

圆截面平行双导体传输线的电感

焦重庆, 李顺杰

(华北电力大学 电气与电子工程学院, 北京 102206)

摘要: 一对平行的圆截面导线所组成的传输线是双导体传输线的典型代表, 其单位长度电感参数包括内电感和外电感两部分。在高频情况下, 由于集肤效应, 内电感通常可以忽略。然而, 在低频情况下, 特别是导线相距较近时, 需要考虑内电感的影响。目前, 一般简单认为内电感是单根导线内电感($\mu_0/8\pi$)的两倍。本文基于磁场能量得出了该传输线单位长度电感在静态情况下的精确表达式, 结果表明, 内电感并不直接等于单根导线内电感的 2 倍, 而是比之略大。

关键词: 平行双导线; 电感; 内电感; 磁场能量

中图分类号: G642.0

文献标识码: A

文章编号: 1008-0686(2015)03-0071-03

The Inductance of a Parallel Two-Conductor Transmission Line with Circular Cross Section

JIAO Chong-qing, LI Shun-jie

(School of Electrical and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: A pair of parallel conductor wires with circular cross section denotes a classic case of two-conductor transmission lines. Its per unit length inductance consists of inner inductance and external inductance. At high frequencies when the skin effect becomes obvious, the inner inductance is very small and may be neglected. However, at low frequencies, especially when the two wires are close to each other, the influence of inner inductance increases compared with the external inductance and should be included in the total inductance. At present, the inner inductance is usually calculated simply as the two times of the inner inductance of a single wire ($\mu_0/8\pi$). In this paper, the accurate expression for the static per unit length inductance of the transmission line is derived by using the magnetic field energy method. The result shows that it is a little larger than the common value.

Keywords: parallel two-conductor line; inductance; inner inductance; magnetic field energy

0 引言

传输线理论是联系电路理论和电磁场理论的一个重要纽带。传输线的分布参数(单位长电感、电容、电阻、电导)是建立传输线模型所需的基本参数。电磁场理论在推导传输线的分布参数方面发挥着基础性作用。

一对平行的圆截面导线所组成的传输线是双导体传输线的经典例子。由于在导线内部和两根导线之间的区域均有磁力线穿过, 因此单位长度电感包括了内电感和外电感两部分。高频时, 由于趋肤效应, 电流几乎都分布在导线表面很薄的一层区域内, 磁力线几乎都被排出导线, 因此内电感可以忽略。在低频时, 电流几乎在导线内均匀分布。此时, 如果

收稿日期: 2014-10-20; 修回日期: 2014-11-20

作者简介: 焦重庆(1981-), 男, 博士, 副教授, 主要从事电磁场和电磁兼容的教学和研究工作, E-mail: cqjiao@ncepu.edu.cn

李顺杰(1991-), 男, 硕士生, 研究方向为电气工程专业, E-mail: lianganglsj@163.com

两根导线之间的间距远大于每根导线的半径,则由于外电感远大于内电感,也可以忽略内电感。然而,如果两根导线之间的间距很近,内电感相对外电感的比重上升,其影响或许不能忽视。

对于内电感的计算,“电磁场”课程上一般讲解了两种结构:一是无限长的单根圆截面直导线,二是同轴电缆^[1-3]。针对前者,得出了单位长度内电感为 $\mu_0/8\pi$ 的结论(这里假设导线的磁导率为真空磁导率 μ_0)。当计算如图 1 所示的双导体传输线的电感时。一般将其看成两根无限长的单根圆截面直导线的内电感的和,即 $2 \times \mu_0/8\pi$ 。然而,这样处理实际上忽略了两根导线之间的相互影响。图 1 中导线 2 产生的磁力线也会从导线 1 内部穿过,反之亦然。这部分磁力线对内电感也有贡献。

本文的目的是推导内电感的精确表达式。为了简化问题的复杂性,本文假设电流在导线内部是均匀分布的。因此,本文的推导是在静态场近似下得出的,其结论的适用范围局限在频率较低、趋肤效应可以忽略的情况。本文的推导可以作为“电磁场”课程内电感教学的一个扩展性的例题。

