse la *loss given default* :

$$\text{LGD} = N(1 - R). \quad (21)$$

La valeur présente de la jambe de protection ou jambe variable est alors

$$\text{JV} = N(1 - R) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_\tau} \right]. \quad (22)$$

**Détermination du spread.** Un CDS s'échange à valeur nulle à l'initiation. Le spread  $s^*$  est donc défini par l'égalité :

$$\text{JF}(s^*) = \text{JV}. \quad (23)$$

On obtient :

$$s^* = (1 - R) \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}}{B_\tau} \right]}{\sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T_k\}}}{B_{T_k}} \right]}.$$

**Cas particulier : modèle à intensité déterministe.** Dans un cadre standard où le taux sans risque est constant :  $r_t = r$  et l'intensité de défaut est une fonction déterministe :  $\lambda : t \mapsto \lambda(t)$  la probabilité de survie est :

$$S(t) = \exp \left( - \int_0^t \lambda(u) du \right), \quad (24)$$

et la densité de défaut sous la mesure risque-neutre est  $\lambda(t) S(t)$ .

Alors la jambe variable est donnée par :

$$\text{JV} = N(1 - R) \int_0^T e^{-rt} \lambda(t) S(t) dt, \quad (25)$$

et la jambe fixe par :

$$\text{JF}(s) = s N \sum_{k=1}^m \delta_k e^{-rT_k} S(T_k). \quad (26)$$

Le spread s'écrit :

$$s^* = (1 - R) \frac{\int_0^T e^{-rt} \lambda(t) S(t) dt}{\sum_{k=1}^m \delta_k e^{-rT_k} S(T_k)}. \quad (27)$$

Ce spread constitue la prime d'assurance annuelle qui égalise la valeur actualisée des paiements fixes et celle du paiement contingent versé en cas de défaut de l'entité sous-jacente.

## 2.3 Collateralized Debt Obligation

Les *Collateralized Debt Obligations* ou CDO sont des produits obligataires adossés à des dettes, résultant d'un mécanisme relativement complexe d'ingénierie financière appelé *titrisation* (*securitization*). A partir d'un panier de titres de dette (de 50 à 10000 créances), l'émetteur synthétise des actifs obligataires. Les CDO se distinguent selon la nature de la dette sous-jacente : s'il s'agit de produits obligataires, on parle de "*Collateralized Bond Obligations*" ou CBO. Dans le cas où le panier est constitué uniquement de titres de prêts, on parle de "*Collateralized Loan Obligations*" ou CLO. Bien entendu, dans le cas général, le panier est mixte. Depuis sa création dans le milieu des années 1990, le marché des CDO n'a cessé de se développer. En 2000, il dépassait les 100 Milliards de dollars d'émission.

Après la crise des *subprimes* de 2008 les CDO ont été pointés du doigt pour leur manque de transparence et difficultés d'évaluation des risques. Suite à cela le marché a chuté considérablement cependant aujourd'hui ce marché représente toujours 23,4 milliards d'euros et les projections actuelles lui prédisent près de 69 milliards d'euros en 2033.

Nous présentons dans cette partie les enjeux du processus de titrisation ainsi que ses mécanismes, puis les techniques récentes liées à la génération synthétique de tranches utilisées en trading de corrélation.

### 2.3.1 Titrisation

La titrisation est une technique financière qui consiste à transférer à des investisseurs des actifs financiers tels que des créances (par exemple des factures émises non soldées, ou des prêts en cours), en les transformant, par le passage à travers une structure *ad hoc* — souvent un *Special Purpose Vehicle*, une entité spécialement dédiée à absorber les risques de ces produits — en titres financiers émis sur le marché des capitaux.

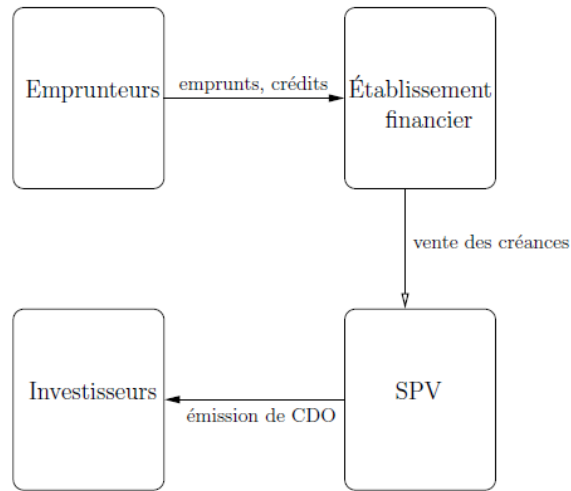


FIGURE 3 – Mécanisme d'émission d'un CDO

L'intérêt est multiple, premièrement il permet à l'émetteur de crédit de transférer ces actifs et donc ces risques à une autre entité, il n'a donc pas besoin d'accumuler des liquidités pour couvrir les risques de défaut. Deuxièmement ces produits peuvent, comme nous le verrons ensuite, être les sous-jacents de produits dérivés. Enfin, le plus grand intérêt est le découpage des CDO en *tranches* de différents niveaux de risques à partir de sous-jacents de notations à priori quelconques. Elles se décomposent sous cette forme :

