Turbinas Térmicas — Conceitos Básicos

Prof. C. Naaktgeboren, PhD.

cc BY NC ND

rev-211022

Referências

Estas notas de aula adaptam e baseiam-se principalmente em:

[1] Turbine Design and Application (NASA-SP-290). A.J. Glassman (Editor), Lewis Research Center. NASA Scientific and Technical Information Program. Washington, DC. 1994.

Escoamento e Transferência de Energia em Turbinas Térmicas

Sistema de Coordenadas de Análise

Para análise do escoamento e transferência de energia em turbinas, adota-se sistema de coordenadas cilíndrico. As direções são chamadas de:

- axial - paralelo ao eixo de rotação
- radial - através do eixo de rotação
- tangencial - às partes girantes

Pares entre as direções enunciadas formam três diferentes planos, com funções distintas na análise:

- Plano Meridional, que contém as direções axial e radial: quantidades estudadas são valores médios (i) entre pás, ou (ii) circumferenciais. A correspondente análise é chamada de axi-simétrica.

- Plano Circunferencial, que contém as direções axial e tangencial: análises geralmente feitas para um parâmetro constante (e não médio) da direção radial. É o plano no qual são feitos os diagramas de velocidade.

Ainda, com relação à direção principal do escoamento:

- Se radial, como em turbinas radiais, o plano utilizado é o radial-tangencial.

- Se axial, como em turbinas axiais, o plano utilizado é o axial-tangencial.

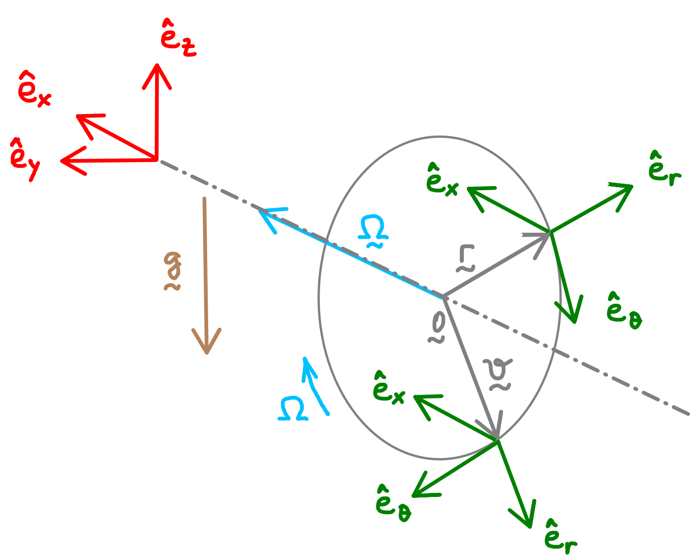


Fig. 1 - Sistemas Coordenados para análise.
Fonte: Adaptação própria de [1].

A Fig. 1 acima ilustra os versores (= vetores unitários) cilíndricos axial, radial e tangencial, respectivamente $\hat{e}_x$, $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$, tal que $\hat{e}_\theta = \hat{e}_x \wedge \hat{e}_r$, em verde, em posições $\underset{\sim}{r}$ e $\underset{\sim}{v}$, indicadas à partir da origem $\underset{\sim}{0}$, assim como versores Cartesianos $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$, em vermelho, e também o vetor velocidade angular $\underset{\sim}{\Omega}$, e sua magnitude Ω.

Os versores $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$ formam o plano horizontal, tal que o vetor aceleração da gravidade $\underset{\sim}{g} = -g\hat{e}_z$, indicado em marrom na Fig. 1.

As relações entre coordenadas são:

$$x = x, \qquad -\infty < x < +\infty$$
$$y = r\cos\theta, \qquad r \geq 0$$
$$z = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

e assim

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = x\hat{e}_x + r\cos\theta\,\hat{e}_y + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_z}$$

, e os vetores $\underset{\sim}{e}_x$, $\underset{\sim}{e}_r$ e $\underset{\sim}{e}_\theta$:

$$\underset{\sim}{e}_x = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z\right) = \hat{e}_x,$$ o qual já é unitário;

$$\underset{\sim}{e}_r = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{e}_y + \text{sen}\,\theta\,\hat{e}_z,$$ o qual também já é unitário; e

$$\underset{\sim}{e}_\theta = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \theta} = -r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_y + r\cos\theta\,\hat{e}_z,$$ o qual possui magnitude r; assim:

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{e}_x &= \underset{\sim}{e}_x / |\underset{\sim}{e}_x| = \underset{\sim}{e}_x = \hat{e}_x \\
\hat{e}_r &= \underset{\sim}{e}_r / |\underset{\sim}{e}_r| = \underset{\sim}{e}_r = \cos\theta\,\hat{e}_y + \text{sen}\,\theta\,\hat{e}_z \\
\hat{e}_\theta &= \underset{\sim}{e}_\theta / |\underset{\sim}{e}_\theta| = -\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z
\end{aligned}}$$

, que pode ser re-escrito como:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}}$$

, que é a relação entre versores cilíndricos e Cartesianos.

Ainda, efetuando diferenciais,

$$d\underset{\sim}{r} = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \theta} d\theta = \underset{\sim}{e}_x dx + \underset{\sim}{e}_r dr + \underset{\sim}{e}_\theta d\theta \longrightarrow$$

$$\boxed{d\underset{\sim}{r} = \hat{e}_x dx + \hat{e}_r dr + r\hat{e}_\theta d\theta}$$

, fazendo com que

$$\boxed{(d\ell)^2 = d\underset{\sim}{r} \cdot d\underset{\sim}{r} = (dx)^2 + (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2}$$

, e ainda:

$$dV = |\, dr\hat{e}_r \cdot (r d\theta \hat{e}_\theta \wedge dx \hat{e}_x) | \longrightarrow \boxed{dV = r\, dx\, dr\, d\theta}$$

É bom notar que a expressão para $d\underset{\sim}{r}$ pode ser utilizada na dedução de diferenciais de área de orientações arbitrárias.

Exemplo: Obtenha o diferencial de área dos planos (i) radial-axial, $d\underset{\sim}{A}_{xr}$, e (ii) tangencial-axial, $d\underset{\sim}{A}_{\theta x}$.

Solução: Tem-se que $d\underset{\sim}{A}_{xr} = d\underset{\sim}{r}_x \wedge d\underset{\sim}{r}_r$, onde $d\underset{\sim}{r}_x$ e $d\underset{\sim}{r}_r$ são vetores diferenciais nas direções x- e r-, respectivamente. De $d\underset{\sim}{r}$, tem-se:

$$d\underset{\sim}{A}_{xr} = d\underset{\sim}{r}_x \wedge d\underset{\sim}{r}_r = (\hat{e}_x dx) \wedge (\hat{e}_r dr) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_r & \hat{e}_\theta \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dr & 0 \end{vmatrix} = dx\, dr\, \hat{e}_\theta \quad \triangleleft$$

Ainda, tem-se:

$$d\underset{\sim}{A}_{\theta x} = d\underset{\sim}{r}_\theta \wedge d\underset{\sim}{r}_x = (r\hat{e}_\theta d\theta) \wedge (\hat{e}_x dx) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_r & \hat{e}_\theta \\ 0 & 0 & r d\theta \\ dx & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\, dx\, d\theta\, \hat{e}_r \quad \triangleleft$$