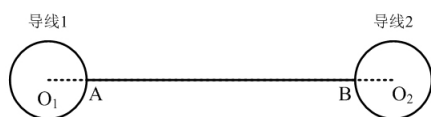


图 1 圆截面平行双导体传输线示意图

1 磁场能量与电感

磁场能量 W_m 的计算有多种方法^[1-4]。第一种是能量密度法, $W_m = \iiint_V w_m dV$ 。式中 w_m 为磁场能量密度, V 为磁场分布的所有空间。该方法需要先求磁场分布。

第二种方法是磁位—电流法,即

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \quad (1)$$

式中 \mathbf{A} 为矢量磁位, \mathbf{J} 为传导电流密度, V 为电流分布的所有区域。

第三种方法就是通过磁链或电感与电流来表示磁场能量:

$$W_m = \psi I / 2 = LI^2 / 2 \quad (2)$$

式中 ψ 为磁链, L 为电感, I 为电流。

在本文中,方法三被“逆向”应用,即先通过方法二得出磁场能量,进而由磁场能量来得出电感。

2 理论模型

如图 2 所示,两根圆形横截面的平行导线,水平放置,半径分别为 R_1 和 R_2 ,两根导线的中轴线之间的距离为 $2a$ 。直角坐标系的原点 O 位于两根导线圆心连线的中点,其 x 轴水平向右, y 轴竖直向上, z 轴垂直纸面向外。导线 1 和 2 均带电流 I ,电流方向分别为 $-z$ 和 z 方向。导线 1 内场点 P 到导线 2 中心线的距离记为 ρ_p ,到导线 1 的中心线的距离记为 ρ_1 。导线 2 内场点 Q 到导线 1 中心线距离记为 ρ_q ,到导线 2 的中心线的距离记为 ρ_2 。

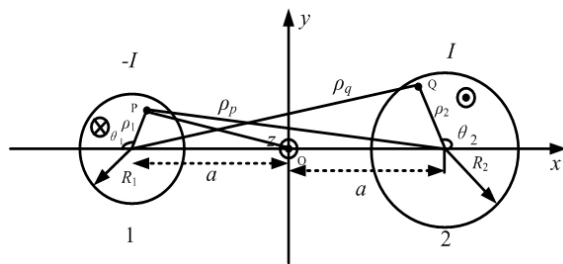


图 2 平行双导体传输线的横截面及坐标系示意图

3 推导过程

3.1 矢量磁位的推导

假设导线为无限长,因此矢量磁位 \mathbf{A} 在空间上只与 x, y 坐标有关,与 z 坐标无关,且方向沿 z 轴,即有

$$\mathbf{A} = A_z(x, y) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

令矢量磁位的参考点为坐标原点,即 $A_z(0, 0) = 0$ 。

我们先求导线 1 内场点 P 处的矢量磁位,由等式 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 可得场点 P 处的矢量磁位为

$$A_p = \iint_{S_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

其中,等式右边的积分面积 S_p 指由两条直线(分别过点 P 和坐标原点 O ,且沿 z 轴方向)为边界的带状区域在单位长度上的面积。

记导线 1 中的电流产生的磁场为 \mathbf{B}_1 ,则

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} &= \int_{R_1}^a \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho + \int_{\rho_1}^{R_1} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} d\rho = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{R_1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^2}{2R_1^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

上式中,区间 $[R_1, a]$ 上的积分对应导线外部区域,区间 $[\rho_1, R_1]$ 上的积分对应导线内部区域。记导线

2 中的电流产生的磁场为 B_2 则

$$\iint_{S_p} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{\rho_p} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_p}{a} \quad (6)$$

式中 $\rho_p = \sqrt{4a^2 + \rho_1^2 + 4a\rho_1 \cos\theta_1}$ 。

那么,由式(4)式(5)和式(6)可得

$$A_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_p}{a} - \left(\ln \frac{R_1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^2}{2R_1^2} \right) \right] \quad (7)$$

