

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE



Mémoire d'Actuariat - Promotion 2009

Evaluation de tranches de CDO sur un portefeuille de LCDS (Loan Only Credit Default Swap)

Bassem El-Hachem et Charles-Marie Delpuech

MOTS-CLÉS : *crédit, LCDS, prépaiement, prêt garanti, Loan CDO*

KEYWORDS: *credit, LCDS, prepayment, leveraged loan, Loan CDO*

ENCADREMENT : Milan Stupar (AXA Investment Managers)

CORRESPONDANT E.N.S.A.E. : Jean-François Chassagneux

MEMOIRE NON CONFIDENTIEL

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	5
1 Présentation des LCDS	7
1.1 Qu'est-ce qu'un LCDS ?	7
1.2 L'émergence du marché des LCDS	8
1.2.1 Le marché des Leveraged Loan	8
1.2.2 Pourquoi introduire les LCDS ?	10
1.2.3 Le développement des LCDS	11
1.2.4 La crise et le marché des LCDS	12
2 Evaluation des LCDS	15
2.1 Méthode de calcul des LCDS	15
2.1.1 Estimation de la jambe fixe	16
2.1.2 Estimation de la jambe de protection	17
2.1.3 Calcul du spread	18
2.2 Modélisation des temps d'annulation et de défaut du LCDS	18
2.2.1 Utilisation d'un modèle à forme réduite :	19
2.2.2 Hypothèse d'indépendance entre les temps de défaut et les temps d'annulation	19
2.3 Evaluation du LCDS à partir des prix des CDS	22
2.3.1 Calibration de la courbe des intensités d'annulation constante par morceaux.	23
2.3.2 Etude de l'impact de la terme structure des CDS sur le LCDS	24
2.3.3 Etude complémentaire de la sensibilité des spreads de LCDS aux taux de défaut et d'annulation	26
2.3.4 Résultats de la calibration de la courbe des intensités d'annulation	27
2.4 Evaluation du LCDS à partir d'un taux d'annulation empirique	31
2.4.1 Méthode statistique	31
2.4.2 Méthode des notations	32
2.4.3 Résultats après calibration de la courbe des intensités de défaut	33
3 Introduction au marché des Loan-CDO	35
3.1 Historique et profil des investisseurs	35
3.2 Les mécanismes derrière les tranches LCDX	36
3.3 Les caractéristiques des émissions de CDO	38

3.3.1	L'effet de levier	38
3.3.2	Les CDO de bilan et leur extension pour l'assurance-vie	39
3.3.3	Une opportunité d'arbitrage sur les spreads	40
4	Evaluation d'une tranche de LCDX	41
4.1	Description du portefeuille et de la tranche	41
4.1.1	Evaluation d'une tranche	43
4.2	Le modèle gaussien à un facteur	44
4.3	Les méthodes d'évaluation des VAN d'une tranche	46
4.3.1	La méthode récursive	46
4.3.2	La méthode de Monte-Carlo	48
4.4	La corrélation implicite ou Base Correlation	49
4.4.1	L'influence de la corrélation sur les spreads	49
4.4.2	La calibration de la Base Correlation	50
4.5	Résultats de l'évaluation des tranches de Loan CDO	51
4.5.1	Etude de la sensibilité à la corrélation	51
4.5.2	Etude du risque de prépaiement	55
4.5.3	Impact du prépaiement, comparaison à un portefeuille de CDS	55
5	Les limites du modèle gaussien	61
5.1	Critique du modèle gaussien à un facteur	61
5.1.1	Les lacunes de la copule gaussienne	61
5.1.2	Les autres copules candidates	61
6	Une extension : le modèle RFL	65
6.1	Le modèle Random Factor Loadings (RFL)	65
6.2	Forme de la corrélation stochastique	66
6.3	Résultats numériques	69
6.3.1	L'implicitation de la Base Correlation	70
6.3.2	Sensibilités des spreads par rapport aux paramètres de corrélation	72
6.4	Impact du prépaiement	74
Conclusion		78
Bibliographie		80
Annexes		83
A	Modèles à forme réduite	83
A.1	Modèle à intensité déterministe	83
A.2	Modèle à intensité stochastique	84
B	Génération des matrices de transition	84
B.1	Attribution de la notation	84
B.2	Calcul de la matrice de transition	85
C	Introduction à la théorie des copules	87
D	Démonstration du lemme 1	90
E	Test de Kolmogorov-Smirnov	90
F	Pricer de LCDS sous Excel VBA	91
G	Pricer Loan-CDO et son interface Excel	92

Remerciements

Nous tenons à remercier notre encadrant **Milan Stupar** qui aura suivi notre travail tout au long de l'année au sein de Axa Investment Managers. Ses conseils et ses critiques tant au niveau théorique que pratique ainsi que sa disponibilité ont sans doute été nos meilleurs atouts pour mener à bien notre étude.

Nos remerciements s'adressent également à **Ali El-Ghorfi** l'analyste junior de l'équipe dont l'expertise technique nous a été très précieuse.

Sans oublier **Jean-François Chassagneux** notre correspondant ENSAE qui nous aura permis de finaliser au mieux notre mémoire.

Introduction

Au cours des dernières années, les possibilités et les options de financement se sont élargies de façon spectaculaire pour les entreprises européennes. Cette évolution s'est accompagnée de l'apparition de nouveaux montages financiers complexes.

Quand une entreprise est désireuse de lever des fonds, elle peut essentiellement, soit choisir d'emprunter de l'argent (option de la dette), soit émettre des actions (option des capitaux propres), ou encore opter pour un mélange des deux.

Quand une entreprise cherche à lever des fonds par la dette, toute opération d'envergure en Europe implique généralement plusieurs strates de dette où sont représentés tout ou partie des éléments suivants :

- de la dette senior (créances prioritaires) traditionnellement détenue par les banques et assortie d'une sûreté de premier rang sur les actifs de l'entreprise
- du crédit mezzanine (la deuxième strate de dette, d'un rang immédiatement inférieur à la dette senior)
- de la dette High Yield (à haut rendement), uniquement utilisée pour les grosses acquisitions et qui prend généralement la forme d'obligations émises par l'entreprise à destination d'investisseurs ne bénéficiant d'aucune sûreté sur ces actifs.

Dans ce contexte, le marché de la dette senior, au premier rang dans la structure du capital donc mieux sécurisée que la dette obligataire, s'est alors fortement développé au travers entre autres des leveraged loan (crédits syndiqués), crédits de taille importante accordés par plusieurs banques à une entreprise ou un véhicule financier. Ces prêts, issus d'entreprises *non investment grade* donc fortement endettées mais saines, sont très appréciés pour leur rendement.

Avec l'arrivée de Bâle II, qui énonce de nouvelles bonnes pratiques bancaires, les prêteurs souhaitent de plus en plus alléger le risque pesant sur leur portefeuille de prêts et vont rapidement chercher à faire sortir de leur bilan les actifs à haut risque tels que les leveraged loan par le biais des marchés financiers en transférant leur risque au travers par exemple de méthodes de titrisation ou d'instruments dérivés de crédit.

C'est ainsi que se sont récemment développés de nouveaux produits dérivés de crédit capables de fournir une protection contre le défaut d'un emprunteur sur les marchés des prêts syndiqués. Ce produit, dont la structure est fortement inspirée du produit standard des marchés de crédit que sont les Credit Default Swaps (ou CDS), s'intitule le Loan-Only Credit Default

Swap ou LCDS. Créé courant 2006, il constitue un nouveau marché en forte croissance, qui a récemment été primé par la naissance d'un indice côté LCDX, référençant la performance d'un portefeuille de LCDS.

Lors d'un refinancement, les entreprises ont la possibilité de prépayer leurs prêts ce qui aura pour conséquence d'annuler le LCDS portant sur cette entreprise. Ce risque de refinancement ou de prépaiement est au cœur de notre problématique. En effet, l'objet de ce mémoire consistant à proposer et développer une méthode d'évaluation des portefeuilles de LCDS, une prise en compte de ce facteur est primordiale

Notre démarche a été dans un premier temps d'étudier une méthode robuste d'évaluation des LCDS. Il s'agit principalement d'introduire le facteur de prépaiement dans les modèles théoriques de tarification de CDS.

Puis une fois un modèle cohérent retenu, nous avons opté pour un modèle gaussien à un facteur afin d'évaluer des portefeuilles de LCDS. Après avoir testé la cohérence du modèle ainsi que ses limites, nous avons décidé d'introduire le modèle RFL (Random Factor Loadings) capable d'apporter des solutions aux premiers problèmes rencontrés.

Chapitre 1

Présentation des LCDS

1.1 Qu'est-ce qu'un LCDS ?

Le Loan Only Credit Default Swap (LCDS) est un nouveau type de produit dérivé qui a émergé très récemment. Les LCDS sont proches des traditionnels Credit Default Swap (CDS) à la différence que les CDS ne traitent pas sur le marché des leveraged loan, nouvelle classe d'actifs qui est devenue l'une des premières sources de financement pour les compagnies notées *sub-investment grade*. C'est la nature même du sous-jacent qui caractérise alors le LCDS.

Le LCDS est un contrat financier de protection, entre acheteurs et vendeurs. L'acheteur de protection verse une prime ex ante annuelle calculée sur le montant notionnel de l'actif (souvent dit de référence ou sous-jacent), au vendeur de protection qui promet de compenser ex-post les pertes de l'actif de référence en cas d'événement de crédit précisé dans le contrat. C'est donc, sur le plan des flux financiers, comme un contrat d'assurance.

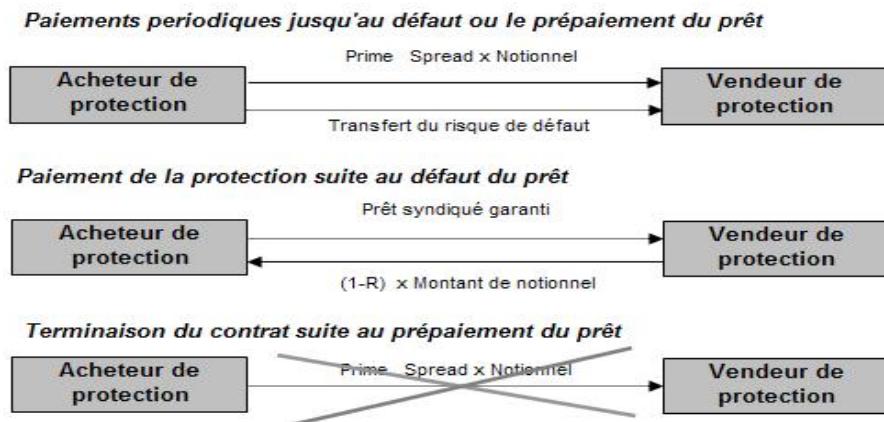


Fig. 1.1 – Flux relatifs à un contrat LCDS

Les cocontractants doivent définir de quelle manière le vendeur de protection peut effectuer le paiement contingent. Le vendeur peut souhaiter faire une compensation par espèces (cash settlement) ou par règlement physique (physical delivery). Dans le premier cas, le paiement contingent est égal à la différence entre le montant notionnel de l'actif et son prix de marché,

dans le deuxième, le vendeur de protection paie le montant notionnel de l'actif et reçoit l'actif en contrepartie.

En retour de l'offre de protection, l'acheteur promet de payer au vendeur une prime fixe à fréquence de temps régulière jusqu'à la date de terminaison du LCDS. Cette prime est calculée en point de base (pb) du montant notionnel.

Le prêt sur lequel porte le LCDS pouvant être prépayé à tout moment, le contrat a la possibilité d'être annulé avant son échéance.

1.2 L'émergence du marché des LCDS

Pour financer leur dette, les compagnies peuvent émettre des prêts ou des obligations, auxquels est associé un niveau de séiorité. Lors d'un événement de crédit, le remboursement des actifs se fait selon un schéma gradué : les engagements qui ont la plus grande séiorité sont remboursés en premier. De plus, ces actifs peuvent être garantis ou non garantis. Si l'emprunteur " colatérise " son prêt avec certains actifs le prêt sera dit garanti. Ces deux notions permettent de définir la priorité d'un engagement. De manière usuelle, les obligations et les prêts émis par des compagnies *investment grade* aussi bien que les obligations émises par des compagnies *sub-investment grade* sont seniors et non-garantis, alors que les prêts émis par les compagnies *sub-investment grade* sont seniors et garantis. Ces derniers types de prêts comme nous l'avons vu sont appelés leveraged loan ou encore prêts syndiqués garantis.

Emprunteur	"Investment Grade"	"Sub-Investment Grade"
Obligations	senior et non garanties	senior et non garanties (obligations "High Yield")
Prêts	senior et non garantis	senior et garantis (Leveraged Loan)

FIG. 1.2 – Priorités des obligations et des prêts par type d'émetteurs

Les CDS sont principalement utilisés sur le marché des obligations *senior* et non garanties, et ne s'accordent pas réellement avec le caractère garanti des leveraged loan. Par conséquence, pratiquement aucun produit dérivé n'était disponible sur ce type d'actifs.

Or sachant que cet actif est la première source de financement des compagnies *sub-investment grade* et si l'on regarde l'évolution de ce marché, nous comprenons mieux l'importance de créer un produit dérivé dédié aux leveraged loan .

1.2.1 Le marché des Leveraged Loan

Pour mieux comprendre l'introduction des LCDS, nous présentons les caractéristiques du marché des leveraged loan.

Depuis 2000, le marché des leveraged loan s'est considérablement développé en Europe. Il est passé de 126 Milliards d'euros à plus de 530 Milliards d'euros en juin 2006. Si ce marché est encore d'une faible taille comparé au marché US - estimé à plus de 1400 Milliards de dollars, il est de loin plus important que le marché de la dette obligataire *High Yield* (approximativement 80 Milliards d'euros). Nous rappelons que les leveraged loan et les obligations *High Yield* font partie de ce qu'on appelle respectivement la dette senior et la dette *High Yield* portant sur des compagnies *sub-investment grade* c'est à dire notées BB+ ou moins.

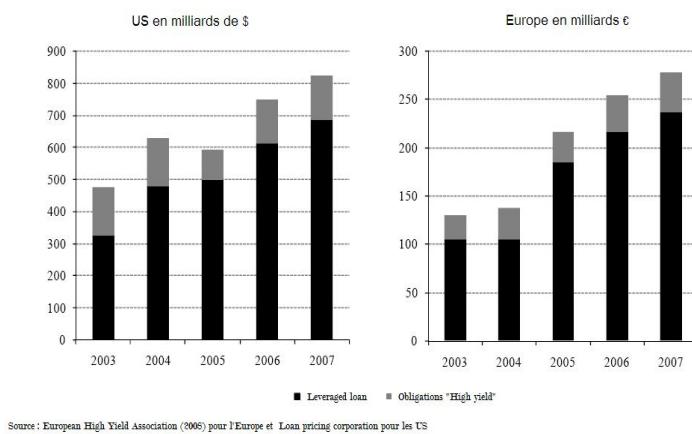


FIG. 1.3 – Evolution du marché de la dette

Pourquoi ce marché se développe-t-il autant ?

Nous avons tout d'abord vu que de par leur place dans la structure du capital de l'emprunteur, les leveraged loans présentaient une séiorité élevée (supérieure aux obligations). Ils offrent alors un droit de créance prioritaire sur les actifs de l'emprunteur. De plus, la documentation initiale - standardisée par la Loan Market Association et accompagnée de lois sur la validité juridique du prêt - prévoit généralement des sûretés ainsi qu'un certain nombre de covenants (limitation des possibilités d'acquisitions, clauses pari passu¹ etc...) qui protègent le prêteur. Ces différentes clauses contractuelles contribuent à ce que les leveraged loans présentent un taux de défaut inférieur à celui des obligations High Yield (en moyenne 4,21% contre 5,87% sur 1999-2006) et un taux de recouvrement en cas de défaut supérieur (80% contre 23% pour les obligations en juin 2006).

Les leveraged loans présentent également une faible volatilité comparée aux obligations *High Yield*. Cette faible volatilité est liée à la structuration protectrice pour les prêteurs et à l'option qu'a l'emprunteur de prépayer à tout moment au pair son emprunt pour bénéficier d'éventuelles meilleures conditions.

¹Le pari passu est une clause qui oblige l'entreprise à faire bénéficier le prêteur de toutes les garanties supplémentaires qu'elle sera amenée à donner lors de crédits futurs de même rang

Prépaiement du leveraged loan

Nous avons mentionné la possibilité pour l'emprunteur de prépayer son prêt à tout moment ce qui réduit la vie du prêt qui est généralement comprise entre 5 et 10 ans. Le prépaiement a un caractère plutôt négatif pour les prêteurs. En effet, les emprunteurs auront tendance à prépayer quand leurs coûts de refinancement vont diminuer. Ceci peut se produire quand la compagnie passe en *investment grade* ou quand les taux d'intérêts baissent. Ce qui signifie que les prêteurs supportent les risques baissiers que peuvent être la détérioration des qualités de remboursement du prêteur ou encore l'augmentation des taux d'intérêt.

Au niveau du LCDS, nous pouvons intuitivement présenter ce que cela va impliquer en terme d'évaluation. Pour ce faire, supposons qu'un investisseur puisse vendre une protection sur la même entité de référence en prenant au choix un LCDS annulable ou non.

- Si la qualité de crédit de l'entité s'améliore, le spread de LCDS diminue et les vendeurs de protection sur les deux contrats sont gagnants. Cependant plus le spread diminue et plus la probabilité de refinancement de l'entreprise augmente. Le détenteur du contrat annulable demandera alors un spread plus grand pour prendre en compte le risque de prépaiement.
- Dans le cas où la qualité de crédit se détériore, le spread du LCDS augmente et les deux investisseurs sont perdants. Cependant, la probabilité de refinancement bien que très faible rend le contrat annulable plus avantageux, le spread sera moins élevé.

Les effets du risque de prépaiement semblent alors dépendre fortement de la situation de l'entreprise.

Nous verrons plus précisément dans la prochaine partie comment ce facteur de prépaiement primordial dans le fonctionnement du LCDS, aura une influence sur la durée de vie du contrat.

Niveau historique des taux de recouvrement

Pour compenser le risque élevé du marché de la dette *sub-investment grade*, les emprunteurs doivent présenter à la fois des taux d'intérêts élevés et une structure du prêt intéressante pour pouvoir attirer la demande des investisseurs. La forte priorité des leveraged loan et les covenants imposés à l'emprunteur limitent de manière efficace l'exposition au risque de crédit. On observe alors historiquement des taux de recouvrement bien plus élevés pour les leveraged loan que pour les autres instruments de dette. Entre janvier 1998 et Septembre 2006, sur le marché américain des leveraged loan, les prêteurs ont recouvert en moyenne 78% du montant notionnel. Sur cette même période ce taux était de 42% pour les obligations High Yield.

Par la suite, nous prendrons un taux de recouvrement de 70% pour évaluer les LCDS.

1.2.2 Pourquoi introduire les LCDS ?

Les acheteurs naturels de protection contre le risque de défaut des prêts sont directement les banques prêteuses. Celles-ci sont fortement désireuses de diminuer leur exposition au risque pour des questions comptables, particulièrement dans le contexte actuel de mise en place des nouvelles normes Bâle II. Dans ce cadre réglementaire, on exige des banques un minimum de capitaux propres pour faire face à l'exposition au risque de crédit générée par des

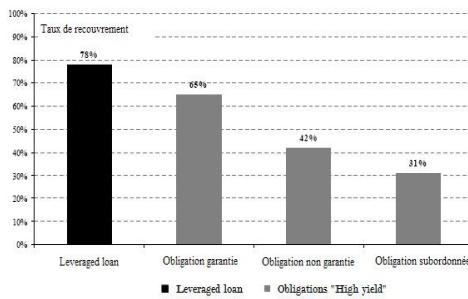


FIG. 1.4 – Taux de recouvrement en fonction des types d'instrument

instruments du type leveraged loan. Cette quantité de capitaux propres exigées dépend du niveau de risque de l'instrument. Le niveau de risque des leveraged loan est relativement élevé ce qui requiert de la part des banques de bloquer une grosse partie de leurs capitaux propres. Avec des dérivés de crédit comme le LCDS, les banques peuvent protéger leurs positions et ainsi diminuer leur exposition au risque, tout en conservant leurs prêts.

Les LCDS permettent aussi aux investisseurs de traiter sur le marché des leveraged loan.

1.2.3 Le développement des LCDS

Depuis son introduction en 2006, le marché des LCDS a fortement augmenté.

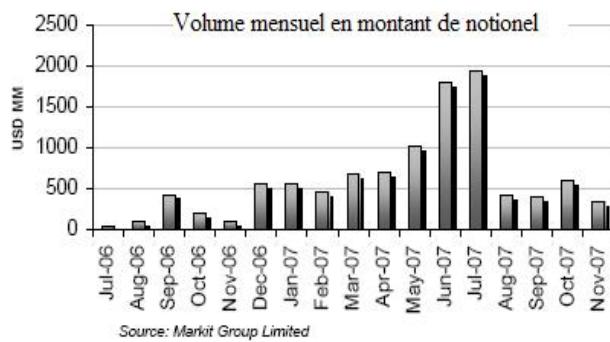


FIG. 1.5 – Evolution du volume traité sur le marché du LCDS

Une étude de Markit [10] sur l'année 2007 nous permet de caractériser le marché. L'étude porte sur 1 400 LCDS et nous fournit des informations sur les volumes traités, la taille et la maturité des contrats.

- De janvier à novembre 2007 le volume de notional traité sur les LCDS s'élève à 9 milliards de dollars contre 1.5 milliards de dollars lors du second semestre 2006.
- A partir des notations sur les prêts fournies par Standard & Poor's, l'étude montre que la majorité des émetteurs est notée entre B et BB.

- Les LCDS présentent la plus forte liquidité sur la maturité 5 ans. Les données indiquent que le volume traité sur les LCDS 5 ans est 5 fois supérieur au total du volume traité sur toutes les autres maturités.

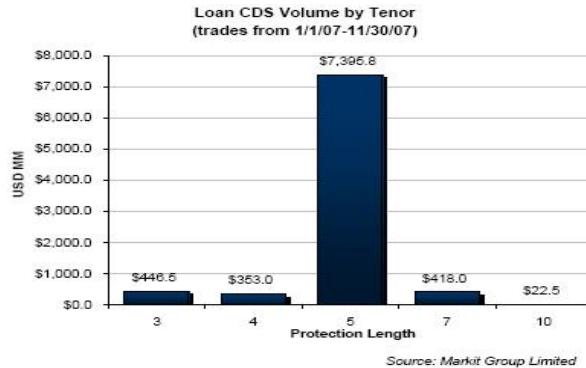


FIG. 1.6 – Marché du LCDS en fonction de la maturité

- D'autre part, en ce qui concerne les spreads, nous pouvons voir les volumes traités pour différentes catégories de spread. Il apparaît clairement que la majorité des LCDS traite sous (100 – 149) bps :

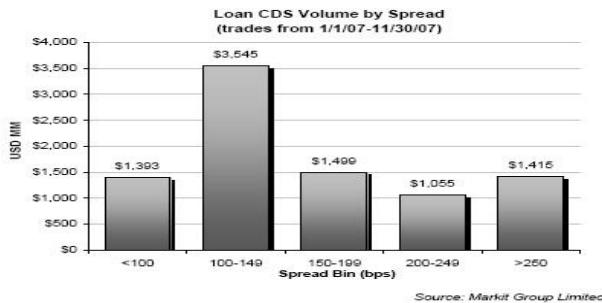


FIG. 1.7 – Taille des spreads traités

1.2.4 La crise et le marché des LCDS

Au cœur de la crise des subprimes de l'été 2007, le marché des dérivés de crédits a subi un fort ralentissement. Les LCDS n'ont pas été épargnés et souffrent d'une très faible liquidité à l'heure actuelle ; cette baisse est fortement visible sur la figure 1.5. A partir des données que nous avons récupérées sur le site de Markit, nous pouvons mettre en avant la situation actuelle du marché. Sur les 1500 spread de marché de LCDS de maturité 5 ans pris au 22 mars 2009, nous trouvons un spread moyen de 1500 bp. Avant la crise les spreads observés étaient plus autour de 150 bp. Il est alors difficile de se fier aux données actuelles pour calibrer nos données. L'autre point intéressant est la relation reliant les spreads de LCDS et de CDS suivante que nous démontrerons au chapitre 2 :

$$\frac{S_{CDS}}{1 - R_{LCDS}} = \frac{S_{CDS}}{1 - R_{CDS}}$$

Cette relation nous permet d'estimer les spreads de CDS comme le double des spreads des LCDS quand ceux-ci ne préparent pas. Nous avons récupéré un vingtaine de noms pour comparer les spreads de CDS et de LCDS et ainsi voir si l'état du marché permet de retrouver cette relation.

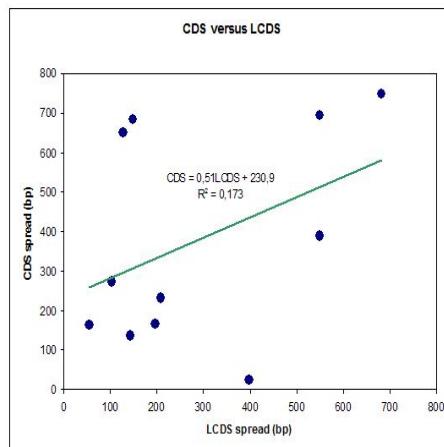


FIG. 1.8 – Spread des CDS versus spread des LCDS au 22 mars 2009

Comme on peut le voir sur cette figure cette relation n'est pas du tout vérifiée. Actuellement le marché n'est donc pas du tout assez liquide pour une calibration des modèles.

Chapitre 2

Evaluation des LCDS

2.1 Méthode de calcul des LCDS

Comme nous l'avons vu, le LCDS est un instrument dérivé de crédit qui fournit à son acheteur une protection contre le défaut d'un emprunteur sur le marché des crédits syndiqués. Pour payer cette protection l'acheteur paie des flux de manière régulière. Cette série de paiements est appelée **la jambe fixe**. Chaque flux est calculé à partir du spread du LCDS, le flux payé est alors égal à ce spread multiplié par le nominal sur lequel porte la protection. En cas de déclenchement du contrat, un paiement est effectué par le vendeur de protection, ce paiement est appelé **la jambe de protection**. Nous allons voir comment évaluer ces deux jambes et ainsi estimer le "fair spread" égalisant ces deux jambes et rendant donc le prix initial nul.

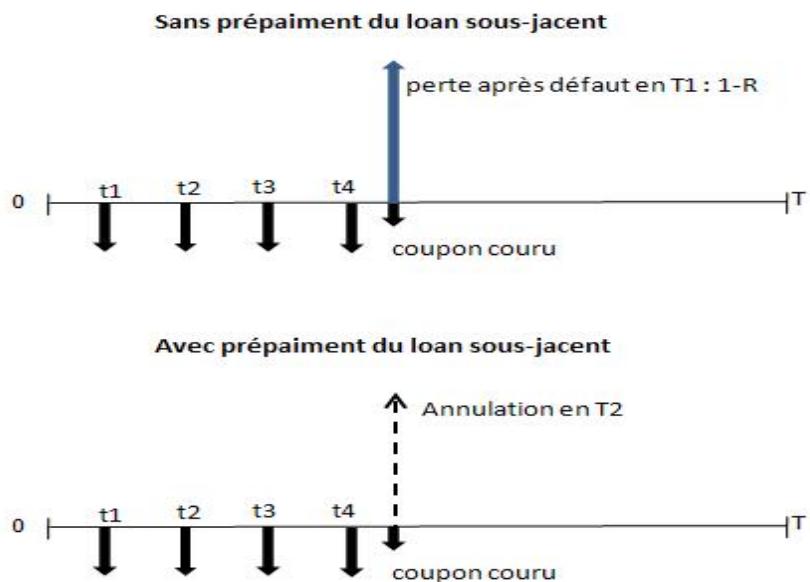


FIG. 2.1 – Méchanisme du LCDS

2.1.1 Estimation de la jambe fixe

La jambe fixe correspond à la série des primes payées par l'acheteur du LCDS jusqu'à la terminaison du contrat que ce soit pour annulation, défaut, ou arrivée à maturité du contrat. Cette jambe comprend aussi le paiement du coupon couru entre la période du paiement de la dernière prime et le temps d'annulation.

En supposant que le contrat impose $n = 1, \dots, N$ primes à payer en t_1, \dots, t_N où t_N est la maturité du LCDS, et en ignorant pour l'instant le coupon couru, nous pouvons écrire la jambe fixe comme la somme actualisée des flux probables :

On calcule les jambes pour un spread de 1bp :

$$\text{Coupon fixe} = \sum_{i=1}^n \Delta_{t_{i-1}, t_i} D(t_i) Q^{TM}(t_i)$$

où :

- Δ_{t_{i-1}, t_i} correspond à la fraction de jours entre t_{i-1} et t_i selon la convention souhaitée.
- $D(t)$ est le facteur d'actualisation entre 0 et t . On utilise la courbe Libor.
- $Q^{TM}(t)$ est la probabilité de non terminaison du contrat avant t , $Q^{TM}(t) = P(\tau_{TM} \geq t) = 1 - P^{TM}(t)$. C'est la probabilité de survie du contrat jusqu'à t

Cette équation ne prend pas en compte les effets du coupon couru. En effet, au moment où le contrat se termine il est exigé de payer la fraction de prime au prorata du temps écoulé depuis le paiement de la dernière prime. Pour inclure cette jambe, il nous faut introduire la probabilité que le contrat soit annulé à chaque instant entre deux paiements de prime. On procède ainsi :

- On considère chaque période $[t_i, t_{i+1}]$
- On détermine la probabilité de survivre jusqu'à chaque instant s de la période et que le contrat soit annulé dans l'intervalle ds qui suit. Cette probabilité est donnée par $-dQ^{TM}(s)$
- On calcule le coupon couru pour chaque s et on actualise avec la courbe Libor
- On intègre sur toute la période en prenant une intégrale continue bien que les paiements soient calculés sur une base journalière
- On somme ensuite sur toute la période ce qui donne :

$$\text{Coupon couru} = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i} -\Delta_{t_i, s} D(s) dQ^{TM}(s)$$

Au final en notant PV01 la jambe fixe pour un spread de 1bp nous obtenons :

$$PV01(t_N) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta_{t_{i-1}, t_i} D(t_i) Q^{TM}(t_i)}_{\text{Coupon fixe}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^+}^{t_i} -\Delta_{t_i, s} D(s) dQ^{TM}(s)}_{\text{Coupon couru}}$$

Cependant l'intégrale complique l'évaluation du coupon couru, donc en pratique nous utiliserons la formule suivante pour approximer l'évaluation du coupon couru :

$$\text{Coupon couru} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta_{t_{i-1}, t_i} D(t_i) (Q^{TM}(t_{i-1}) - Q^{TM}(t_i))$$

Ceci découlant du fait que si le contrat se termine entre deux paiements de prime, le coupon couru moyen est la moitié de la prime payée en fin de période.

