第三章　时空对称性

无论在经典力学还是量子力学中,对称性都起着非常重要的作用。如果系统具有某种对称性，一般对应着系统的某个守恒物理量；比如时间空间的平移不变性对应着能量动量守恒，空间转动不变性会导致系统的角动量守恒，在标准模型中，U(1)规范对称性导致了电荷守恒，全同粒子的不可分辨性导致了量子玻色—费米统计规律等等。

§1 对称性

1.1　对称性变换

保持系统物理性质不变的变换，称为对称性变换。

设对称性变换为$\hat{U}$，系统变换前的态矢量为$|\Psi\rangle$，变换后的态矢量为$|\Psi'\rangle$，也即

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle$$

类似的，对于另一物理态有：

$$|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle = \hat{U}|\Phi\rangle$$

对称性变化不改变系统的物理性质，因此在$|\Psi'\rangle$态下测量结果为$|\Phi'\rangle$态的几率与在$|\Psi\rangle$下测量结果为$|\Phi\rangle$态的几率相等，也即

$$|\langle\Phi'|\Psi'\rangle|^2 = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$$

这里只要求内积的模不变,并不要求内积本身不变,容易证明这种变换是线性的或反线性的,则变换必然是幺正变换或反幺正变换。

1.2　对称性的数学表示

对称性变换$\hat{U}$，态矢量$|\Psi\rangle$变为$|\Psi'\rangle$，可记为：

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle$$

逆变换为：

$$|\Psi\rangle = \hat{U}^{-1}|\Psi'\rangle$$

要求变换前后的态矢量满足相同的运动规律：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'\rangle = \hat{H}|\Psi'\rangle$$

从而

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}|\Psi\rangle = \hat{H}\hat{U}|\Psi\rangle$$

化简可得：

$$\hat{H} = \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U}$$

也即

$$[\hat{H},\hat{U}] = 0$$

体系的哈密顿量在对称变换$\hat{U}$下具有不变性，也即是体系运动规律不变性的数学表达。

1.3 对称性与守恒量

1） 容易证明：

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle\Psi|[\hat{H},\hat{A}]|\Psi\rangle = 0$$

因此若$\hat{A}$是守恒量，一般写成$[\hat{A},\hat{H}]=0$

2） 若$\hat{A}$是守恒算符、$|\Psi(0)\rangle$是$\hat{A}$的本征态，则$|\Psi(t)\rangle$也是$\hat{A}$的本征态，可以由

$$\langle\Psi(t)|(\hat{A}-a)^2|\Psi(t)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{A}-a)|\Psi(t)\rangle = 0$$

证明可以通过：

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|(\hat{A}-a)^2|\Psi(t)\rangle = 0$$

3） 守恒量$\hat{A}$和对称变换算符$\hat{U}$的关系，考虑无穷小变换 $\hat{U}=1+i\varepsilon\hat{F}$，由于$\hat{U}$的幺正性，可知$\hat{F}$是厄米算符，而且由$[\hat{H},\hat{U}]=0$，可知$[\hat{H},\hat{F}]=0$，也即$\hat{F}$是守恒量。

有限变换可以通过无穷小变换而得到：

$$\hat{U} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\hat{F}\right)^n = \exp[i\hat{F}]$$

1.4 对称性和简并

若$[\hat{U},\hat{H}]=0$、$|\Psi\rangle$是哈密顿量的本征态，从而

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

则有

$$\hat{H}\hat{U}|\Psi\rangle = \hat{U}\hat{H}|\Psi\rangle = \hat{U}E|\Psi\rangle = E\hat{U}|\Psi\rangle$$

也即$|\Psi\rangle$、$\hat{U}|\Psi\rangle$都是$\hat{H}$的本征值为E的本征态。

1） 若$\hat{U}|\Psi\rangle$和$|\Psi\rangle$相差一个因子，也即$\hat{U}|\Psi\rangle = u|\Psi\rangle$，此时能级无简并。