Logo: (i) $d\underset{\sim}{A}_{xr} = dx\, dr\, \hat{e}_\theta$,

(ii) $d\underset{\sim}{A}_{\theta x} = r\, dx\, d\theta\, \hat{e}_r$. ■

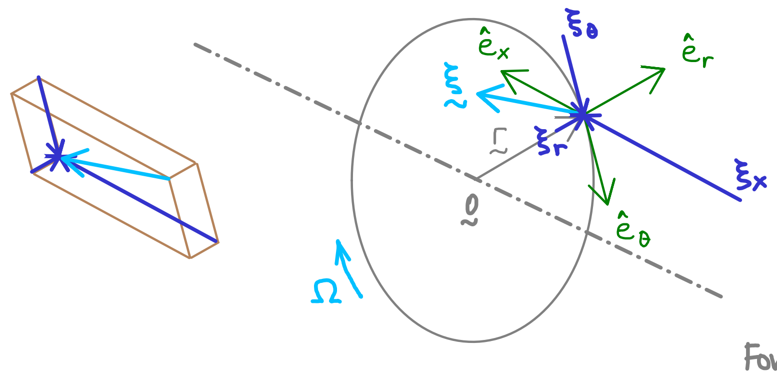


Fig. 2 - Componentes de velocidade.

Fonte: Adaptação própria de [1].

A Fig. 2 acima ilustra um vetor velocidade $\underset{\sim}{\xi}$, na posição $\underset{\sim}{r}$ em relação à origem $\underset{\sim}{O}$, bem como sua decomposição em componentes cilíndricas ξ_x, ξ_r e ξ_θ, tal que

$$\boxed{\underset{\sim}{\xi} = \xi_x \hat{e}_x + \xi_r \hat{e}_r + \xi_\theta \hat{e}_\theta} \; .$$

Respectivamente, ξ_x, ξ_r e ξ_θ são as componentes axial, radial e tangencial do vetor velocidade $\underset{\sim}{\xi}$.

Vetores de Velocidade

Se um vetor velocidade for escrito com base em um referencial absoluto, indicamos isso por um subscrito "V", ou seja:

$$\boxed{\underset{\sim}{\xi}_V = \xi_{Vx} \hat{e}_x + \xi_{Vr} \hat{e}_r + \xi_{V\theta} \hat{e}_\theta} \; .$$

Seja $\underset{\sim}{\xi}_U$ a velocidade que a pá girante (com $\underset{\sim}{\Omega}$) teria na posição $\underset{\sim}{r}$, a saber:

$$\underset{\sim}{\xi}_U = \underset{\sim}{\Omega} \wedge \underset{\sim}{r} = (\Omega \hat{e}_x) \wedge (x \hat{e}_x + r\cos\theta\, \hat{e}_y + r\,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat{e}_z)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \Omega & 0 & 0 \\ x & r\cos\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{vmatrix} = \Omega r \big(\overbrace{\cos\theta\, \hat{e}_z - \mathrm{sen}\,\theta\, \hat{e}_y}^{=\hat{e}_\theta} \big) \longrightarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{\xi}_U = \Omega r\, \hat{e}_\theta} \; .$$

Analogamente, se o referencial for giratório solidário à pá na posição $\underset{\sim}{r}$, velocidades neste referencial serão chamadas "relativas" (à pá) e designadas pelo subscrito "W":

$$\boxed{\underset{\sim}{\xi}_W = \underset{\sim}{\xi}_V - \underset{\sim}{\xi}_U} \; ,$$ a qual é fundamental nos diagramas de velocidade.

Importa notar que em outros textos, incluindo a referência principal destas notas, a notação empregada na relação entre velocidades anterior é: " $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$ ", ou seja: subscritos tornam-se nas velocidades avaliadas nos diferentes referenciais, alocando-se três símbolos para velocidades — justamente aqueles tradicionalmente utilizados para (i) trabalho, (ii) volume e (iii) energia interna, respectivamente, em Termodinâmica; razão pela qual estas notas empregam $\underset{\sim}{\xi}$ para velocidades e subscritos para especificações.

Projeções das Velocidades no Plano Circumferencial $(-x\theta)$

No plano Circumferencial, que contém as direções axial e tangencial, para um certo valor de r, tem-se as seguintes projeções radiais de velocidade:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{\xi}_V &= \xi_{Vx}\,\hat{e}_x + \xi_{V\theta}\,\hat{e}_\theta & (\perp r) \\ \underset{\sim}{\xi}_U &= \Omega r\,\hat{e}_\theta & (\perp r) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left. \underset{\sim}{\xi}_W = \underset{\sim}{\xi}_V - \underset{\sim}{\xi}_U \right\}$$

conhecida graficamente por triângulo de velocidades.

$$\boxed{\underset{\sim}{\xi}_W = \xi_{Vx}\,\hat{e}_x + (\xi_{V\theta} - \Omega r)\,\hat{e}_\theta},$$

que evidencia que velocidades relativas diferem das correspondentes absolutas apenas na componente tangencial, $\xi_{W\theta} = \xi_{V\theta} - \Omega r$.

Diagramas de Velocidade

As grandezas mais importantes nas análises de escoamento e transferência de energia em turbinas são a velocidade do fluido e suas variações. Assim, diagramas de velocidades assistem nas análises e ilustram formatos e tipos de pás e palhetas.

- Velocidades absolutas interessam adentro e através das palhetas de estatores;
- Velocidades relativas interessam através de pás de rotores.

O escoamento através de fileiras de pás rotativas de um rotor pode ser analisado por meio das velocidades relativas e outros parâmetros relativos, de forma similar à análise de escoamento em passagens estacionórias. Tal análise emprega hipóteses bastante simplificadoras, a exemplo de gás ideal com calores específicos constantes, e não faz parte destas notas. O leitor interessado é referido às pp. 30-32 de [1].

Cálculos em diagramas de velocidade são feitos:

- Em posições imediatamente à montante e à jusante das várias fileiras de pás.
- Em afastamentos infinitesimais ao longo dos perfis "molhados" pelo fluido.

Ainda, os vetores velocidade representam a média circumferencial do escoamento, não havendo, portanto, variações de tais velocidades (médias) na direção circumferencial, tal que componentes $\xi_{wx} : \xi_{wx}(x)$ e $\xi_{w\theta} : \xi_{w\theta}(x)$, com $\partial \underset{\sim}{\xi}_w / \partial\theta = 0$, em um determinado r e $\perp r$, a saber: referente à uma dada projeção no plano circumferencial.

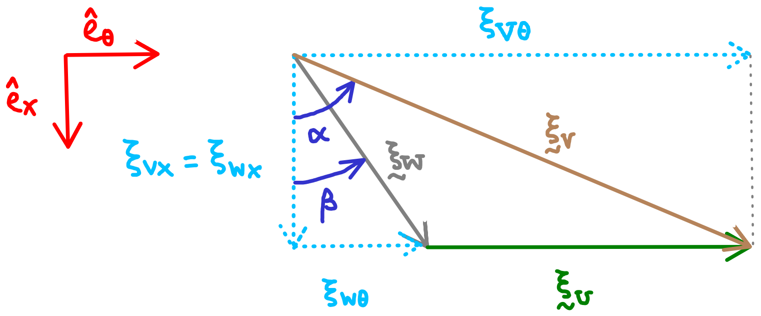


Fig. 3 - Diagrama de velocidades mostrando um único triângulo de velocidades.
Fonte: Adaptação própria de [1].