Intéressons nous maintenant au calcul de la jambe de protection

2.1.2 Estimation de la jambe de protection

La jambe de protection est le paiement actualisé attendu lors du déclenchement du contrat. Il est donc important de prendre en compte ce temps de déclenchement surtout pour des contrats à longue maturité sachant que ce temps va avoir une influence sur le facteur d'actualisation. La méthode est la suivante :

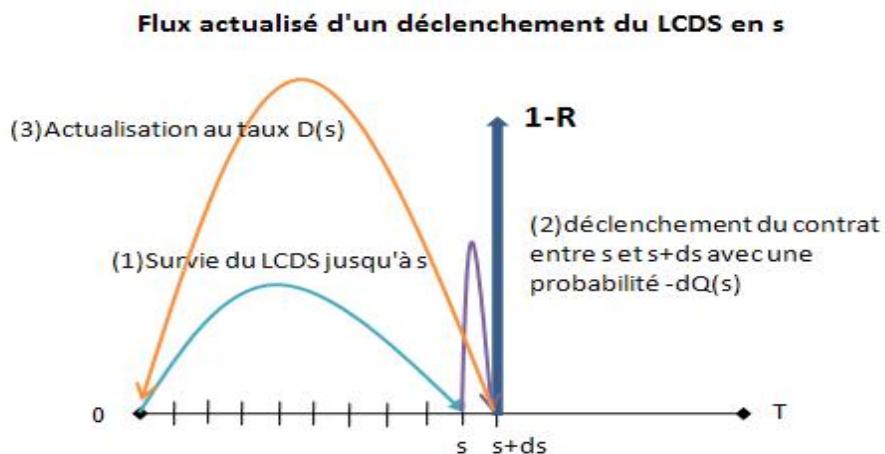


FIG. 2.2 – Estimation de la jambe de protection

- Considérer la probabilité que le contrat se déclenche entre s et $s+ds$: $-dQ^{DEC}(s)$
- A cet instant s un montant $1-R$ est payé, ce montant est actualisé au taux Libor $D(s)$
- Puis on intègre sur toute la période du contrat.

Nous obtenons la formule suivante :

$$\text{Protection}(t_N) = -(1 - R) \int_0^T D(s) dQ^{DEC}(s)$$

Encore une fois le calcul de l'intégrale complique l'évaluation. Il est cependant raisonnable de supposer que le déclenchement du LCDS ne peut se produire qu'un nombre fini de fois M dans une année. De manière pratique nous introduirons alors un pas de discrétisation pour le

calcul de la jambe de protection. Pour un LCDS de maturité t_N , la jambe de protection est calculée à partir de $M * t_N$ points :

$$\boxed{Protection(t_N) = \sum_{m=1}^{M*t_N} D(t_m)(Q^{DEC}(t_{m-1}) - Q^{DEC}(t_m))}$$

2.1.3 Calcul du spread

Nous avons présenté la méthode pour calculer la jambe fixe PV01 ainsi que la jambe de protection. Nous pouvons maintenant calculer le " fair spread " c'est à dire le spread qui égalise les deux jambes :

$$\boxed{Spread(0, t_N) = \frac{Protection(t_N)}{PV01(t_N)}}$$

2.2 Modélisation des temps d'annulation et de défaut du LCDS

Pour valoriser le LCDS nous disposons des formules faisant introduire les probabilités de terminaison et de déclenchement du LCDS. Or nous ne connaissons pas ces probabilités. Pour calculer ces probabilités il nous faut modéliser les temps d'annulation et de défaut du LCDS.

Nous allons commencer par introduire deux variables aléatoires :

- τ_D le temps de défaut
- τ_C le temps d'annulation du prêt sous-jacent

Notons que le temps d'annulation τ_C du prêt est différent du temps d'annulation du contrat LCDS que nous noterons τ_C^{LCDC} . En effet τ_C^{LCDC} vaut τ_C si l'annulation du sous-jacent a lieu avant son défaut et est infini sinon, le contrat ne pouvant être annulé une fois que l'émetteur a fait défaut :

- $\tau_C^{LCDC} = \tau_C \mathbb{1}_{\tau_C < \tau_D} + \infty \mathbb{1}_{\tau_C > \tau_D}$: temps d'annulation du LCDS

Ces deux variables aléatoires nous permettent de déterminer les temps de terminaison et de déclenchement du LCDS. Ces temps sont les variables que nous devons modéliser pour évaluer les LCDS.

Le LCDS se termine soit en cas d'annulation du prêt soit en cas de défaut du prêt, donc :

- $\tau_{TM} = \min(\tau_C, \tau_D)$: temps de terminaison du LCDS

Le contrat est déclenché uniquement lors du défaut du prêt et conditionnellement au fait que le prêt ne soit pas annulé :

- $\tau_{DEC} = \tau_D \mathbb{1}_{\tau_D < \tau_C} + \infty \mathbb{1}_{\tau_D > \tau_C}$ temps de déclenchement du LCDS

Une fois ces variables définies, regardons le modèle utilisé pour les modéliser.

2.2.1 Utilisation d'un modèle à forme réduite :

Dans la modélisation du risque de crédit, deux approches sont possibles, l'une dite structurelle l'autre à forme réduite. Dans l'approche structurelle, l'idée est de modéliser le défaut à partir d'un événement propre à la compagnie comme par exemple l'insuffisance d'actif pour couvrir les dettes. De tels modèles sont généralement des extensions du modèle de Merton (1974), ils nécessitent des connaissances sur le bilan des compagnies, leur structure interne Ces modèles sont alors limités, d'une part ils sont difficiles à calibrer car les données internes des compagnies ne sont publiées qu'au plus quatre fois par an, et d'autre part il est difficile de les étendre au pricing de dérivés de crédit.

Dans le modèle à forme réduite, pour modéliser le défaut, on modélise directement la probabilité de défaut. Il est alors possible d'impliciter ces probabilités à partir des données de marché. Nous utiliserons un modèle de ce type pour modéliser la survenance des événements relatifs aux LCDS.

Le modèle utilisé repose sur les travaux de Jarrow et Turnbull (1995), dans lesquels l'événement est défini comme la première réalisation d'un processus de comptage poissonnien¹ à l'instant τ avec une probabilité définie comme suit :

$$P(\tau \leq t + dt | \tau > t) = \lambda(t)dt$$

La probabilité que l'événement caractérisé par son temps d'occurrence τ ait lieu dans l'intervalle $[t, t+dt]$ conditionnellement à sa survie jusqu'à t , est proportionnelle à une fonction dépendante du temps $\lambda(t)$, qu'on appelle fonction d'intensité, et à la longueur de l'intervalle dt .

On obtient alors la fonction de survie $Q(t)$:

$$Q(t) = P(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$$

2.2.2 Hypothèse d'indépendance entre les temps de défaut et les temps d'annulation

Pour commencer nous avons fait l'hypothèse d'indépendance entre les temps d'annulation et les temps de défaut. De manière intuitive ces temps semblent cependant corrélés négativement, des emprunteurs de bonne qualité auront des taux de défaut faibles et des taux d'annulation élevés. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Nous utiliserons par la suite les notations suivantes :

$$Q(t) = P(\tau_D > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$$

$$Q_C(t) = P(\tau_C > t) = \exp\left(-\int_0^t c(s)ds\right)$$

L'hypothèse d'indépendance nous permet d'estimer les probabilités de déclenchement et de terminaison du LCDS.

¹ cf annexe A

- **Probabilité de terminaison du LCDS**

D'après la formule sur le temps de terminaison nous avons :

$$Q^{TM}(t) = P(\tau_{TM} > t) = P(\tau_D > t)P(\tau_C > t) = Q(t)Q_C(t)$$

- **Probabilité de déclenchement du LCDS**

La probabilité que le contrat se déclenche avant t est :

$$P^{DEC}(t) = P(\tau_D \leq t, \tau_C \leq t) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_D \leq t} Q_C(\tau_D)) = - \int_0^t Q_C(s) dQ(s)$$

Nous pouvons dès lors réécrire nos formules sur les jambes du LCDS à partir des probabilités de défaut et d'annulation du prêt sous-jacent.

Calcul du spread

Pour le calcul de la jambe fixe il faut remplacer $Q^{TM}(t)$ par $Q(t)Q_C(t)$. Dans le calcul de la jambe de protection, nous remplaçons $-dQ^{DEC}(s)$ par $Q_C(s)dQ(s)$ ce qui donne :

$$Protection(t_N) = -(1 - R) \int_0^T D(s) Q_C(s) dQ(s) = -(1 - R) \int_0^T \bar{D}(s) dQ(s)$$

Nous introduisons $\bar{D}(t) = D(t)Q_C(t)$ un facteur d'actualisation pondéré par la probabilité d'annulation du prêt. La formule est alors identique à celle d'un CDS à la différence que le facteur d'actualisation est modifié par la probabilité d'annulation.

Validité de l'hypothèse d'indépendance

Comme présenté précédemment, l'hypothèse d'indépendance entre l'annulation du prêt et le défaut du prêt permet d'évaluer les spread à partir des taux de défaut et d'annulation. Le choix d'une telle hypothèse trouve alors une première motivation dans l'utilisation pratique du modèle. Cependant une hypothèse aussi forte permet elle de traduire les comportements observés sur le marché des LCDS ? En effet, intuitivement nous nous attendons à ce qu'un émetteur de bonne qualité présente un taux de défaut faible et un taux d'annulation relativement élevé, alors qu'un émetteur de moins bonne qualité aura tendance à avoir un taux de défaut élevé et un taux d'annulation faible. Nous observons alors que les deux taux sont corrélés négativement.

A priori, l'hypothèse d'indépendance ne permet pas de traduire cette corrélation. Cependant, il faut noter la distinction faite entre la probabilité d'annulation du prêt et la probabilité d'annulation du LCDS. Etudions alors comment le modèle corrèle la probabilité d'annulation du LCDS avec la probabilité de déclenchement du contrat.

Pour voir comment le modèle se comporte, analysons la sensibilité de la probabilité d'annulation du LCDS P_C^{LCDS} par rapport à la probabilité de déclenchement du LCDS P^{DEC} .

La probabilité d'annulation du LCDS est la probabilité que le contrat se termine moins la probabilité que le contrat se déclenche.

$$\begin{aligned} P_C^{LCDS}(t) &= P^{TM}(t) - P^{DEC}(t) \\ &= 1 - Q(t)Q_C(t) + \int_0^t Q_C(s)dQ(s) \end{aligned}$$

Pour estimer cette sensibilité, nous introduisons la formule du triangle de crédit permettant selon certaines hypothèses d'estimer l'intensité de défaut d'un LCDS.

- La formule du triangle de crédit.

En faisant l'hypothèse d'une courbe d'intensité constante, nous pouvons estimer la valeur de l'intensité de défaut à partir du spread du LCDS, du taux de recouvrement et de l'intensité d'annulation supposée constante. En effet, sous ces hypothèses, la jambe de protection se réécrit :

$$\begin{aligned} Protection(t_N) &= -(1-R) \int_0^T D(s)Q_C(s)dQ(s) \\ &= (1-R) \int_0^T D(s)e^{-c.s}e^{-\lambda.s}\lambda ds \\ &= (1-R)\lambda \int_0^T D(s)e^{-(c+\lambda).s}ds \end{aligned}$$

En supposant que les primes sont payées de manière continue, la jambe fixe s'écrit :

$$\begin{aligned} PV01 &= \int_0^T D(s)Q_C(s)Q(s)ds \\ &= \int_0^T D(s)e^{-(c+\lambda).s}ds \end{aligned}$$

En égalisant les jambes nous obtenons la formule dite du triangle de crédit :

$$Spread = \lambda(1-R)$$

Cette formule est très utile pour récupérer rapidement l'intensité de défaut de l'émetteur à partir du spread de marché conditionnellement à la connaissance de l'intensité d'annulation.

Revenons à l'analyse de la corrélation implicite par le modèle en prenant un exemple particulier.

Supposons deux émetteurs X et Y ayant un taux d'annulation annuel de 2% et le même taux de recouvrement de 70%. Le spread de LCDS à 5 ans de l'émetteur A vaut 100 bp et celui de l'émetteur B vaut 200 bp. A partir de la formule du triangle de crédit nous estimons les intensités de défaut de A et B puis nous calculons les probabilités de déclenchement et d'annulation

du LCDS à horizon de 5 ans selon les formules suivantes :

$$\bullet P^{DEC}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+c} (1 - e^{-(\lambda+c)t})$$

$$\bullet P_C^{LCDS}(t) = \frac{c}{\lambda+c} (1 - e^{-(\lambda+c)t})$$

Les résultats sont résumés en figure 2.3. Nous observons que l'émetteur A de meilleure qualité que l'émetteur B avec une intensité de défaut de 3.3% deux fois plus faible que celle de B avec 6.7%, présente un LCDS avec une probabilité de déclenchement de 14.5% largement plus faible que la probabilité de déclenchement du LCDS de B de 27.2%. Quant à la probabilité d'annulation du contrat elle est plus élevée pour A que pour B 8.8% contre 8.1%.

Emetteur	A	B
Taux de recouvrement	70%	70%
Intensité d'annulation	2%	2%
Spread LCDS	100 bp	200 bp
Intensité de défaut	3.3%	6.7%
Probabilité d'annulation	8.8%	8.1%
Probabilité de déclenchement	14.5%	27.2%

FIG. 2.3 – Analyse des probabilités implicites par le modèle selon l'hypothèse d'indépendance entre les temps de défaut et d'annulation

Le modèle permet alors de reproduire la corrélation négative observée a priori. En effet, l'émetteur A étant de meilleure qualité que le B, le LCDS A a une probabilité moins grande d'être déclenché et une probabilité d'annulation plus grande. L'hypothèse d'indépendance semble alors valide. Cependant elle ne permet de contrôler l'intensité de la corrélation entre les deux probabilités.

Conclusions : La difficulté, à ce stade, repose sur la calibration des courbes d'intensité de défaut et d'annulation sur les données de marché. En effet, pour un CDS classique, une fois choisi le taux de recouvrement, le seul paramètre inconnu est l'intensité de défaut. Il est possible par une méthode de bootstrapping d'impliciter une courbe d'intensité de défaut constante par morceaux. Or pour le LCDS, la possibilité de prépaiement ajoute une inconnue au problème.

Nous présentons dans la prochaine partie les choix que nous avons faits pour évaluer les LCDS.

2.3 Evaluation du LCDS à partir des prix des CDS

La première solution que nous avons testée pour calibrer la courbe d'intensité d'annulation consiste à calibrer dans un premier temps la courbe d'intensité de défaut sur les prix des CDS puis dans un deuxième temps à calibrer la courbe d'intensité d'annulation sur les prix des LCDS.

Nous faisons l'hypothèse que les courbes d'intensité sont constantes par morceaux.

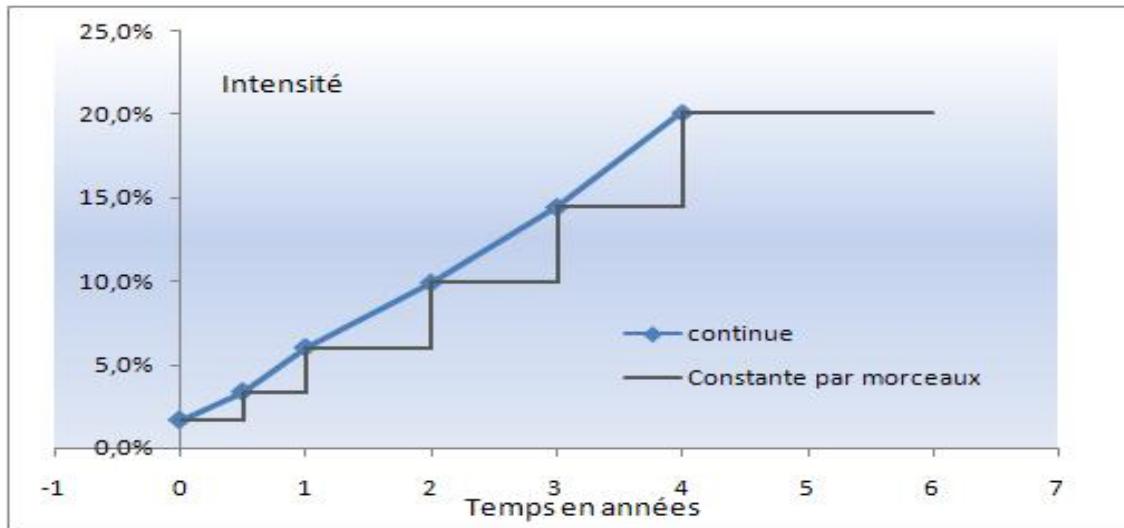


FIG. 2.4 – Courbe des intensités constantes par morceaux

Supposons que nous disposions de la courbe des intensités de défaut calibrée à partir des CDS, regardons comment calibrer la courbe des intensités d'annulation du LCDS.

2.3.1 Calibration de la courbe des intensités d'annulation constante par morceaux.

A partir des données de marché, nous connaissons les spreads de marché du LCDS à différentes maturités, supposons par exemple 6M, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans et 5 ans.

La méthode pour construire la courbe d'intensité constante par morceaux est une méthode itérative appelée bootstrapping. Elle consiste à partir du spread de marché de maturité la plus courte pour impliciter la première probabilité de survie. On remonte ensuite par maturité croissante pour reconstruire la courbe.

Application pratique :

Présentons comment impliciter la première probabilité de survie. A partir du spread de marché à 6 mois , $S(0, 0.5)$, en prenant un pas de discréétisation M mensuel, et un paiement trimestriel des flux :

$$\begin{aligned} S(0, 0.5) &= (1 - R) \frac{\sum_{m=1}^6 D(t_m)(Q^{DEC}(t_{m-1}) - Q^{DEC}(t_m))}{\sum_{i=3,6} \Delta_{t_{i-3}, t_i} D(t_i)[Q^{TM}(t_i) + \frac{1}{2}(Q^{TM}(t_{i-3}) - Q^{TM}(t_i))] } \\ &= (1 - R) \frac{\sum_{m=1}^6 D(t_m) Q_C(t_m)(Q(t_{m-1}) - Q(t_m))}{\sum_{i=3,6} \Delta_{t_{i-3}, t_i} D(t_i) \frac{1}{2}[(Q_C(t_i)Q(t_i) + Q_C(t_{i-3})Q(t_{i-3}))]} \end{aligned}$$

Comme nous connaissons la probabilité de survie $Q(t)$ de défaut, calibrée à partir des CDS, cette équation est une équation à une seule inconnue $c_{0,0.5}$ la valeur constante de l'intensité de

défaut entre 0 et 6 mois.

Pour rappel :

$$Q_C(t) = P(\tau_C > t) = \exp\left(-\int_0^t c(s)ds\right)$$

Donc pour $0 < t \leq 0.5$, $Q_C(t) = \exp(-c_{0,0.5}t)$

Ainsi pour chaque spread en utilisant les formules de fonction de survie suivantes nous reconstruisons la courbe des intensités d'annulation :

$$Q_C(t) = \begin{cases} e^{-c_{0,0.5}t} & \text{si } 0 < t \leq 0.5 \\ e^{-c_{0,0.5}0.5 - c_{0,5,1}(t-0.5)} & \text{si } 0.5 < t \leq 1 \\ e^{-c_{0,0.5}0.5 - c_{0,5,1}0.5 - c_{1,2}(t-1)} & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ e^{-c_{0,0.5}0.5 - c_{0,5,1}0.5 - c_{1,2} - c_{2,3}(t-2)} & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ e^{-c_{0,0.5}0.5 - c_{0,5,1}0.5 - c_{1,2} - c_{2,3} - c_{3,4}(t-3)} & \text{si } 3 < t \leq 4 \\ e^{-c_{0,0.5}0.5 - c_{0,5,1}0.5 - c_{1,2} - c_{2,3} - c_{3,4} - c_{4,5}(t-4)} & \text{si } 4 < t \end{cases}$$

On suppose ici qu'après 5 ans la courbe d'intensité d'annulation est constante.

2.3.2 Etude de l'impact de la terme structure des CDS sur le LCDS

Avant de présenter les résultats de la calibrations nous avons étudié l'impact de la terme structure des CDS sur le LCDS.

Pour ce faire, nous supposons tout d'abord que l'intensité d'annulation est constante. Puis nous estimons les spreads du LCDS 5 ans selon différentes termes structures du CDS et différents niveaux du taux d'annulation. Nous considérons trois types de terme structure, constante, croissante et décroissante, avec des spreads de CDS à 5 ans identiques égaux à 300 bp. Les courbes d'intensité de défaut constantes par morceaux sont calibrées à partir de ces termes structures en supposant un taux de recouvrement de 40% pour les CDS. Une fois les intensités de défaut calibrées il ne reste plus qu'à estimer le spread du LCDS pour différents niveaux du taux d'annulation. Le taux de recouvrement du LCDS choisi est de 70%.

En 2.6 sont représentés les résultats de l'évaluation des LCDS.

Maturité	6 Mois	1An	2Ans	3Ans	4Ans	5Ans	R
Constant	300bp	300bp	300bp	300bp	300bp	300bp	40%
Croissante	200bp	210bp	225bp	250bp	280bp	300bp	40%
Décroissante	420bp	400bp	360bp	340bp	315bp	300bp	40%

FIG. 2.5 – Terme structure des spreads de CDS

Nous observons que pour une terme structure constante des spreads de CDS et donc une intensité constante de défaut, le spread du LCDS est pratiquement indépendant du taux d'annulation. Le spread de LCDS est alors constant au spread de LCDS pour un taux d'annulation

nul. Nous remarquons que ce spread n'est rien d'autre que le spread du CDS 5 ans pour un taux de recouvrement de 70%. Ce spread, qu'on appellera spread modifié noté S_{MCDS} , joue un rôle important et est relié au spread du CDS par la formule suivante :

$$\frac{S_{MCDS}}{1 - R_{LCDS}} = \frac{S_{CDS}}{1 - R_{CDS}}$$

Dans notre exemple, nous avons pris un spread de CDS de 300 bp, le spread modifié est égal à 150 bp. Nous observons ensuite que pour une terme structure croissante des CDS le spread de LCDS est décroissant avec le taux d'annulation. Nous observons le contraire avec une terme structure décroissante. Nous comprenons alors qu'introduire un taux d'annulation revient à diminuer la maturité du CDS modifié correspondant. En effet, le taux d'annulation réduit la durée de vie du contrat.

Taux c	CDS →			CDS ↗			CDS ↘		
	Prot	PV01	Spread	Prot	PV01	Spread	Prot	PV01	Spread
0%	6.23 %	4.15	150.0	6.32 %	4.21	150.0	6.16 %	4.10	150.0
1%	6.09 %	4.06	149.9	6.15 %	4.12	149.4	6.00 %	6.03	150.4
2%	5.94 %	3.97	149.9	5.99 %	4.02	148.8	5.91 %	3.91	150.8
5%	5.55 %	3.91	149.7	5.55 %	3.76	147.1	5.56 %	3.66	151.9
10%	4.97 %	3.33	149.4	4.87 %	3.37	144.2	5.05 %	3.28	153.8
20%	4.04 %	2.72	148.7	3.82 %	2.76	138.7	4.23 %	2.68	157.6
50%	2.42 %	1.63	148.5	2.08 %	1.67	124.55	2.72 %	1.63	167.2
80%	1.64 %	1.11	147.8	1.31 %	1.15	114.29	1.95 %	1.12	173.8

FIG. 2.6 – Spread de LCDS en fonction de la terme structure des spreads de CDS et des taux d'annulation

Ce constat est très important pour la suite de la calibration car dans le modèle pour obtenir une intensité cohérente, le spread de LCDS est fortement relié au spread de CDS. En effet, le spread de LCDS correspond à un spread de CDS modifié pour une maturité plus courte. Il est contraint par les valeurs prises par le CDS. Pour une structure par terme croissante en prenant un spread de CDS 5 ans de 300 bp, le spread de LCDS ne peut excéder 150 bp la valeur du spread de CDS modifié pour les taux de recouvrement pris en hypothèses.

Pour conclure, nous pouvons avancer que l'impact du taux d'annulation est relativement limité sur le spread du LCDS. En effet, à intensité de défaut constante, le taux d'annulation ne modifie pas le spread de LCDS. Nous pouvions nous y attendre d'après la formule du triangle de crédit. Il est aussi intéressant de mentionner qu'avec cette méthode de calibration sur les prix des CDS, les spreads de LCDS ne peuvent prendre qu'un intervalle de valeurs lié aux spreads des CDS. Enfin nous pouvons insister sur l'impact de la terme structure des CDS sur la sensibilité des spreads de LCDS à l'intensité d'annulation : plus la courbe des spreads de CDS sera pentue plus le LCDS sera sensible à l'annulation. L'annulation revient à diminuer la maturité du contrat.

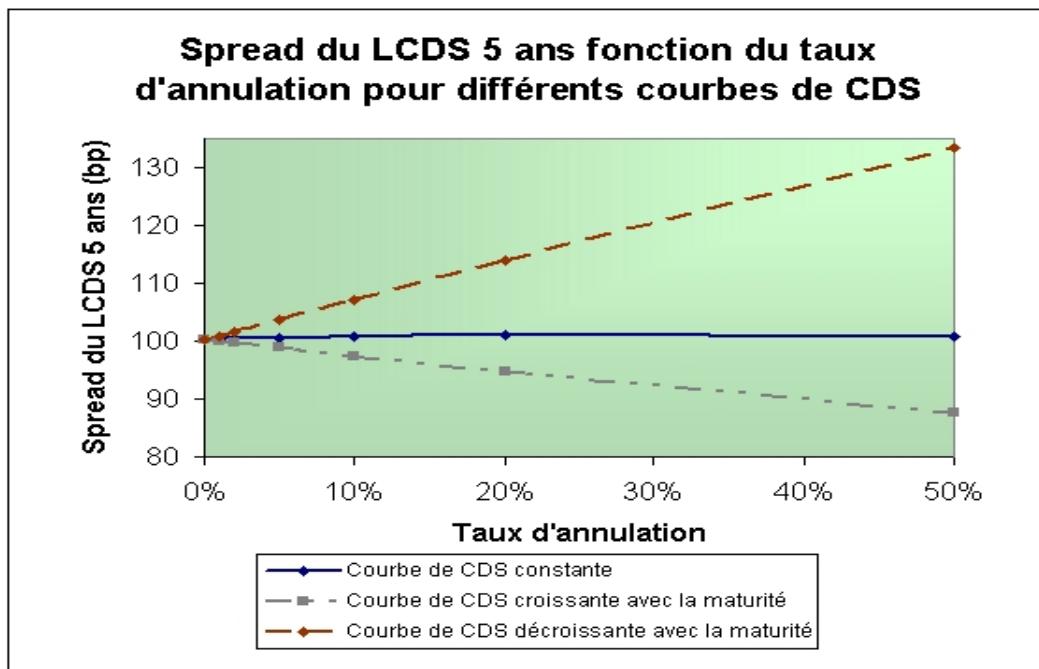


FIG. 2.7 – Comportement des LCDS fonction du taux d'annulation et de la terme structure du CDS

2.3.3 Etude complémentaire de la sensibilité des spreads de LCDS aux taux de défaut et d'annulation

Pour avoir une meilleure vision de l'impact de chacun des paramètres sur le niveau du spread de LCDS, nous présentons la sensibilité des LCDS aux taux d'annulation et de défaut. Pour ce faire nous partons sur l'hypothèse d'intensités de défaut et d'annulation constantes, 5% et 10% respectivement. Nous évaluons le spread de LCDS à 5 ans avec un taux de recouvrement de 70%.

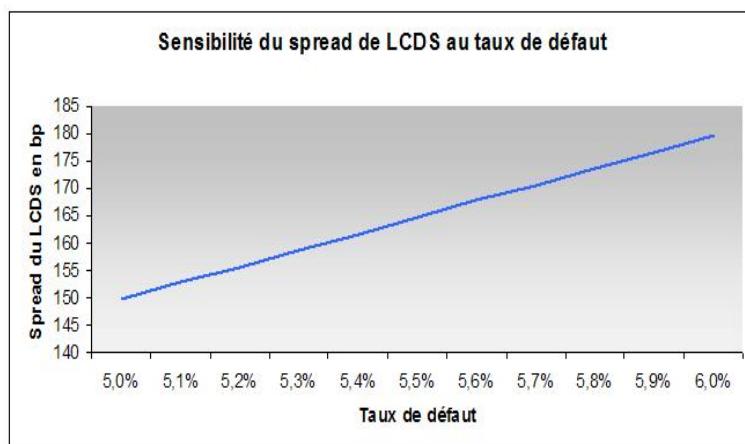


FIG. 2.8 – Sensibilité du LCDS au taux de défaut

Nous faisons varier l'intensité de défaut par pas de 0,1%. Nous observons une forte sensibilité du spread de LCDS qui varie linéairement avec l'intensité de défaut. Pour une variation de 1% du défaut, le spread de LCDS augmente d'environ 30 bp.

