二阶常微分方程的若干求解方法*

冯 曼
（宿州学院 数学与统计学院，安徽 宿州 234000）

摘 要：探讨了二阶常微分方程的求解方法与解题技巧，总结了求解该类方程的几种方法，以便开拓解题思路，提高计算效率，提高学生的计算能力.

关键词：二阶常微分方程；特定指数函数法；变系数；通解
中图分类号：O175.1 文献标识码：A 文章编号：1004－1869（2018）02－0017－03
DOI：10.13388/j.cnki.ysajs.20180116.044

二阶线性常微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 在科学技术尤其是在物理学中有着广泛的应用，很多物理学问题都可以归结为二阶线性常微分方程的求解问题. 因此，该方程及其解的问题为求解数学物理方程打下了重要的基础，但二阶线性微分方程的求解至今没有一个普遍通用且有效的方法. 二阶线性常微分方程分为二阶常系数线性微分方程和二阶变系数线性微分方程，而常系数微分方程在线性微分方程的一般理论上总是可解的，但变系数线性微分方程求解起来却比较困难，因此，对变系数线性微分方程求解问题的研究就变得很有意义了[1-4].

1 二阶常系数线性微分方程

求解二阶常系数线性微分方程，比较常用的是待定系数法和常数变易法[4]，本文总结了其它的一些算法：微分算子法、变量变换法、降阶法，并通过举例给出证明其正确性.

1.1 微分算子法

对于求解常系数非齐次线性微分方程特解，微分算子法是比较有效的，较为方便，计算难度也可降低.

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ （1）

其中 p，q 为常数. 引入微分算子 $\frac{d}{dx}=D$，$\frac{d^2}{dx^2}=D^2$，则有 $y'=\frac{dy}{dx}=Dy$，$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y$，于是方程（1）可化为 $(D^2+pD+q)y=f(x)$，令 $F(D)=D^2+pD+q$，称为算子多项式，$F(D)=D^2+pD+q$，其特解为 $y=\frac{1}{F(D)}f(x)$，其中称 $\frac{1}{F(D)}$ 为逆算子.

例1 $y''+4y'+5y=\sin 2x$

解：因为 $F(D)=D^2+4D+5$，$F(-a^2)=5\neq 0$，$y=\frac{1}{F(D)}\sin 2x=\frac{1}{D^2+4D+5}\sin 2x=\frac{1}{-2^2+4D+5}\sin 2x=\frac{1}{4D+1}\sin 2x$

$=\frac{4D-1}{16D^2-1}\sin 2x=-\frac{1}{65}(4D\sin 2x-\sin 2x)=-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)$

1.2 变量变换法

变量变换法是求解常微分方程经常使用的方法，思想是对原微分方程的变量使用新变量进行代换，将原微分方程转化为容易求解的类型.

---

* 收稿日期：2017－06－23
基金项目：宿州学院一般科研项目（2014yyb02）.
作者简介：冯曼（1987－），女，安徽宿州人，硕士，助教，研究方向：偏微分方程数值解.

例 2 求方程 $y''-2y'+y=x^2e^x(y(0)=y'(0)=0)$ 的特解.

解:令 $y=u(x)v(x)=uv$,则 $y'=u'v+uv'$,$y''=u''v+2uv'+uv''$,代入即得 $uv''+(2u'-2u)v'+(u''-2u'+u)v=x^2e^x$. 令 $u''-2u'+u=0$,取 $u=e^x$,代入微分方程 $u''-2u'+u=0$ 和 $v''+(2u'-2u)v'+(u''-2u'+u)v=x^2e^x$,即得 $v''=x^2\cdot e^x\cdot e^{-x}=x^2$,$v=\frac{1}{12}x^4$,则原微分方程的特解为 $y=uv=\frac{1}{12}x^4e^x$.

1.3 降阶法

非齐次线性微分方程和齐次线性微分方程均可使用降阶法,其中对于非齐次线性微分方程的求解,如果已知其对应的齐次方程的一个特解,使用降阶法求出其解.

例 3 求解方程 $xx''+(x')^2=0$.

解:令 $x'=y$,则 $x''=y\frac{dy}{dx}$. 于是方程便可化为 $xy\frac{dy}{dx}+y^2=0$,得 $y=0$ 或 $x\frac{dy}{dx}+y=0$,则 $y=\frac{c}{x}$,即 $x'=\frac{c}{x}$. 故原微分方程的通解为 $x^2=c_1t+c_2(c_1=2c_2)$.

