Calculo Numérico – Prova 2

Tópicos abordados

- Ajustamento
- Interpolação
- Integração Numérica
- EDO

Sobre a Pontuação:

- Cada item dos problemas I,III, IV e V contabiliza 1 ponto
- O problema III contabiliza 1 ponto.
- Total de pontos: 20 a serem normalizados para uma nota entre 0 e 6.
- notaProva= (NumAcertos/20) * 6

Problema I (Ajustamento)

Dois analistas foram incumbidos de definir uma expressão/modelo/função que melhor descreva os dados de tempo (em minutos) de carregamento de uma máquina principal do processo produtivo e que possa ser utilizada para prever valores de tempos futuros. Para isso, foi passada a seguinte tabela de valores medidos em três dias.

Dia: xi	1	2	3
Tempo: f(xi)	8	7,5	8,5

Dada essa tarefa, cada um decidiu definir um próprio modelo, sem indicar o método indicado, oferecendo as seguintes propostas:

Analista 1: M1(x) = 2,5x+3,5

Analista 2: M2(x) = x^2+3

Um terceiro analista, ao participar da reunião de apresentação dos modelos, não convencido de que os dois modelos eram bons, ofereceu como proposta um modelo linear (denotado como M3), obtido através do método de mínimos quadrados (MMQ).

(4 pts) Baseado nessa situação assinale **APENAS** a(s) assertiva(s) verdadeira (s)

1. (X) O modelo M1 apresenta melhor ajuste que o modelo M2.
2. (   ) O terceiro analista blefou, pois o modelo M3 é o mesmo que o modelo M1
3. (X) Considerando os três modelos, a soma dos coeficientes do modelo M3 é maior ou igual a soma dos coeficientes dos modelos M2 e M1, ou seja, SomaCoeficientes (M3) >= [SomaCoeficientes (M1) + SomaCoeficientes (M2)].
4. (X) Usando o modelo M3, o tempo de manutenção estimado para o dia 8 é menor que o valor estimando pelo modelo M2.

Cálculos:

M1(x) = 2,5x+3,5

```
M2(x) = x^2+3
M3(x) = 0,25x + 7,5
```

Resíduos dos Modelos (Soma dos resíduos absolutos)

Xi	fi	M1(x)	M2(x)	M3(x)
1	8	6,0	4,0	7,75
2	7,5	8,5	7,0	8,0
3	8,5	11,0	12,0	8,25
Resíduos		5,5	8	1

Problema II (Ajustamento)

(1 pt)Considere uma tabela de pontos similar a apresentada no Problema 1 e as três opções de famílias de funções a serem adotadas no ajustamento via MMQ dadas abaixo, onde a, b, c e d são coeficientes a serem determinados. Baseado nisso, assinale a afirmativa correta quanto à linearidade dos coeficientes.

```
(i)   P(x) = a+b+3c+2d
(ii)  P(x) = ax^2+bsen(x)
(iii) P(x) = ab^x
```

1. ( ) Apenas o modelo (i) apresenta linearidade dos parâmetros de modo que o método de MMQ pode ser aplicado diretamente para definição dos coeficientes do modelo.
2. ( ) Apenas o modelo (ii) apresenta linearidade dos parâmetros de modo que o método de MMQ pode ser aplicado diretamente para definição dos coeficientes do modelo
3. (X) Apenas o modelo (iii) necessita de uma transformação em P(x) para tornar os parâmetros lineares e assim usar o MMQ.
4. ( ) Apenas os modelos (ii) e (iii) apresentam não linearidade dos parâmetros de modo que o método de MMQ não pode ser aplicado diretamente.
5. ( ) Apenas o modelo (i) apresenta não linearidade dos parâmetros de modo que o método de MMQ pode ser aplicado diretamente

Problema III (Interpolação)

(5 pts) Considere os dados da tabela abaixo, assinale apenas a(s) assertiva (s) verdadeira (s).

x	-1	1	2	3
f(x)	12	-4	-3	12

1. ( ) Como existem 4 pontos na tabela, o Polinômio Interpolador obtido utilizando tais pontos terá grau igual a 4.
2. (X) Com os dados da tabela, tanto o método de Newton quanto o de Lagrange resultam no mesmo polinômio interpolador.

3. (X) O Método de Gregory-Newton para definir o Polinômio Interpolador não pode ser empregado considerando todos os dados da tabela.
4. ( ) A soma das diferenças divididas de ordem 1 é maior que 8
5. (X) O valor de F(1,5) calculado via polinômio Interpolador é menor que 5.