Nous faisons varier l'intensité d'annulation par pas de 1%. Le spread de LCDS est très peu sensible au taux d'annulation. Le spread diminue de moins de 1 bp quand le taux d'annulation augmente de 10%.

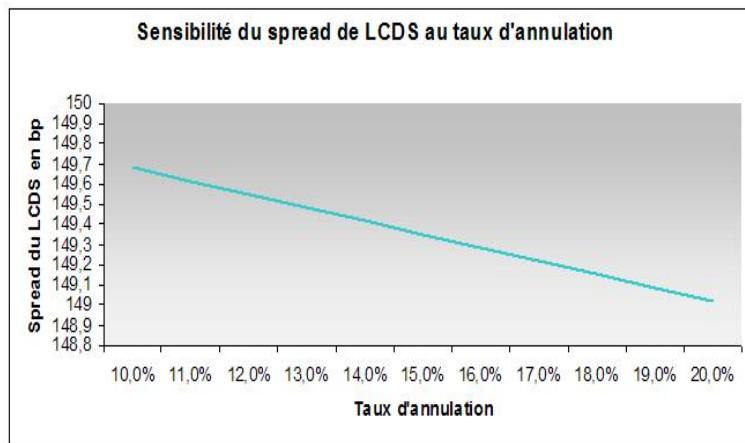


FIG. 2.9 – Sensibilité du LCDS au taux de défaut

Ces résultats confirment la prédominance du taux de défaut sur le taux d'annulation qui ne permet pas de faire varier significativement le spread du LCDS.

2.3.4 Résultats de la calibration de la courbe des intensités d'annulation

En théorie, nous avons vu qu'il était possible de calibrer une courbe d'intensité d'annulation constante par morceaux, après avoir calibré la courbe d'intensité des défauts sur les CDS. Cependant, l'étude précédente nous a montré qu'avec cette méthode les spreads de LCDS étaient contraints par le niveau des spreads de CDS. Nous avons donc étudié la stabilité du modèle en le testant sur les données du marché.

Exemples de pricing

Nous présentons dans cette partie les premiers résultats de la calibration en utilisant des données réelles de marché.

Hypothèses sur les paramètres :

- Courbe libor cf figure 2.10
- Fréquence trimestrielle des paiements
- Discrétisation mensuelle
- Taux de recouvrement des CDS : 40%
- Taux de recouvrement des LCDS : 70%

Maturité	6 Mois	1An	2Ans	3Ans	4Ans	5Ans
Taux Libor	1.35%	1.43%	1.90%	2.47%	2.93%	3.33%

FIG. 2.10 – Courbe Libor à 5 ans

Calibration sur les données de marché de Ford

Notre premier test porte sur les prix des CDS et LCDS de Ford au 11 janvier 2008.

Maturité	6 Mois	1An	2Ans	3Ans	4Ans	5Ans
CDS	nc	663bp	758bp	865bp	870bp	884bp
LCDS	nc	370bp	460bp	510bp	550bp	570bp

FIG. 2.11 – Spread de CDS et LCDS de Ford au 11 janvier 2008

Les résultats de la calibrations présentés en fig.2.10 conduisent à un premier rejet du modèle. Le modèle de la calibration génère des intensités négatives et ne permet pas non plus de reproduire les spreads de marché de LCDS à toutes les maturités. Des intensités négatives signifient des probabilités d'annulation négatives ce qui n'a pas de sens. En observant la courbe des intensités générée et en reprenant ce qui a été vu précédemment sur les limites de la calibration, il est aisément d'analyser la valeur des intensités.

Le spread de CDS modifié à 1 an vaut 331.5bp. Or la courbe des CDS étant croissante, la valeur du LCDS à 1 an telle que le modèle le conçoit doit être plus petite que 331.5bp. Le marché traite les LCDS 1 an à hauteur de 370bp ce qui est incompatible avec le modèle. Nous nous retrouvons avec une probabilité d'annulation négative qui s'interprète par le fait qu'à ce niveau d'intensité de défaut avec un taux de recouvrement de 70%, le contrat devrait durer plus d'un an pour un niveau de spread de 370 bp.

Nous donnons un deuxième exemple en prenant les données de Direct TV au 11 mars 2008

Maturité	Taux de défaut	CDS	Taux d'annulation	LCDS
1an	11.0%	663.0	-437.1%	370
2ans	14.4%	758.0	-239.8%	460
3ans	19.1%	865.0	95.1%	510
4ans	14.8%	870.0	393.0%	500
5ans	16.3%	884.0	-739.7%	510

FIG. 2.12 – Résultat de la calibration des LCDS sur Ford au 11 janvier 2008

Maturité	6 Mois	1An	2Ans	3Ans	4Ans	5Ans
CDS	nc	147bp	169bp	182bp	210bp	224bp
LCDS	nc	112bp	143bp	162bp	188bp	202bp

FIG. 2.13 – Spread de CDS et LCDS de DirectTV au 11 mars 2008

Maturité	Taux de défaut	CDS	Taux d'annulation	LCDS
1an	2.44%	147	-428.6%	79
2ans	3.19%	169	-458.5%	104
3ans	3.49%	182	-440.9%	114
4ans	5.10%	210	-467.9%	166
5ans	4.87%	224	-415%	158

FIG. 2.14 – Résultat de la calibration des LCDS sur DirectTV au 11 mars 2008

Calibration sur les données de marché de Direct TV

Encore une fois les spreads de LCDS sont beaucoup trop proches des spreads de CDS pour que nous puissions obtenir une bonne calibration. En réalité, deux problèmes se posent dans cette méthode de calibration. Tout d'abord faire l'hypothèse que les intensités de défaut des CDS sont les mêmes que celle des LCDS n'est pas en phase avec la réalité, sachant que le marché des prêts syndiqués garanti a un fonctionnement différent du marché des bons. Deuxièrement, la période n'est pas idéale pour utiliser les données de marché sachant que le marché des LCDS est très peu liquide, les spreads de LCDS sont au dessus de ce qu'ils vaudraient en période normale.

Le modèle n'est pas assez flexible et impose trop de contraintes quant au niveau des spreads de LCDS. Nous avons voulu montrer des spreads "tests" ou encore "idéaux" sur lesquels le modèle s'ajuste.

Calibration sur des données "test"

Nous avons choisi d'introduire des courbes de spread "test" répondant aux contraintes imposées par le modèle. Les spreads de LCDS ont dans cette optique étaient choisis de telles sorte à ne pas excéder le spread de CDS modifié à même maturité.

Maturité	6 Mois	1An	2Ans	3Ans	4Ans	5Ans
CDS	nc	233bp	261bp	302bp	341bp	394bp
LCDS	nc	116bp	129bp	146bp	159bp	171bp
MCDS		116.5bp	130.5bp	170.5bp	197bp	

FIG. 2.15 – Courbes de spread "tests"

La calibration génère des intensités cohérentes avec les remarques précédentes portant sur

l'effet de l'annulation sur la durée de vie du contrat. En effet plus le spread de LCDS est éloigné de son spread modifié plus l'intensité d'annulation calibrée est élevée.

Maturité	Taux de défaut	CDS	Taux d'annulation	LCDS
1an	3.87%	233	10.09%	116
2ans	4.83%	261	13.52%	129
3ans	6.55%	302	24.35%	146
4ans	8.02%	341	41.51%	159
5ans	11.26%	394	59.67%	171

FIG. 2.16 – Résultat de la calibration des LCDS "tests"

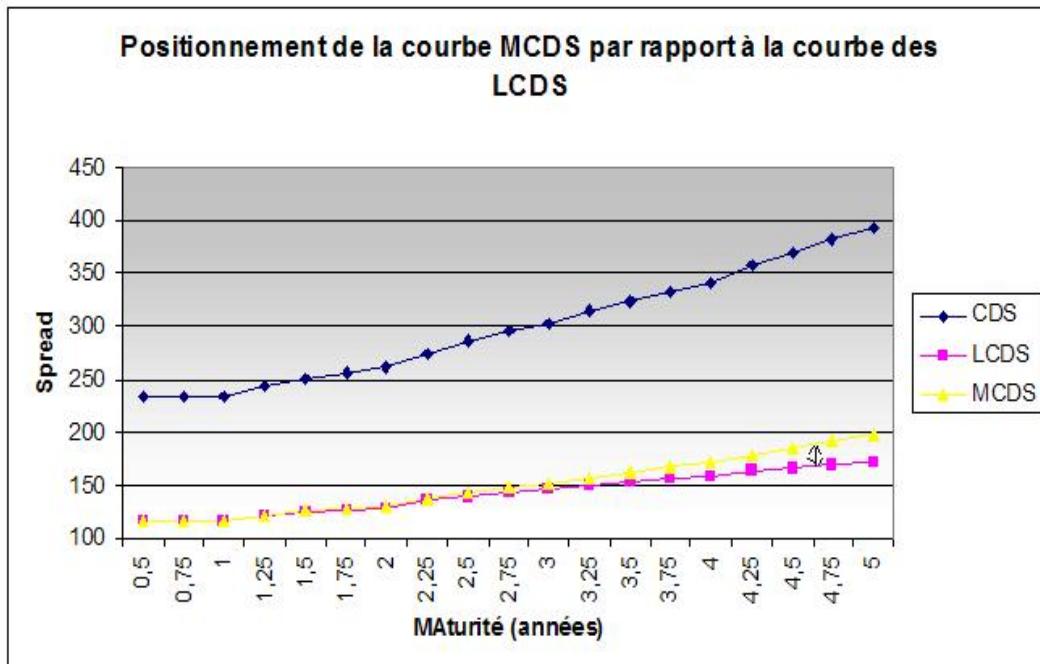


FIG. 2.17 – Configuration idéale des spreads de CDS et LCDS pour des taux de recouvrement respectivement de 40% et 70%

Conclusion : Bien que ce modèle donne l'avantage de donner une courbe d'intensité constante par morceaux, nous comprenons bien que la nature même du sous-jacent sur lequel porte le contrat LCDS, ainsi que le peu de liquidité du marché du LCDS, ne sont pas propices à l'utilisation des CDS pour calibrer la courbe des intensités. Le spread du LCDS est beaucoup plus sensible à l'intensité de défaut qu'à l'intensité d'annulation, il est alors difficile de jouer sur le spread de LCDS une fois les intensités de défaut calibrées. Il nous faut trouver une autre méthode.

2.4 Evaluation du LCDS à partir d'un taux d'annulation empirique

La première démarche entreprise consistait à faire deux calibrations. La première sur les CDS pour récupérer les intensités de défaut et la deuxième sur les LCDS pour récupérer les intensités d'annulation. Or nous avons vu qu'il était possible pour un émetteur d'annuler ses prêts syndiqués puis de faire ensuite défaut sur ses bons. Ainsi la probabilité de défaut du LCDS n'est pas vraiment reliée à la probabilité de défaut du CDS. De plus, le modèle ne permet pas de calibrer toutes les courbes de spread de LCDS.

La méthode que nous allons présenter repose sur une étude empirique des probabilités d'annulation. Ainsi, de la même manière que le taux de recouvrement est estimé a priori des prix de marché, nous pensons estimer a priori le taux d'annulation. La calibration des taux de défaut pourra alors être effectuée directement sur les spreads de LCDS.

2.4.1 Méthode statistique

Pour connaître empiriquement la probabilité d'annulation du LCDS, il nous faut étudier historiquement les probabilités de prépaiement des prêts syndiqués. Une étude de JP Morgan [7] basée sur les données de Reuters sur le marché des prêts entre 1999 et 2006 fournit des premiers éléments de réponse.

Historiquement il est observé qu'un LCDS de maturité 5 ans aurait été annulé entre 25 et 30% du temps. Cette probabilité donne une première idée de la valeur que l'on pourrait attribuer au taux d'annulation a priori d'un LCDS. Une étude plus fine nous permet même de construire une courbe d'intensité d'annulation par morceaux.

En effet, l'étude de JP Morgan propose d'estimer de manière statistique des probabilités conditionnelles d'annulation. Conditionnellement à la survie d'un prêt X années l'étude fournit la probabilité de prépaiement du prêt dans les Y années qui suivent. Ces probabilités sont estimées à partir des fréquences empiriques. Nous présentons la matrice des probabilités estimée par JP Morgan.

Survie du prêt	Probabilité cumulée d'annulation dans Y années							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3%	8%	18%	23%	38%	48%	57%	62%
1	5%	15%	21%	36%	46%	56%	60%	
2	9%	17%	33%	42%	52%	56%		
3	6%	24%	36%	48%	51%			
4	18%	31%	44%	51%				
5	14%	29%	42%					
6	13%	27%						

FIG. 2.18 – Probabilités conditionnelles d'annulation du LCDS à partir des données historiques selon l'étude de JP Morgan

Pour calibrer la courbe des intensités d'annulation à la date de début du contrat nous utiliserons la première ligne de la matrice. Cette méthode est très intéressante car elle permet de donner une forme structure à cette courbe. Cependant, plusieurs points ne sont pas satisfaisants. Premièrement, l'étude ne repose pas sur un nombre suffisant de données, uniquement 748 prêts sur 7 ans, n'assurant ainsi pas une robustesse de ces probabilités. Deuxièmement, les probabilités sont totalement indépendantes de l'émetteur, ce qui ne correspond pas à la réalité. Dernièrement l'idée d'utiliser des données historiques permet très bien de capturer un phénomène global mais ne prend aucun compte des tendances économiques. Donc bien que très intuitif et méritant d'être testé, ce modèle ne répond pas suffisamment à nos attentes. L'idée pour évaluer les probabilités serait non pas de se baser sur les faits, les précautions, mais plutôt les raisons qui poussent les émetteurs à prépayer les prêts. Nous allons étudier dans la prochaine partie la méthode basée sur les notations des émetteurs.

2.4.2 Méthode des notations

Rappelons qu'il existe trois principales manières pour une entreprise de sortir du marché des prêts syndiqués :

- Améliorer sa notation et passer au stade Investment Grade (BBB), la compagnie remplace alors ses prêts sécurisés en dette non sécurisée.
- L'acquisition par une compagnie notée Investment Grade, les dettes sécurisées seront toutes remplacées par de la dette non sécurisée.
- L'acquisition par une autre compagnie "High Yield" (en dessous de BBB). Celle-ci remboursera les prêts et réemettre de nouveaux prêts.

Le premier point est le point qui nous intéresse car c'est celui le plus fréquent. Il nous permet d'assimiler la probabilité d'annuler un prêt à la probabilité de l'émetteur de passer au stade Investment Grade. Cette remarque primordiale est à la base de la méthode des notations.

A partir de données historiques, Standard & Poor's et Moody's ont générées des matrices de transitions de notation² à horizon d'un an. Ces matrices fournissent la probabilité de passer à un certain niveau de notations au bout d'un an sachant le niveau de notations actuel.

Années	Rating initial						
	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC/C
6M	8,00%	2,00%	1,00%	0,50%	0,50%	0,50%	0,5%
1	15,00%	4,00%	2,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
2	26,00%	9,00%	4,00%	2,00%	2,00%	2,00%	3,00%
3	34,00%	13,00%	6,00%	3,00%	3,00%	3,00%	4,00%
4	40,00%	17,00%	8,00%	4,00%	4,00%	4,00%	5,00%
5	45,00%	21,00%	10,00%	6,00%	5,00%	5,00%	7,00%

FIG. 2.19 – Probabilités de passer en Investment Grade à partir du Rating initial, Sources Moody's et S&P

²cf annexe B

A partir de cette matrice de transition, connaissant la notation de l'émetteur nous en déduisons la courbe des intensités d'annulation constante par morceaux. C'est cette méthode que nous choisissons pour calibrer les LCDS.

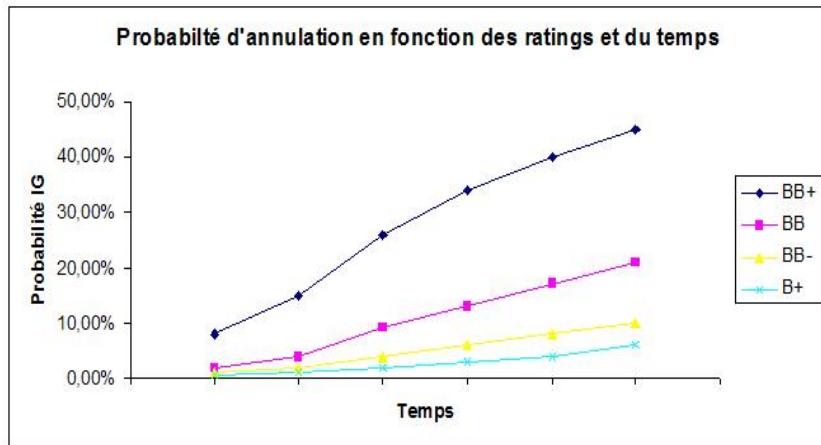


FIG. 2.20 – Probabilités de passer en Investment Grade en fonction de la notation initiale

2.4.3 Résultats après calibration de la courbe des intensités de défaut

Nous reprenons les données de Ford figurant en 2.11, compagnie notée CCC. Nous calibrons uniquement la courbe d'intensité des défauts, la courbe des intensités d'annulation étant calculée à partir de la méthode des notations.

Maturité	Taux d'annulation	Taux de défaut	LCDS
1an	1,01%	12,325%	370
2ans	2,04%	18,942%	460
3ans	1,04%	21,671%	510
4ans	1,05%	25,049%	550
5ans	2,13%	24,513%	570

FIG. 2.21 – Résultat de la calibration de Ford notée CCC au 11 janvier 2008

Le modèle s'ajuste parfaitement. Nous obtenons une courbe d'intensité des défauts croissante en accord avec la terme structure des LCDS et cohérente avec les valeurs usuellement observées sur le marché. Comme annoncé précédemment le modèle étant beaucoup plus sensible à l'intensité de défaut cette méthode présente l'avantage d'être flexible étant beaucoup moins contrainte par les spreads de LCDS.

Si nous comparons la courbe des intensités de défaut calibrée avec ce modèle à la courbe des défauts calibrée à partir des spreads de CDS (cf 2.22), il est à noter que malgré des courbes d'intensité de défaut assez similaires avant 3 ans, notre premier modèle était incapable de récupérer des intensités d'annulation cohérentes. Donc bien que les CDS peuvent donner une idée des défauts des LCDS c'est l'implémentation même du modèle qui nous oblige à choisir une méthodes basée sur une estimation a priori des taux d'annulation.

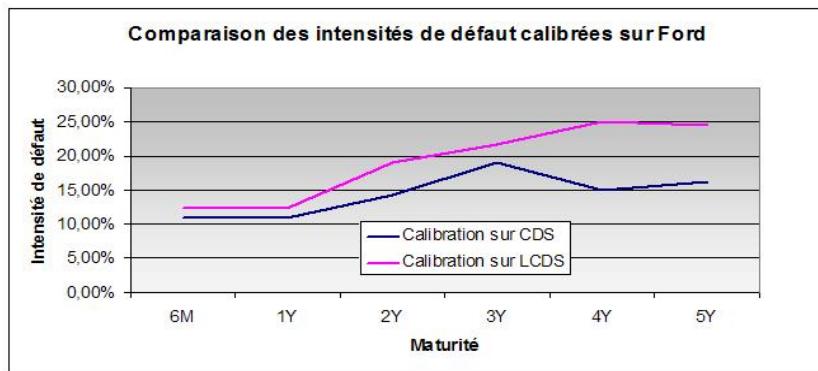


FIG. 2.22 – Comparaison des intensités de défaut calibrées selon les deux méthodes

Conclusion : Pour évaluer les LCDS, nous avons fait trois choix majeurs. Le premier choix repose sur celui de la modélisation des temps de défaut et d'annulation par un modèle à intensité stochastique en supposant l'intensité déterministe. Le deuxième choix, a été de nous orienter vers une hypothèse d'indépendance entre les temps d'annulation et de défaut. Hypothèse dont nous avons discuté de ces justifications et de sa validité. Puis notre dernier choix s'est porté sur la méthode de calibration des paramètres. Nous avons alors opté pour une estimation a priori des taux d'annulation reposant sur la probabilité de l'émetteur de passer au niveau "Investment Grade".

Cette première étape va nous permettre de disposer d'un modèle implantable et fonctionnel pour constituer un portefeuille de LCDS.

Chapitre 3

Introduction au marché des Loan-CDO

3.1 Historique et profil des investisseurs

De façon très simpliste, un Loan-CDO est un portefeuille composé d'un certain nombre de LCDS, généralement une centaine. Comme le CDO synthétique, un Loan-CDO est une transaction qui sert à transférer le risque de crédit d'un portefeuille de référence à des personnes souhaitant le détenir. La caractéristique principale de ces dérivés de crédit est leur structure en tranches, qui permet d'allouer ce risque selon la demande des investisseurs. Nous allons dans ce chapitre commencer par exposer de façon détaillée l'indice LCDX, qui est né d'un premier effort de standardisation des Loan-CDOs. Nous passerons ensuite au problème complexe d'évaluation du prix de ce dérivé de crédit et finirons par quelques discussions sur les extensions possibles des modèles proposés.

Les transactions de tranches standardisées de l'indice LCDX ont commencé en Mai 2007 peu après l'introduction des LCDS au marché. Le lancement de ce nouveau produit a été un succès puisque très rapidement le volume cumulé des transactions a atteint les 400 Milliards de dollars :

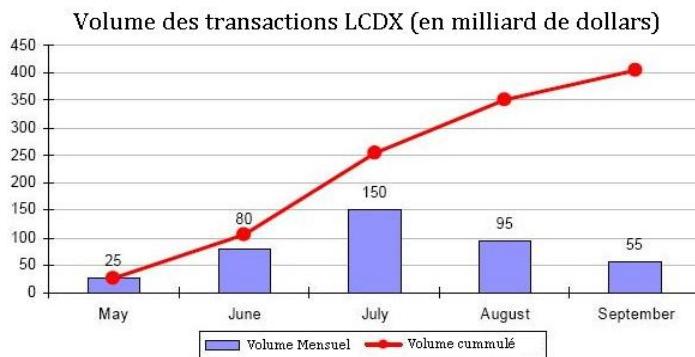


FIG. 3.1 – Le volume des transactions sur le LCDX après son lancement en Mai 2007

Ce succès s'explique par le fait que les tranches de LCDX offraient plusieurs avantages par rapport à leurs homologues les indices de CDS (CDX.HY, iTRAXX, CDX.IG,...) : nous

citons principalement leurs prix moins élevés, leurs durées plus courtes, une liquidité très probablement plus élevée, et des conditions d'investissement plus intéressantes. D'un autre côté, le LCDX présente l'inconvénient d'être un produit plus complexe que les CDX surtout à cause du plus grand nombre de paramètres dont il dépend. En effet, l'évaluation du prix des tranches dépend fortement des estimations simultanées et des hypothèses sur les défauts, les prépaitements ainsi que le taux de recouvrement, ce qui engendre une plus grande volatilité au niveau des résultats.

Toutefois, au niveau de la structure générale de ce produit, nous avons toujours une division en tranches *equity*, *mezzanine* and *senior*, indiquant le niveau de risque auquel les différents investisseurs souhaitent s'exposer. De manière schématique, le risque du portefeuille est distribué de la façon suivante :

1. Tranches *equity* : Compte tenu du risque très élevé de ces tranches, il est difficile de trouver preneur pour ce type de risque de crédit, et cela malgré leur rémunération très élevée. Ainsi, seuls des hedge funds ou autres clients sophistiqués, qui voient en ces tranches une façon efficace de réaliser un effet de levier sur leurs positions, osent s'y aventurer.
2. Tranches *mezzanine* : Les cibles principales de ces tranches sont les investisseurs institutionnels classiques tels que les banques ou les compagnies d'assurance. L'investissement sous forme de tranches *mezzanine* offre ainsi une solution à ces institutions puisqu'il implique une diversification du risque (le portefeuille contient une centaine d'émetteurs différents), un début de protection contre les défauts (la tranche *equity* absorbe les premières pertes et protège ainsi les tranches *mezzanine*) et toujours comme précédemment, un léger effet de levier.
3. Tranches *senior* : Ces tranches ne fournissent qu'une faible rémunération (de l'ordre de 10 points de base), mais présentent en contrepartie un risque de crédit très réduit. Les candidats idéaux pour ces tranches là sont les réassureurs.

3.2 Les mécanismes derrière les tranches LCDX

Nous illustrons sur la figure 3.2 la structure de l'indice LCDX à gauche, et celle du portefeuille correspondant divisé en tranche :

Ainsi, les mesures de standardisation ont conduit à adopter les caractéristiques suivantes pour l'indice LCDX :

- le portefeuille est composé d'une centaine de LCDS. Il est équipondéré en nominal, c'est-à-dire chacun des 100 LCDS ont un poids initial égal à 1%.
- La maturité initiale des LCDS est identique et fixée à 5 ans.
- Les spreads définis dans le contrat restent constants jusqu'à maturité, et les primes sont réduites proportionnellement par rapport au notionnel restant après les défauts, prépaitements ou (dans le cas très rare) du retrait d'un LCDS de l'indice.
- Tous les noms qui composent le LCDX doivent être sur la liste des prêts syndiqués garantis publiée par le groupe Markit.

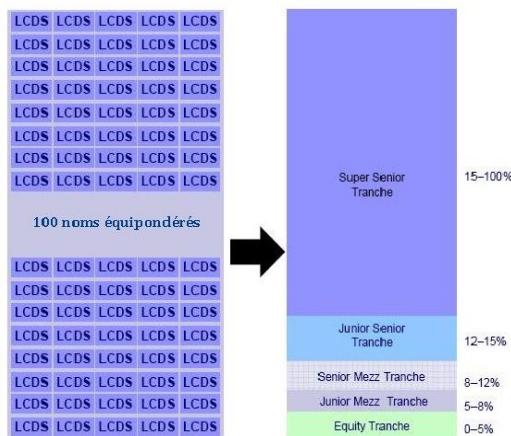


FIG. 3.2 – Passage d'un portefeuille de 100 LCDS à l'indice LCDX

- Les dates de roulement sont fixées au 3 Avril et 3 Octobre. Le groupe Markit doit annoncer publiquement aux investisseurs et les vendeurs la liste des LCDS ajoutés et retirés.

En ce qui concerne la partie de droite de la figure précédente (les tranches de LCDX), nous distinguons des points d'attachements et de détachements différents des autres indices de CDOs. Nous constatons une plus grande division dans la partie basse du portefeuille. En effet, les premiers 15% du notionnel de l'indice LCDX sont subdivisés en 4 tranches : 0 – 5%, 5 – 8%, 8 – 12%, 12 – 15%, alors que pour l'indice CDX.HY, la même proportion contenait uniquement 2 tranches : 0 – 10%, 10 – 15%. Ainsi, du fait de leur degré de risque élevé, les primes des deux tranches les plus basses sont payées en *upfront*, c'est-à-dire réglées en une fois au début du contrat. D'autre part, comme pour les CLO, les primes des autres tranches sont traitées en *running spread*, ou en d'autres termes, elles sont payées trimestriellement à des dates fixées d'avance.

Maintenant, pour comprendre le mécanisme des tranches, nous allons étudier l'impact des événements de crédits sur le notionnel du portefeuille. Tant qu'aucun défaut ou prépaiement n'est constaté, le notionnel du portefeuille reste intact et les acheteurs de protection continuent de verser les primes. Ensuite, lorsque le premier événement de crédit a lieu, si c'est un défaut, l'investisseur dans la tranche *equity* paie $(1 - R)\%$ du nominal à l'acheteur, et si c'est un prépaiement, il ne paie rien. Toutefois, dans les deux cas, le notionnel du portefeuille est réduit de 1%. Ainsi, dans le cas d'un défaut, $(1 - R)\%$ du nominal sont retirés de la tranche *equity* et $R\%$ du nominal sont imputés à la tranche *senior*. Dans le cas d'un prépaiement, le nominal est réduit de 1% au niveau de la tranche *senior*. Il apparaît donc qu'un prépaiement peut être considéré comme un défaut avec un taux de récupération égal à 100%. Nous illustrons l'impact de ces événements dans la figure 3.3 :

Avant de clore cette partie, nous remarquerons que les points d'attachements et de détachements exprimés en pourcentage varient également pendant la durée de vie du portefeuille. En effet, si le nominal du portefeuille était initialement de 100 millions d'euros par exemple, l'occurrence de deux défauts avec 70% de recouvrement engendrerait une diminution du notionnel de la tranche *equity* de $2.(1 - R)\% = 0,6\%$ ou de 600.000 euros. Le point de détachement de la tranche *equity* est désormais égal à $\frac{5-0,6}{98} = 4,48\%$ au lieu des 5% initiaux.