A Fig. 3 acima ilustra um simples diagrama de velocidades contendo um único triângulo de velocidades ilustrativo da relação vetorial $\underset{\sim}{\xi}_w = \underset{\sim}{\xi}_v - \underset{\sim}{\xi}_u$. Ângulo α é o absoluto do escoamento, observável em relação a um referencial estático. Já β é o ângulo do escoamento relativo à uma pá móvel (referencial rotativo).

Componentes de velocidade, ξ_{vx} e $\xi_{v\theta}$ para $\underset{\sim}{\xi}_v$; ξ_{wx} e $\xi_{w\theta}$ para $\underset{\sim}{\xi}_w$; são ilustrados incluindo a relação $\xi_{vx} = \xi_{wx}$ resultante de $\underset{\sim}{\xi}_u$ ter apenas componente tangencial, como demonstrado matematicamente acima via $\underset{\sim}{\xi}_w = \xi_{vx}\,\hat{e}_x + (\xi_{v\theta} - \Omega r)\,\hat{e}_\theta$, com $\underset{\sim}{\xi}_w = \xi_{wx}\,\hat{e}_x + \xi_{w\theta}\,\hat{e}_\theta$ e inspecionando.

Pelos triângulos retângulos é possível escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_v^2 &\equiv \underset{\sim}{\xi}_v \cdot \underset{\sim}{\xi}_v = \xi_{vx}^2 + \xi_{v\theta}^2 \\ \xi_w^2 &\equiv \underset{\sim}{\xi}_w \cdot \underset{\sim}{\xi}_w = \xi_{wx}^2 + \xi_{w\theta}^2 \end{aligned}} \quad , \quad e \quad .$$

Ainda, pelas componentes em $\hat{e}_\theta$:

$$\boxed{\xi_{w\theta} = \xi_{v\theta} - \xi_{u\theta} = \xi_{v\theta} - \Omega r} \; .$$

Convenciona-se que ângulos α e β são positivos no sentido indicado na Fig. 3 acima, significando ângulos positivos no sentido de $\underset{\sim}{\xi}_U$ (dado que $\underset{\sim}{\Omega} = \Omega\hat{e}_x$ com $\Omega > 0$). Tal convenção, porém, não é universal, havendo casos de inversão da convenção à jusante de fileiras de pás, assim como definição dos ângulos a partir da direção tangencial. Portanto:

$\Rightarrow$ Sempre certifique-se das convenções utilizadas nos diagramas de velocidade feitos por outrem!

Exemplo: Em uma turbina a gás axial as condições de escoamento entre a primeira fileira de palhetas fixas e a primeira fileira de pás móveis são: ângulo relativo de escoamento de 30°, ângulo absoluto de escoamento de 60° e velocidade de pá, $\xi_U = 90$ m/s. Determine todas as velocidades e componentes do diagrama de velocidades.

Solução: Busca-se relações trigonométricas para as quantidades faltantes:

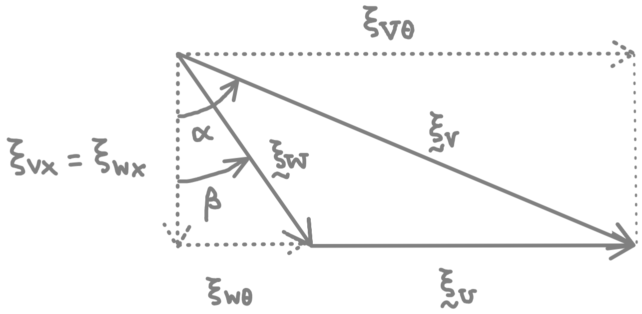
$\text{sen}\,\alpha = (\xi_{W\theta} + \xi_U)/\xi_V$; $\text{sen}\,\beta = \xi_{W\theta}/\xi_V \rightarrow$

$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = \xi_U/\xi_V \rightarrow \xi_V = \xi_U/(\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)$;

$\xi_V = (90\text{ m/s})/(0{,}3660) = 245{,}9\text{ m/s}$ ◁

$\xi_{Vx} = \xi_V \cos\alpha = 122{,}9\text{ m/s} = \xi_{Wx}$ ◁

$\xi_W = \xi_{Wx}/\cos\beta = 142{,}0\text{ m/s}$ ◁ também $\xi_{W\theta} = 71\text{ m/s}$; $\xi_{V\theta} = 161\text{ m/s}$ ■



Continuação 1: Sabendo-se que o plano circumferencial para os dados enunciados baseia-se na posição $\underset{\sim}{r} = (0; r; 0)$, com raio $r = 0{,}45$ m sendo o raio médio dos conjuntos de pás e palhetas, os quais estão distribuídos em toda a volta (a saber: desde $\theta = 0$ rad até $\theta = 2\pi$ rad) e que a altura delas são todos iguais a 0,08 m, determine a rotação da turbina, em várias unidades, bem como a vazão volumétrica do gás.

Solução: Resolve-se para Ω em $\xi_{U\theta} = \Omega r \longrightarrow \Omega = \xi_{U\theta}/r = (90\text{ m/s})/(0{,}45\text{ m})$:

$$\Omega = 200/\text{s} = 200\text{ Hz} = 200\text{ rps} = 12000\text{ rpm} = 1257\text{ rad/s} \;◁$$

Uma vez que as quantidades no diagrama de velocidade são médias circumferenciais, a área de escoamento para cálculos de vazão volumétrica é a área total (ao longo dos 2π rad e entre os raios mínimo e máximo, r_1 e r_2, das pás e palhetas). Tem-se que $\dot{V} = A.\xi_{Vx}$, uma vez apenas a componente axial de velocidade é responsável por vazão na turbina axial. Portanto:

$r_1, r_2 = r \pm \ell/2$, com $r = 0{,}45\,m$ e $\ell = 0{,}08\,m$ $\longrightarrow$ $r_1, r_2 = (0{,}41;\ 0{,}49)\,m$

$A = \pi(r_2^2 - r_1^2) = 0{,}2262\ m^2$ $\longrightarrow$ $\dot{V} = A.\xi_{vx} = (0{,}2262\ m^2)(122{,}9\ m/s)$ $\longrightarrow$

