欧拉近似法

设一阶微分方程$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$的解为$y(t)$，泰勒展开有

$$y(t+\Delta t)=y(t)+y'\Delta t+y''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+y'''(t)\frac{\Delta t^3}{3!}+\cdots \tag{1}$$

其中，Δt极小时，$t+\Delta t$在t的邻域上

0.1　一级欧拉法

$$\begin{gathered} y(t+\Delta t)=y(t)+y'(t)\Delta t+O(\Delta t^2) \\ \text{即} \\ y(t_{i+1})=y(t_i)+y'(t_i)\Delta t+O \end{gathered} \tag{2}$$

0.2　二级欧拉法

$$\begin{gathered} y(t+\Delta t)=y(t)+y'(t)\Delta t+y'''(t)+O(\Delta t^3) \\ \text{即} \\ y(t_{i+1})=y(t_i)+y'(t_i)\Delta t+[y'(t_{i+1})+y'(t_i)]\cdot\Delta t/2+O(\Delta t^3) \end{gathered} \tag{3}$$

1　对于一阶微分方程

对于一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}=f(t,y) \\ y\left(t_0\right)=y_0 \end{cases} \tag{4}$$

代入近似递推关系

$$\begin{aligned} &\overline{y_{i+1}}=y_i+f\left(t_i,y_i\right)\Delta t \\ &y_{i+1}=\frac{1}{2}[y_i+\overline{y_{i+1}}+f\left(t_{i+1},\overline{y_{i+1}}\right)\Delta t] \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\overline{y_{i+1}}$为一级近似

2　对于二阶微分方程

将二阶微分方程化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=v \\ \dfrac{dv}{dt}=f(t,v) \end{cases} \tag{6}$$

代入近似递推关系

$$\begin{cases} \overline{y_{i+1}}=y_i+f\left(t_i,y_i\right)\dfrac{\Delta t}{2}\Bigg)=\dfrac{y_{i+1}}{2}-\dfrac{1}{2} \\ y_{i+1}=y_i+[f\left(t_i,y_i\right)+f\left(t_{i+1},\overline{y_{i+1}}\right)]\dfrac{\Delta t}{2} \end{cases} \tag{7}$$

其中，$\overline{y_{i+1}}$为一级近似

3　改进的欧拉法

对于微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}=f(t,y) \\ y_0=y\left(t=t_0\right) \end{cases} \tag{8}$$

改写为

$$y(n+m) = y(n) + \int_{t(n)}^{t(n+m)} f(t,y)dt \tag{9}$$

此表达式严格成立，要计算上述积分，可以采用不同的近似，

> 该步即对应于常规欧拉法的泰勒展开，不同的积分近似方式对应了不同的截断项

最简单的方法即取$m=1$，即采用矩形法积分，有

$$\int_{t(n)}^{t(n+1)} f(t,y)dt = hf(t(n), y(n)) \tag{10}$$

若采用梯形法，则有

$$\int_{t(n)}^{(n+1)} f(t,y)dt = \frac{h}{2}[f(t(n), y(n)) + f(t(n+1), y(n+1))] \tag{11}$$

即得到

$$y(n+1) = y(n) + \frac{h}{2}[f(t(n), y(n)) + f(t(n+1), y(n+1))] \tag{12}$$

矩形积分法对应的欧拉近似法公式就变为

$$\begin{aligned} &y(n+1) = y(n) + hf(t(n), y(n)) \\ &t(n) = t_0 + nh \\ &y(0) = y\left(t = t_0\right) \end{aligned} \tag{13}$$

综上，即

$$\begin{cases} y_0(n+1) = y(n) + hf(t(n), y(n)) \\ y(n+1) = y(n) + \frac{h}{2}[f(t(n), y(n)) + f(t(n+1), y(n+1))] \\ t(n) = t_0 + nh \\ y(0) = y\left(t = t_0\right) \end{cases} \tag{14}$$

这种方法又称为“预估-修正法”