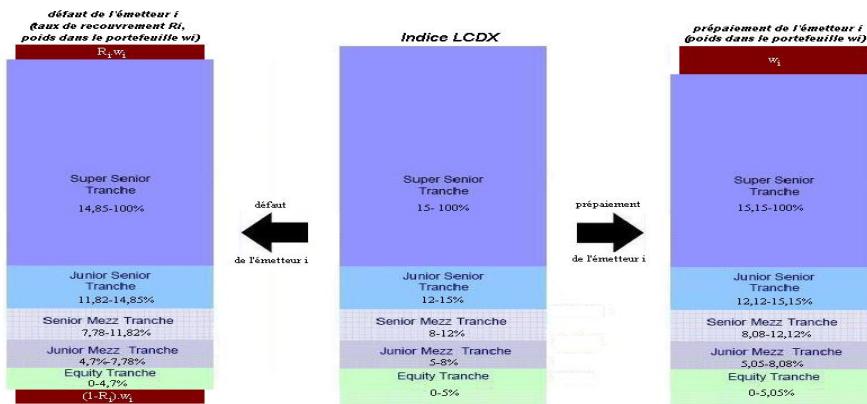


FIG. 3.3 – Mécanisme de l'indice LCDX

3.3 Les caractéristiques des émissions de CDO

Avant l'émission d'un CDO, les émetteurs doivent passer par des cabinets d'avocats, les agences de notation, et des gérants de portefeuille. Quand l'on sait que l'émission de tels produits complexes, et en particulier l'indice LCDX, engendre des frais et des honoraires très élevés, il est naturel de se poser la question de savoir pourquoi de tels produits sont émis. Il existe trois raisons principales à cette question. La première a déjà été introduite précédemment : c'est l'effet de levier. La deuxième est l'opportunité d'arbitrage que cela représente pour les émetteurs et enfin, la raison la plus importante est l'allégement du capital réglementaire, qu'offrent ces types de produits.

3.3.1 L'effet de levier

Afin de comprendre le découpage du risque qu'entraîne une structure en tranches et l'effet de levier énorme qu'il engendre, nous allons procéder à une comparaison de la tranche *equity* du LCDX à un portefeuille entier de LCDS.

- Investisseur sur tranches** Supposons donc un investisseur A qui vend une protection de 10 millions d'euros sur la tranche *equity* LCDX 0 – 5% qui paie aujourd'hui un spread de 600bp.
- Investisseur sur portefeuille de LCDS** Soit un investisseur B, qui vend une protection toujours de 10 millions d'euros, sur le même portefeuille composé d'une centaine de LCDS, qui paient aujourd'hui en moyenne un spread de 50bp.

Pour simplifier, nous supposons que tous les actifs sous-jacents ont la même maturité et un taux de recouvrement nul. Etudions maintenant les trois cas suivants : aucun défaut, un défaut et 5 défauts, et regardons leurs impacts respectifs sur les flux de paiement des investisseurs A et B.

Pour un défaut par exemple, le notionnel de la tranche *equity* va être réduit de $20\% = \frac{1\%}{5\%}$. L'investisseur A paie donc 2,000,000 euros à l'acheteur de protection. La nouvelle prime reçue par l'investisseur se calcule par rapport au notionnel restant de la tranche, qui vaut donc 8 millions d'euros. En ce qui concerne l'investisseur B, ce dernier doit régler le montant des

pertes de l'acheteur de protection, c'est-à-dire 1% du nominal, soit 100,000 euros. Dans la figure ci-dessous, nous illustrons les flux de paiements dans les trois cas :

aucun défaut	acheteur de protection → 600,000eur prime	investisseur A	acheteur de protection → 50,000eur prime	investisseur B
un défaut	acheteur de protection → 480,000eur ← 2,000,000eur	investisseur A	acheteur de protection → 49,500eur ← 100,000eur	investisseur B
5 défauts	acheteur de protection → 10,000,000eur	investisseur A	acheteur de protection → 47,500eur ← 500,000eur	investisseur B

FIG. 3.4 – Flux de paiements entre l'acheteur de protection et les investisseurs A et B

Ainsi, il apparaît clairement que tout investissement dans la tranche *equity* réalise un grand effet de levier. En effet, la perte pour l'investisseur A était 20 fois plus grande que celle de l'investisseur B !

3.3.2 Les CDO de bilan et leur extension pour l'assurance-vie

Les CDOs de bilan sont principalement émis par des détenteurs de titres financiers, comme par exemple les banques commerciales, qui souhaitent vendre ces actifs ou transférer leur risque. L'émission de tels CDOs leur permet de diminuer les capitaux requis par la réglementation. Pour ce faire, la banque crée un " Fonds Communs de Crédances " juridiquement indépendant, à qui elle transfère ses créances ou crédits. Cette étape est fondamentale, car elle permet à la banque de transférer le risque, d'une part, et de retirer les crédits titrisés de son bilan, d'autre part. En contrepartie, le FCC émet un CDO en tranches de différents profils risque/rendement, qui sont vendues aux investisseurs.

Récemment, les réassureurs ont au accès au marché par l'intermédiaire des *cat-bonds* (obligations catastrophes) et ont réussi à transférer une grande partie de leurs risques extrêmes. Toutefois, il est aussi de l'intérêt des compagnies d'assurance d'avoir de tels moyens de réduction du capital réglementaire et de transfert de risque. Nous allons présenter dans ce qui suit, si la structure des CDOs de bilan peut être adaptée pour la titrisation des actifs en assurance-vie.

Les meilleurs risques pour une opération de titrisation sont ceux qui sont faciles à quantifier. De nos jours, les compagnies d'assurance-vie sont devenues expertes dans le calcul des risques de mortalité ou de longévité, qui sont donc des candidats idéaux pour leur transfert au marché via la titrisation. Toutefois, il y a plusieurs raisons pour lesquelles de telles stratégies de titrisation n'ont pas encore eu lieu dans des compagnies d'assurance. Tout d'abord, afin qu'une telle opération soit profitable, il faut qu'elle traite un volume très important de contrats. Or, la majorité des compagnies d'assurance-vie n'a pas les ressources nécessaires pour payer les coûts engendrés par une titrisation, ou sont trop " petites " pour une telle stratégie. Par ailleurs, il est encore incertain si le marché est potentiellement intéressé par cette

catégorie de risque. En effet, les investisseurs redoutent ce qui ne leur est pas familier, cependant, une telle classe de risque pourrait sans doute leur apporter une possibilité avantageuse de diversification, un profil risque/rendement intéressant ainsi qu'une indépendance parfaite par rapport aux autres risques détenus. De plus, une raison supplémentaire pour la réticence des compagnies d'assurance-vie à l'égard de la titrisation était la réglementation en assurance qui évoluait constamment. Enfin, il demeurait également le problème du risque de rachat qui était difficilement transférable au marché. Or, l'apparition des options de prépaiements dans les produits de dérivés de crédit comme le LCDS fait de ce dernier un produit idéal pour la titrisation en assurance-vie.

Bien évidemment, la question de l'introduction des CDOs de bilan aux compagnies d'assurance-vie doit encore être étudiée plus profondément. Cependant, il n'y a pas de doutes sur les grands avantages qu'un produit du type Loan-CDO pourrait leur apporter, que ce soit au niveau du transfert du risque au marché, de la réduction du capital réglementaire, ou du moyen alternatif de refinancement que cela constitue dans le cas où l'entreprise a été déclassée dans sa notation.

3.3.3 Une opportunité d'arbitrage sur les spreads

Un portefeuille de Loan-CDO synthétique est composé d'un grand nombre de LCDS achetés par l'émetteur. Ce dernier reçoit donc les primes trimestrielles qui serviront à leur tour à payer les détenteurs des tranches du Loan-CDO émis. Sachant que les différents spreads des tranches restent les mêmes tout au long de la vie du Loan-CDO, l'émetteur a donc intérêt à vendre ses tranches de manière à ce que les primes reçues soient supérieures aux primes payées aux investisseurs. Il y a donc une forte possibilité de bénéficier d'un arbitrage significatif lors de l'émission de ces CDOs.

Chapitre 4

Evaluation d'une tranche de LCDX

Nous avons vu précédemment la manière de calibrer le modèle à intensité en utilisant les spreads de marchés de LCDS. De ce fait, nous supposons dorénavant que la structure par terme de l'intensité est connue, ce qui implique donc que la probabilité risque-neutre de défaut d'un émetteur quelconque sur un horizon de temps l'est également. Par ailleurs, nous nous basons sur la matrice de transition des notations pour obtenir la probabilité risque-neutre de prépaiement de l'émetteur. En revanche, rien n'est dit à ce stade sur la dépendance des événements de défauts (ou de prépaitements) entre eux : la modélisation de cette dépendance sera l'objet de cette section.

Après deux parties consacrées respectivement aux généralités sur l'évaluation d'une tranche de CDO synthétique composé de Loan-CDS et à la notion de modèles à variables latentes, nous présentons en détail le modèle gaussien à un facteur. Nous lui accordons donc une importance particulière, même si d'autres modélisations sont également étudiées.

4.1 Description du portefeuille et de la tranche

Soit un portefeuille P composé de LCDS. Il est défini par :

- I : nombre d'entités de référence, en général une centaine.
- τ_i^d : date de défaut du nom i .
- τ_i^c : date de prépaiement du nom i .
- $N_i(t)$: nominal du nom i à la date t .
- $N(t) = \sum_{i=1}^I N_i(t)$: taille du portefeuille à la date t .
- R_i : taux de recouvrement du nom i .
- $\omega_i = \frac{N_i(0)}{N(0)}$: poids du nominal de l'émetteur i dans le portefeuille.

Nous pouvons désormais définir la dynamique du notionnel du portefeuille P . Comme nous l'avons expliqué précédemment, le notionnel du portefeuille est réduit d'une unité de poids lors de chaque défaut ou prépaiement. Si l'émetteur i prépaie, nous retirons ω_i d'en haut (tranche senior) et s'il fait défaut, le notionnel sera réduit de $(1 - R_i)\omega_i$ d'en bas (tranche equity) et de $R_i\omega_i$ d'en haut (tranche senior). Nous posons donc L_t et D_t , qui représentent respectivement les fonctions de perte et de diminution cumulées à la date t , exprimées en pourcentage du nominal :

- $L_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (1 - R_i) \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t}$
- $D_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (R_i \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t} + \mathbb{1}_{\tau_i^c \leq t})$

Une tranche de ce portefeuille est alors définie par :

- une maturité T et des dates de paiements, $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$
- un point d'attachement K_A (strike bas)
- un point de détachement K_D (strike haut)
- le spread du contrat de la tranche $[K_A, K_D]$: $S_c^{K_A, K_D}$, qu'on notera S_c pour alléger les notations.

A la différence d'un LCDS, le notionnel d'une tranche du portefeuille P ne reste donc pas constant. Nous illustrons sur la figure ci-dessous un exemple de trajectoire du notionnel exprimé en pourcentage de la tranche $[K_A, K_D]$.

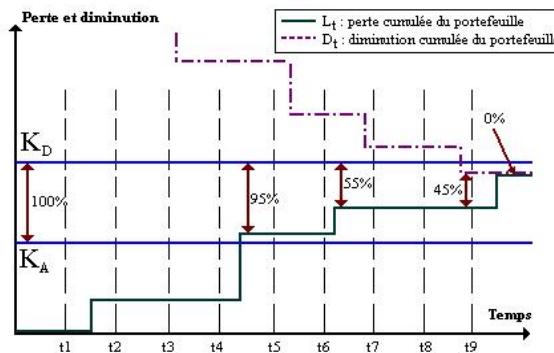


FIG. 4.1 – Exemple de dynamique du notionnel restant d'une tranche $[K_A, K_D]$

Ainsi, pour déterminer le notionnel aux dates t_0, t_1, \dots, t_n , il faut d'abord introduire les fonctions de perte et de diminution de la tranche $[K_A, K_D]$ qui s'écrivent :

$$L_t^{K_A, K_D} = (L_t - K_A)^+ - (L_t - K_D)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } L_t < K_A \\ L_t - K_A & \text{si } L_t \in [K_A, K_D] \\ K_D - K_A & \text{si } L_t > K_D \end{cases}$$

$$D_t^{K_A, K_D} = (D_t - N + K_D)^+ - (D_t - N + K_A)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } D_t < N - K_D \\ D_t - (N - K_D) & \text{si } D_t \in [N - K_D, N - K_A] \\ K_D - K_A & \text{si } D_t > N - K_A \end{cases}$$

Nous pouvons désormais écrire les flux de paiement de l'acheteur et du vendeur de protection :

- A la date t_j , le vendeur de protection paie $L_{t_j}^{K_A, K_D} - L_{t_{j-1}}^{K_A, K_D}$ à l'acheteur de protection. Cette quantité n'est autre que l'incrément de la perte dans la tranche pendant la période considérée.
- Comme le contrat l'impose, l'acheteur de protection paie un spread proportionnel au notionnel restant de la tranche. Son flux de paiement à la date t_j est égal à $N_{t_j}^{K_A, K_D} S_c (t_j - t_{j-1})$ avec :

$$N_{t_j}^{K_A, K_D} = K_D - K_A - L_t^{K_A, K_D} - D_t^{K_A, K_D}$$

4.1.1 Evaluation d'une tranche

Après avoir établi les généralités du modèle, nous allons préciser le cadre dans lequel nous allons nous placer pour procéder à l'évaluation des jambes de prime et de protection de la tranche du portefeuille P. Nous allons donc énoncer les hypothèses suivantes :

- Le marché est sans arbitrage, ou il existe (au moins) une probabilité risque-neutre, sous laquelle le prix de tout actif risqué actualisé est martingale.
- L'acheteur et le vendeur ne présentent aucun risque de contrepartie (risque de non-paiement).
- Les structures par terme des intensités de défaut et de prépaiement sont connues pour chaque émetteur $i = 1, 2, \dots, I$. Nous pouvons donc calculer ces probabilités à un horizon quelconque.

L'évaluation de la jambe des primes

A la date $t = 0$, le paiement espéré en t_j de l'acheteur de protection s'écrit :

$$\mathbb{E}[Z(t_j)N_{t_j}^{K_A, K_D} S_c(t_j - t_{j-1})]$$

où $Z(t_j)$ est le facteur d'actualisation à la date t_j . Comme pour le LCDS, la valeur actuelle nette de la jambe des primes $VAN_{Prime}(S_c)$ sera égale à la somme des paiements actualisés :

$$VAN_{Prime}(S_c) = \mathbb{E} \sum_{j=1}^n [Z(t_j)N_{t_j}^{K_A, K_D} S_c(t_j - t_{j-1})]$$

Nous définissons également la $VAN01$, comme la valeur actuelle nette de cette jambe pour un spread de 1 point de base. Elle est liée à la $VAN_{Prime}(S_c)$ par la relation suivante :

$$VAN_{Prime}(S_c) = S_c \cdot VAN01$$

L'évaluation de la jambe de protection

A la date $t = 0$, le paiement espéré en t_j du vendeur de protection s'écrit :

$$\mathbb{E}[Z(t_j)(L_{t_j}^{K_A, K_D} - L_{t_{j-1}}^{K_A, K_D})]$$

De manière similaire, la valeur actuelle nette s'écrit donc sous la forme d'une somme sur j des paiements espérés :

$$VAN_{Prot} = \mathbb{E} \sum_{j=1}^n [Z(t_j)(L_{t_j}^{K_A, K_D} - L_{t_{j-1}}^{K_A, K_D})]$$

Remarque : Si l'on suppose le paiement en temps continu, cette dernière s'écrirait :

$$VAN_{Prot} = \mathbb{E} \int_0^T [Z(t) \frac{dL_t^{K_A, K_D}}{dt}] dt$$

Le spread de marché ou "fair spread"

Nous définissons le spread de marché comme la quantité qui égalise les valeurs actualisées de la jambe fixe et de la jambe de protection. Il s'écrit donc comme le ratio de la VAN_{Prot} et de la $VAN01$, ou de façon plus explicite :

$$S = \frac{\mathbb{E} \sum_{j=1}^n [Z(t_j)(L_{t_j}^{K_A, K_D} - L_{t_{j-1}}^{K_A, K_D})]}{\mathbb{E} \sum_{j=1}^n [Z(t_j)N_{t_j}^{K_A, K_D}(t_j - t_{j-1})]}$$

L'équation ci-dessus montre que si l'on sait calculer les valeurs espérées des pertes et des diminutions affectant la tranche $[K_A, K_D]$, nous pouvons en déduire le spread de marché très facilement. Toutefois, les distributions de L_t et D_t , dont nous avons besoin pour calculer ces espérances, ne sont malheureusement pas triviales à déterminer. Cela est dû au fait qu'il est nécessaire de considérer la structure de dépendance entre les émetteurs. En effet, selon le degré de cette dépendance, ces distributions peuvent énormément différer. De ce fait, il est crucial de savoir modéliser cette dépendance pour pouvoir évaluer la tranche du portefeuille P. L'objet de la section suivante sera donc de présenter la théorie nécessaire pour le calcul des distributions jointes de défaut et de prépaiement.

4.2 Le modèle gaussien à un facteur

Le modèle à un facteur a été introduit en 2001 par le français Li pour évaluer les dérivés de crédit multi sous-jacents. De manière équivalente, nous pouvons introduire directement une fonction de dépendance *ad hoc* une fois qu'on connaît les probabilités individuelles de défaut et de prépaiement. Dans cette section, nous allons montrer comment ce modèle, utilisé pour les CDO synthétiques composés de CDS, se transpose pour tenir compte d'une dimension supplémentaire, celle des prépaiements.

Soient X_i , $i = 1, \dots, I$ des variables normales centrées réduites, indépendantes et identiquement distribuées, et soit Φ leur fonction de répartition. Nous supposons qu'elles s'écrivent sous la forme suivante :

$$X_i = \rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i$$

avec $0 < \rho < 1$ le paramètre de corrélation, qu'on suppose ici connu et identique pour tous les couples (X_i, X_j) . Nous montrons facilement que $Corr(X_i, X_j) = \rho^2$ pour $i \neq j$. De plus, les variables Y et ϵ_i sont supposées des variables gaussiennes centrées, réduites et indépendantes. Y s'interprète comme une variable systémique, qui représente l'état de l'économie, tandis que ϵ_i représente le risque individuel ou idiosyncratique.

Comme pour les portefeuilles de CDS, le i-ème émetteur fait défaut avant la date t, si la variable X_i passe en-dessous d'une certaine barrière $K_i(t)$. De même, nous supposons que le i-ème émetteur prépaie avant la date t, si X_i passe au-dessus d'une barrière $H_i(t)$:

$$\mathbb{P}_i^d(t) = \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_i^c(t) = \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t))$$

Afin que ces probabilités soient égales à celles obtenues à partir des spreads de marché avec notre modèle de LCDS, nous devons choisir les seuils de la manière suivante :

$$K_i(t) = \Phi^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) \quad \text{et} \quad H_i(t) = \Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t))$$

Nous illustrons ceci dans la figure ci-dessous, où nous avons pris un portefeuille avec 5 noms, ayant les mêmes probabilités de défaut et de prépaiement :

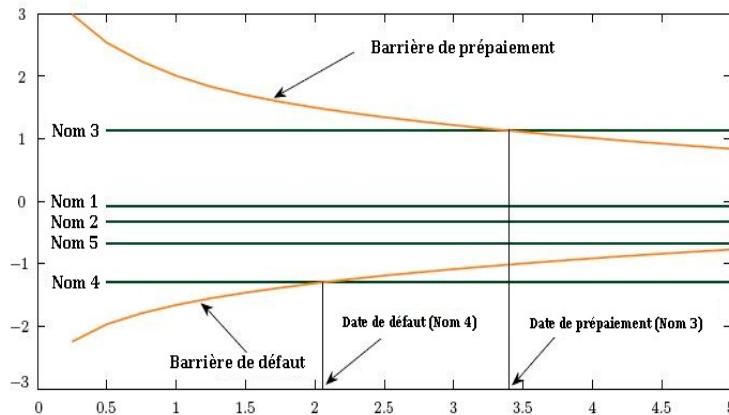


FIG. 4.2 – Simulation de variables latentes dans le cadre du modèle gaussien

En revenant au modèle gaussien, nous pouvons facilement voir que les probabilités risque-neutre de défaut et de prépaiement à un horizon t , conditionnellement à $Y = y$, s'écrivent :

- $\mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)/Y = y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$
- $\mathbb{P}(X_i \geq H_i(t)/Y = y) = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

Nous remarquerons que quand l'état de l'économie s'améliore (ie plus y est grand), alors ces deux probabilités tendent vers 0 et 1 respectivement. Et dans le cas contraire, ces probabilités conditionnelles tendent vers 1 et 0 respectivement.

Nous allons maintenant procéder à la corrélation des temps de défaut et de prépaiement conditionnellement au facteur commun Y . Soit le vecteur gaussien multidimensionnel centré $X = (X_1, \dots, X_I)$ et notons Φ_I sa fonction de répartition. Ensuite, nous nous plaçons à horizon T fixé et nous passons des valeurs X_i aux événements : défaut, prépaiement ou survie, par une transformation monotone des X_i . Cela est possible puisque le modèle est désormais statique : pour une réalisation donnée de $X = (X_1, \dots, X_I)$, nous obtenons une réalisation du vecteur $Z = (Z_1, \dots, Z_I)$ où :

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } X_i \geq H_i(T) \text{ (prépaiement)} \\ 0 & \text{lorsque } X_i \in [K_i(T), H_i(T)] \text{ (survie)} \\ -1 & \text{lorsque } X_i \leq K_i(T) \text{ (défaut)} \end{cases}$$

D'après les expressions de $K_i(T)$ et $H_i(T)$ précédentes, nous trouvons la loi de (Z_1, \dots, Z_I) , que nous écrivons dans le cas où par exemple, le premier nom fait défaut et le dernier nom prépaie :

$$\mathbb{Q}(Z_1 = -1, \dots, Z_I = 1) = \Phi_I(\Phi^{-1}(\mathbb{P}_1^d(T)), \dots, \Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_I^c(T)))$$

Enfin, à l'aide du théorème de Sklaar (1959), nous pouvons exprimer la loi du vecteur $(Z_i)_{1 \leq i \leq I}$ en fonction de la copule gaussienne C^{Ga} . En considérant toujours l'exemple précédent, nous appliquons le théorème pour $(x_1, \dots, x_I) = (\Phi^{-1}(\mathbb{P}_1^d(T)), \dots, \Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_I^c(T)))$:

$$\begin{aligned}\Phi_I(x_1, \dots, x_I) &= C^{Ga} [\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_I)] \\ &= C^{Ga} [\mathbb{P}_1^d(T), \dots, 1 - \mathbb{P}_I^c(T)]\end{aligned}$$

La propriété d'indépendance conditionnelle

Puisque la corrélation est introduite conditionnellement au facteur commun Y, les X_i ne dépendent plus que de la variable idiosyncratique ϵ_i , qui représente le risque spécifique à chaque émetteur. De ce fait, conditionnellement à ce facteur y, notre modèle présente la propriété importante de l'indépendance des événements de défauts entre eux d'une part, et des prépalements entre eux d'autre part.

4.3 Les méthodes d'évaluation des VAN d'une tranche

Nous définissons la valeur actuelle nette de la tranche $[K_A, K_D]$ comme :

$$VAN(K_A, K_D, T, S_c) = VAN_{Prime}(S_c) - VAN_{Prot}$$

Dans ce qui suit, nous allons décrire deux méthodes qui permettent d'évaluer cette quantité.

4.3.1 La méthode récursive

La méthode récursive a été suggérée pour la première fois pour l'évaluation des dérivés de crédit par Andersen et al. (2003). Elle s'est très vite répandue dans la littérature financière grâce à sa simplicité et à la facilité de sa mise en oeuvre. Dans cette partie, nous allons présenter une extension de cette méthode aux portefeuilles composés de LCDS. Pour simplifier la présentation, nous allons supposer que les taux de récupération R_i et les poids ω_i sont les mêmes pour tous les émetteurs. Nous raisonnons ainsi en terme de nombre de défauts et prépalements plutôt qu'en diminution et perte du portefeuille.

Afin de déterminer les pertes et diminutions espérées, et par la suite le notionnel restant à la date t de la tranche considérée, il nous reste à calculer la probabilité jointe d'avoir k défauts et l prépalements parmi I émetteurs avant cette date t. Nous notons cette probabilité sous la forme $\Pi_{k,l}^I(t) = \mathbb{P}(k \text{ défauts et } l \text{ prépalements})$ et conditionnellement au facteur commun Y :

$$\Pi_{k,l}^{I,y}(t) = \mathbb{P}(k \text{ défauts et } l \text{ prépalements} / Y = y)$$

Rappelons que dans le cadre de notre modèle, les défauts et prépalements sont conditionnellement indépendants et commençons par étudier les cas de 0, puis 1 émetteur.

- Le cas $I = 0 : \Pi_{0,0}^{0,y}(t) = 1$.

- Le cas $I = 1$: $\begin{cases} \Pi_{0,0}^{1,y}(t) = 1 - p_1(y, t) - q_1(y, t) \\ \Pi_{1,0}^{1,y}(t) = p_1(y, t) \\ \Pi_{0,1}^{1,y}(t) = q_1(y, t) \end{cases}$

où $p_1(y, t)$ et $q_1(y, t)$ sont respectivement les probabilités conditionnelles de défaut et de prépaiement du premier émetteur. Ainsi, si nous supposons $\Pi_{-1,l}^{I,y}(t) = \Pi_{k,-1}^{I,y}(t) = 0$, nous obtenons la formule récursive ci-dessous pour les probabilités jointes d'avoir k défauts et l prépaiement. Soient $n \in (0, \dots, I-1)$ et $(k, l) \in (0, \dots, n)^2$:

- $\Pi_{0,0}^{0,y}(t) = 1$
- $\boxed{\Pi_{k,l}^{n+1,y}(t) = (1 - p_{n+1}(y, t) - q_{n+1}(y, t))\Pi_{k,l}^{n,y}(t) + p_{n+1}(y, t)\Pi_{k-1,l}^{n,y}(t) + q_{n+1}(y, t)\Pi_{k,l-1}^{n,y}(t)}$

avec $p_{n+1}(y, t) = \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)/Y = y)$ et $q_{n+1}(y, t) = \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t)/Y = y)$ dont les expressions sont explicitées dans la section "Le modèle gaussien à un facteur". Comme un LCDS ne peut faire défaut et prépayer en même temps, la récursion précédente fournit une matrice triangulaire avec nécessairement $k + l \leq n$. Ensuite, pour passer au probabilités non-conditionnelles, nous intégrons par rapport au facteur commun Y :

$$\Pi_{k,l}^I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{k,l}^{I,y}(t) dF_y$$

Les distributions marginales du nombre de défauts et de prépaiements s'obtiennent facilement à partir des expressions ci-dessus :

$$\Pi_k^d(t) = \sum_{l=0}^{I-k} \Pi_{k,l}^I(t) \quad \text{et} \quad \Pi_l^c(t) = \sum_{k=0}^{I-l} \Pi_{k,l}^I(t)$$

Ainsi, en s'appuyant sur les résultats de la partie "description du portefeuille et de la tranche", nous pouvons désormais déterminer les expressions de la perte et diminution es-pérées du portefeuille P :

- $\mathbb{E}(L_t) = (1 - \bar{R}) \sum_{k=1}^I \frac{k}{I} \Pi_k^d(t)$
- $\mathbb{E}(D_t) = \bar{R} \sum_{k=1}^I \frac{k}{I} \Pi_k^d(t) + \sum_{l=1}^I \frac{l}{I} \Pi_l^c(t)$

En ce qui concerne la tranche $[K_A, K_D]$, nous trouvons :

- $\mathbb{E}(L_t^{K_A, K_D}) = \mathbb{E}[(L_t - K_A)^+] - \mathbb{E}[(L_t - K_D)^+]$
- $\mathbb{E}(D_t^{K_A, K_D}) = \mathbb{E}[(D_t - N + K_D)^+] - \mathbb{E}[(D_t - N + K_A)^+]$

En remplaçant dans les équations des VAN des jambes de primes et de protection et en sommant sur les dates de paiements $t_1, \dots, t_n = T$, nous trouvons le spread de marché ou "fair spread" :

$$\boxed{S^{fair} = \frac{\sum_{j=1}^n Z(t_j)(\mathbb{E}[L_{t_j}^{K_A, K_D}] - \mathbb{E}[L_{t_{j-1}}^{K_A, K_D}])}{\sum_{j=1}^n Z(t_j)(K_D - K_A - \mathbb{E}[L_t^{K_A, K_D}] - \mathbb{E}[D_t^{K_A, K_D}])\Delta t_j}}$$

4.3.2 La méthode de Monte-Carlo

Il existe plusieurs manière de procéder à des simulations de Monte-Carlo pour l'évaluation des VAN des jambes d'une tranche d'un CDO composé de CDS. Une première méthode est de simuler les pertes espérées de la tranche aux dates de paiements et une deuxième est de passer plutôt aux temps de défaut. Nous allons ici présenter la deuxième méthode car elle se transpose mieux aux portefeuilles de LCDS et car elle est moins coûteuse en temps de calcul.

Tout d'abord, nous allons expliciter les formules des temps de défaut et de prépaiement.

- $\mathbb{Q}(\tau_i^d \leq T) = \mathbb{Q}(X_i \leq K_i(T)) = \mathbb{Q}(X_i \leq \Phi^{-1}(\mathbb{P}_i^d(T)))$
- $\mathbb{Q}(\tau_i^c \leq T) = \mathbb{Q}(X_i \geq H_i(T)) = 1 - \mathbb{Q}(X_i \leq \Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(T)))$

Or nous avons vu lors de l'évaluation des LCDS que ces probabilités s'écrivent :

$$\mathbb{P}_i^d(t) = 1 - \exp(-\lambda_i(t)) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_i^c(t) = 1 - \exp(-c_i(t))$$

Il en résulte pour les temps de défaut par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_i^d \leq T) &= \mathbb{Q}\left[X_i \leq \Phi^{-1}[1 - \exp(-\lambda_i(T))]\right] \\ &= \mathbb{Q}[\Phi(X_i) \leq 1 - \exp(-\lambda_i(T))] \\ &= \mathbb{Q}\left[\lambda_i^{-1}[-\ln(1 - \Phi(X_i))] \leq T\right] \end{aligned}$$

Nous effectuons le même calcul pour les temps de prépaitements et nous obtenons donc les expressions explicites des τ_i^d et des τ_i^c :

$$\tau_i^d = \lambda_i^{-1}[-\ln(1 - \Phi(X_i))] \quad \text{et} \quad \tau_i^c = c_i^{-1}[-\ln(\Phi(X_i))]$$

Une fois ces formules établies, nous pouvons évaluer par Monte-Carlo les valeurs actuelles nettes de la tranche en suivant l'algorithme suivant :

1. Nous tirons d'abord une réalisation x_1, \dots, x_I du vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_I) \sim \mathcal{N}_I(0, \Gamma)$. Pour cela, il suffit de simuler des variables gaussiennes centrées et réduites et d'utiliser la relation : $X_i = \rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i$.
2. Ensuite, pour cette réalisation x_1, \dots, x_I , nous calculons pour tout $i = 1, \dots, I$, les temps de défaut et de prépaitement à partir des formules ci-dessus. De plus, nous introduisons un temps d'interruption défini comme le minimum entre le temps de défaut, le temps de prépaitement et la maturité : $\tau_i = \tau_i^d \wedge \tau_i^c \wedge T$ ainsi qu'une indicatrice indiquant dans le cas de l'interruption du LCDS i, lequel des évènements (défaut ou prépaitement) a eu lieu en premier.
3. Puis, avec les réalisations des τ_1, \dots, τ_I et des indicatrices correspondantes, nous pouvons facilement retrouver les flux de paiements, et évaluer ainsi les jambes de primes et de protection.
4. Nous obtenons enfin le spread de marché en réitérant les étapes précédentes un nombre important de fois et en calculant la moyenne des spreads de chacune des réalisations.