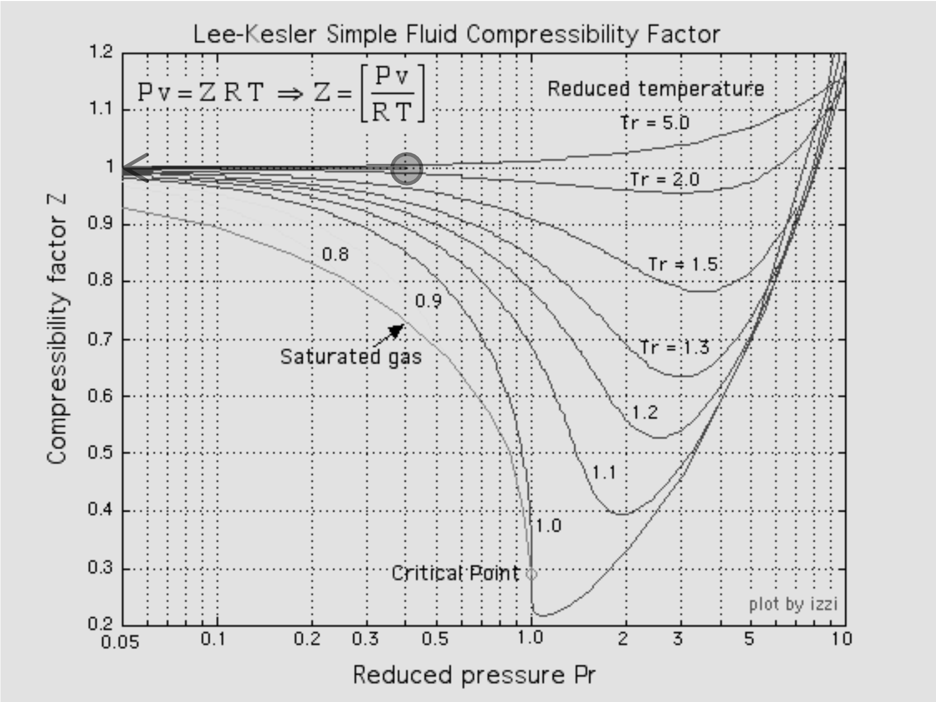
$\dot{V} = 27{,}81\ m^3/s$ ■

Continuação 2: Se o gás que escoa nas condições acima for CO_2 a 3MPa e 1100 K, determine a vazão mássica correspondente.

Pela Tab A-1 (Çengel, Y. A. e Boles, M. A.; 7ª Ed., p. 908): $M_{CO_2} = 44{,}01$ kg/kmol;

$R_{CO_2} = 0{,}1889$ kJ/kg·K; $T_{cr} = 304{,}2$ K;

$P_{cr} = 7{,}39$ MPa; tal que: $T_R = 3{,}62$; $P_R = 0{,}406$



Fonte: https://www.ohio.edu/mechanical/thermo/property_tables/gas/Zfactor.gif

Pelo diagrama de Lee-Kessler de compressibilidade generalizada de substâncias puras, lê-se $Z \simeq 1$ e portanto o comportamento do CO_2 é ideal. Logo:

$$v = RT/P$$

$$= (0{,}1889\ kJ/kg\cdot K)(1100\ K)/(3000\ kPa) \rightarrow$$

$$v = 0{,}06926\ m^3/kg \quad \Delta$$

E assim, utilizando $\dot{m} = \dot{V}/v$, tem-se:

$$\dot{m} = (27{,}81\ m^3/s)/(0{,}06926\ m^3/kg) \longrightarrow \dot{m} = 401{,}5\ kg/s \ ■$$

Unidades de Velocidade nas Equações de Transferência de Energia

Termos de energia cinética específica, $\frac{1}{2}\xi^2$, compõem balanços de energia juntamente com termos de trabalho, entalpia específica, e outros, conforme o caso. Quando ξ's são dados em m/s, a correspondente energia cinética específica é dada em m^2/s^2 = J/kg:

$$\frac{J}{kg} = \frac{N.m}{kg} = \frac{\cancel{kg}.m}{s^2}.\frac{m}{\cancel{kg}} = \frac{m^2}{s^2}.$$

Por outro lado, termos de trabalho e entalpia específicos são normalmente expressos em Termodinâmica em unidades de kJ/kg. Para que termos de energia cinética específica sejam expressos em kJ/kg, duas opções são mencionadas:

- $e_c = \xi^2/2000$, com ξ em unidades de m/s (e fator de conversão $1/1000$ explícito);
- $e_c = \frac{1}{2}\xi^2$, com ξ em unidades de $\sqrt{kJ/kg} = \sqrt{1000}$ m/s $\simeq$ 31,62 m/s $\simeq$ 113,8 km/h.

Estas notas adotam a segunda opção nas expressões que contenham termos usualmente dados em kJ/kg, como trabalho específico e entalpia específica, assim como a primeira opção nos demais casos.

Fonte: Adaptado de https://doutormultas.com.br/wp-content/uploads/2016/11/multa-por-excesso-de-velocidade-limites-de-velocidade.jpg

Fig. 4 - Ilustração de valores de limites de velocidade em $\sqrt{kJ/kg}$ contextualizados em uma sinalização de trânsito (adaptação). Valores originais convertidos eram de 100, 90 e 80 km/h, respectivamente.

Exemplo: Calcule a energia cinética específica de caminhões trafegando no limite de velocidade da Fig. 4 acima, em kJ/kg.

Solução: Tem-se $e_c = \frac{1}{2}\xi^2$ (kJ/kg), portanto $e_c = \frac{1}{2}\left(0{,}7\sqrt{kJ/kg}\right)^2 \longrightarrow e_c = 0{,}245$ kJ/kg ■

Transferência de Energia

A relação básica de transferência de energia para todas as turbomáquinas é relativamente simples, sendo apenas uma forma da Segunda Lei de Newton,

$$\underset{\sim}{\mathcal{P}} = m\,\underset{\sim}{\dot{\xi}}\,, \qquad \text{(TE1)}$$

onde $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$ (pê) é o vetor força resultante, m é a massa do sistema com vetor aceleração $\underset{\sim}{\dot{\xi}}$, respectivamente em unidades de N, kg e m/s^2 — aplicada ao fluido que atravessa o rotor.

A mudança em magnitude da componente axial de velocidade, $\Delta\xi_x$, através do rotor dá surgimento a uma força axial, a qual deve ser resistida por mancais axiais. Já a mudança na componente radial de velocidade, $\Delta\xi_r$, dá origem a forças radiais, as quais também devem ser resistidas em mancais radiais. Assim, à parte de efeitos de atrito nos mancais, as variações de velocidade em suas componentes axial e radial não concernem ao movimento angular do rotor.

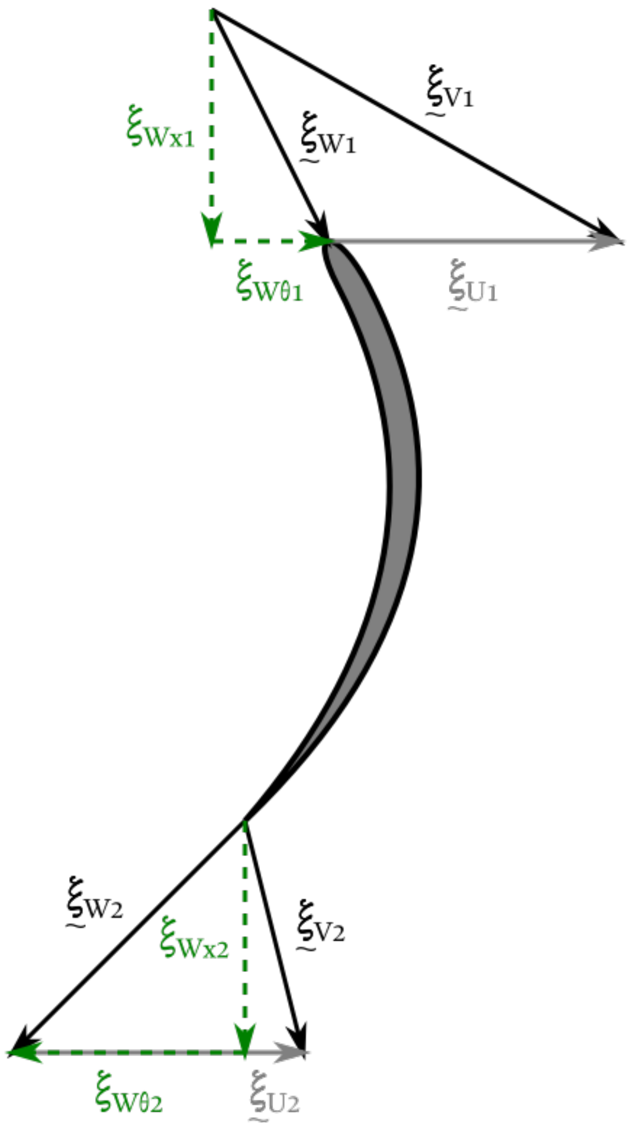


Fig 5 - Diagrama de velocidades sobre uma pá
Fonte: Autoria própria.