2） 若$\hat{U}|\Psi\rangle$和$|\Psi\rangle$线性无关，则两能级简并。

能级简并定理：能级存在简并的充要条件是系统的对称变换算符不全对易。

设D为系统的对称变换算符的全体，$D=\{\hat{U};[\hat{U},\hat{H}]=0\}$，从$D$中可以选出一组相互对易的算符完备集合$F$，由于与$\hat{H}$对易，因此能够确定一组完备的共同本征态，而且由于完备算符集，因此$\hat{F}$的每一个本征态不存在简并，而且都是$\hat{H}$的本征态。

a） 充分性：若守恒算符不全对易，存在$\hat{G}$、$\hat{F}$，使得$[\hat{G},\hat{F}]\neq 0$，则能级存在简并。

b） 必要性：若能级存在简并，则可以找到守恒算符$\hat{G}$、$\hat{F}$，使得$[\hat{G},\hat{F}]\neq 0$。

（提示：利用反证法，通过构造$\hat{F}$和$\hat{G}$）

§2 空间平移、空间转动和时间平移

2.1 空间平移不变性与动量守恒

a） 时间平移算符

使物理态$|\Psi\rangle$的量子体系发生空间平移$\delta\boldsymbol{x}$，变换后的态为$|\Psi'\rangle$

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$$

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{D}_{\delta\boldsymbol{x}}|\Psi\rangle$$

$D_{\delta\boldsymbol{x}}$为空间平移算符。在坐标空间中，上式为：

$$\Psi'(x) = \hat{D}_{\delta\boldsymbol{x}}\Psi(x)$$

显然平移后，波函数$\boldsymbol{x}$处的值应该为平移前$\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{x}$处的值，也即

$$\boldsymbol{\Psi}'(x) = \Psi(x-\delta\boldsymbol{x})$$

也即：

$$\begin{aligned}\hat{D}_{\delta\boldsymbol{x}}\Psi(x) &= \Psi(x-\delta\boldsymbol{x}) \\ &= \left[1-\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla+\frac{1}{2!}(-\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)^2+\cdots\right]\Psi(x) \\ &= \exp[-\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla]\Psi(x)\end{aligned}$$

利用$\hat{\boldsymbol{p}}=-i\hbar\nabla$，可以将上式写成：

$$\hat{D}_{\delta\boldsymbol{x}}\Psi(x) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right]\Psi(x)$$

从而：

$$\hat{D}_{\boldsymbol{a}} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{a}\right]$$

b） 态矢量和力学量算符在空间平移下的变换

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{D}_{\boldsymbol{a}}|\Psi\rangle$$

力学量算符遵循幺正变换公式：

$$\hat{F} \to \hat{F}' = \hat{D}_{\boldsymbol{a}}F\hat{D}_a^\dagger$$

对于位置和动量算符有:

$$\hat{x}' = \hat{x}-a$$

$$\hat{p}' = \hat{p}$$

显然有:

$$\langle\Psi'|\hat{F}'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\hat{F}|\Phi\rangle$$

2.2 空间平移不变性与动量守恒

假设系统不受外力作用，也即空间是均匀的，那么系统具有空间平移不变性，从而空间平移后的态任然满足薛定谔方程，从而

$$[\hat{D}_a, \hat{H}] = 0$$

代入平移算符可得：

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}] = 0$$

上式说明系统的动量，也可以说是孤立系统的哈密顿量$\hat{H}$在空间平移下是不变的。

2.3 时间平移不变性与能量守恒

定义时间平移算符$\hat{T}_\tau$，也即当时间平移：$t \to t' = t+\tau$，对于物理态有：

$$|\Psi(t)\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t-\tau)\rangle$$

将上式作泰勒展开可得：

$$|\Psi(t-\tau)\rangle = \exp\left[-\tau\frac{\partial}{\partial t}\right]|\Psi(t)\rangle$$

利用薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

从而可得：

$$\begin{aligned}\hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle &= \sum\frac{\left(-\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)^n}{n!}|\Psi(t)\rangle \\ &= \sum\frac{1}{n!}\left[\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right]^n|\Psi(t)\rangle\end{aligned}$$

也即：

$$\hat{T}_\tau=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right]$$

显然时间平移算符$\hat{T}_\tau$是厄米算符。

若平移后的态矢量$\hat{T}_\tau$任然满足薛定谔方程，也即系统具有时间平移不变性，从而

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle\right] &= \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_\tau\right]\langle\Psi(t)\rangle+\hat{T}_\tau\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle\right] \\ &= -\tau\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle+\hat{T}_\tau\hat{H}|\Psi\rangle \\ &= -\tau\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle+\hat{H}\hat{T}_\tau|\Psi\rangle\end{aligned}$$