4.4 La corrélation implicite ou Base Correlation

4.4.1 L'influence de la corrélation sur les spreads

Nous allons dans cette partie étudier l'impact de la corrélation sur les distributions des fonctions de pertes et de diminution. Pour cela, considérons à nouveau le portefeuille P et supposons qu'il contient trois grandes tranches : *equity, mezzanine et senior*. Nous rappelons les expressions des fonctions de pertes et de diminution :

- $L_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (1 - R_i) \mathbf{1}_{\tau_i^d \leq t}$
- $D_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (R_i \mathbf{1}_{\tau_i^d \leq t} + \mathbf{1}_{\tau_i^c \leq t})$

Nous constatons ainsi l'importance du choix de la corrélation ρ dans le modèle gaussien à un facteur puisque ces distributions vont fortement dépendre de la corrélation des indicatrices entre elles. En effet, lorsque la corrélation est très élevée, cela va contribuer à avoir des probabilités extrêmes très importantes. En d'autres termes, il y aura très probablement, ou bien très peu d'événements de crédit (défaits ou prépaiements), ou bien, de nombreux événements de crédit joints. D'autre part, lorsque la corrélation est faible, les probabilités des événements extrêmes sont faibles.

Nous avons simulé les pertes et les diminutions du portefeuille en fonction de la corrélation. Les résultats sont représentés en figures 4.3 et 4.4, nous observons bien que les formes de densités sont représentatives de ce que nous avons mentionné plus tôt.

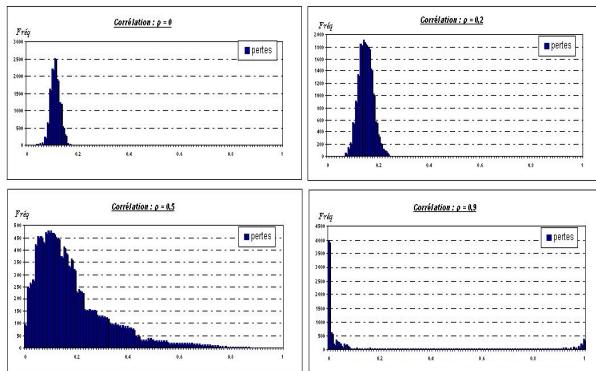


FIG. 4.3 – Densité des pourcentages de perte en fonction de la corrélation

De ce fait, un investisseur dans la tranche *senior* préfère une faible corrélation car seul un grand nombre de défauts et prépaiements joints pourrait l'affecter, alors qu'un investisseur dans la tranche *equity* préfère une corrélation élevée et espère que le portefeuille ne connaîtra que très peu de défauts. Il est donc clair que le spread de la tranche *equity* (respectivement *senior*) est décroissant (respectivement croissant) par rapport à la corrélation. En effet, nous retrouvons le même résultat au niveau des calculs :

- La VAN d'un vendeur de protection sur la tranche *equity* augmente lorsque la corrélation augmente. On dit alors qu'il est *long* sur la corrélation.

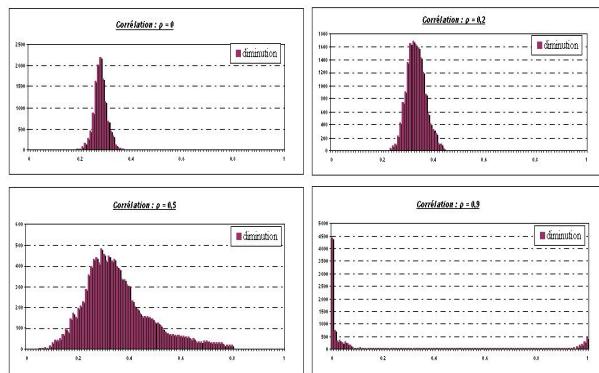


FIG. 4.4 – Densité des pourcentages de diminution en fonction de la corrélation

- La VAN d'un vendeur de protection sur la tranche *senior* baisse lorsque la corrélation augmente. On dit alors qu'il est *short* sur la corrélation.

En ce qui concerne la tranche *mezzanine* (ou les tranches si l'on parle de l'indice LCDX), l'impact de la corrélation est plus complexe. En fait, il n'y a pas de relation monotone entre le spread et la corrélation. Les vendeurs de protection sur cette tranche sont *short* sur la corrélation quand elle est faible, et *long* quand elle est élevée. Cela cause donc des problèmes de calibration du modèle puisque pour un même spread observé sur le marché, nous risquons d'avoir deux valeurs pour la corrélation. Pour résoudre ce problème d'unicité, il va falloir introduire un autre concept, celui de Base Correlation.

4.4.2 La calibration de la Base Correlation

A l'image de la corrélation implicite obtenue à partir du modèle de Black et Scholes pour les options sur actions, nous pouvons également pour le marché des dérivés de crédit " impliquer " une corrélation en utilisant le modèle gaussien à un facteur commun. Or, nous avons vu précédemment qu'il y avait un problème d'unicité de la corrélation, uniquement pour la tranche *mezzanine*. Le concept de la Base Correlation consiste donc à se ramener systématiquement à des tranches *equity*, ce qui permettra d'obtenir l'unicité de cette corrélation. En d'autres termes, nous allons utiliser la propriété d'additivité des fonctions de perte et de diminution du portefeuille :

$$\begin{aligned} - L_t^{[K_1, K_2]} &= L_t^{[0, K_2]} - L_t^{[0, K_1]} \\ - D_t^{[K_1, K_2]} &= D_t^{[0, K_2]} - D_t^{[0, K_1]} \end{aligned}$$

Passons maintenant aux différentes étapes de calcul de la Base Correlation. Soient S_e et S_m les spreads respectifs des tranches *equity*, *mezzanine* et ρ le paramètre à calibrer dans $[0, 1]$. Nous savons que le spread de marché correspond à la valeur qui égalise les valeurs actuelles nettes de la jambe fixe et de la jambe de protection de la tranche. Pour la tranche *equity*, nous avons l'équation à une inconnue ρ suivante :

$$VAN_\rho^{\text{Prime}}(S_e, 0, K_1, T) - VAN_\rho^{\text{Prot}}(0, K_1, T) = 0$$

La solution de cette équation est appelée Base Correlation associée au strike K_1 , qu'on notera ρ_1 pour la suite. En ce qui concerne la tranche *mezzanine*, nous utilisons la propriété d'additivité des fonctions de pertes et de diminution, dont les espérances s'écrivent :

$$\begin{aligned} - \mathbb{E}L_t^{[K_1, K_2]} &= \mathbb{E}_{\rho_1}(L_t - K_1)^+ - \mathbb{E}_{\rho}(L_t - K_2)^+ \\ - \mathbb{E}D_t^{[K_1, K_2]} &= \mathbb{E}_{\rho}(D_t - N + K_2)^+ - \mathbb{E}_{\rho_1}(D_t - N + K_1)^+ \end{aligned}$$

Notons toutefois que l'équation précédente est incohérente puisqu'on utilise des corrélations différentes pour calculer la diminution et la perte de la tranche *mezzanine*. C'est toutefois cette incohérence qui permettra d'avoir des valeurs actuelles nettes qui ne dépendront que d'une seule inconnue ρ et de résoudre ainsi l'équation. D'ailleurs, toujours comme pour la volatilité implicite de Black-Scholes, on dit parfois que c'est le nombre faux qu'on rentre dans la formule fausse pour obtenir la bonne réponse. Ensuite, en remplaçant les expressions de la perte et de la diminution dans les VAN de la tranche, nous résolvons la nouvelle équation à une inconnue ρ suivante :

$$VAN_{\rho_1, \rho}^{Prime}(S_m, K_1, K_2, T) - VAN_{\rho_1, \rho}^{Prot}(K_1, K_2, T) = 0$$

Nous appelons Base Correlation associée au strike K_2 la solution ρ_2 de l'équation ci-dessus. De proche en proche, nous réitérons les étapes précédentes en montant dans le niveau des strike de portefeuille P et obtenons ainsi les Bases Correlation associées. Contrairement à la volatilité implicite de Black-Scholes qui forme un *smile* ou un sourire, la Base Correlation forme quant à elle un *skew* :

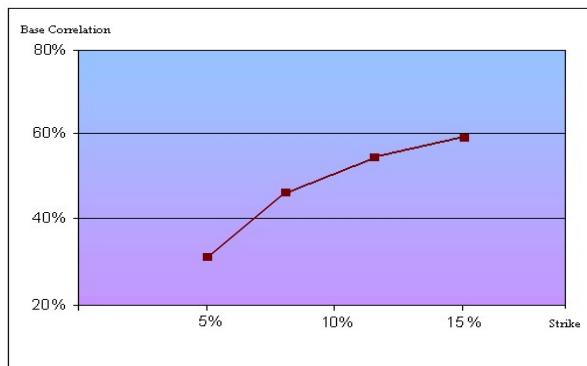


FIG. 4.5 – Le *skew* de Base Correlation en fonction du niveau de Strike

4.5 Résultats de l'évaluation des tranches de Loan CDO

4.5.1 Etude de la sensibilité à la corrélation

Pour tester le modèle gaussien à un facteur nous commençons par évaluer les sensibilités de chaque tranche du portefeuille au facteur de corrélation ρ . Nous pensons retrouver de manière intuitive les résultats propres aux CDO classiques.

Pour ce faire nous utilisons un portefeuille de 100 LCDS equipondérés de spreads différents. Nous fixons de manière arbitraire des paramètres identiques :

- Maturité du portefeuille : 5 ans
- Taux d'intérêt constant à 5%
- Paiement trimestrielle des flux
- Courbe des intensités d'annulation croissante constante par morceaux cf figure 5.1
- Taux de recouvrement de 70%

Maturité	6 mois	1 an	2ans
Intensité d'annulation	10%	20%	30%

FIG. 4.6 – Courbe d'intensités d'annulation

Nous comparons ces résultats au cas de non-prépaiement pour avoir une première idée de l'impact du prépaiement sur les spreads des tranches.

Nous observons que pour la tranche *equity* le spread implicite est décroissant avec la corrélation. Nous retrouvons bien ce que nous avons mentionné précédemment, le vendeur de protection exigera un spread plus faible quand les entreprises seront plus corrélées. L'investisseur sur un tranche *equity* parie donc sur une augmentation de la corrélation. Il est à noter que le risque de prépaiement n'a aucun impact sur la tranche *equity*. En fait ce résultat est totalement prévisible et découle du modèle à deux barrières. En fait selon le modèle les barrières de prépaiement et de défaut ne se coupent pas, le facteur de prépaiement n'a alors aucun impact sur le défaut. Implicitement les défauts et les annulations sont parfaitement corrélés négativement. Car si le modèle prévoyait que les barrières puissent se couper l'événement de prépaiement pourrait empêcher l'événement de perte.

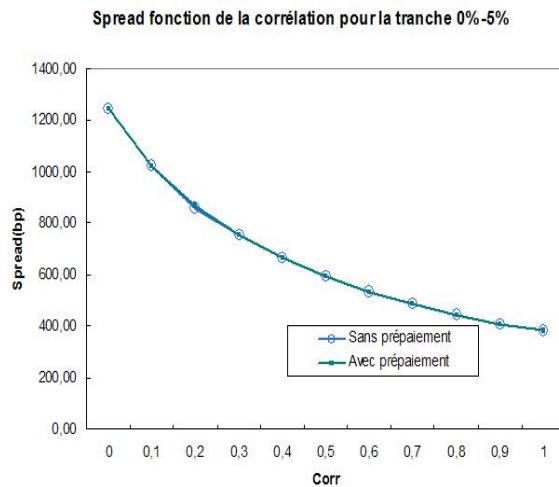


FIG. 4.7 – Spread de la tranche equity en fonction du ρ de corrélation

Ici, nos deux portefeuilles présentent des LCDS avec des probabilités de défaut identiques.

La jambe de protection ne dépendant que des pertes de la tranche et donc des probabilités de défaut, les jambes de protection calculées dans les hypothèses de prépaiement ou non sont de ce fait les mêmes. Au niveau de la prime ou jambe fixe celle-ci est aussi impactée par la diminution supérieure de la tranche. Or les probabilités de prépaiement sont trop faibles pour que la tranche *equity* soit impactée par cette diminution, d'où une jambe fixe identique dans les deux cas.

Pour la tranche *equity*, que les LCDS soient annulés ou non l'impact sur le spread est nul.

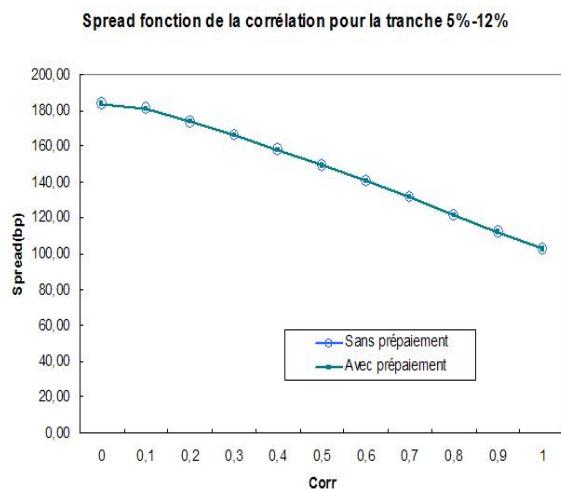


FIG. 4.8 – Spread de la tranche mezzanine en fonction du ρ de corrélation

Au niveau de la tranche *mezzanine* l'impact de la corrélation est moins marqué et présente un caractère beaucoup plus linéaire que pour la tranche *equity*. Nous retrouvons toujours cependant la sensibilité négative du spread à la corrélation. Nous observons que pour les mêmes raisons que précédemment, le facteur de prépaiement ne touche pas non plus cette tranche.

Au niveau de la tranche *junior senior* l'impact de la corrélation est plus difficile à analyser et correspond à l'état intermédiaire dont nous avions parlé. Pour des niveaux de corrélation quasi nuls la tranche a peu de chance d'être touchée d'où des spreads faibles. Pour les corrélations faibles le spread augmente avec le niveau de corrélation, l'investisseur dans cette tranche espère sachant que les niveaux de corrélation sont faibles que la corrélation va diminuer.

Nous observons ensuite un maximum vers 60% avant que le spread ne diminue avec la corrélation. Nous comprenons bien qu'un niveau de corrélation de 100% pour cette tranche intermédiaire est moins risqué qu'un scénario de corrélation moyenne dans lequel les risques sont plus dispersés. Nous retrouvons aussi le problème mentionné plus tôt concernant la calibration de la corrélation sur une telle tranche. En effet au regard de la courbe nous nous retrouvons confronté à des solutions doubles de corrélation pour un spread donné.

Le facteur de prépaiement ne rentre toujours pas en compte pour cette tranche.

La sensibilité des spreads de la tranche *super senior* à la corrélation est monotone et est

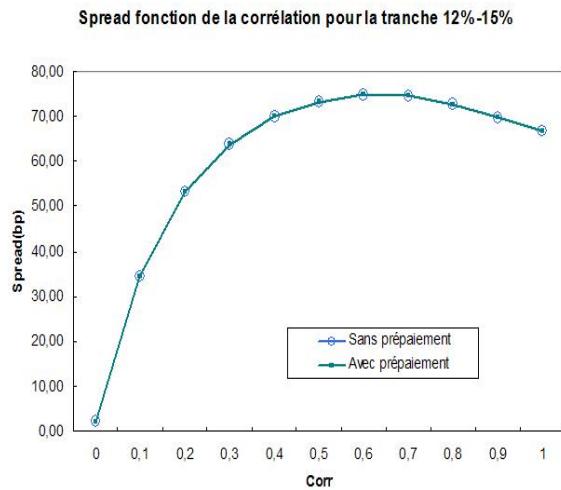


FIG. 4.9 – Spread de la tranche junior senior en fonction du ρ de corrélation

croissante avec la corrélation. Ceci confirme l'intuition selon laquelle cette tranche est exposée à la concentration des pertes. Comme dans le cas de la tranche *junior senior* un niveau de corrélation quasi nul donne un spread nul.

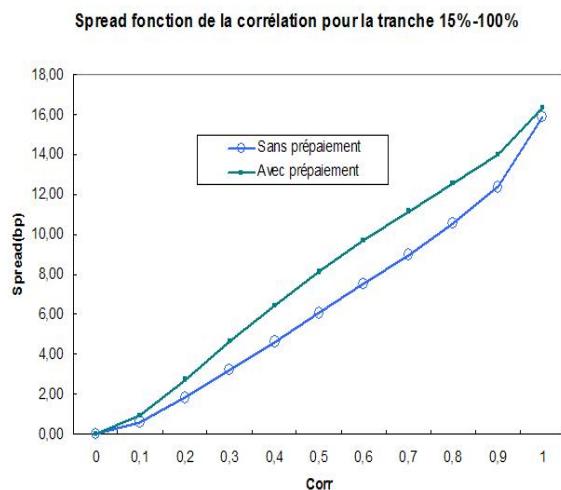


FIG. 4.10 – Spread de la tranche super senior en fonction du ρ de corrélation

Au niveau du facteur de prépaiement nous pouvons remarquer que ce facteur impacte le spread de cette tranche. Intuitivement le prépaiement augmente l'espérance de diminution de la tranche *super senior*. La jambe fixe calculée à partir du notionnel restant sera alors plus petit. La jambe de protection étant indépendante du prépaiement celle-ci reste fixe. Il en découle que le spread implicite augmente : le vendeur de protection garde le même risque en cas de défaut alors que pour l'acheteur, le prépaiement diminue sa prime. Sur la tranche *super senior* le vendeur de protection est donc exposé au risque de prépaiement.

Ce risque de prépaiement nous allons l'étudier plus en détail dans la prochaine partie.

4.5.2 Etude du risque de prépaiement

Comme mentionné précédemment, uniquement la tranche *super senior* est exposée au risque de prépaiement. Pour avoir une meilleure approche de ce risque nous avons choisi de découper cette tranche en trois (40%-55%, 55%-70%, 70%-85%) et d'observer la sensibilité de la valeur actualisée nette de ces tranches au taux de prépaiement.

Nous gardons le même portefeuille que précédemment et fixons le taux de corrélation ρ à 50%. Nous avons fait varier le taux de prépaiement de 1%

- Le risque de prépaiement augmente lorsque l'on monte dans les tranches. A taux de prépaiement égal l'espérance de diminution sera en effet plus grand pour la tranche supérieure.
- La forme des courbes suggère que la sensibilité au risque décroît avec le taux d'annulation.
- Le risque de prépaiement est alors que le taux d'annulation soit supérieur à celui anticipé.

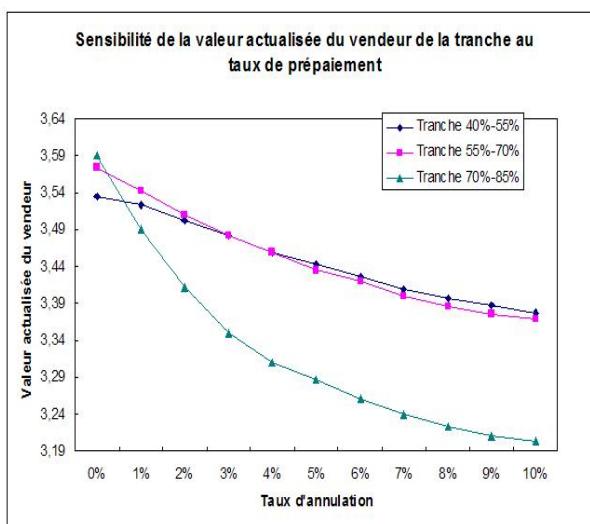


Fig. 4.11 – Risque de prépaiement de la tranche super senior

Nous venons de voir le risque lié à une sous-estimation du prépaiement, nous allons maintenant étudier comment la possibilité de prépaiement influe sur l'évaluation des tranches.

4.5.3 Impact du prépaiement, comparaison à un portefeuille de CDS

Précédemment nous avons comparé deux portefeuilles de LCDS avec des taux de défauts identiques mais des hypothèses de prépaiement différentes. Ici il s'agit de comparer deux portefeuilles l'un de LCDS et l'autre de CDS : les taux de défauts seront différents.

Nous introduisons trois types de portefeuilles A, B, et C de 100 noms identiques avec un taux de recouvrement de 70% , un niveau de corrélation ρ de 40% et une maturité de 5 ans :

- Portefeuille A : C'est le portefeuille sain, les spreads sont faibles 50 bp et le taux d'annulation constant élevé à 20%.
- Portefeuille B : C'est le portefeuille intermédiaire, les spreads sont égaux à 300 bp et le taux d'annulation constant à 10%.
- Portefeuille C : C'est le portefeuille de mauvaise qualité, les spreads sont élevés égaux à 1 000 bp et le taux d'annulation est faible constant à 1%.

Nous résumons dans la figure 4.12 les caractéristiques de chacun des portefeuilles.

	Portefeuille A		Portefeuille B		Portefeuille C	
	CDS	LCDS	CDS	LCDS	CDS	LCDS
Spread	50bp	50bp	300bp	300bp	1000bp	1000bp
Maturité	5 ans	5 ans	5 ans	5 ans	5 ans	5 ans
Taux de recouvrement	70%	70%	70%	70%	70%	70%
Taux d'annulation	20%	20%	10%	10%	1%	1%
Probabilité de défaut	7,96%	8,03%	39,22%	39,35%	81,00%	81,01%
Probabilité d'annulation		63,0%		39,0%		5,0%
Barrière de défaut	-1,41	-1,40	-0,27	-0,27	0,88	0,88
Barrière d'annulation		0,66		1,27		2,65

FIG. 4.12 – Caractéristiques des portefeuilles A, B et C

Nous observons que comme vu dans le chapitre 2, le prépaiement diminue le spread du LCDS par rapport au spread du CDS. Le LCDS présente alors un taux de défaut légèrement supérieur au LCDS à spread équivalent. Au niveau des barrières de défaut et d'annulation à horizon de 5 ans, nous remarquons qu'elles ne se coupent pas. Cela confirme ce que nous avons mentionné plus tôt, pour des scénarios réalisistes le modèle corrèle négativement les défauts et les prépaitements.

Analysons l'évaluation des tranches de ces portefeuilles. De manière globale nous observons que les spreads des portefeuilles augmentent avec le niveau des risques des constituants. Les jambes de protection estimées sont supérieures pour les portefeuilles de LCDS que pour les portefeuilles de CDS. Cette jambe dépend uniquement des pertes espérées des tranches, elle dépend alors comme nous l'avons déjà dit uniquement des probabilités de défaut. Or pour les LCDS celles-ci sont supérieures, les résultats sont donc cohérents avec ce qui est attendu. Pour les jambes fixes, elles diminuent avec les pertes et les prépaitements : pour les tranches *super senior*, elles devraient être plus ou moins inférieures pour les portefeuilles de LCDS. Ces deux phénomènes combinés devraient générer des spreads plus élevés pour les portefeuilles de LCDS.

Dans le portefeuille A où les défauts sont très faibles les jambes de protections sont faibles. La différence marquante est constatée au niveau de la tranche *super senior* pour laquelle la

Tranche	Protection		PV01		Spread	
	CDS	LCDS	CDS	LCDS	CDS	LCDS
0%-5%	187,53	191,29	16,92	16,81	1108,59	1138,05
5%-12%	21,94	23,21	30,27	30,25	72,46	76,73
12%-15%	0,65	0,71	13,11	13,11	4,97	5,41
15%-100%	0,15	0,17	359,42	317,81	0,04	0,05

FIG. 4.13 – Evaluation du portefeuille A

PV01 du portefeuille de LCDS est significativement plus faible que la PV01 du portefeuille de CDS 317bp contre 359bp. Ceci peut s'expliquer par le fait que la diminution du notionnel de cette tranche est fortement impactée par la forte probabilité d'annulation de chaque LCDS, alors que la diminution due aux recouvrements est faible vu les faibles taux de perte.

Pour le portefeuille B les jambes de protections sont logiquement plus élevées que pour le portefeuille A. Les PV01 sont plus faibles car le notionnel restant est plus faible à cause des défauts. Au niveau de la tranche *super senior* la PV01 est égale à 252 bp, le fort taux de recouvrement de 70% impacte directement la diminution de la tranche super senior. Malgré des probabilités de prépaiement plus faibles, les probabilités de défaut plus élevées jouent en effet un rôle important dans l'évaluation de cette tranche.

Tranche	Protection		PV01		Spread	
	CDS	LCDS	CDS	LCDS	CDS	LCDS
0%-5%	453,18	454,06	6,13	6,06	7393,98	7492,39
5%-12%	419,98	424,52	21,06	20,92	1994,37	2029,71
12%-15%	91,28	93,34	11,60	11,56	786,84	807,44
15%-100%	81,40	84,25	308,65	252,06	26,43	33,42

FIG. 4.14 – Evaluation du portefeuille B

Le portefeuille C enregistre très peu de prépaiements. Donc la diminution de la tranche *super senior* sera principalement due aux recouvrements des défauts. C'est ce qu'on observe avec des portefeuilles très semblables. Les PV01 sont resserrées 180bp contre 205bp, au bout de 5 ans nous aurons à peu près 5 noms qui auront prépayé, la différence provient principalement de cette proportion de prépaiement.

Tranche	Protection		PV01		Spread	
	CDS	LCDS	CDS	LCDS	CDS	LCDS
0%-5%	488,40	488,41	1,65	1,65	29529,76	29572,88
5%-12%	655,45	655,51	7,59	7,58	8632,74	8644,82
12%-15%	267,38	267,45	5,30	5,30	5041,41	5048,79
15%-100%	802,98	804,04	205,31	180,32	391,21	445,89

FIG. 4.15 – Evaluation du portefeuille C

Détenir une tranche *super senior* de portefeuille de LCDS s'avère plus risquer que de détenir une tranche *super senior* de portefeuille de CDS.

Nous avons ensuite choisi de fabriquer un portefeuille composé d'un tiers de portefeuille A, un tiers de portefeuille B et un tiers de portefeuille C. En étudiant ce portefeuille nous pouvons nous attendre à ce que les LCDS sains préparent plus vite que les autres et que les mauvais LCDS fassent défauts aussi en plus grande proportion. Nous pouvons penser alors que ce portefeuille sera surpondéré en actifs B, ce qui donnera des évaluations proches de ce portefeuille

Au niveau des tranches *equity*, *mezzanine* et *junior senior* ce portefeuille est plus risqué que le portefeuille B. Ceci s'explique par le fait que les PV01 sont bien plus faibles et les jambes de protection plus élevées. Les pertes espérées sont plus grandes. Il est cependant moins risqué au niveau de la tranche super senior car les pertes espérées de cette tranche sont plus faibles.

Tranche	Protection		PV01		Spread	
	CDS	LCDS	CDS	LCDS	CDS	LCDS
0%-5%	475,93	476,04	3,88	3,86	12262,75	12319,33
5%-12%	517,71	519,63	17,65	17,57	2933,38	2957,71
12%-15%	106,41	108,10	11,33	11,29	939,58	957,42
15%-100%	55,62	57,49	296,98	234,32	18,72	24,54

FIG. 4.16 – Evaluation du portefeuille equipondéré des A, B et C

Le portefeuille précédent correspondait aux comportements observés sur le marché avec des taux d'annulation élevés quand l'émetteur est en bonne santé. Nous composant maintenant un portefeuille dans lequel A en bonne santé a un taux d'annulation très faible 1% alors que C émetteur en mauvaise santé a un taux d'annulation élevé. Ce portefeuille va voir les LCDS de type C disparaître plus vite que les B et que les A. En effet au final le portefeuille sera assez sain car il restera une proportion élevée de A qui n'aura ni fait défaut ni prépayée. Etudions comment cela se traduit au niveau de l'évaluation des tranches.

Les tranches *equity*, *mezzanine* et *junior senior* sont plus dangereuses pour notre nouveau portefeuille. En effet C ayant une probabilité d'annulation plus grande, à spread constant, C a une probabilité de défaut plus grande. Donc les premières tranches sont plus risquées. Ce risque s'inverse au niveau de la tranche super senior : le nouveau portefeuille est moins risqué sur cette tranche. On pouvait s'y attendre sachant que les deux portefeuilles présentent autant de préparations mais que le nouveau portefeuille enregistre moins de perte car le C est éliminé par prépaiement et qu'il reste au final une grande quantité de A.

Conclusions : Les résultats du pricing des tranches de Loan-CDO nous permettent de retrouver ce que nous suggère l'intuition. Tout d'abord le comportement des tranches à la corrélation est logiquement similaire à ce que fournit un CDO classique. Ensuite, la lecture du modèle nous permet de confirmer l'impact du facteur de prépaiement uniquement sur la tranche *super senior*. Notre pricer semble plutôt bien réagir aux différents tests mis en place.