É a variação em magnitude e em raio das componentes tangenciais de velocidade, $\Delta\xi_\theta$, que corresponde a uma mudança de momento angular no fluido, resultando na desejada transferência de energia.

O torque líquido de eixo, τ, é igual à diferença entre torques de entrada e saída:

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 \quad \longrightarrow \quad \tau = (\mathcal{P}_\theta r)_1 - (\mathcal{P}_\theta r)_2 \qquad [N \cdot m] \qquad \text{(TE2)}$$

Aplicando a Eq.(TE1) na direção tangencial e integrando desde $\xi_v = 0$ em $t = 0$ até $\xi_v = \xi_v$ em $t = t$, com $\dot{m} \equiv dm/dt$ assumido permanente, leva a

$$\mathcal{P}_\theta = \dot{m}\,\xi_{v\theta} \qquad [N] \qquad (\xi \text{ em } [m/s]) \qquad \text{(TE3)}$$

Portanto o torque fica, pelas Eqs. (TE2) e (TE3):

$$\tau = \dot{m}\left(\xi_{v\theta 1} r_1 - \xi_{v\theta 2} r_2\right). \qquad [N.m] \qquad (\xi \text{ em } [m/s]) \qquad (TE4)$$

A potência (taxa de trabalho, $\dot{W}$) fica

$$\dot{W} = \tau\,\Omega = \dot{m}\,\Omega\left(\xi_{v\theta 1} r_1 - \xi_{v\theta 2} r_2\right), \qquad [W] \qquad (\xi \text{ em } [m/s]) \qquad (TE5)$$

substituindo $\Omega r_n = \xi_{un}$ na Eq. (TE5), e ajustando unidades:

$$\dot{W} = \dot{m}\,w = \dot{m}\left(\xi_{v\theta 1}\xi_{u1} - \xi_{v\theta 2}\xi_{u2}\right). \qquad [kW] \qquad (\xi \text{ em } [\sqrt{kJ/kg}]) \qquad (TE6)$$

Considerando operação adiabática e utilizando entalpias específicas totais:

$$h_0 \equiv h + e_c = u + Pv + e_c = h + \tfrac{1}{2}\xi_v^2, \qquad [kJ/kg] \qquad (TE7)$$

o balanço de energia no fluido através do rotor fica:

$$\boxed{w = h_{01} - h_{02} = \Delta h_0 = \left(\xi_{v\theta 1}\xi_{u1} - \xi_{v\theta 2}\xi_{u2}\right)}. \qquad [kJ/kg] \qquad (TE8)$$

A Eq. (TE8) é conhecida como equação de Euler de turbomáquinas, e é a equação básica de trabalho para todas as turbomáquinas.

A Eq. (TE8) pode ser trabalhada para gerar outra equação de mais cômoda aplicação:

$$\begin{aligned}
\xi_w^2 &= \xi_{w\theta}^2 + \xi_{wx}^2 \longrightarrow \quad \xi_{w\theta} = \xi_{v\theta} - \xi_u \longrightarrow \\
&= \xi_{v\theta}^2 + 2\xi_{v\theta}\xi_u + \xi_u^2 + \xi_{wx}^2 \longrightarrow \quad \xi_{wx} = \xi_{vx}, \text{ com } \xi_{vx}^2 = \xi_v^2 - \xi_{v\theta}^2 \longrightarrow \\
\xi_{wx}^2 &= \xi_w^2 - \xi_{v\theta}^2 - 2\xi_{v\theta}\xi_u - \xi_u^2 = \xi_{vx}^2 = \xi_v^2 - \xi_{v\theta}^2 \longrightarrow \\
&\quad \xi_w^2 - \cancel{\xi_{v\theta}^2} - 2\xi_{v\theta}\xi_u - \xi_u^2 = \xi_v^2 - \cancel{\xi_{v\theta}^2} \longrightarrow \\
\xi_{v\theta}\xi_u &= \tfrac{1}{2}\left(\xi_v^2 + \xi_u^2 - \xi_w^2\right) = e_{cv} + e_{cu} - e_{cw}. \qquad [kJ/kg]
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação de Euler resulta em:

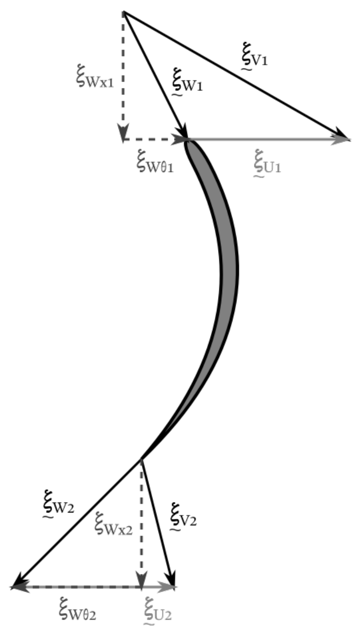
$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta h_0 = \Delta e_{cv} + \Delta e_{cu} - \Delta e_{cw} &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\xi_{v1}^2 - \xi_{v2}^2\right) + \left(\xi_{u1}^2 - \xi_{u2}^2\right) - \left(\xi_{w1}^2 - \xi_{w2}^2\right)\right] \\
&= h_{01} - h_{02}. \qquad [kJ/kg]
\end{aligned}} \qquad (TE9)$$

Ainda, pela definição de entalpia específica total, h_0:

$$\boxed{\Delta h = h_1 - h_2 = \Delta e_{CU} - \Delta e_{CW} = \tfrac{1}{2}\left[\left(\xi_{U1}^2 - \xi_{U2}^2\right) - \left(\xi_{W1}^2 - \xi_{W2}^2\right)\right].} \quad [kJ/kg] \qquad (TE10)$$

Exemplo: Considerando que o diagrama de velocidades da ilustração esteja em escala, com $\xi_{Wx1} = 40$ m/s, determine todas as quantidades do diagrama de velocidades em m/s e em $\sqrt{kJ/kg}$.