Cálculos:

x	Ordem 0 (f(x))	------------------Ordem 1------------------	--------------------Ordem 2----------------------	---------------------- Ordem 3 ----------------------
-1	$f[x_0] = 12$	$f[x_0, x_1] = (f[x_1] - f[x_0]) / (x_1 - x_0) = (-4 - 12)/(1+1) = -8$	$f[x_0, x_1, x_2] = (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) / (x_2 - x_0) = (1+8)/(2+1) = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = (f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2])/(x_3 - x_0) = (7-3)/(3+1) = 1$
1	$f[x_1] = -4$	$f[x_1, x_2] = (f[x_2] - f[x_1]) / (x_2 - x_1) = (-3+4)/(2-1) = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = (f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]) / (x_3 - x_1) = (15-1)/(3-1) = 7$	
2	$f[x_2] = -3$	$f[x_2, x_3] = (f[x_3] - f[x_2]) / (x_3 - x_2) = (12+3)/(3-2) = 15$		
3	$f[x_3] = 12$			

Soma das Diferenças de ordem 1 = -8 + 1 + 15 = 8

Diferença de Ordem 3 = 1

Polinômio Interpolador P(X) = x^3 + x^2 – 9x + 3

P(1.5) = -4.875

Problema IV (Integração Numérica)

(5 pts) Considere a função f dada pela tabela de pontos a seguir

x	0	0,5	1	1,5	2,0
f(x)	4,9	6,1	6,5	7,1	7,5

1. ( ) O valor aproximado da integral de f no intervalo de 0 a 2 obtido pelo método dos Trapézios é maior que o obtido pelo método de Simpson. Considere três casas decimais na análise.
2. ( ) A adição do ponto (x, f(x)) = (2,5; 7,9) na tabela inviabiliza a utilização do método de Simpson para o cálculo aproximado da integral de f no intervalo de 0,5 a 2,5
3. ( ) O método de Simpson apresenta um erro nulo quando o polinômio a ser integrado tem grau maior que três
4. (X) O método dos Trapézios apresenta um erro nulo quando a função de integração é uma reta
5. ( ) O método de Simpson sempre apresenta erro menor que o método dos trapézios.

Cálculos:

```
x=[0, 0.5, 1, 1.5, 2]
f =[4.9,6.1,6.5, 7.1,7.5]
E = 4.9 + 7.5
P =  6.5
I = 6.1 + 7.1
TM = 0.5* (E/2 +I+P) = 12.95
SM = (0.5/3)*(E+4*I+2*P) = 13.033
```

Problema V (EDO)

(5 pts) Dada a Equação diferencial xy' –x+y = 0 e condição inicial y(1) = 2,5 e considerando duas divisões no intervalo entre a condição inicial x0 e x e **três casas decimais no resultado**. Assinale APENAS a(s) assertiva(s) verdadeira(s).

1. ( ) O método de Euler Simples considera uma aproximação linear da função desconhecida f(x), enquanto o método modificado de Euler considera uma aproximação quadrática.
2. (X) O método Modificado de Euler apresenta duas etapas, previsão e correção, onde na primeira é adotado o método de Euler simples.
3. (X) Para x=3, o valor de f(x) utilizando o método de Euler Simples é menor que 2.
4. ( ) Para x=2, o valor de f(x) obtido com o método de Euler Simples é igual ao valor obtido pelo método modificado de Euler
5. (X) Para x=3, o valor de f(x) obtido utilizando o método modificado de Euler é maior que o obtido via método de Euler Simples

Cálculos:

xy' –x+y = 0 => y' = (x-y)/x

y' = f(x,y) = (x-y)/x

Intervalo: [1 3]
xo = 1; yo=f(xo) = 2,5
h = (3 – 1)/2 = 1
x = [1; 2; 3]

Euler Simples

y1 = yo + h* f(xo,yo) = 2,5 + 1* [(1 -2,5)/1] = 2,5 – 1,5 = 1

y2 = y1 + h* f(x1,y1) = 1 + 1*f(2,1) = [1+ 1*(2 -1)/2] = 1,5

Euler Modificado

- **Previsão**
  y1* = yo + h* f(xo,yo) = 2,5 + 1* [(1 -2,5)/1] = 2,5 – 1,5 = 1

- **Correção**

y1 = y0 + (h/2) *[f(xo,yo]+ f(x1,y1*)]
y1 = 2,5 + 0,5 *[-1,5 + (2 – 1)/2)] = 2,5 - 0,5 = 2

- **Previsão**
  y2* = y1 + h* f(x1,y1) = 2 + 1* [(2 -2)/1] = 2

- **Correção**
  y2 = y1 + (h/2) *[f(x1,y1]+ f(x2,y2*)]
  y1 = 2 + 0,5 *[0+ (3-2)/3] = 2 + 0,5/3 = 2,167