Tranche	Protection		PV01		Spread	
	LCDS	LCDS bis	LCDS	LCDS bis	LCDS	LCDS bis
0%-5%	476,04	476,52	3,86	3,79	12319,33	12564,91
5%-12%	519,63	523,63	17,57	17,40	2957,71	3009,90
12%-15%	108,10	109,45	11,29	11,26	957,42	971,84
15%-100%	57,49	57,60	234,32	236,48	24,54	24,36

FIG. 4.17 – Evaluation du portefeuille equipondéré des A, B et C en changeant les taux d'annulation

Ce modèle nous fournit donc des premiers résultats acceptables. A ce stade nous pouvons cependant émettre quelques remarques sur les limites d'un tel modèle. C'est ce que nous allons tâcher de faire dans le prochain chapitre pour ensuite proposer une extension au modèle gaussien : le modèle RFL (Random Factor Loadings).

Chapitre 5

Les limites du modèle gaussien

5.1 Critique du modèle gaussien à un facteur

5.1.1 Les lacunes de la copule gaussienne

La modélisation de la structure de dépendance entre variables aléatoires a connu un essor assez conséquent avec l'introduction du concept de copules. Aujourd'hui, ces dernières sont devenues un outil statistique et probabiliste incontournable dans divers domaines d'application de la finance quantitative. En effet, en plus de l'évaluation de dérivés de crédit, l'utilisation des copules s'étend au domaine de mesures de risques multiples de marché ou de crédit, ou celui de la réPLICATION de la performance des hedges funds, ou encore celui du pricing d'options à plusieurs sous-jacents, etc ...

En ce qui concerne la copule gaussienne, elle est actuellement la copule la plus répandue dans les banques et compagnies d'assurance. Cependant, elle a fait l'objet de diverses critiques importantes, notamment à cause de son imprécision dans la modélisation de la dépendance des événements extrêmes. En effet, la copule gaussienne, qui est une copule symétrique, ne possède pas de dépendance aux niveaux supérieur et inférieur des queues (sauf pour une corrélation parfaite de 1). La figure 5.1 permet de visualiser les densités de copules gaussiennes bivariées pour différentes valeurs de corrélations.

Or un intérêt essentiel et pratique des copules consiste justement en la possibilité de modéliser des événements rares. Afin de mieux comprendre cette dernière affirmation, considérons l'exemple du secteur bancaire lors de la faillite, le 15 septembre 2008, de la banque Lehman Brothers. La copule gaussienne ne permet pas de répercuter cet événement rare au risque de faillite des autres banques et apparaît donc comme un outil peu réaliste, surtout quand on voit comment le secteur bancaire a été ébranlé dans son entier ce jour-là.

Pour remédier à ce problème, d'autres copules ont été mobilisées par de nombreux quants. Nous présenterons les plus importantes dans le paragraphe suivant.

5.1.2 Les autres copules candidates

Dans la littérature financière, nous avons rencontré une multitude de candidats possibles pour remplacer la copule gaussienne dans la modélisation des dépendances entre événements de crédit. Nous allons dans ce qui suit tenter de présenter les différentes écritures du modèle

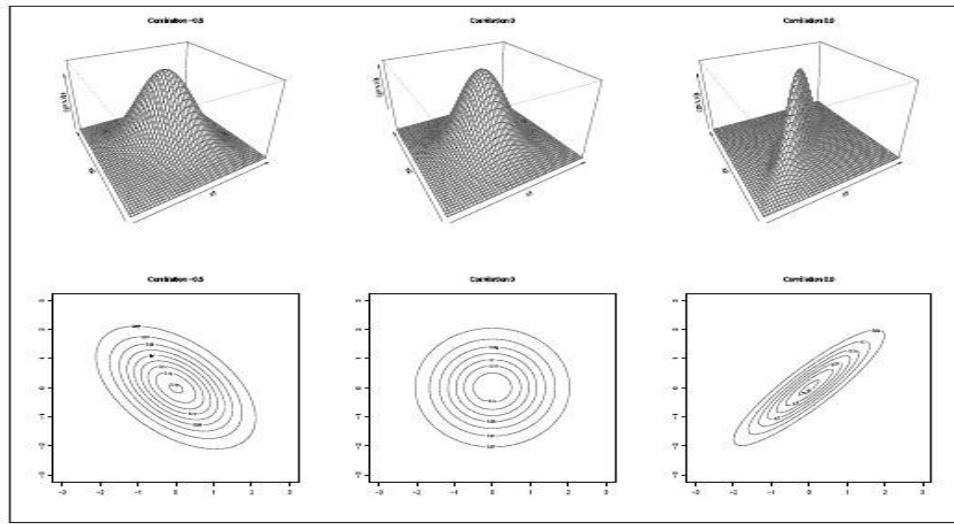


FIG. 5.1 – Densités de copules bivariées gaussiennes pour différentes valeurs de corrélation avec leurs courbes de niveau correspondantes

à facteur commun pour chacune des copules considérées, dont nous pouvons retrouver les définitions en annexe.

La copule de Student

La copule de Student est une extension naturelle de la copule gaussienne et a été suggérée par divers auteurs, comme O’Kane et Schloegl (2001) et Frey et McNeil (2003). Cette copule explique les queues épaisses mieux que la copule gaussienne, mais présente l’inconvénient d’être symétrique également, ce qui engendre de fortes probabilités d’avoir aucun défaut ou prépaiement. Nous pouvons voir dans la figure 5.2 les dépendances de queues supérieure et inférieure d’une telle copule.

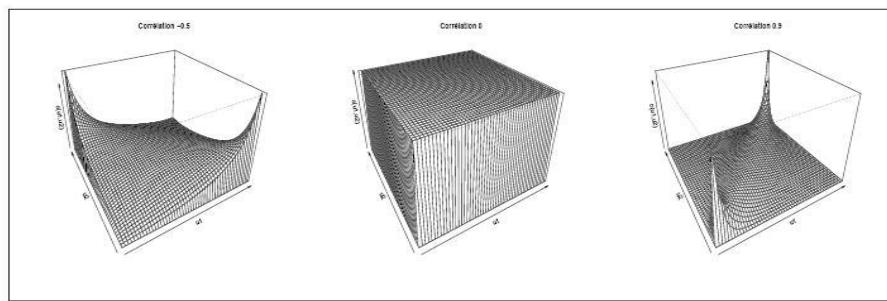


FIG. 5.2 – Densités de copules bivariées de Student pour différentes valeurs de corrélation

Nous posons Y le facteur commun et ε_i le facteur idiosyncratique. Ces derniers sont superposés indépendants et identiquement distribués de loi normale centrée réduite. La valeur X_i de l’émetteur i s’écrit dans ce cas :

$$X_i = \sqrt{W}(\rho Y + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_i)$$

où W est indépendant des facteurs gaussiens et suit une loi Inverse Gamma de paramètre $(\nu/2)$. Les X_i suivent ici une distribution de Student- t_ν . Comme précédemment, nous supposons que le i -ème émetteur fait défaut avant la date t , si la variable X_i passe en-dessous d'une certaine barrière $K_i(t)$, et qu'il prépaie avant la date t , si X_i passe au-dessus d'une barrière $H_i(t)$. Nous avons toujours :

$$\mathbb{P}_i^d(t) = \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_i^c(t) = \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t))$$

Toutefois, dans le cadre de la copule de Student, les barrières s'écrivent :

$$K_i(t) = t_\nu^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) \quad \text{et} \quad H_i(t) = t_\nu^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t))$$

Nous retrouvons ensuite facilement les probabilités conditionnelles de défaut et de prépaiement, qui deviennent donc :

$$\begin{aligned} - \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t) / Y = y) &= \Phi\left(\frac{W^{-\frac{1}{2}} t_\nu^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ - \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t) / Y = y) &= 1 - \Phi\left(\frac{W^{-\frac{1}{2}} t_\nu^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned}$$

Enfin, nous déduisons les VAN de jambes de protection et de prime de la même manière que pour le modèle gaussien, en adoptant la méthode récursive ou de Monte-Carlo. Notons toutefois qu'une solution au problème de symétrie de la copule de Student-t a été proposée par Hull et White (2004) grâce à l'introduction de la copule Double-t qui permet un découplage de la taille et de la forme des queues de distribution supérieure et inférieure.

La copule NIG (Normal Inverse Gaussian)

L'introduction de cette copule a été motivée par deux raisons principales :

- Forme des queues : ce type de copule présente des queues asymétriques et plus épaisses que celles d'une distribution gaussienne.
- Raison pratique : une convolution de variables suivant une distribution NIG reste une variable NIG. Cela facilite beaucoup le calcul des valeurs actuelles nettes des tranches.

Dans un document publié en 2005, Kalemanova et al. écrit la valeur X_i de l'émetteur i sous la forme d'une somme de deux facteurs Y et ϵ_i indépendant et qui suivent une loi NIG :

$$X_i = \rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i$$

De plus, nous posons $F_{NIG(s,\alpha,\beta)}$ la fonction de répartition de la loi NIG de paramètres s, α et β . En gardant les mêmes notations que précédemment, Kalemanova et al. (2005) montre que les probabilités conditionnelles de défaut et de prépaiement s'écrivent :

$$\begin{aligned} - \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t) / Y = y) &= F_{NIG(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, \alpha, \beta)}\left(\frac{F_{NIG(1/\rho, \alpha, \beta)}^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ - \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t) / Y = y) &= 1 - F_{NIG(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, \alpha, \beta)}\left(\frac{F_{NIG(1/\rho, \alpha, \beta)}^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t)) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, le modèle NIG est (parmi les modèles à facteurs ayant une corrélation déterministe) celui qui se prête le mieux au pricing des tranches de CDO, que ce soit au niveau de son efficacité dans la calibration sur les données de marché ou au niveau de la prise en compte des événements extrêmes.

Enfin, en plus des critiques que nous avons citées plus haut, diverses études ont montré que le modèle gaussien présente une lacune importante au niveau du coefficient de corrélation considéré. En effet, une structure plate et déterministe de la corrélation est insuffisante quand il s'agit de calibrer ou de projeter les Valeurs Actuelles Nettes de jambes de CDO sur les prix de marché. De nos jours, la tarification de CDO évolue vers une introduction de corrélation stochastique. L'objet du chapitre suivant sera la proposition d'un modèle de pricing des Loan-CDO qui tient compte de la remarque précédente.

Chapitre 6

Une extension : le modèle RFL

Lors de l'introduction d'un marché de tranches standardisées de dérivés de crédit, il apparaît que le modèle gaussien à un facteur présentait une imperfection au niveau de l'allocation des valeurs de corrélation aux tranches. Le *skew* de Base Correlation présente une augmentation constante de la corrélation en fonction des points de détachement des tranches. Cela est malheureusement rarement le cas en réalité et beaucoup de traders ont tiré profit de cette imperfection du *skew* de Base Correlation pour réaliser des opportunités d'arbitrage. Il fallait donc trouver un modèle capable de tenir compte d'une distortion plus importante de la corrélation. Par ailleurs, d'un point de vue pratique, le cadre du modèle gaussien ne pouvait pas s'appliquer à une tarification de portefeuilles de CDO personnalisés (ou *customized* en anglais) ayant une maturité et/ou une composition différentes de celles d'un indice standard de marché comme le LCDX, CDX, iTraxx, ...

Une extension du modèle gaussien, qui a permis d'enrayer les imperfections citées plus haut, a été introduite pour la première fois par L.Andersen et J.Sidenius (2004) et s'appelle Random Factor Loadings ou RFL. Nous allons, dans ce chapitre, présenter ce modèle et montrer les améliorations conséquentes qu'il permet d'apporter en l'appliquant au cadre des Loan-CDO. Pour cela, nous utilisons le même portefeuille P présenté dans la section *Description du portefeuille et de la tranche* et nous nous plaçons dans le même cadre d'étude que précédemment, c'est-à-dire dans un marché sans opportunités d'arbitrage, sans risque de contrepartie des vendeurs et acheteurs de protection et avec des structures par termes des probabilités de défaut et de prépaiement connues.

6.1 Le modèle Random Factor Loadings (RFL)

Le nom de "Random Factor Loadings" vient du fait qu'on relâche l'hypothèse d'une corrélation déterministe. Désormais, nous allons supposer que la corrélation dépend du facteur commun systémique, qui représente l'état de l'économie. Nous allons donc considérer $n + 1$ variables gaussiennes centrées réduites ($Y, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$) indépendantes. Les variables latentes $X_i, i \in 1, \dots, n$, qui représentent la valeur des n émetteurs du portefeuille P, s'écrivent :

$$X_i = \rho(Y).Y + \nu(Y).\varepsilon_i - m(Y)$$

où $\nu(Y) = \sqrt{1 - \mathbb{V}[\rho(Y).Y]}$ et $m(Y) = \mathbb{E}[\rho(Y).Y]$, s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 - m(Y) &= \int_{\mathbb{R}} \rho(y).y.d\Phi(y) \\
 - \nu(Y) &= \sqrt{1 - \int_{\mathbb{R}} (\rho(y).y)^2 d\Phi(y) + m^2(Y)}
 \end{aligned}$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cette écriture permet d'avoir des variables X_i centrées et réduites. Notons toutefois, que les X_i ne sont pas gaussiens (sauf dans le cas sans intérêt dans lequel $\rho(Y)$ est constant). En revanche, conditionnellement au facteur commun $Y = y$, les X_i sont gaussiens d'espérance $\rho(y)y - \mathbb{E}[\rho(Y)Y]$ et de variance $1 - \mathbb{V}[\rho(Y)Y]$. Ensuite, en gardant les mêmes notations pour les barrières de défaut et de prépaiement que dans la section "*Le modèle gaussien à un facteur*", nous pouvons écrire les probabilités de défaut et de prépaiement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)) &= \mathbb{P}(\tau_i^d \leq T) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X_i \leq K_i(t)/Y = y)] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\varepsilon_i \leq \frac{K_i(t) - \rho(y).y + m(Y)}{\sqrt{1 - \mathbb{V}[\rho(Y).Y]}} / Y = y\right)\right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{K_i(t) - \rho(y).y + m(Y)}{\sqrt{1 - \mathbb{V}[\rho(Y).Y]}} / Y = y\right) \Phi(y) dy \\
 \mathbb{P}(X_i \geq H_i(t)) &= \mathbb{P}(\tau_i^c \leq T) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X_i \geq H_i(t)/Y = y)] \\
 &= 1 - \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{H_i(t) - \rho(y).y + m(Y)}{\sqrt{1 - \mathbb{V}[\rho(Y).Y]}} / Y = y\right) \Phi(y) dy
 \end{aligned}$$

A ce stade, il reste donc à relier les barrières $K_i(t)$ et $H_i(t)$ aux probabilités non conditionnelles de défaut et de prépaiement calibrées sur le marché. Cependant, à la différence du modèle gaussien, nous ne connaissons pas la loi des variables latentes X_i ici, ce qui rend le calcul des barrières difficile. Nous expliciterons plus loin comment résoudre ce problème après avoir fixé la forme de la fonction de corrélation.

6.2 Forme de la corrélation stochastique

Pour le choix de la corrélation, nous pouvons définir un ensemble assez vaste de fonctions dépendantes du facteur commun Y . Toutefois, nous allons voir plus loin qu'il est largement suffisant de l'écrire comme une fonction constante par morceaux à deux étages seulement. Ainsi, en reprenant le modèle introduit dans la partie précédente, nous spécifions la fonction $\rho(Y)$ sous la forme :

$$\rho_{\alpha,\beta,\theta}(Y) = \begin{cases} \alpha & , \text{ si } Y \leq \theta \\ \beta & , \text{ si } Y > \theta \end{cases}$$

avec α, β des constantes positives et $\theta \in \mathbb{R}$.

Cette écriture suppose donc un régime de corrélation à deux états et qui prend la valeur α avec une probabilité $\Phi(\theta)$ et la valeur β avec une probabilité de $1 - \Phi(\theta)$. En ce qui concerne les valeurs des coefficients α et β , il faut nécessairement que α soit supérieur à β . En effet, non seulement cette condition permet de mieux reproduire le comportement de la corrélation

du marché, mais aussi, elle fournit le *skew* de Base Correlation qu'on espère. Pour être plus précis, dans le cas où $\alpha > \beta$, la fonction de corrélation est donc décroissante en fonction de Y . Donc, lorsque l'on est dans un état de l'économie jugé mauvais, les émetteurs sont plus fortement corrélés entre eux, et le risque de contagion est plus élevé. Ainsi, si nous nous plaçons du point de vue d'un investisseur dans la tranche *senior*, ce dernier ne connaît des pertes que dans le cas où un nombre important d'émetteurs font défaut en même temps. Or ce scénario correspond à une corrélation importante ou des valeurs du facteur systémique faibles. D'autre part, pour un investisseur dans la tranche *equity*, il est fortement probable que ce dernier connaisse des pertes dues aux défauts, même dans le cas où le facteur commun est élevé (état de l'économie jugé "bon"). Ainsi, la corrélation effective ressentie par l'investisseur *equity* apparaîtra comme étant une moyenne pondérée des facteurs α et β . Afin d'illustrer notre propos, nous avons simulé les fonctions de répartition empiriques des pertes dans chacun des cas suivants : $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ (cas du modèle gaussien) et $\alpha < \beta$. Nous donnons également les fonctions de répartition de la diminution du notionnel à titre accessoire :

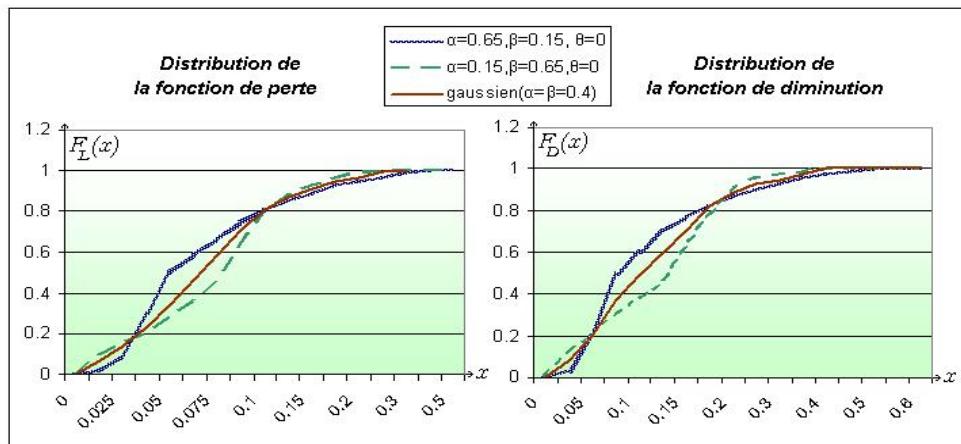


FIG. 6.1 – Probabilités cumulées des fonctions de pertes et de diminution dans les 3 cas : $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ (cas du modèle gaussien) et $\alpha < \beta$.

Nous constatons bien que dans le cas $\alpha > \beta$, la forme de la distribution des pertes est cohérente avec l'existence d'un *skew* de base correlation. En effet, nous avons une queue supérieure épaisse ainsi qu'une probabilité faible d'avoir zéro, voire peu de défauts. Ainsi, l'écriture de la corrélation sous la forme stochastique introduite dans cette section a d'ores et déjà résolu un problème de la copule gaussienne (non prise en compte des événements extrêmes) ainsi que quelques-uns relatifs à la copule Student-t (symétrie des queues et forte probabilité d'avoir zéro défaut). Cependant, il faut remarquer aussi que les courbes ne sont pas parfaitement lisses et présentent une légère déformation pour le niveau de probabilité 0,5, qui correspond à la probabilité de passage du facteur Y de part et d'autre de la barrière $\theta = 0$.

Après avoir adopté cette forme pour la fonction de corrélation, il nous reste quatre expressions à calculer : les barrières $K_i(t)$ et $H_i(t)$ ainsi que l'espérance $m(Y)$ et la variance (notée $\sigma(Y)$) de $\rho(Y)Y$. En ce qui concerne ces deux dernières expressions, nous allons avoir recours au lemme suivant, dont la démonstration est donnée en annexe :

Lemme 1 Soient X une variable gaussienne centrée réduite et a et b des constantes réelles et notons Φ (resp. φ) la fonction de répartition (resp. la fonction de densité) de la loi normale centrée réduite. Nous avons :

- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b}] = \mathbb{1}_{b \geq a}(\varphi(b) - \varphi(a));$
- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b}X^2] = \mathbb{1}_{b \geq a}(\Phi(b) - \Phi(a)) + \mathbb{1}_{b \geq a}(a\varphi(a) - b\varphi(b)).$

En particulier, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq b}X] = -\varphi(b)$; $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X > a}X] = \varphi(a)$; $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq b}X^2] = \Phi(b) - b\varphi(b)$ et $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X > a}X^2] = 1 - \Phi(a) + a\varphi(a)$.

En utilisant ce lemme et en écrivant $m(Y)$ et $\sigma(Y)$ sous la forme ci-dessous, nous obtenons :

$$m(Y) = \mathbb{E}[\rho(Y).Y] = \mathbb{E}[\alpha\mathbb{1}_{Y \leq \theta}Y + \beta\mathbb{1}_{Y > \theta}Y] = -\alpha\varphi(\theta) + \beta\varphi(\theta)$$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= \mathbb{E}[\rho^2(Y).Y^2] - m^2(Y) = \mathbb{E}[\alpha^2\mathbb{1}_{Y \leq \theta}Y^2 + \beta^2\mathbb{1}_{Y > \theta}Y^2] - m^2(Y) \\ &= \alpha^2(\Phi(\theta) - \theta\varphi(\theta)) + \beta^2(\theta\varphi(\theta) + 1 - \Phi(\theta)) - m^2(Y) \end{aligned}$$

Test d'adéquation à la loi normale

En ce qui concerne le calcul des barrières, nous allons simuler pour différentes valeurs de α , β et θ un nombre important de variables X_i et examiner s'il est possible d'approximer leur comportement par une distribution de loi connue. Nous donnons dans le graphique 6.2 (les résultats des simulations pour $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.2$ et $\theta = -1$) et comparons la fréquence de nos variables avec la densité d'une loi normale :

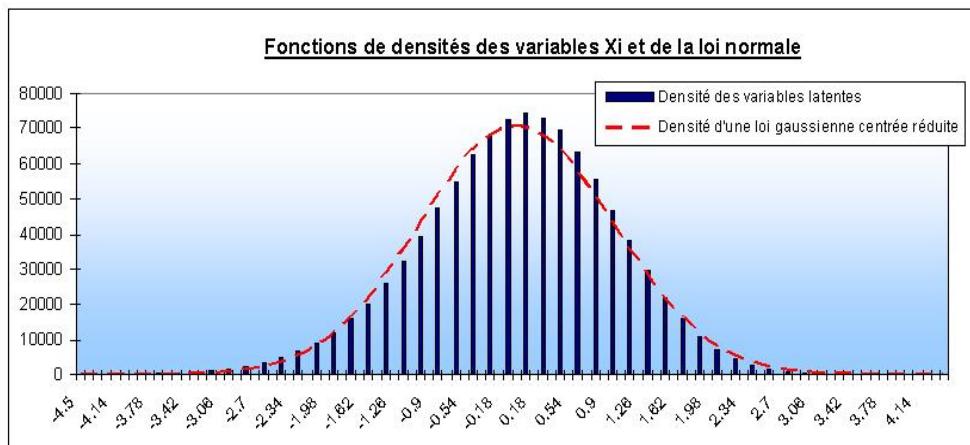


FIG. 6.2 – Histogramme des simulations des variables latentes

Il apparaît clairement que la distribution des X_i peut être approximée par une distribution normale. Cependant, par souci de rigueur, nous effectuons sous SAS des tests de normalité afin de conforter par des résultats numériques le point précédent. Le principe d'un des tests utilisés, le test de Kolmogorov Smirnov, est expliqué en annexe¹. Nous obtenons la sortie en figure 6.3

¹cf annexe E

Sortie SAS : tests de normalité				
Test	Statistique de test		p-value	
Shapiro-Wilk	W	0.9843	Pr<W	0.217
Kolmogorov-Smirnov	D	0.0264	Pr>D	0.178
Cramer-Von Mises	W-Sq	0.0854	Pr>W-Sq	0.242
Andersen-Darling	A-Sq	0.5532	Pr>A-Sq	0.231

FIG. 6.3 – tests d’adéquation à la loi normale sous SAS

Ainsi, tous les tests nous poussent à accepter l’hypothèse nulle de normalité. Nous avons ensuite reproduit ces tests pour différentes valeurs de α , β et θ . Nous acceptons toujours l’hypothèse de normalité de variables latentes X_i . Nous pouvons donc approximer l’expression des barrières $K_i(t)$ et $H_i(t)$, comme dans le modèle gaussien, sous la forme suivante :

$$K_i(t) = \Phi^{-1}(\mathbb{P}_i^d(t)) \quad \text{et} \quad H_i(t) = \Phi^{-1}(1 - \mathbb{P}_i^c(t))$$

Ainsi, nous constatons que l’idée principale derrière le modèle RFL est qu’il est possible d’approximer le comportement apparemment non-gaussien des valeurs des émetteurs X_i par une convolution de distributions gaussiennes. Enfin, le calcul des VAN des tranches s’en déduit très facilement. Nous pouvons toujours utiliser les méthodes de calcul des probabilités jointes citées dans le chapitre précédent. En effet, nous pouvons soit avoir recours à la méthode récursive présentée dans le chapitre précédent, soit à la méthode de Monte-Carlo, qui permet à θ fixé de déduire le niveau de corrélation correspondant.

6.3 Résultats numériques

Après avoir fixé les bases théoriques de notre modèle, nous passons maintenant à l’examen numérique du modèle. Pour ce faire, nous allons étudier les différentes sensibilités du modèle par rapport aux nouveaux paramètres introduits et finir par une comparaison des modèles gaussiens et RFL. Nous allons donc considérer divers portefeuilles avec des compositions en LCDS sous-jacents différentes, mais avec les points communs suivants :

- Nous travaillerons toujours sur la même structure en tranches que le LCDX, c’est-à-dire : 0 – 5%, 5 – 8%, 8 – 12%, 12 – 15% et 15 – 100%,
- Les portefeuilles sont tous composés d’une centaine de LCDS,
- La maturité est identique pour tous les portefeuilles et égale à 5 ans,
- Nous supposerons un taux de recouvrement déterministe égal à 70% pour tous les actifs sous-jacents,
- Pour la calibration du modèle, nous utiliserons la même structure par terme des taux d’actualisation risque-neutres.

6.3.1 L'implication de la Base Correlation

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de ce chapitre, le concept de Base Correlation s'adaptait mal à la réalité dans le cadre du modèle gaussien. Nous allons donc dans cette partie examiner les différentes formes de *skew* de corrélation que permet d'obtenir le modèle RFL. Pour cela spécifions d'abord les paramètres des modèles RFL et gaussien à étudier :

Modèle	Paramètres de corrélation		
	α	β	θ
RFL1	90%	20%	-2
RFL2	65%	25%	1
RFL3	60%	10%	0
RFL4	30%	80%	0,5
Gaussien	35%	35%	indifférent

FIG. 6.4 – Groupe de modèles RFL et gaussien

Nous remarquerons que nous avons choisi des paramètres aussi diversifiés que possible. En effet, le premier modèle présente une combinaison de paramètres réaliste : une corrélation de 20% pour la plupart des "états" de l'économie, et une corrélation très élevée dans les rares cas où le facteur commun dépasse la barrière $\theta = 2$. Le second modèle, moins réaliste que le premier, présente la spécificité de passer en régime de corrélation supérieure dans les "bons" états de l'économie. Ensuite, le troisième modèle présente une équivalence entre deux régimes de corrélation de moyenne 35%. Enfin, nous avons même considéré le cas $\alpha < \beta$ dans le modèle *RFL4*, et bien évidemment, pour la comparaison, un modèle gaussien standard à corrélation constante.

Nous procédons maintenant à la calibration de ces modèles-là. Notons que pour le modèle RFL la calibration s'effectue en supposant la même structure de corrélation stochastique pour l'ensemble des tranches du portefeuille, et non pas par itération comme pour le modèle gaussien. L'obtention des paramètres α , β et θ se fait par une minimisation de la norme $\| \cdot \|_2^2$ de la différence entre spreads de marché et spreads du modèle. Faute de données de marché cohérentes pour le LCDX, nous avons calibré les différents modèles à partir de l'indice CDX.HY. Les valeurs obtenues sont bien évidemment inutilisables pour des portefeuilles de Loan-CDO. Toutefois, dans cette partie, nous ne sommes intéressés que par la forme des courbes de corrélation obtenues. Ces dernières sont parfaitement transposables pour les portefeuilles étudiés ici vu les formes similaires des fonctions de perte et de diminution entre les deux types de CDO. Ainsi, pour chacun des modèles cités ci-dessus, nous obtenons les courbes de Base Correlation en figure 6.5.