Solução: Cada linha equivale a 20 m/s, logo:



$\xi_{W\theta 1} = 20$ m/s ; $\tan\beta_1 = 1/2 \longrightarrow \beta_1 \simeq 0{,}464$ rad $\simeq 26{,}6°$

$\xi_{W1} = \sqrt{\xi_{W\theta 1}^2 + \xi_{Wx1}^2} \longrightarrow \xi_{W1} = 44{,}72$ m/s ◁

$\xi_{V\theta 1} = \xi_{W\theta 1} + \xi_{U1} = 70$ m/s ; $\xi_{Vx1} = \xi_{Wx1} = 40$ m/s

$\xi_{U1} = 50$ m/s (escala) ; $\tan\alpha_1 = 7/4 \longrightarrow \alpha_1 \simeq 1{,}05$ rad $\simeq 60{,}3°$

$\xi_{V1} = \sqrt{\xi_{V\theta 1}^2 + \xi_{Vx1}^2} \longrightarrow \xi_{V1} = 80{,}62$ m/s ◁

Na saída (secção 2), tem-se $\xi_{Wx2} = \xi_{Wx1} = 40$ m/s. Também $\xi_{W\theta 2} = -40$ m/s, logo:

$\tan\beta_2 = -1 \longrightarrow \beta_2 = -0{,}785$ rad ; $\beta_2 = -45°$

$\xi_{W2} = \xi_{Wx2}\sqrt{2} \longrightarrow \xi_{W2} = 56{,}57$ m/s ◁

$\xi_{V\theta 2} = \xi_{W\theta 2} + \xi_{U2} = (-40 + 50)$ m/s $\longrightarrow \xi_{V\theta 2} = 10$ m/s ; $\xi_{Vx2} = \xi_{Wx2} = 40$ m/s

$\tan\alpha_2 = 1/4 \longrightarrow \alpha_2 \simeq 0{,}245$ rad $\simeq 14{,}0°$; $\xi_{V2} = \sqrt{\xi_{V\theta 2}^2 + \xi_{Vx2}^2} = 41{,}23$ m/s ◁

Em suma:

$\xi_{U1} = 50$ m/s $= 1{,}58\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CU1} = 1{,}25$ kJ/kg	}	$\Delta e_{CU} = 0$ kJ/kg
$\xi_{U2} = 50$ m/s $= 1{,}58\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CU2} = 1{,}25$ kJ/kg		
$\xi_{V1} = 80{,}62$ m/s $= 2{,}55\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CV1} = 3{,}25$ kJ/kg	}	$\Delta e_{CV} = 2{,}4$ kJ/kg
$\xi_{V2} = 41{,}23$ m/s $= 1{,}30\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CV2} = 0{,}85$ kJ/kg		
$\xi_{W1} = 44{,}72$ m/s $= 1{,}41\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CW1} = 1{,}00$ kJ/kg	}	$\Delta e_{CW} = -0{,}6$ kJ/kg
$\xi_{W2} = 56{,}57$ m/s $= 1{,}79\sqrt{kJ/kg}$	;	$e_{CW2} = 1{,}60$ kJ/kg		

$\beta_1 = 26{,}6°$ $\quad\beta_2 = -45°$ $\quad\alpha_1 = 60{,}3°$ $\quad\alpha_2 = 14{,}0°$ ■

Continuação 1: Calcule o trabalho específico produzido no estágio ilustrado, (i) pela equação de Euler e (ii) pela Eq. (TE9).

Solução: (i) Tem-se: $w = \Delta h_0 = h_{01} - h_{02} = (\xi_{V\theta 1}\xi_{U1} - \xi_{V\theta 2}\xi_{U2}) \longrightarrow$

$w = [(70\,m/s)(50\,m/s) - (10\,m/s)(50\,m/s)] \times 10^{-3}\ (kJ/kg)/(m^2/s^2) \longrightarrow$

$= (3{,}5 - 0{,}5)$ kJ/kg $\longrightarrow w = 3{,}0$ kJ/kg ◁

(ii) Tem-se: $w = \Delta h_0 = \Delta e_{CV} + \Delta e_{CU} - \Delta e_{CW} = (0{,}0 + 2{,}4 + 0{,}6)$ kJ/kg $\longrightarrow w = 3{,}0$ kJ/kg ■

Continuação 2: Recalcule o trabalho específico no caso em que todas as velocidades são multiplicadas pelo fator constante $f = 2$.

Solução: Pela equação de Euler, tem-se, para a configuração original:

$$w = [(70\,m/s)(50\,m/s) - (10\,m/s)(50\,m/s)] \times 10^{-3}\,(kJ/kg)/(m^2/s^2)$$; portanto, na configuração "f":

$$w_f = [(70f\,m/s)(50f\,m/s) - (10f\,m/s)(50f\,m/s)] \times 10^{-3}\,(kJ/kg)/(m^2/s^2)$$; assim:

$$w_f = f^2 w \quad \rightarrow \quad \text{logo} \quad w_f = 4w = 4(3{,}0\,kJ/kg) = 12\,kJ/kg \;\triangleleft$$

A mesma relação $w_f = f^2 w$ pode ser obtida de $\Delta e_{c,f} = f^2 \Delta e_c$. ■

Carregamento nas Pás

A curvatura das pás do rotor causam mudança de direção do escoamento. Tal mudança engendra o surgimento de regiões de alta e baixa pressões nas superfícies das pás, conforme indicado na Fig. 6 abaixo:

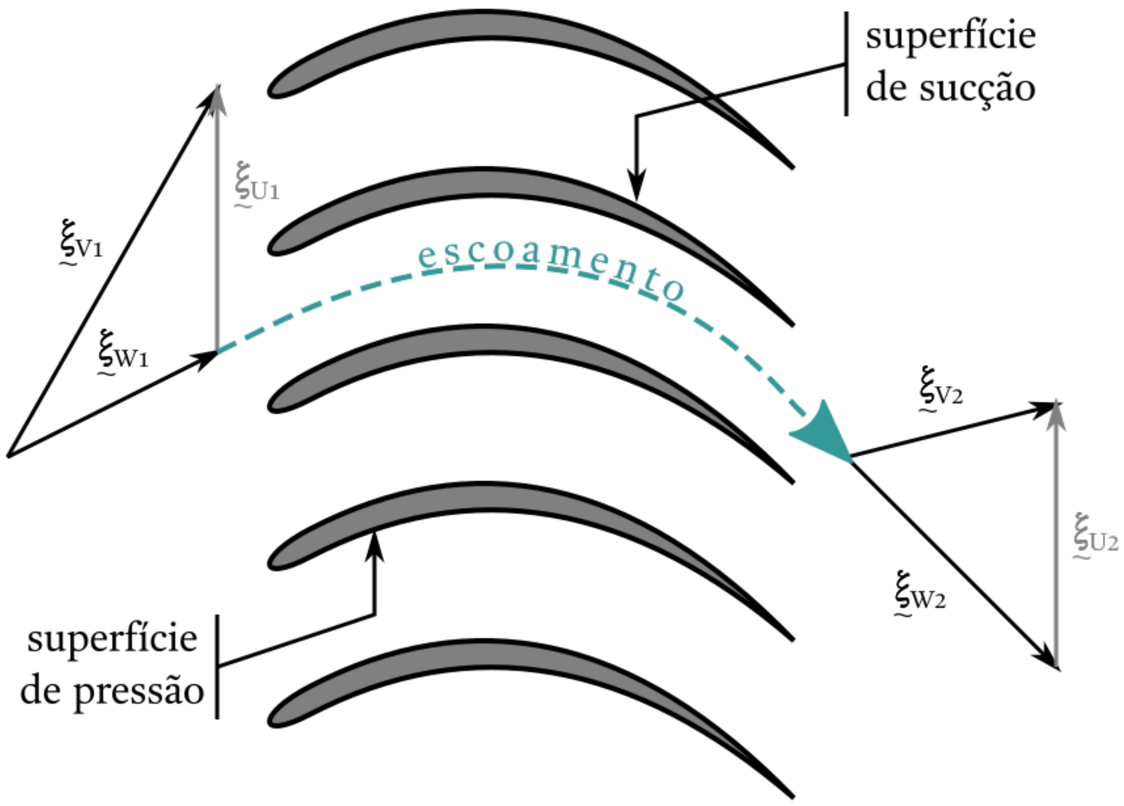


Fig 6 – Esquemático do escoamento através de uma grade de pás móveis com indicação de superfícies (faces) de pressão (côncavas) e de sucção (convexas).
Fonte: Autoria própria

Partindo-se da borda de ataque, na qual se estabelecem condições de estagnação, i.e, $\underset{\sim}{\xi}_W = \underset{\sim}{0}$ m/s, até a borda de fuga pelo plano circumferencial, existem dois possíveis caminhos:

(i) pela superfície de pressão (lado côncavo) da pá, ou
(ii) pela superfície de sucção (lado convexo) da pá.