- la tranche *junior* ou *equity* supporte les premières pertes sur l'ensemble de créances. Il s'agit donc d'un produit très risqué, payant un spread très élevé à l'investisseur. Il s'agit d'un produit purement spéculatif ;
- la tranche intermédiaire, dite *mezzanine* supporte les pertes au delà de la tranche equity, c'est un produit moyennement risqué, offrant un spread intéressant ;
- la tranche *senior* supporte les pertes restantes, si elles ont lieu. Elle est la moins soumise au risque de crédit, et offre donc un coupon faible.

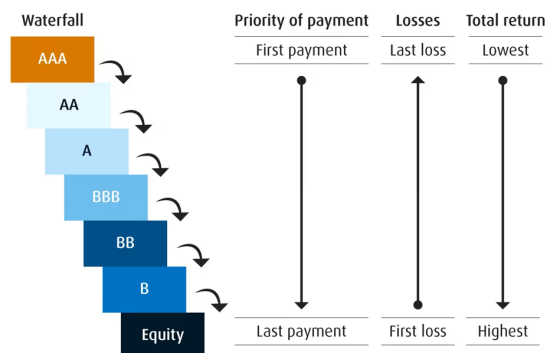


FIGURE 4 – Distribution des tranches et effet "waterfall" d'un CDO

### 2.3.2 Les produits synthétiques

Devant le développement impressionnant du marché des CDO et la demande de produits de corrélation de plus en plus forte de la part des investisseurs, des techniques d'ingénierie financière ont donné naissance au concept des CDO synthétiques.

De l'utilisation originelle dans les stratégies de gestion de fonds propres, les CDO deviennent peu à peu des produits d'investissement spéculatifs.

Le principe de la titrisation synthétique est de constituer des produits tranchés à partir, non plus d'un ensemble de crédits ou créances, mais d'un ensemble de CDS. Ceci revient à dire que l'organisme émetteur crée une exposition au risque de crédit et de corrélation en prenant des positions sur un ensemble de CDS.

L'intérêt mais également le plus grand risque de ces produits est qu'il n'est plus adossé à un crédit en tant que tel mais véritablement à un CDS, swaps qui peuvent être émis en quantités illimitées et souvent non rapportée sur un même crédit — en 2006 selon le journaliste Gregory Zuckerman il y avait 5 fois plus de CDO synthétiques que classiques adossés à des prêts *subprime* sur le marché. De plus, là où l'investisseur d'un *cash* CDO classique engage les fonds *ex ante* c'est à dire avant le défaut éventuel en achetant la tranche, l'investisseur d'un CDO synthétique engage les fonds *ex post* et donc uniquement en cas de défaut. Ainsi, sans vérification de sa solvabilité, celui-ci peut s'exposer à un remboursement très important sur un grand nombre de swap pour lesquels il ne s'attendait pas à ce qu'il y ait défaut (typiquement les tranches *senior* d'un CDO synthétique à priori sans risque).

En effet, dans le cas classique les sous-jacents constituant un CDO sont décorréllés géographiquement, typiquement les crédits et les CDS associés à ceux-ci proviennent de zones géographiques diverses. La probabilité que tous ces swaps s'activent au sein du CDO est donc infime en théorie et donc les tranches supérieures ne devraient jamais être impactées même pour des crédits de très mauvaise qualité.



### **2.3.3 Un exemple de CDO synthétique**

## **3 Modélisation du risque de défaut**

### **3.1 Défaut individuel**

### **3.2 Risques idiosyncratique et systémique**

### **3.3 Modèles d'intensité**

### **3.4 Modélisation de la dépendance de défaut**

## **4 Valorisation d'une tranche de CDO**

### **4.1 Lignes de cashflow**

### **4.2 Expected Tranche Loss**

### **4.3 Spread de tranche**

## **5 Modèle de tarification**

### **5.1 Approche à copule**

### **5.2 Approche à intensité**

### **5.3 Monte Carlo**

## **6 Application numérique**

## **7 Conclusion**

## Références

- [1] Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing.  
*Math. Annal.*, 123 (1994), 463-520.