因此当$\hat{H}$不显含时间t时，可得：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{T}_\tau|\Psi(t)\rangle=\hat{H}\hat{T}_\tau|\Psi\rangle$$

因此对于孤立系统或者只受到与时间无关的外场作用的系统，其具有时间平移不变性，显然：

$$[\hat{T},\hat{H}]=0\quad\Leftrightarrow\quad[\hat{H},\hat{H}]=0$$

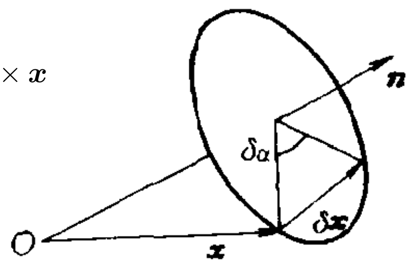
也即哈密顿量为守恒量。

§3 空间转动不变性与角动量守恒

3.1 空间转动算符

设物理态$|\Psi\rangle$沿着$\boldsymbol{n}$方向旋转微小角度$\delta\alpha$，经过转动后的物理态为$|\Psi'\rangle$，
如图所示，同时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}+\delta\alpha\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}\end{aligned}$$



态矢量的变换为：

$$|\Psi\rangle\to|\Psi'\rangle=\hat{R}_{\delta\alpha}|\Psi\rangle$$

在坐标表象下有：

$$\begin{aligned}\Psi'(\boldsymbol{x})&=\hat{R}_{\delta\alpha}\Psi(\boldsymbol{x})=\Psi(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{x}) \\ &=\Psi(\boldsymbol{x}-\delta\alpha\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

利用平移算符可得：

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{x}) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right]\Psi(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\delta\alpha(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right]\Psi(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\delta\alpha\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{p}})\right]\Psi(\boldsymbol{x}) \\
\hat{R}_{\delta\alpha}\Psi(\boldsymbol{x}) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\delta\alpha\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right]\Psi(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

从而可得：

$$\hat{R}_{\delta\alpha} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\delta\alpha\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right]$$

对于有限角度α的转动可以通过逐次转动微小角度$\delta\alpha_k$来实现：

$$\hat{R}_{\alpha} = \prod_k \hat{R}_{\delta\alpha_k} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\alpha\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right]$$

显然，由于$\hat{\boldsymbol{L}}$是厄米算符，所以转动算符$\hat{R}_\alpha$是幺正算符，空间转动是一种幺正变换。

3.2 态矢量和力学量算符在空间转动下的变换

一般的，态矢量的变换为：

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = \hat{R}_\alpha|\Psi\rangle$$

相应的，对于幺正变换下的力学量算符有：

$$\hat{F} \rightarrow \hat{F}' = \hat{R}_\alpha\hat{F}\hat{R}_\alpha^\dagger$$

3.3 空间转动不变性与角动量守恒

如果系统不受外力作用，或者外场对于空间绕原点的转动是不变的，也即各向同性，则系统具有空间转动不变性，此时有：

$$[\hat{R}_\alpha, \hat{H}] = 0$$

从而可得：

$$[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{H}] = 0$$

也即，体系的角动量是守恒的，自然的：

$$[\hat{L}^2, \hat{H}] = 0$$

注意：以上关于转动的讨论都是对于标量粒子（自旋为 0）而言的，对于费米子和矢量粒子等自旋不为 0 的情况将在角动量理论章节论述.

§4 空间反射

4.1 宇称算符

空间反射变换，也叫空间反演：

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$$

相应量子系统的态矢量变换为：

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = \hat{P}|\Psi\rangle$$

其中$\hat{P}$称为宇称算符（或空间反演算符）。

在坐标表象下有：

$$\Psi'(\boldsymbol{x}) = \hat{P}\Psi(\boldsymbol{x}) = \Psi(-\boldsymbol{x})$$

力学量算符的变换形式为：

$$\hat{F} \to \hat{F}' = \hat{P}\hat{F}\hat{P}^{-1}$$

由于并不知道宇称算符是幺正的，所以这里用$\hat{P}^{-1}$，下面说明其是幺正的。

$$\hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{P}\hat{\boldsymbol{x}}\hat{P}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}' = \hat{P}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{P}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{p}}$$