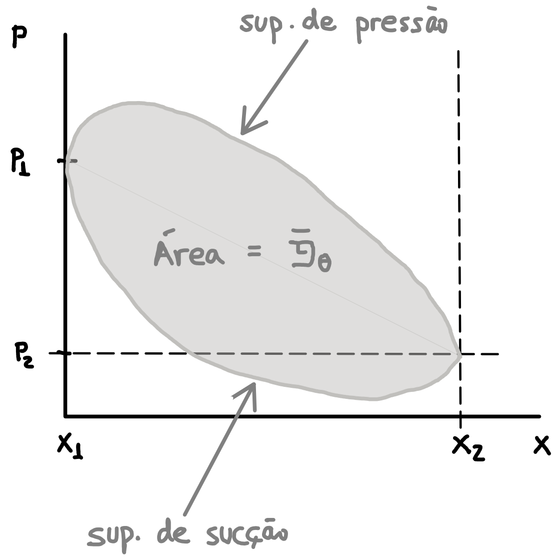


Fig. 7 - Perfis de pressão ao longo da corda axial de pás (de rotor), também conhecidos por diagrama de carga da pá.

Fonte: Autoria própria.

A Fig. 7 acima ilustra um diagrama de carga de pá, ilustrativo do processo de transferência de energia via perfis de pressão estática nas faces de pressão e sucção das pás do rotor. A área entre as curvas é uma força média representativa na direção tangencial, $\bar{\mathfrak{F}}_\theta$.

Reação (ou Grau de Reação)

Diferentes medidas de reações (de estágio, R_{stg}, de estator, R_{stt}, de fileira de pás de rotor, R_{rot}) são valores que caracterizam as respectivas partes, permitindo sua classificação.

Define-se (grau de) reação de estágio como a razão entre a variação de entalpia pela transferência total de energia em um estágio:

$$R_{stg} \equiv \frac{h_1 - h_2}{w} = \frac{h_1 - h_2}{h_{01} - h_{02}} = \frac{\Delta h}{\Delta h_0} = \frac{\Delta e_{cU} - \Delta e_{cW}}{\Delta e_{cV} + \Delta e_{cU} - \Delta e_{cW}} \longrightarrow$$

$$R_{stg} = \frac{(\xi_{U1}^2 - \xi_{U2}^2) - (\xi_{W1}^2 - \xi_{W2}^2)}{(\xi_{V1}^2 - \xi_{V2}^2) + (\xi_{U1}^2 - \xi_{U2}^2) - (\xi_{W1}^2 - \xi_{W2}^2)}$$

Exemplo: Determine o grau de reação do estágio do exemplo anterior nas (i) velocidades originais e (ii) velocidades magnificadas pelo fator constante $f = 2$.

Solução: Das variações de energia cinética já calculadas, tem-se: $\Delta e_{cu} = 0$ kJ/kg; $\Delta e_{cv} = 2{,}4$ kJ/kg; $\Delta e_{cw} = -0{,}6$ kJ/kg; logo:

$$\text{(i)} \qquad R_{stg} = \frac{(0{,}0) - (-0{,}6)}{(2{,}4) + (0{,}0) - (-0{,}6)} = \frac{0{,}6}{3{,}0} = 0{,}2 \quad \triangleleft$$

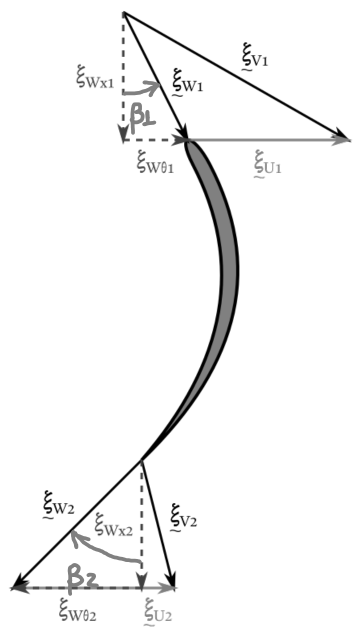
$$\text{(ii)} \qquad R_{stg} = \frac{(0{,}0)f^2 - (-0{,}6)f^2}{(2{,}4)f^2 + (0{,}0)f^2 - (-0{,}6)f^2} = \frac{0{,}6f^2}{3{,}0f^2} = 0{,}2 \quad \triangleleft$$

Vê-se, portanto, que o fator constante f não impacta a reação do estágio. ■

Estágios com zero grau de reação, $R_{stg} = 0$, caracterizam aqueles nos quais não apresentam variações de entalpia específica, $\Delta h = h_1 - h_2 = 0$, e todo o trabalho executado no estágio resulta da variação de energia cinética específica absoluta, Δe_{cv}. Tais estágios são designados "de impulso".

Para escoamento puramente axial, $r_1 = r_2 \longrightarrow \xi_{U1} = \xi_{U2} \longrightarrow \Delta e_{cu} = 0$, mudanças na entalpia específica, $\Delta h = h_1 - h_2 = \cancel{\Delta e_{cu}}^{\,0} - \Delta e_{cw} = -\Delta e_{cw}$, necessariamente advém da variação da energia cinética relativa, $\frac{1}{2}(\xi_{W1}^2 - \xi_{W2}^2)$. Assim, em estágios axiais de impulso, $\xi_{W1} = \xi_{W2}$.

Exemplo: Discuta alterações na geometria de saída (borda de fuga) da pá ilustrada — a mesma dos exemplos anteriores — tal que o estágio passe a ser de impulso. As condições de contorno são: • $r_1 = r_2$, • $\xi_{Wx2} = \xi_{Wx1}$.

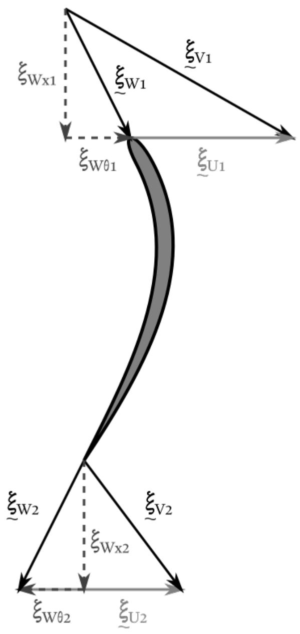


Solução: Um estágio de impulso é caracterizado por $R_{stg} = 0$, logo:

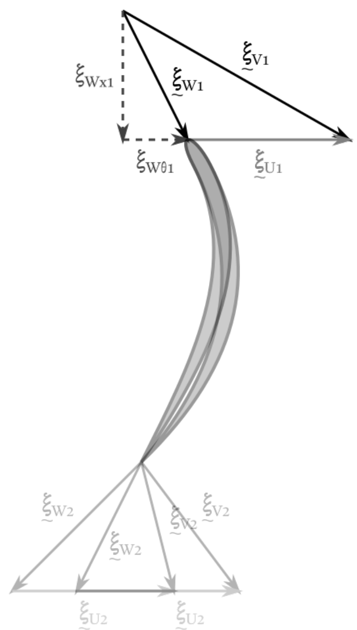
$\Delta h = h_1 - h_2 = \Delta e_{cu} - \Delta e_{cw} = 0 \longrightarrow \xi_{U1} = \xi_{U2} \longrightarrow \Delta e_{cu} = 0 \longrightarrow$ $\Delta e_{cw} = 0 \longrightarrow \xi_{W1} = \xi_{W2}$. Como $\xi_{Wx2} = \xi_{Wx1}$, tem-se: $|\xi_{W\theta 2}| = |\xi_{W\theta 1}| \longrightarrow \beta_2 = \pm\beta_1 \quad \triangleleft$

Para que haja variação em $\xi_{V\theta}$, escolhe-se $\beta_2 = -\beta_1 \longrightarrow \xi_{W\theta 2} = -\xi_{W\theta 1} \quad \triangleleft$

Continuação 1: Calcule o trabalho específico produzido na nova configuração.