La figure 6.5 met en relief la grande diversité des formes de courbes de corrélation obtenues. Ce qui est surtout intéressant de voir sont les fortes inclinaisons (ou *skewness*) induites par les modèles RFL, en particulier la très forte inclinaison du *RFL1* correspondant à $\theta = -2$. De plus, nous remarquons également une tendance inversée pour le cas $\alpha < \beta$. Ceci est logique vu que dans ce cas, l'on suppose que les investisseurs de la tranche *equity* sont *short* sur la corrélation et ceux de la tranche *senior* sont *long* sur la corrélation. Enfin, il est également

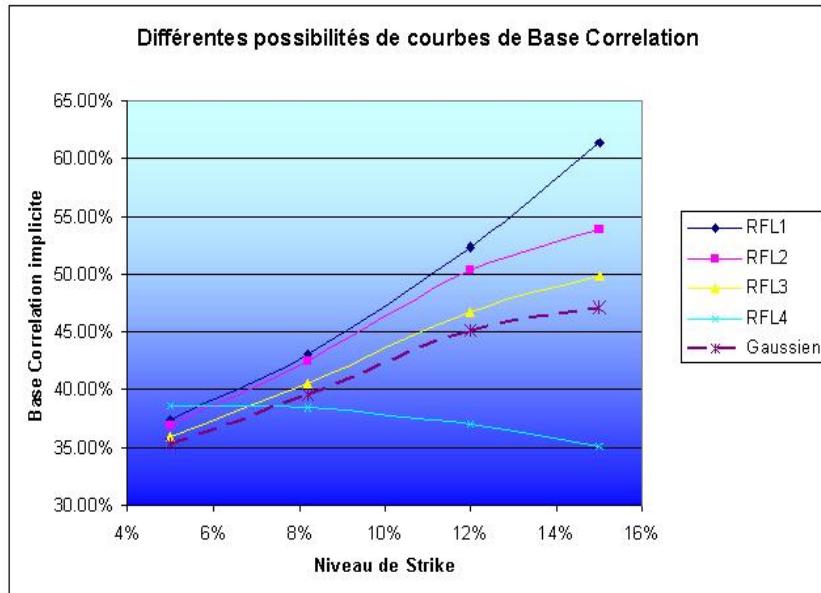


FIG. 6.5 – Base Correlations implicites des modèles RFL

intéressant de voir que le modèle *RFL3*, à deux régimes de corrélation équipondérés, présente une forme de courbe similaire au modèle gaussien, sauf pour le strike le plus élevé, qui met en relief une inclinaison légèrement plus importante.

Nous allons maintenant clarifier l'importance de ces formes de *skew* sur l'évaluation des Loan-CDO. La grande diversité de ces dernières, dans le cas du modèle RFL, lui procure un avantage extrêmement important par rapport au modèle gaussien. En effet, lorsque les spreads augmentent, les valeurs des tranches varient pour deux raisons : premièrement, à cause de l'augmentation des fonctions de pertes et de diminution qui dépendent du risque idiosyncratique de chaque émetteur, et deuxièmement, à cause de la modification des *skew* de corrélation implicite. Dans le cadre du modèle RFL, l'avantage est qu'il y a une séparation de ces deux effets. Ainsi, afin d'augmenter les fonctions de pertes et de diminution, il suffit d'augmenter/de diminuer les barrières de défaut et de prépaiement (ce qui est équivalent à une diminution de l'espérance des facteurs individuels ε_i) et pour modifier la corrélation implicite, il suffit de modifier le *skew* en jouant sur le paramètre θ (ce qui équivaut à modifier l'espérance du facteur commun Y), chose qui est non contrôlable dans le modèle gaussien à un facteur.

6.3.2 Sensibilités des spreads par rapport aux paramètres de corrélation

Nous avons précédemment étudié l'impact de la corrélation sur les spreads des tranches dans le cadre du modèle gaussien. Rappelons brièvement que l'impact d'une augmentation de cette dernière était monotone sur les spreads des deux tranches extrêmes (décroissance au niveau de la tranche *equity* et croissance au niveau de la tranche *senior*). De plus, nous avons mis en relief la non-unicité de la corrélation par rapport au spread au niveau des tranches *mezzanine*. Dans cette partie, nous allons examiner comment chacun des paramètres α , β et θ se comportent vis-à-vis des spreads et voir si les résultats du modèle gaussien se généralisent au modèle RFL.

Pour cela, nous commençons par considérer la tranche *equity* et étudier l'impact d'un augmentation progressive des paramètres dans le cas $\alpha > \beta$. Nous procédons donc à une augmentation d' α à β et θ fixés, et une augmentation de β à α et θ fixés et obtenons les courbes suivantes :

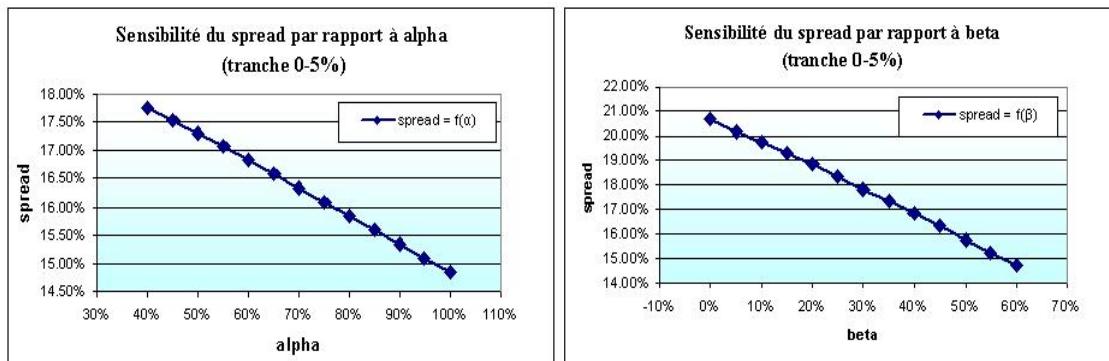


FIG. 6.6 – Sensibilités des facteurs de corrélation à θ fixé

Il apparaît donc que nous avons toujours la même propriété de décroissance du spread par rapport à la corrélation que dans le modèle gaussien. Sachant que nous avons choisi dans les deux graphiques de nous placer dans le cas $\alpha > \beta$, cette décroissance était prévisible, puisque l'investisseur dans la tranche *equity* ont une position *long* sur la correlation. Cependant, remarquons que contrairement au modèle gaussien, la courbe présentait une légère convexité, alors qu'ici la décroissance est presque linéaire en fonction des paramètres α et β . La pente plus prononcée dans le modèle gaussien vient du fait qu'une augmentation de la corrélation est équivalente à une augmentation simultanée de (α, β) et non pas de manière séparée.

En ce qui concerne la tranche *senior*, nous considérons les mêmes cas que précédemment et obtenons les courbes de la figure 6.7 :

Ces figures mettent en relief la conservation de la propriété de croissance des spreads par rapport à la corrélation au niveau de la tranche *senior*. Cependant, nous remarquons une différence dans la convexité des deux courbes. En se reportant aux courbes de *skew* de Base Correlation de la partie précédente, l'explication de ce phénomène devient évidente. En effet, dans le cas $\alpha > \beta$, le vendeur de protection dans la tranche *senior* redoute surtout une augmentation de α , qui correspond à un état de l'économie "mauvais" ; et est moins sensible à une

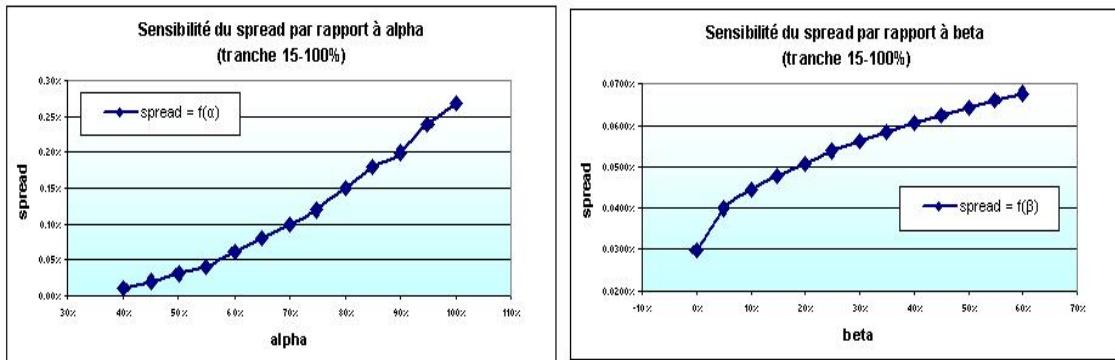


FIG. 6.7 – Sensibilités des facteurs de corrélation à θ fixé

augmentation de β qui a de faibles chances de le toucher. Enfin, nous signalons que l'impact de ces facteurs sur la tranche *mezzanine* est toujours ambigu. En effet, l'investisseur de ces tranches-là est favorisé lorsque la corrélation augmente (car il reçoit des spreads plus élevés) mais n'aimerait pas non plus voir la corrélation exploser et perdre son argent.

Maintenant, nous passons à l'étude de la sensibilité du dernier paramètre de corrélation θ . A α et β fixés à respectivement 80% et 40%, nous procédons à une augmentation de θ et nous comparons les résultats à un modèle gaussien dont nous augmentons la corrélation linéairement de 40% à 80% en fonction de θ . Nous illustrons cet effet dans les graphiques ci-dessous, où nous avons également ajouté la courbe de différence entre spreads obtenus par le modèle RFL et ceux obtenus par le modèle gaussien.

Pour la tranche *equity* :

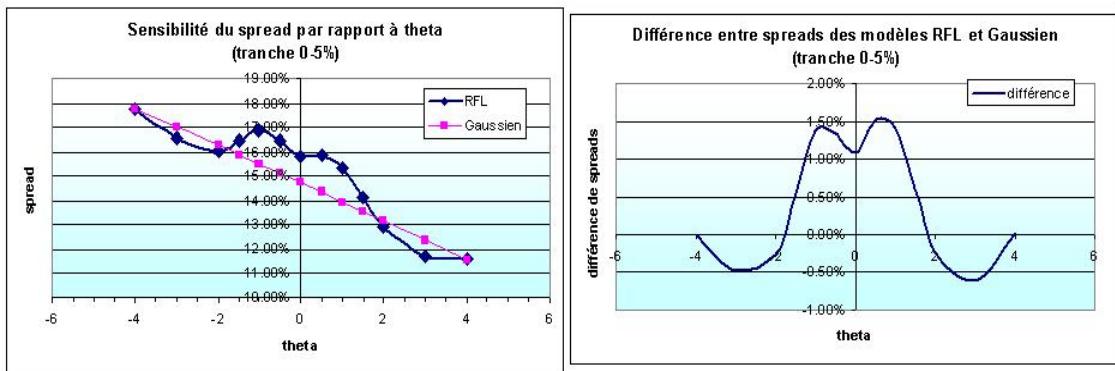


FIG. 6.8 – Sensibilité de la barrière de corrélation à $\alpha > \beta$ fixés, tranche *equity*

Tout d'abord remarquons que pour les valeurs extrêmes de θ (supérieures à 4 et inférieures à -4), les deux modèles sont confondus. Cela est logique puisque le modèle gaussien est un cas limite du modèle RFL (pour les valeurs de $|\theta|$ très grandes, la corrélation stochastique devient déterministe). De plus, nous constatons clairement la tendance décroissante (resp. croissante) pour la tranche *equity* (resp. *senior*). Cependant, dans le cas du modèle RFL, les spreads oscillent autour de cette tendance pour la tranche *equity* de façon symétrique. Nous remarquons dans le graphique de la différence de spreads une distortion en 0 due à des probabilités fortes

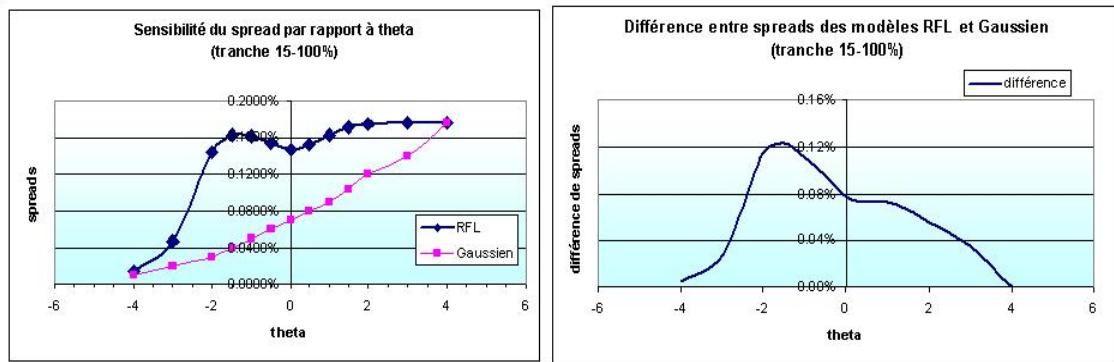


FIG. 6.9 – Sensibilité de la barrière de corrélation à $\alpha > \beta$ fixés, tranche senior

de passer de part et d'autre de la barrière θ . En ce qui concerne la tranche *senior*, un point important se dégage des courbes : la différence entre spreads du RFL et ceux du modèle Gaussien est toujours positive. Cela est sans doute la conséquence de la sous-estimation des phénomènes extrêmes par la copule gaussienne.

6.4 Impact du prépaiement

Dans cette partie, nous allons étudier l'impact du prépaiement sur l'ensemble des tranches d'un portefeuille composé de LCDS. Comme nous l'avons précisé précédemment, la corrélation stochastique $\rho(Y)$ dans le modèle RFL est identique quelque soit la tranche étudiée. D'après les résultats précédents, nous proposons la forme de courbe de corrélation la plus réaliste, en d'autres termes : $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.35$ et $\theta = -2$. Ensuite, nous procédons à une tarification complète du portefeuille dans deux cas : prépaiement nul et prépaiement 7% pour tous les noms. Nous obtenons les tableaux ci-dessous, où nous pouvons voir les valeurs actuelles nettes des jambes de protection et de primes (pour un spread contractuel de 5%) ainsi que les spreads de marché (ou *fair spread*) correspondants :

	Sans prépaiement					
	0 – 5%	5 – 8%	8 – 12%	12 – 15%	15 – 30%	30 – 100%
Jambe de Protection	2.4893	0.6814	0.5251	0.2322	0.4968	0.3985
Jambe des Primes	0.7623	0.5883	0.8244	0.6321	3.2063	14.4632
Fair Spread	1632bps	579.1bps	318.4bps	183.7bps	77.4bps	13.8bps

FIG. 6.10 – Tarification d'un portefeuille complet avec prépaiement nul

L'analyse des *Fair Spread* met clairement en relief une augmentation importante de ces derniers lorsque nous ajoutons du prépaiement au portefeuille. Ce résultat prouve bien que les Loan-CDO sont des produits plus "leverageés" que les CDO classiques. En effet, d'un point de vue numérique, ajouter du prépaiement engendre des courbes d'intensités de défaut supérieures après calibration. Cela est clairement constaté au niveau des jambes de protection

	Prépaiement de 7%					
	0 – 5%	5 – 8%	8 – 12%	12 – 15%	15 – 30%	30 – 100%
Jambe de Protection	2.954	0.7784	0.5718	0.2425	0.498	0.4106
Jambe des Primes	0.7165	0.5776	0.8203	0.6314	3.2061	13.5534
Fair Spread	2061bps	673.8bps	348.5bps	192bps	77.7bps	15.1bps

FIG. 6.11 – Tarification d'un portefeuille complet avec prépaiement

(resp. des jambes des primes) qui sont donc supérieures (resp. inférieures) après ajout du prépaiement. Notons cependant une plus grande baisse de la jambe des primes pour la tranche 30 – 100%, qui est sans doute la conséquence de l'augmentation de la fonction de diminution du portefeuille. Ce dernier point est probablement mieux constaté si l'on étudie le coefficient $c = \frac{VAN_{7\%}^{IP} - VAN_{0\%}^{IP}}{K_D - K_A}$, qui correspond à la différence entre les jambes de primes relativement à la largeur de la tranche :

	Ajout de 7% de prépaiement					
	0 – 5%	5 – 8%	8 – 12%	12 – 15%	15 – 30%	30 – 100%
c	0.91%	0.35%	0.10%	0.023%	0.013%	1.29%

FIG. 6.12 – Diminution relative à la largeur de la tranche due à l'ajout de prépaiement

Ensuite, nous allons comparer la prise en compte du prépaiement par les modèles RFL et Gaussien. Pour cela, nous procédons à une tarification complète du même portefeuille par le modèle gaussien avec une corrélation constante à 40%. Il est très important de noter ici que les valeurs que nous allons obtenir pour le modèle gaussien ne sont pas comparables à celles du RFL, car les fonctions de corrélations sont différentes à la base. Toutefois, en regardant la différence de spreads induite par l'ajout de prépaiement, il est possible d'arriver à des conclusions intéressantes. Nous donnons donc dans le tableau 6.13 le résultat de la tarification par le méthode gaussienne :

	Avant et après l'ajout de 7% de prépaiement					
	0 – 5%	5 – 8%	8 – 12%	12 – 15%	15 – 30%	30 – 100%
spreads sans prépaiement	1734bps	659.2bps	377.4bps	225.5bps	76.1bps	1.7bps
spreads avec prépaiement	2155bps	757.3bps	410bps	235.3bps	76.7bps	1.9bps

FIG. 6.13 – Tarification par le modèle gaussien à un facteur avec $\rho = 40\%$

Même si, comme nous l'avons dit précédemment, les deux modèles ne sont pas comparables, ce tableau fait apparaître un constat frappant. En effet, le modèle gaussien surestime le prix des premières tranches par rapport au RFL, mais cela est probablement dû à la plus forte corrélation effective appliquée à ces tranches. Néanmoins, toujours avec les mêmes paramètres de corrélations, le modèle RFL induit un prix de la tranche *super senior* 8 fois plus élevé que le modèle gaussien. Cela met clairement en relief la sous-estimation significative des

événements extrêmes dans ce dernier modèle. Ensuite, quand nous examinons l'écart relatif entre les *fair spreads* constatée avant et après ajout du prépaiement dans chacun des modèles pris séparément, nous obtenons un résultat important. Ce dernier est illustré dans le graphique 6.14 :

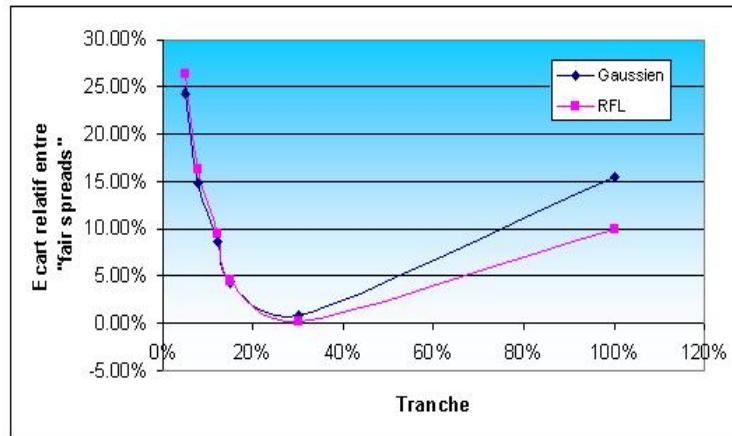


FIG. 6.14 – Comparaison des écarts relatifs entre spreads de marché dûs à un ajout de prépaiement

Nous constatons d'abord que l'écart relatif est positif quelque soit le modèle étudié : l'existence de prépaiement entraîne bien des spreads supérieurs. De plus, le graphique montre que pour les tranches *equity* et *mezzanine*, l'écart relatif engendré par le modèle RFL est légèrement supérieur à celui du modèle gaussien ; mais cela n'est pas vraiment interprétable car les deux modèles ne sont pas comparables. Cependant, ce qui est intéressant de voir est l'inversion de l'ordre des courbes pour la tranche *senior*. En effet, l'écart engendré par le modèle gaussien devient largement supérieur à celui du modèle RFL. Cela est la conséquence directe de la symétrie de la copule gaussienne : les prépaiements ajoutés vont être tout autant corrélés entre eux que les défauts dans le modèle gaussien, alors que le modèle RFL permet une séparation asymétrique entre la corrélation effective des prépaiements et celle des défauts.

Conclusion

Dans ce mémoire d’actuariat, nous avons dressé un panorama aussi complet que possible de modèles d’évaluation de produits dérivés avec option de prépaiement.

Les modèles de LCDS (Loan-Only Credit Default Swaps) étudiés sont inspirés des méthodes d’évaluation des CDS, dont le principe repose sur une actualisation des valeurs nettes probables du vendeur et acheteur de protection. D’un point de vue théorique, nos modèles présentent deux manières différentes de prendre en compte de l’option supplémentaire de prépaiement propre aux LCDS. La première, qui permet une calibration simultanée des courbes d’intensités de défauts et de prépaiements, s’avère être instable en pratique. La deuxième, qui repose sur les matrices de transition de notation, fournit une adéquation robuste et stable par rapport au marché.

Les modèles de Loan-CDO (Loan-Only Collateralized Debt Obligation) présentés dans ce mémoire reprennent des modèles bien connus de la littérature financière, comme le célèbre modèle gaussien à un facteur (LI [2001]). Notre extension de ce dernier aux Loan-CDO fournit des résultats stables et cohérents avec l’ajout de l’option de prépaiement aux actifs sous-jacents. Toutefois, en cette période de crise, nul ne peut fermer les yeux sur la controverse grandissante concernant les bases mêmes de ce modèle. D’ailleurs, après l’implémentation de notre modèle RFL (Random Factor Loadings), il s’est avéré que les critiques à l’égard de ce modèle sont bien fondées. En effet, la comparaison des deux modèles nous a permis de mettre en relief deux problèmes fondamentaux du modèle gaussien : l’incapacité à tenir compte des phénomènes extrêmes et l’exposition symétrique de la corrélation aux défauts et prépaiements.

En ce qui concerne le prolongement du sujet, il existe de nombreuses pistes d’exploration pour approfondir et enrichir son étude :

- Tout d’abord, il s’agirait de calibrer les modèles sur des données de marché consistantes. En effet, depuis sa création en 2007, l’indice LCDX n’a jamais connu une liquidité des transactions acceptable, qui permettrait une implication de corrélations et courbes d’intensités cohérentes avec la théorie.
- Ensuite, la nette supériorité du modèle RFL par rapport aux autres modèles existants devrait être exploitée d’avantage. Dans ce mémoire, sa fonction de corrélation dépendante des différents états du monde fonctionnait en deux régimes. En l’occurrence, nous avons ici adopté une fonction qui permet de tenir compte des phénomènes de contagion catastrophes. Pour une tarification plus précise, il faudrait chercher et élaborer des formes de corrélation plus complexes (par exemple, à trois régimes) qui inclurait également les phénomènes d’immunité extrêmes. En effet, cela aurait une conséquence non négligeable sur les prépaiements.

- Enfin, il s'agirait de relâcher l'hypothèse d'un taux de recouvrement déterministe. Il est évident qu'en réalité, ce dernier ne peut être constant puisqu'il dépend de divers facteurs temporels et systémiques. Si pour notre sujet nous nous sommes concentrés sur l'étude du prépaiement, nous pouvons référer le lecteur à d'autres propositions de modèles à taux de recouvrement stochastiques existants dans la littérature financière.

Ces études doivent être menées pour anticiper et calculer avec la meilleure précision possible les prix de portefeuilles de Loan-CDO synthétiques. En effet, une émission du premier portefeuille de ce type va être effectuée au cours de l'année 2010. AXA-IM sera parmi les premières banques d'investissement à posséder un pricer robuste de Loan-CDO, ce qui lui procure un énorme avantage sur ses concurrents dans ce marché.

Pour conclure cette étude, il est primordial de préciser qu'au-delà de l'aspect technique et financier, nul ne doit oublier que pour une évaluation consistante de tels produits dérivés, il faut d'abord assurer une transparence parfaite de toutes les informations fournies par les différents acteurs de l'émission de telles transactions gigantesques. Espérons seulement que dans le futur, l'appât du gain ne fera pas sombrer le souvenir de cette crise amère dans l'oubli.

Bibliographie

- [1] A. Duncan, *LCDS : The March to Liquidity, Commercial lending review, 2006*
- [2] L. Andersen, J. Sidenius, S.Basu , *All your hedges in one basket, RISK Magazines, 2003*
- [3] J. Grady, R. Alloway, A. Alsheimer, T. Price , *Intro to LCDX, LSTA Annual Conference, 2007*
- [4] *LCDX Index and Tranches, Lehman Brothers,*
- [5] J. Batterman, I. Rasmussen, D. Yan, *A Brief Review of the Basis, FITCH IBCA, 2008*
- [6] V. Maly, *The international legal comparative legal guide to : Securitization 2007, Global Legal Group, 2007*
- [7] E. Beinstein, *Preview of the LCDX Tranche Launch, JPMorgan, 2007*
- [8] M. Liang, *Valuation of Loan CDS and Synthetic Loan CDO with prepayment Risk , 2009*
- [9] B. Gibeau, *Le marché des leverage loans, AFG, 2007*
- [10] *Loan CDS and Loans Report, MarkIt Group, 2008*
- [11] *LCDX Tranches : The next stage in the evolution of Loan-Only CDS, MarkIt Group, 2007*
- [12] *A barrier model to price cancellation in LCDS, Merrill Lynch, 2007*
- [13] D. Hamilton, C. Mann *Moodys Loan CDS implied ratings, Moody's, 2008*
- [14] P.Dobranksy, W.Shoutens *Do not forget the cancellation, 2009*
- [15] A. Kakodkar, S. Bandreddi, L. Gibson *New Tranches on the block, Merrill Lynch, 2007*
- [16] M. Bartlam, K. Artmann *Loan Only credit default swaps, Orrick, 2006*
- [17] S. Amraoui, S. Hitier *Optimal stochastic recovery for base correlation, BNP Paribas, 2008*
- [18] P.Dobranksy *Syndicated secured loan derivatives,,*
- [19] P.Dobranksy, W.Shoutens *Generic levy one-factor models for joint prepayment and defaults, 2008*
- [20] Z.Wei *Valuation of Loan CDS under intensity based Model, 2007*
- [21] S. Morgan, Z. Zheng *From CDS to LCDS : Accounting for cancellation, Lehman Brother, 2007*
- [22] A. Luscher *Synthetic CDO pricing using the double normal inverse Gaussian copula with stochastic factor loadings, University of Zurich, 2005*
- [23] O'Kane and M. Livesey *Base Correlation explained, Lehman Brothers, 2004*
- [24] L. Andersen and J. Sidenius *Extensions to the Gaussian Copula : Random Recovery and Random Factor Loadings, Bank of America, 2004*

- [25] Credit Derivatives Strategy *Pricing cancellable LCDS*, Merrill Lynch, 2007
- [26] T. Benzschawel *Modeling Loan Prices, Spreads, and LCDS*, Citi, 2007
- [27] P. Clauss *Théorie des Copules*, ENSAI, 2008
- [27] Y. Braouzec, J. Brun *Dérivés de crédit vanille et exotiques*, 2007

Annexes

A Modèles à forme réduite

A.1 Modèle à intensité déterministe

Dans un modèle à forme réduite, le défaut est modélisé par un facteur exogène, l'intensité de défaut.

Définition : (*Processus de comptage*) Un processus de comptage est un processus en temps continu $N(t)$, $t \geq 0$, à valeurs dans $0, 1, 2, \dots$ et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite. Habituellement $N(0) = 0$ et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées. Ainsi $N(t)$ représente le nombre d'arrivées entre $[0, t]$.

En posant τ le temps de défaut, nous définissons

$$N_t = \mathbb{1}_{\tau \leq t}$$

qui est un processus de comptage définissant l'événement de défaut. Le défaut correspond à la première survenue d'un processus de comptage

Dans notre modèle, nous supposons que N_t est un processus de poisson inhomogène :

1. $N(0) = 0$
2. les arrivées se font une à une (vraie par définition)
3. les accroissements sont indépendants $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de N_u , $u \leq t$

En posant $\Lambda_t = E[N(t)]$ on définit l'intensité du processus λ_t par $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u du$. Ainsi, $N_s - N_t$ est un processus de poisson d'intensité $\int_t^s \lambda_u du$. On a λ fonction déterministe du temps, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P(\tau > s | \mathcal{F}_t) &= P(N_s - N_t = 0 | \mathcal{F}_t) \\ &= \exp(- \int_t^s \lambda_u du) \end{aligned}$$

Donc pour un petit intervalle $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned} P(\tau < t + \Delta t | \mathcal{F}_t) &= 1 - \exp(- \int_t^{t+\Delta t} \lambda_u du) \\ &\simeq \lambda_t \Delta t \end{aligned}$$

A.2 Modèle à intensité stochastique

Nous avons supposé que le processus de poisson était inhomogène c'est-à-dire que l'intensité était une fonction déterministe du temps.

Nous présentons ici un exemple de processus de poisson à intensité stochastique, le processus de Cox. Une manière simple de comprendre que l'intensité est stochastique est de supposer que l'intensité dépend d'un facteur Z_t qui suit un processus stochastique. Nous avons alors $\lambda_t = \lambda(Z - t)$. En notant \mathfrak{F}_t l'ensemble d'informations associé à la trajectoire du facteur Z_t , on dit que $J = (J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus de Cox si connaissant \mathfrak{F}_t , le processus J se réduit à un processus de Poisson inhomogène.

En conditionnant par rapport à \mathfrak{F}_t on peut écrire.

$$P(\tau > t | \mathfrak{F}_t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right)$$

Il en résulte que :

$$P(\tau > t) = \mathbb{E}[P(\tau > t | \mathfrak{F}_t)]$$

Il faut désormais calculer une espérance par rapport au cas déterministe Un exemple simple de processus de Cox est le suivant :

$$\lambda_t = (W_t)^2$$

où W_t est le mouvement brownien standard.

En pratique un modèle à intensité stochastique est intéressant parce qu'il permet d'avoir un dynamique stochastique sur les spreads que ne permet pas d'avoir un modèle à intensité déterministe. Il peut donc être utile pour évaluer des options sur LCDS. En revanche la calibration d'un modèle à intensité stochastique peut s'avérer délicate

B Génération des matrices de transition

B.1 Attribution de la notation

La notation est apparue aux USA au début du siècle par la publication du premier manuel de notation de John Moody en 1909. Son objectif était de fournir aux investisseurs une information objective sur les entreprises. Ce principe de notation était absent en Europe jusqu'aux années 80. La notation, contrairement au scoring, n'est pas une combinaison des différents ratios mais se base sur d'autres types de critères comme l'environnement de l'entreprise et les facteurs propres à chacune d'elle (endettement). Pour les entreprises importantes cette notation est publiée par des agences de notation spécialisées (Standard & Poors, Moody's). Pour les centaines de milliers de petites et moyennes entreprises, il faut procéder à une notation interne.