2 二阶变系数线性微分方程[5-9]

2.1 二阶变系数齐线性微分方程:特定指数函数法

二阶线性齐次微分方程的一般形式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{2}$$

如果已知一个非零特解 $y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$,便即可求得出另一个特解,这样得到方程(2)的通解,即 $y=c_1y_1+c_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

特定指数函数法的关键是求出非零特解 y_1,下面使用待定指数函数法去求解特解 y_1. 假设方程(2)中 $p(x)$,$q(x)$ 均为多项式,若在二阶变系数齐次微分方程 $f(x)y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (3)

$f(x)$ 也是多项式. 设方程(3)有一个特解 $y_1=e^{px}$,p 为特定常数,将 $y_1=e^{px}$ 代入方程(3),则得 $p^2f(x)e^{px}+p(x)pe^{px}+q(x)e^{px}=0$,又 $e^{px}\neq 0$,所以 $p^2f(x)+p(x)p+q(x)=0$

根据等式成立的条件,即可求出非零特解 y_1,便可求出二阶变系数齐次微分方程的通解.

例 4 求 $xy''-2(x+1)y'+4y=0$ 的通解

解:设方程的一个特解为 $y_1=e^{px}$,p 为常数,代入方程可得 $p^2x+2p(x+1)+4=0$,化简即得 $p=2$,$y_1=e^{2x}$,则方程的另一解为 $y_2=e^{2x}\int e^{-4x}e^{-\int(2+\frac{1}{x})dx}dx=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$,则方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

2.2 二阶变系数非齐线性微分方程

二阶变系数线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ (4)

有着十分完美的通解结构,但却无没有一般的求解方法. 通过在 $p(x)$,$q(x)$ 满足条件 $r^2+p(x)r+q(x)=0$ (5) 的基础上给出二阶变系数非齐线性微分方程的通解公式.

定理对于二阶变系数线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$,如果 $p(x)$,$q(x)$ 以及实数 r 满足条件(5),则(4)式的通解为

$$y=e^{rx}\int\frac{1}{u^2}e^{-\int p(x)dx}dx\left[\int f(x)ue^{-\int p(x)dx}dx+c_1\right]dx+c_2 \tag{6}$$

其中 $\int p(x)dx$,$\int f(x)ue^{-\int p(x)dx}dx$ 和 $\int\frac{1}{u^2}e^{-\int p(x)dx}dx\left[\int f(x)ue^{-\int p(x)dx}dx\right]dx$ 各表示一个原函数,c_1,c_2 为任意常数.

例 5 求方程 $y''-\frac{1}{x}y'-(9+\frac{3}{x})y=xe^{3x}$ 的通解.

解:根据文献知 $r=-3$,故其对应的齐次方程 $y''-\frac{1}{x}y'-(9+\frac{3}{x})y=0$ 的一个特解为 $u=e^{-3x}$,又 $p(x)=-\frac{1}{x}$,$f(x)=xe^{3x}$,根据定理,代入式(6),经过化简可得方程的通解为 $y=\frac{1}{6}x^2e^{3x}+(\frac{c_1}{6}-\frac{1}{18})xe^{3x}+(\frac{1}{108}-\frac{c_1}{36})e^{3x}+c_2e^{-3x}$.

3 结束语

二阶线性常微分方程在数学、物理学以及工程技术领域都占据着一定的地位,很多问题都是转化为二阶常微分方程去解决的,对于二阶常微分方程的求解方法的探讨很必要.

〔参考文献〕

[1] 王高雄. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 周义仓,靳祯,秦军林. 常微分方程及其应用 [M]. 北京: 科学出版社,2003.

[3] 李录苹,王通. 关于几类二阶微分方程的解法 [J]. 雁北师范学院学报,2006,22(02):71-72.

[4] 金顺利,张建全,李燕. 关于微分方程的常数易变法 [J]. 沧州师范专科学校学报,2010(02):90-91.

[5] 胡劲松,李先富,郑克龙. 一种二阶变系数线性微分方程的求解方法 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2005,22(03):22-24.

[6] 石正华. 浅谈二阶变系数齐次微分方程的求解问题 [J]. 南昌教育学院学报,2012,27(01):69-78.

[7] 李永利,桑改莲. 一类二阶变系数齐次微分方程通解的求法 [J]. 高等数学研究,2006,9(03):22-24.

[8] 李洪祥. 两类二阶变系数线性微分方程的通解 [J]. 高等数学研究,2002,5(02):10-13.

[9] 郭韵霞. 变系数线性系统补解的新估计及部分变元稳定性 [J]. 重庆工学院学报(自然科学版),2007,21(08):136-141.

[10] 张智倍,苏林茹. 求定积分的若干方法 [J]. 阴山学刊(自然科学版),2018(01):16-17.

[11] 贾利东,王慧. Boussinesd 方程的 Hamilton 正则表示 [J]. 阴山学刊(自然科学版),2018(01):14-15.

Some Methods for Solving Two Order Ordinary Differential Equations

FENG Man

(Faculty of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Suzhou 234000)

Abstract: Based on the research of two order ordinary differential equations and theory, discusses the method of solving two order ordinary differential equations and problem-solving skills, summarizes several methods for solving the equations, in order to develop problem-solving ideas, improve the computational efficiency, improve students´calculating ability.

Key words: Two order ordinary differential equation; Specific exponential function method; Variable coefficient; General solution