上式也可以写成反对易子$[\hat{A}, \hat{B}]_+ \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$的形式：

$$[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{P}]_+ = 0$$

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{P}]_+ = 0$$

通过

$$\begin{aligned}
\hat{P}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{P}^{-1} &= \hat{P}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} = \hat{P}\frac{\hbar}{i}\hat{P}^{-1}\;\hat{P}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\hat{P}^{-1} \\
&= \hat{P}\frac{\hbar}{i}\hat{P}^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right] = \hat{P}(-i)\hat{P}^{-1}i(-\hat{\boldsymbol{p}})
\end{aligned}$$

也即

$$\hat{P}i\hat{P}^{-1} = i$$

也即宇称变换不是反线性的，因此宇称变换算符是线性的厄米算符。

如果用宇称算符连续作用两次，可得：

$$\hat{P}^2\Psi(\boldsymbol{x}) = \hat{P}\Psi(-\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{x})$$

由于态矢量的任意性，从而有：

$$\hat{P}^2 = 1$$

并有：

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}^{-1} = \hat{P}$$

由于$\hat{P}^2 = 1$，可知道$\hat{P}$的本征值为$P = \pm 1$，相应的本征态记为$|+\rangle$和$|-\rangle$，也即：

$$\hat{P}|+\rangle = |+\rangle$$

$$\hat{P}|-\rangle = -|-\rangle$$

其中$|+\rangle$和$|-\rangle$分别称为偶宇称态和奇宇称态，本征值为+1的本征态对应于偶宇称，本征值为-1的本征态对应于奇宇称。

4.2 态矢量和力学量算符在空间反射下的变换

(1) 任意态矢量总可以用$\hat{P}$的本征态展开：

$$|\Psi\rangle = |\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle$$

其中：

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{2}(1+\hat{P})|\Psi\rangle$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{2}(1-\hat{P})|\Psi\rangle$$

$|\Psi_\pm\rangle$分别对应宇称算符的本征态，本征值分别为：± 1。

(2) 任意力学量算符也可以按宇称来分类，如果算符$\hat{A}$在宇称变换下满足：$\hat{P}\hat{A}\hat{P} = \hat{A}$，则

称$\hat{A}$为偶宇称算符或偶算符，如角动量、自旋等算符；如果$\hat{A}$在宇称变换下满足：
$\hat{P}\hat{A}\hat{P}=-\hat{A}$，则称算符$\hat{A}$为奇宇称算符或奇算符，如动量、坐标等算符。
一般情况下，任意算符$\hat{A}$总可以展开成偶宇称算符部分$\hat{A}_+$和奇宇称算符部分$\hat{A}_-$，也即：

$$\hat{A}=\hat{A}_++\hat{A}_-$$

其中：

$$\hat{A}_+=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{P}\hat{A}\hat{P})$$

$$\hat{A}_-=\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{P}\hat{A}\hat{P})$$

(3) 物理量的分类：通常矢量和标量是按其旋转变换下的性质来分类的；在旋转变换下不变的称为标量，变换和坐标相似的称为矢量。在反射变换下，物理量又可以分成奇偶两类。
(a) 标量：在旋转变换和空间反射变换下不变的量。
(b) 赝标量：在旋转变换下不变，但在空间反射变换下改变符号的量。
(c) 矢量：在空间反射变换下改变符号的矢量，也即奇宇称矢量。
(d) 赝矢量：在空间反射下不改变符号的矢量，也即偶宇称矢量。
(4) 选择定则：偶宇称算符在两个不同宇称本征态之间的矩阵元为零，奇宇称算符在宇称相同的两个宇称本征态之间的矩阵元为零。

$$\langle\Psi_\pm|\Phi_\mp\rangle=0$$

$$\langle\Psi_\pm|\hat{A}_+|\Phi_\mp\rangle=0$$

$$\langle\Psi_\pm|\hat{A}_-|\Phi_\pm\rangle=0$$

4.3 内禀宇称

以上关于空间反射的讨论，波函数的自变量从$\boldsymbol{x}$变成$-\boldsymbol{x}$，但是波函数本身并没有改变，这种标量波函数的宇称仅由轨道运动决定，顾称为轨道宇称。