Une entreprise peut être notée AA, BBB... comme l'indiquent les deux tableaux suivants :

Moody's	Standard & Poor's	Commentaire
Aaa	AAA	"Prime". Sécurité maximale
Aa1	AA+	High Grade. Qualité
Aa2	AA	haute ou bonne
Aa3	AA-	
A1	A+	Upper Medium Grade.
A2	A	Qualité moyenne
A3	A-	
Baa1	BBB+	Lower Medium Grade.
Baa2	BBB	Qualité moyenne
Baa3	BBB-	inférieure
Ba1	BB+	Non Investment Grade.
Ba2	BB	Spéculatif
Ba3	BB-	
B1	B+	Hautement spéculatif
B2	B	
B3	B-	
Caa	CCC+	Risque substantiel. En mauvaise condition
Ca	CCC	Extrêmement spéculatif
C	CCC-	Peut être en défaut
/	D	En défaut

FIG. 6.15 – Tableau des agences de notation

B.2 Calcul de la matrice de transition

Les agences de notation publient régulièrement des informations relatives à l'évolution de la notation des émetteurs dans le temps. Ces informations sont regroupées dans des tableaux qui indiquent, soit directement le taux de défaut historique des émetteurs selon leur notation et sur un horizon donné, soit les changements de notation au cours du temps. Les tableaux décrivant l'évolution dans le temps de la notation d'un panel d'émetteurs sont appelés "matrices de transition" et constituent un outil privilégié d'estimation des probabilités conditionnelles de défaut.

Ce modèle se base sur les fréquences historiques de transition des différentes compagnies vers différents ratings. En regroupant ces données sur une durée de temps importante, on peut assimiler la proportion de migrations annuelles d'un rating vers l'autre à la probabilité de transition associée. On utilise ici des données collectées entre 1981 et 2000 par Standards Poor's sous forme de matrice annuelle de transition :

Hypothèses du modèle :

- La matrice est stable : Deux entreprises dans des secteurs différents ou des pays différents ont la même probabilité de migrer d'une notation à une autre ce qui est loin d'être vrai.
- Le processus est markovien : La probabilité de migrer d'une classe à une autre au cours

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	default
AAA	90,81 %	8,33%	0,68%	0,06%	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%
AA	0,70%	90,65%	7,79%	0,64%	0,06%	0,14%	0,02%	0,00%
A	0,09%	2,27%	91,05%	5,52%	0,74%	0,26%	0,01%	0,06%
BBB	0,02%	0,33%	5,95%	86,93%	5,30%	1,17%	0,12%	0,18%
BB	0,02%	0,14%	0,67%	7,73%	80,53%	8,84%	1,00%	1,06%
B	0,00%	0,11%	0,24%	0,43%	6,48%	83,46%	4,08%	5,20%
CCC	0,22%	0,00%	0,22%	1,30%	2,38%	5,00%	64,85%	19,79%
default	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100%

FIG. 6.16 – Exemple de matrice de transition à 1 an

d'une période est indépendante de ce qui s'est passé au cours des périodes passées.

Associons alors un processus markovien X_0, X_1, \dots , à temps discret aux états que sont les notations de l'entreprise, on note E l'espace des notation.

Définition : Le nombre $\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)$ est appelé probabilité de transition de l'état i à l'état j en un pas, ou bien probabilité de transition de l'état i à l'état j si n'y a pas d'ambiguité. On note souvent ce nombre $p_{i,j}$.

- La famille de nombres $P = (p_{i,j})_{i,j \in E^2}$ est appelée matrice de transition, noyau de transition, ou opérateur de transition de la chaîne de Markov.

Proposition : La matrice de transition en k pas, $\mathbb{P}(X_{n+k} = j|X_n = i), i, j \in E^2$ est égale à la puissance k -ème de la matrice de transition P .

C'est grâce à cette propriété que l'on peut calculer la probabilité d'être Investment Grade à horizon T.

C Introduction à la théorie des copules

Les Copules sont un outil statistique très intéressant quand il s'agit de modéliser une structure de dépendance à partir de lois marginales. Nous allons dans cette section tenter de présenter le strict minimum sur les copules afin de modéliser la dépendance entre les événements de défaut et de prépaiement entre eux.

Définition

Une copule n-dimensionnelle est une fonction de répartition multivariée C définie sur $[0, 1]^n$ et dont les marginales sont sur $[0, 1]$.

Le théorème fondamental de Sklaar (1959)

Soient F une fonction de répartition de dimension n et F_1, \dots, F_n des marginales, alors il existe une copule n-dimensionnelle C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Et inversement, soient C une copule multivariée et F_1, \dots, F_n des fonctions de distribution univariées, alors F est une fonction de répartition multivariée avec les marginales F_1, \dots, F_n :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Par ailleurs, si les marginales F_1, \dots, F_n sont continues, nous avons l'unicité de la copule C .

Nous pouvons donc diviser le problème de dépendance en deux parties : la première représente les distributions marginales des variables aléatoires, et la deuxième partie concerne la structure de dépendance décrite par la copule. De plus, le théorème de Sklaar implique que tout modèle tenant compte des défauts et des prépaitements possède une représentation sous forme de copule. Toutefois, en pratique, cette copule est souvent difficile à expliciter. Enfin, notons que quelque soit la transformation monotone qu'on affecte aux variables aléatoires X_i , $i = 1, \dots, I$, la copule reste la même.

La densité et la distribution conditionnelle d'une copule

En reprenant les notations précédentes, nous pouvons calculer la densité d'une copule C . La densité, que nous noterons c , s'écrit :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, \partial u_n}$$

Ensuite, nous pouvons grâce au théorème de Sklaar déduire une relation entre la densité jointe d'une certaine distribution et celle de sa copule. Nous posons donc (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires de densités (f_1, \dots, f_n) et soit C la copule correspondante à ces variables. Nous trouvons donc :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Cette relation nous conduit à l'expression suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Simulation d'une copule n-dimensionnelle

Pour simuler une copule de dimension n, nous avons recours au principe itératif suivant :

- Tout d'abord, nous simulons un échantillon i.i.d. de lois uniformes sur $[0, 1]$: $(u_1, q_1, \dots, q_{n-1})$. La première réalisation de la variable U_1 est donc u_1 .
- Dans un deuxième temps, nous obtenons la réalisation u_2 de la variable U_2 en écrivant :

$$u_2 = C_2^{-1}(q_1/u_1)$$

- Ensuite pour la réalisation de U_3 , nous trouvons :

$$u_3 = C_3^{-1}(q_2/u_1, u_2)$$

- De façon itérative, nous déduisons le reste des réalisations (u_4, \dots, u_n) .

Nous avons alors une expression simple de la copule conditionnelle C, qui s'écrit en fonction de ses dérivés partielles :

$$C(u_n/u_1, \dots, u_{n-1}) = \mathbb{P}(U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} = u_{n-1})$$

$$C(u_n/u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{\partial^{n-1} C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, \partial u_{n-1}} \cdot \left(\frac{\partial^{n-1} C(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial u_1, \dots, \partial u_{n-1}} \right)^{-1}$$

La copule gaussienne

C'est la copule la plus fréquemment utilisée. Nous donnons sa définition :

Définition : Soient (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires suivant une loi normale d'espérances (μ_1, \dots, μ_n) , de variances respectives $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ et de matrice de corrélation Σ . Posons pour tout $i \in 1, \dots, n$, les variables :

$$U_i \equiv \Phi\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La fonction de distribution des variables U_i est appelée copule gaussienne de matrice de corrélation Σ et s'écrit :

$$C_\Sigma(u_1, \dots, u_n)$$

La copule de Student

C'est une variante de la copule Gaussienne. Nous donnons sa définition :

Définition : Soient (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires suivant respectivement la loi normale centrée réduite. Soit Σ leur matrice de corrélation. De plus, nous posons Y une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 à κ degrés de liberté et indépendante des (X_1, \dots, X_n) et les variables :

$$U_i \equiv t_\kappa\left(\frac{\sqrt{\kappa}X_i}{\sqrt{Y}}\right)$$

où $t_\kappa(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi de Student-t à κ degrés de liberté. La fonction de distribution $C_{\kappa, \Sigma}(u_1, \dots, u_n)$ des variables U_i s'appelle la copule de Student à κ degrés de liberté de matrice de corrélation Σ .

Les copules Archimédiennes

Les copules Archimédiennes sont définies de la façon suivante :

Définition : Soit φ une fonction vérifiant les propriétés suivantes : $\varphi(1) = 0$, et $\forall u \in [0, 1] : \varphi'(u) < 0$ et $\varphi''(u) > 0$. (φ est appelée fonction génératrice de la copule. Une copule archimédienne s'écrit :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) & \text{si } \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les exemples les plus connus de copules Archimédiennes sont :

- Copule de Clayton de générateur $u^{-\theta} - 1$ avec $(\theta > 0)$.
- Copule de Gumbel de générateur $(-\ln u)^\theta$ avec $(\theta \geq 1)$.
- Copule de Frank de générateur $-\ln \frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ avec $(\theta \neq 0)$.

La figure suivante permet de visualiser les densités de copules de Clayton, Gumbel et Franck :

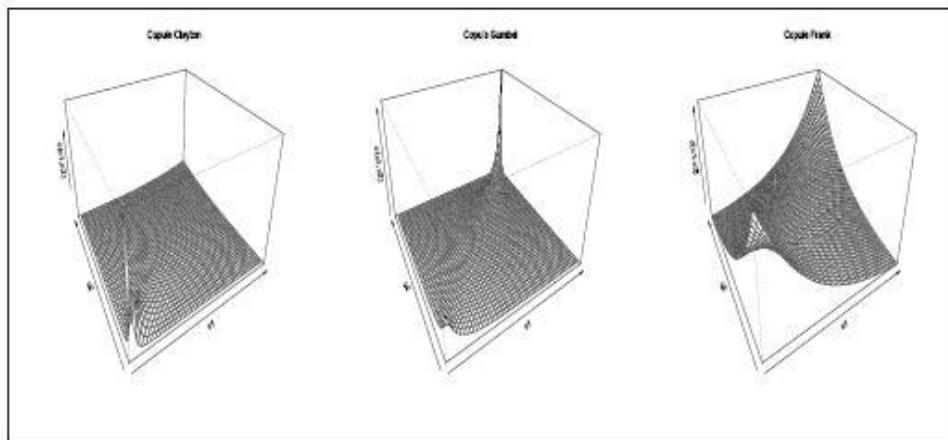


FIG. 6.17 – Densités de trois copules Archimédiennes de paramètre $\theta = 3$

D Démonstration du lemme 1

Lemme 1 Soient X une variable gaussienne centrée réduite et a et b des constantes réelles et notons Φ (resp. φ) la fonction de répartition (resp. la fonction de densité) de la loi normale centrée réduite. Nous avons :

- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b} X] = \mathbb{1}_{b \geq a}(\varphi(a) - \varphi(b));$
- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b} X^2] = \mathbb{1}_{b \geq a}(\Phi(b) - \Phi(a)) + \mathbb{1}_{b \geq a}(a\varphi(a) - b\varphi(b)).$

En particulier, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq b} X] = -\varphi(b)$; $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X > a} X] = \varphi(a)$; $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq b} X^2] = \Phi(b) - b\varphi(b)$ et $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X > a} X^2] = 1 - \Phi(a) + a\varphi(a)$.

Démonstration : Le cas $b < a$ est trivial. En effet, les espérances ci-dessus sont nulles ainsi que les indicatrices. Etudions le cas $b \geq a$, nous avons :

- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b} X] = \mathbb{1}_{b \geq a} \int_a^b x\varphi(x)dx = -\mathbb{1}_{b \geq a} \int_a^b x\varphi'(x)dx = \mathbb{1}_{b \geq a}(\varphi(a) - \varphi(b))$
- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{a < X \leq b} X^2] = \mathbb{1}_{b \geq a} \int_a^b x^2\varphi(x)dx = \mathbb{1}_{b \geq a} \int_a^b (\varphi''(x) + \varphi(x))dx$
 $= \mathbb{1}_{b \geq a}(\Phi(b) - \Phi(a)) + \mathbb{1}_{b \geq a}(a\varphi(a) - b\varphi(b)).$

E Test de Kolmogorov-Smirnov

En statistiques, il existe divers tests d'adéquation à des lois bien connues. Le test de Kolmogorov-Smirnov est l'un d'entre eux et permet de déterminer si un échantillon donné suit bien une certaine loi. En particulier, si la loi testée est la loi gaussienne, le test s'appelle "test de normalité". Le principe de ce test repose sur les propriétés des fonctions de répartition empiriques. En effet, si on considère un échantillon (x_1, \dots, x_n) de variables aléatoires indépendantes, leur fonction de répartition empirique s'écrit pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \leq x}$$

En utilisant, la propriété de convergence de la fonction empirique suivante qui s'écrit $\forall c > 0 :$

$$\mathbb{P}\left[\sup |F_n(x) - F(x)| > \frac{c}{\sqrt{n}}\right] \rightarrow \alpha(c) = 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e^{-2i^2c^2}$$

Nous pouvons donc facilement tester si cette propriété est vérifiée pour notre échantillon (x_1, \dots, x_n) . Remarquons que le terme de droite est indépendant de la fonction de répartition considérée. Enfin, nous donnons un ordre de grandeur pour $\alpha(c)$: par exemple, $\alpha(1, 36) = 0,05$.

F Pricer de LCDS sous Excel VBA

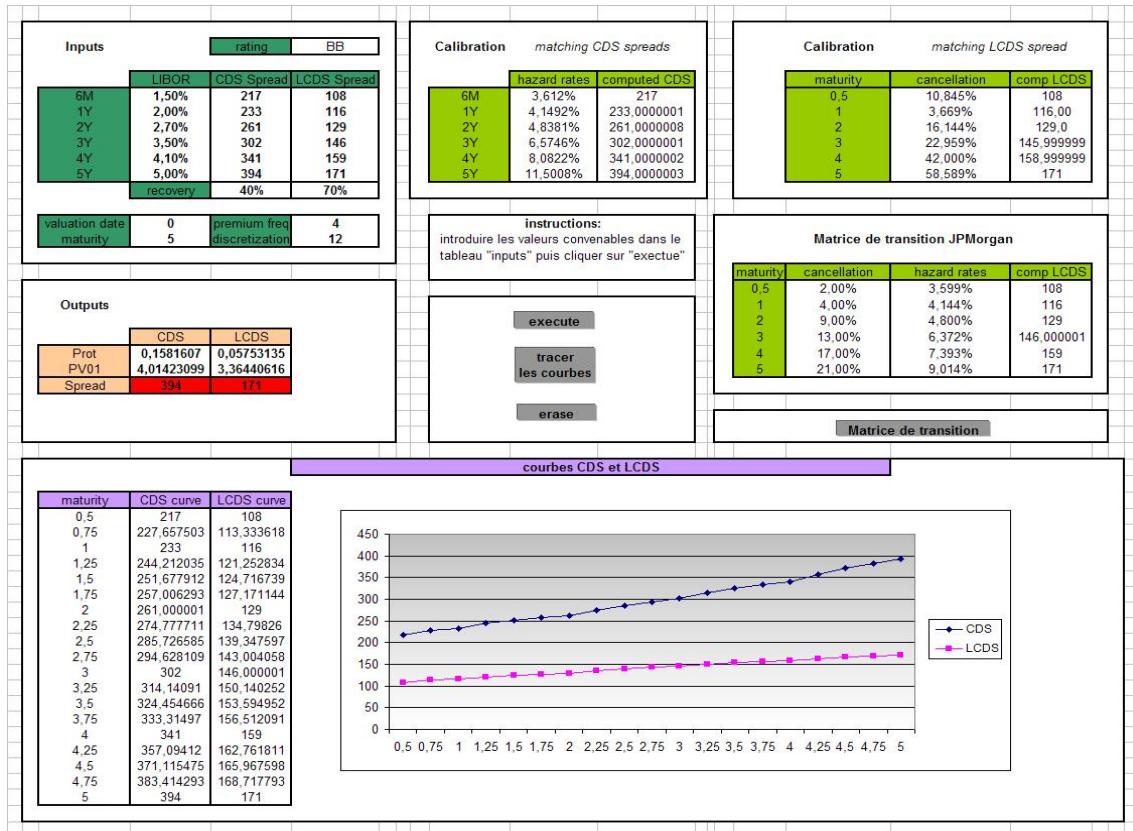


FIG. 6.18 – Pricer de LCDS sous Excel VBA

Nous présentons le pricer de LCDS que nous avons implémenté sous VBA. Ce pricer permet de pricer les LCDS selon les deux méthodes que nous avons mentionnées. La première consiste à rentrer les prix des CDS et des LCDS. A partir de ces courbes de prix, les intensités de défaut sont calibrées par morceaux sur les CDS. Les intensités d'annulation sont ensuite calibrées sur les LCDS. En input, sont rentrées les courbe libor et de prix ainsi que les taux de recouvrement. Il faut aussi mentionner la fréquence des paiements des primes, le pas de discréétion de la jambe de protection et la maturité du contrat. En output, nous obtenons les courbes d'annulation et de défaut ainsi que la jambe de protection, la PV01 et le spread.

La deuxième méthode nécessite de fournir la matrice de transition de rating ainsi que le rating de l'entité de référence. La courbe de défaut est alors calibrée sur les LCDS.

Optionnellement le pricer fournit un aperçu graphique des courbes de CDS et de LCDS.

G Pricer Loan-CDO et son interface Excel

Tout au long de cette année, nous avons travaillé en tant que stagiaires chez AXA-IM sur l'implémentation d'un pricer de Loan-CDO en C-Sharp. AXA-IM possédait une librairie assez vaste de classes de code C-Sharp contenant toutes sortes d'outils mathématiques, de statistiques et de pricing de finance. Au cours de la première partie de l'année, nous avons codé et testé un modèle de pricing de LCDS. Ensuite, nous sommes passés à l'implémentation d'un pricer de portefeuille Loan-CDO. Le programme codé qui tourne en C-Sharp peut être accessible à partir d'une interface Excel reliée à C-Sharp grâce à une application intermédiaire "Managed.XLL". Nous allons ici présenter cette interface et expliquer son fonctionnement. Tout d'abord, nous commençons par rentrer les données du portefeuille sous Excel dans le tableau suivant :

FIG. 6.19 – Portefeuille Loan-CDO défini sous Excel

Nous remarquons que les données à inscrire sont : le Rating S&P (qui permettra d'attribuer la courbe de prépaiement correspondante à chacune des noms), les spreads de marché aux différentes maturités, le taux de récupération et le poids de chaque nom. En plus de ces données,

il faut fournir la matrice de prépaiement calculée par JPMorgan ainsi que la courbe des taux d'actualisation :

C Mat	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC
6M	8,00%	2,00%	1,00%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
1Y	15,00%	4,00%	2,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
2Y	34,00%	8,50%	4,00%	2,00%	2,00%	2,00%	3,00%
3Y	45,00%	13,00%	6,00%	3,00%	3,00%	3,00%	4,00%
4Y	46,00%	17,00%	8,00%	4,00%	4,00%	4,00%	5,00%
5Y	47,00%	21,00%	10,00%	6,00%	5,00%	5,00%	7,00%

Notional	100	
valo date	29/04/2009	Px Last
	EUR	
Dates	Discount Factors	
29-juil-09	0,95	5,38
29-juil-10	0,90	5,05
29-juil-11	0,86	5,01
29-juil-12	0,82	4,97
29-juil-13	0,78	4,94
29-juil-14	0,74	4,92
29-juil-15	0,71	4,91
29-juil-16	0,68	4,91
29-juil-17	0,64	4,93
29-juil-18	0,61	4,95
29-juil-23	0,47	5,04
29-juil-28	0,37	5,02
29-juil-38	0,23	4,83

FIG. 6.20 – Matrice de transition et courbe d'actualisation

A ce stade, le portefeuille de LCDS est complètement défini sous C-Sharp, qui stocke toutes les informations en mémoire : la structure par terme des taux sans risque, le notionnel du portefeuille ainsi que les courbes de prépaiement. Ensuite, à l'aide du modèle de tarification de LCDS, les courbes de défaut des différents émetteurs sont ensuite automatiquement calibrées et également stockées en mémoire. Nous pouvons désormais passer à la tarification des tranches de Loan-CDO. L'interface concernant la définition des paramètres de tarification est présentée à la page suivante.

Ainsi, nous constatons deux colonnes : la première concerne la tarification par la copule gaussienne et la deuxième utilise le modèle RFL. Sur cette feuille, nous commençons par introduire les paramètres identiques pour les deux modèles : la date de début des paiements des primes ou *First Date*, la maturité ou *End Date*, la discréétisation temporelle qui dans cet exemple est de 3 mois (3M), le spread contractuel (ici : 5% ou 500bps) et enfin la tranche considérée (ici 8 – 12%) définie par un strike inférieur (ou *Attachment Point*) et par un strike supérieur (ou *Detachment Point*).

Après les strikes, nous définissons les paramètres de corrélation. Pour le modèle gaussien, nous inscrivons les Base Correlation correspondante à chaque strike (ici, $\rho_{8\%} = 42,72\%$ et $\rho_{12\%} = 52,47\%$) et pour le modèle RFL, nous introduisons les valeurs de α , β et θ (dans cet exemple, $\alpha = 70\%$, $\beta = 20\%$ et $\theta = -0,916408$.) De plus, nous marquons si nous voulons calculer la prime accrue et quel portefeuille stocké préalablement en mémoire nous voulons tarifer.

Enfin, il reste à définir la discréétisation des fonctions de pertes et de prépaiement. Pour avoir la précision de calcul maximale tout en minimisant le temps de calcul ainsi que la mémoire utilisée, nous devons choisir le plus grand diviseur possible pour chacune des fonctions de pertes. Dans notre exemple (portefeuille équipondéré à 100 noms avec taux de récupération identique pour tous fixé à 70%), les distributions idéales sont :

First Date	20/09/2008	First Date	20/09/2008
End Date	20/07/2013	End Date	20/07/2013
payment period	3M	payment period	3M
spread	5,00%	spread	5,00%
Attachment point	8,00%	Attachment point	8,00%
Detachment point	12,00%	Detachment point	12,00%
Base Correl	42,72% 52,47%	High Correl	70%
Accrued	1	Low Correl	20%
curve	EUR	Theta	-0,916408
credit portfolio	portfolio1	Accrued	1
Cancellation Step	0,10%	curve	EUR
Distribution step	0,30%	credit portfolio	portfolio1
Type of Tranche	Running	Cancellation Step	0,10%
Modèle Gaussian		Modèle RFL	
Loan-CDO		Loan-CDO	
PV	-0,161570	PV	-0,158168596
Default Leg	0,013371	Default Leg	0,016614808
Premium Leg	-0,174941	Premium Leg	-0,174783404
CDO		CDO	
PV	-0,163572	PV	-0,1599808
Default Leg	0,013062	Default Leg	0,0162759
Premium Leg	-0,176634	Premium Leg	-0,1762567

FIG. 6.21 – Interface de pricing pour les modèles Gaussian et RFL

- $L_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (1 - R_i) \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t} = \sum_{i=1}^I 1\% (1 - 70\%) \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t}$, donc un PGD de :0,30%
- $D_t = \sum_{i=1}^I \omega_i (R_i \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t} + \mathbb{1}_{\tau_i^c \leq t}) = \sum_{i=1}^I 1\% (70\% \mathbb{1}_{\tau_i^d \leq t} + \mathbb{1}_{\tau_i^c \leq t})$, donc un PGD de :0,10%

Nous pouvons désormais obtenir le valeurs actuelles nettes de la jambe de protection (*Default Leg*), la jambe des primes (*Premium Leg*), ainsi que la valeur actuelle nette de la tranche (ou PV) définie comme la différence entre les deux jambes. Enfin, comme nous pouvons le voir sur la figure, nous avons également la possibilité de comparer la tarification des Loan-CDO à celle des CDO dans les deux cas RFL et Gaussian.

Table des figures

1.1	Flux relatifs à un contrat LCDS	7
1.2	Priorités des obligations et des prêts par type d'émetteurs	8
1.3	Evolution du marché de la dette	9
1.4	Taux de recouvrement en fonction des types d'instrument	11
1.5	Evolution du volume traité sur le marché du LCDS	11
1.6	Marché du LCDS en fonction de la maturité	12
1.7	Taille des spreads traités	12
1.8	Spread des CDS versus spread des LCDS au 22 mars 2009	13
2.1	Mécanisme du LCDS	15
2.2	Estimation de la jambe de protection	17
2.3	Analyse des probabilités implicites par le modèle selon l'hypothèse d'indépendance entre les temps de défaut et d'annulation	22
2.4	Courbe des intensités constante par morceaux	23
2.5	Terme structure des spreads de CDS	24
2.6	Spread de LCDS en fonction de la terme structure des spreads de CDS et des taux d'annulation	25
2.7	Comportement des LCDS fonction du taux d'annulation et de la terme structure du CDS	26
2.8	Sensibilité du LCDS au taux de défaut	26
2.9	Sensibilité du LCDS au taux de défaut	27
2.10	Courbe Libor à 5 ans	28
2.11	Spread de CDS et LCDS de Ford au 11 janvier 2008	28
2.12	Résultat de la calibration des LCDS sur Ford au 11 janvier 2008	28
2.13	Spread de CDS et LCDS de DirectTV au 11 mars 2008	29
2.14	Résultat de la calibration des LCDS sur DirectTV au 11 mars 2008	29
2.15	Courbes de spread "tests"	29
2.16	Résultat de la calibration des LCDS "tests"	30
2.17	Configuration idéale des spreads de CDS et LCDS pour des taux de recouvrement respectivement de 40% et 70%	30
2.18	Probabilités conditionnels d'annulation du LCDS à partir des données historiques selon l'étude de JP Morgan	31
2.19	Probabilités de passer en Investment Grade à partir du Rating initial, Sources Moody's et S&P	32
2.20	Probabilités de passer en Investment Grade en fonction de la notation initiale	33
2.21	Résultat de la calibration de Ford notée CCC au 11 janvier 2008	33

2.22 Comparaison des intensités de défaut calibrées selon les deux méthodes	34
3.1 Le volume des transactions sur le LCDX après son lancement en Mai 2007	35
3.2 Passage d'un portefeuille de 100 LCDS à l'indice LCDX	37
3.3 Mécanisme de l'indice LCDX	38
3.4 Flux de paiements entre l'acheteur de protection et les investisseurs A et B	39
4.1 Exemple de dynamique du notionnel restant d'une tranche $[K_A, K_D]$	42
4.2 Simulation de variables latentes dans le cadre du modèle gaussien	45
4.3 Densité des pourcentages de perte en fonction de la corrélation	49
4.4 Densité des pourcentages de diminution en fonction de la corrélation	50
4.5 Le <i>skew</i> de Base Correlation en fonction du niveau de Strike	51
4.6 Courbe d'intensités d'annulation	52
4.7 Spread de la tranche equity en fonction du ρ de corrélation	52
4.8 Spread de la tranche mezzanine en fonction du ρ de corrélation	53
4.9 Spread de la tranche junior senior en fonction du ρ de corrélation	54
4.10 Spread de la tranche super senior en fonction du ρ de corrélation	54
4.11 Risque de prépaiement de la tranche super senior	55
4.12 Caractéristiques des portefeuilles A, B et C	56
4.13 Evaluation du portefeuille A	57
4.14 Evaluation du portefeuille B	57
4.15 Evaluation du portefeuille C	57
4.16 Evaluation du portefeuille equipondéré des A, B et C	58
4.17 Evaluation du portefeuille equipondéré des A, B et C en changeant les taux d'annulation	59
5.1 Densités de copules bivariées gaussiennes pour différentes valeurs de corrélation avec leurs courbes de niveau correspondantes	62
5.2 Densités de copules bivariées de Student pour différentes valeurs de corrélation	62
6.1 Probabilités cumulées des fonctions de pertes et de diminution dans les 3 cas : $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ (cas du modèle gaussien) et $\alpha < \beta$	67
6.2 Histogramme des simulations des variables latentes	68
6.3 tests d'adéquation à la loi normale sous SAS	69
6.4 Groupe de modèles RFL et gaussien	70
6.5 Base Correlations implicites des modèles RFL	71
6.6 Sensibilités des facteurs de corrélation à θ fixé	72
6.7 Sensibilités des facteurs de corrélation à θ fixé	73
6.8 Sensibilité de la barrière de corrélation à $\alpha > \beta$ fixés, tranche <i>equity</i>	73
6.9 Sensibilité de la barrière de corrélation à $\alpha > \beta$ fixés, tranche <i>senior</i>	74
6.10 Tarification d'un portefeuille complet avec prépaiement nul	74
6.11 Tarification d'un portefeuille complet avec prépaiement	75
6.12 Diminution relative à la largeur de la tranche due à l'ajout de prépaiement	75
6.13 Tarification par le modèle gaussien à un facteur avec $\rho = 40\%$	75
6.14 Comparaison des écarts relatifs entre spreads de marché dûs à un ajout de prépaiement	76
6.15 Tableau des agences de notation	85
6.16 Exemple de matrice de transition à 1 an	86

6.17 Densités de trois copules Archimédiennes de paramètre $\theta = 3$	89
6.18 Pricer de LCDS sous Excel VBA	91
6.19 Portefeuille Loan-CDO défini sous Excel	92
6.20 Matrice de transition et courbe d'actualisation	93
6.21 Interface de pricing pour les modèles Gaussien et RFL	94