Nova configuração (impulso).



Comparativo entre configurações.

Solução: Com a nova geometria de fuga, tem-se:

$$\xi_{V\theta 2} = \xi_{U\theta 2} + \xi_{W\theta 2} = (50\ m/s) + (-20\ m/s) \rightarrow$$

$$\xi_{V\theta 2} = 30\ m/s\ ;\quad \alpha_2 = \text{atan}(3/4) = 0{,}644\ rad = 36{,}9^\circ$$

$$\xi_{V2} = \sqrt{\xi_{V\theta 2}^2 + \xi_{Wx2}^2} = 50\ m/s = 1{,}58\sqrt{kJ/kg} \ \triangleleft$$

Assim, pela Eq. (TE9), tem-se:

$$w = \Delta h_0 = \Delta e_{cV} + \cancel{\Delta e_{cU}}^{\,0} - \cancel{\Delta e_{cW}}^{\,0} \rightarrow$$

$$w = \Delta h_0 = \Delta e_{cV} = \tfrac{1}{2}(\xi_{V1}^2 - \xi_{V2}^2) \rightarrow$$

$$w = e_{cV1} - e_{cV2} = (3{,}25 - 1{,}25)\ kJ/kg \rightarrow$$

$$w = 2{,}0\ kJ/kg \ \triangleleft$$

Em suma:

$\xi_{U1} = 50\ m/s$	$= 1{,}58\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cU1} = 1{,}25\ kJ/kg$		
$\xi_{U2} = 50\ m/s$	$= 1{,}58\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cU2} = 1{,}25\ kJ/kg$		$\Delta e_{cU} = 0\ kJ/kg$
$\xi_{V1} = 80{,}62\ m/s$	$= 2{,}55\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cV1} = 3{,}25\ kJ/kg$		
$\xi_{V2} = 50\ m/s$	$= 1{,}58\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cV2} = 1{,}25\ kJ/kg$		$\Delta e_{cV} = 2{,}0\ kJ/kg$
$\xi_{W1} = 44{,}72\ m/s$	$= 1{,}41\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cW1} = 1{,}00\ kJ/kg$		
$\xi_{W2} = 44{,}72\ m/s$	$= 1{,}41\sqrt{kJ/kg}$	; $e_{cW2} = 1{,}00\ kJ/kg$		$\Delta e_{cW} = 0\ kJ/kg$

$\beta_1 = 26{,}6^\circ$ $\quad \beta_2 = -26{,}6^\circ$ $\quad \alpha_1 = 60{,}3^\circ$ $\quad \alpha_2 = 36{,}9^\circ$ ■

Alguns definem impulso com base na ausência de variação de pressão no rotor ao invés da ausência de variação de entalpia estática. A definição baseada na pressão é aproximadamente a mesma que aquela apresentada aqui, tendo por única diferença as perdas de carga; assim, no caso isentrópico (sem perda de carga), as definições coincidem.

Reação de estator e de rotor são generalizáveis em reação de fileiras de pás/palhetas, definidas como a razão entre a variação da energia cinética (relativa à fileira) através da fileira de pás/palhetas e a energia cinética (relativa à fileira) na saída da respectiva fileira:

$$R_{fil} \equiv \frac{\Delta e_{c,rel,fil}}{e_{c,rel,sai}}$$

de onde vem a reação de estator, R_{stt}, $(\xi_{u,stt} = 0 \rightarrow \xi_{rel} = \xi_v)$

$$R_{stt} = \frac{\Delta e_{cv,stt}}{e_{cv,sai}} = \frac{\xi_{v1}^2 - \xi_{v0}^2}{\xi_{v1}^2} = 1 - \frac{\xi_{v0}^2}{\xi_{v1}^2} \; ,$$

assim como a reação de rotor, R_{rot}, ($\underset{\sim}{\xi}_{u,rot} \neq \underset{\sim}{0} \longrightarrow \underset{\sim}{\xi}_{rel} = \underset{\sim}{\xi}_w$)

$$R_{rot} \equiv \frac{\Delta e_{cw,rot}}{e_{cw,sai}} = \frac{\xi_{w2}^2 - \xi_{w1}^2}{\xi_{w2}^2} = 1 - \frac{\xi_{w1}^2}{\xi_{w2}^2} \; .$$

Exemplo: Calcule as reações de rotor dos rotores de (i) reação e (ii) impulso dos exemplos anteriores.

Solução: Aplicando-se a definição de reação de rotor:

(i) no rotor de reação exemplificado:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{w1} &= 44{,}72 \text{ m/s} = 1{,}41 \sqrt{\text{kJ/kg}} \; ; \; e_{cw1} = 1{,}00 \text{ kJ/kg} \\ \xi_{w2} &= 56{,}57 \text{ m/s} = 1{,}79 \sqrt{\text{kJ/kg}} \; ; \; e_{cw2} = 1{,}60 \text{ kJ/kg} \end{aligned}\right\} \Delta e_{cw} = -0{,}6 \text{ kJ/kg} \; ; \; \text{logo:}$$

$$R_{rot} = \frac{\Delta e_{cw}}{e_{cw2}} = \frac{-0{,}6 \text{ kJ/kg}}{1{,}6 \text{ kJ/kg}} = \frac{-0{,}6}{1{,}6} = -0{,}375 \quad \triangleleft$$

(ii) no rotor de impulso exemplificado:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{w1} &= 44{,}72 \text{ m/s} = 1{,}41 \sqrt{\text{kJ/kg}} \; ; \; e_{cw1} = 1{,}00 \text{ kJ/kg} \\ \xi_{w2} &= 44{,}72 \text{ m/s} = 1{,}41 \sqrt{\text{kJ/kg}} \; ; \; e_{cw} = 1{,}00 \text{ kJ/kg} \end{aligned}\right\} \Delta e_{cw} = 0 \text{ kJ/kg}$$

$$R_{rot} = \frac{\Delta e_{cw}}{e_{cw2}} = \frac{0{,}0 \text{ kJ/kg}}{1{,}0 \text{ kJ/kg}} = 0{,}0 \quad \blacksquare$$

Alguns autores definem reação de fileiras de pás/palhetas por meio de relações entre velocidades análogas às aqui apresentadas em termos de energia cinética específicas, o que leva a expressões análogas com termos de velocidade com expoente unitário, ao invés dos termos quadráticos aqui apresentados.