正如在角动量理论中，除了轨道角动量$\hat{\boldsymbol{L}}$以外还有内禀的自旋角动量$\boldsymbol{S}$一样，除了轨道宇称$\hat{\Pi}$外，还有内禀宇称$\hat{\xi}$，也即：

$$\Psi'(\boldsymbol{x})=\hat{P}\Psi(\boldsymbol{x})=\hat{\xi}\hat{\Pi}\Psi(\boldsymbol{x})=\hat{\xi}\Psi(-\boldsymbol{x})$$

其中$\hat{\xi}$的本征值为±1，这里总的宇称$\hat{P}$是内禀宇称$\hat{\xi}$和轨道宇称$\hat{\Pi}$的乘积。

在相对论量子力学中，标量场、赝矢量场对应的内禀宇称为$+1$，而赝标量场、矢量场的内禀宇称为-1，同时对于多个粒子组成的复合系统，其内禀宇称是各个粒子的内禀宇称的乘积：

$$\hat{P}=\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\cdots\xi_N\hat{\Pi}$$

4.4 空间反射不变性和宇称守恒

如果系统对于空间坐标原点的反射具有不变性，也即空间是左右不分的，则系统具有空间反射不变性，其宇称是守恒，也即：

$$[\hat{P},\hat{H}]=0$$

在 1956 年以前，人们认为所有体系的哈密顿量都是空间反射不变的，也即宇称守恒。李政道和杨振宁提出在弱作用下宇称不守恒，并由吴健雄等人通过实验证明。

§5 时间反演

5.1 时间反演算符

时间反演变换：

$$t \to t' = -t$$

相应的物理态矢量变换为：

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{T}|\Psi\rangle$$

其中$\hat{T}$为时间反演算符。

维格纳：时间反演态并不意味着真正的时间倒流，而只不过是运动方向的倒转。

力学量变换：

$$\hat{A} \to \hat{A}' = \hat{T}\hat{A}\hat{T}^{-1}$$

令$\hat{A} = \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}$，由于时间反演变换导致“运动方向倒转”，从而

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}^{-1} = \hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{T}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{p}}$$

利用上述关系式，考虑对易子：

$$\hat{T}[\hat{x}_j, \hat{p}_k]\hat{T}^{-1} = [\hat{T}\hat{x}_j\hat{T}^{-1}, \hat{T}\hat{p}_k\hat{T}^{-1}] = -i\hbar\delta_{jk}$$

从而可得：

$$\hat{T}i\hat{T}^{-1} = -i$$

因此时间反演算符是反线性的，从而对应着反幺正算符。

$$\hat{T} = \hat{U}\hat{K}$$

其中$\hat{U}$是幺正算符，$\hat{K}$是取复数共轭的算符。

5.2 态矢量和力学量算符在时间反演下的变换

在时间反演变换下，态矢量变换为：

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{T}|\Psi\rangle$$

相应的，力学量算符变换为：

$$\hat{A} \to \hat{A}' = \hat{T}\hat{A}\hat{T}^{-1}$$

利用动量、坐标算符的变换关系：

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}^{-1} = \hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{T}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{p}}$$

可得轨道角动量的变换公式：

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{L}}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}^{-1} \times \hat{T}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{T}^{-1}$$

从而可得：

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{L}}\hat{T} = -\hat{\boldsymbol{L}}$$

需要指出的是，由于时间反演是反幺正算符，并不对应一个可观测的物理量。

若$|\Psi(t)\rangle$满足薛定谔方程，并且

$$[\hat{H}, \hat{T}] = 0$$

那么$\hat{T}|\Psi(t)\rangle$也满足薛定谔方程。

在位置表象下，时间反演变换为：

$$\Psi'(t) = \Psi^*(-t)$$

例如考虑沿$\boldsymbol{p}$方向运动的自由粒子，动量为$\boldsymbol{p}$，能量为E，其波函数为：

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)\right]$$

时间反演变换后可得：

$$\phi'(\boldsymbol{x},t) = \phi^*(\boldsymbol{x},-t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + Et)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)\right]$$

其任然是薛定谔方程的一个解，对应于动量为$-\boldsymbol{p}$的自由粒子。