同理可得,导线2内场点Q处的矢量磁位为

$$A_q = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_q}{a} - \left(\ln \frac{R_2}{a} - \frac{1}{2} + \frac{\rho_2^2}{2R_2^2} \right) \right] \quad (8)$$

式中 $\rho_q = \sqrt{4a^2 + \rho_2^2 + 4a\rho_2 \cos\theta_2}$ 。

3.2 磁场能量的推导

该传输线单位长度的空间上存储的磁场能量可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dS + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dS \quad (9)$$

式中 S_1 指导线1的横截面 S_2 指导线2的横截面。对上式的第一项进行展开

$$\frac{1}{2} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dS = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R_1^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(4a^2 + \rho_1^2 + 4a\rho_1 \cos\theta_1) \rho_1 d\theta_1 d\rho_1 - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R_1^2} \left(\ln R_1 - \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^2}{2R_1^2} \right) \rho_1 d\rho_1 \quad (10)$$

考虑到积分恒等式^[5]:

$$\int_0^\pi \ln(a + b\cos x) dx = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \quad (a \geq |b| > 0) \quad (11)$$

式(10)可简化为

$$\frac{1}{2} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dS = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{2a}{R_1} + \frac{1}{4} \right) \quad (12)$$

同理可得

$$\frac{1}{2} \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dS = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{2a}{R_2} + \frac{1}{4} \right) \quad (13)$$

由式(9)、式(12)和式(13)可得

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{2a}{R_1} + \ln \frac{2a}{R_2} + \frac{1}{2} \right) \quad (14)$$

3.3 单位长度电感

由式(2)和式(14)可得

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{4a^2}{R_1 R_2} + \frac{1}{2} \right) \quad (15)$$

可将上式分解为内电感 L_i 和外电感 L_e 两部分,即 $L = L_i + L_e$ 。

外电感的计算过程如下。由于外磁链全部从导线外部区域,即 $-(a - R_1) < x < (a - R_2)$ 区域上穿过,此区域上的磁感应强度

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)} \right) \mathbf{e}$$

因此,外磁链

$$\psi_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-(a-R_1)}^{(a-R_2)} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(2a - R_1)(2a - R_2)}{R_1 R_2} \quad (16)$$

故外电感:

$$L_e = \frac{\psi_e}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(2a - R_1)(2a - R_2)}{R_1 R_2} \quad (17)$$

由式(15)式(17)有

$$L_i = L - L_e = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{2a}{\sqrt{(2a - R_1)(2a - R_2)}} + \frac{1}{4} \right) \quad (18)$$

正如前文所述,如果我们简单地用单根圆直导线的单位长度电感为 $\mu_0/(8\pi)$ 来计算,总的单位长度内自感可为 $2 \times \mu_0/(8\pi) = \mu_0/(4\pi)$,这种方式得出的内电感与式(18)给出的内电感的误差为

$$\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2a}{\sqrt{(2a - R_1)(2a - R_2)}}$$

实际若满足 $a \gg R_1, R_2$, 该误差通常可忽略。

如果我们还是习惯将内电感表示为 $L'_i = \mu_0/4\pi$, 则外电感应理解为

$$L'_i = L - L'_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2a}{R_1} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2a}{R_2} \quad (19)$$

4 结语

针对平行圆形横截面导线组成的传输线,本文推导了其矢量磁位的空间分布表达式,进而推导了单位长度磁场能量的表达式,并由此得出了单位长度电感(含内电感和外电感)的表达式。结果表明,内电感并不直接等于单根导线内电感的两倍,而是比之略大。当然,这种差别在导线间距远大于导线半径的情况下是可以忽略的。

参考文献:

- [1] 倪光正. 工程电磁场原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [2] 冯慈璋, 马西奎. 工程电磁场导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [3] 王泽忠, 全玉生, 卢斌先. 工程电磁场[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [4] 雷银照. 电磁场[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [5] 金玉明. 实用积分表[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.