§3. 电磁场的能、动、角

1. 电磁场的能量

通过表面S流入体积V内的能量（单位时间）

$$-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$$

面积元

能流密度

其中一部分为体积内能量的增率

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dV$$

另一部分为对带电体系的功率

$$\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV$$

由守恒 $-\oint \vec{S}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{d}{dt}\int u\,dV + \int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV$

利用Gauss公式 $\oint d\vec{\sigma} \to \int dV\,\nabla$

$$\nabla\cdot\vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{f}\cdot\vec{v}$$

力密度

对于带电体系

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = (\rho\vec{E} + \overset{\rho\vec{v}}{\vec{J}}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = \vec{J}\cdot\vec{E}$$

由表四 $\vec{J} = \nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，则

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

表二

$$= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\therefore\ \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H},\qquad \delta u = \vec{E}\cdot\delta\vec{D} + \vec{H}\cdot\delta\vec{B}$$

对于各向同性介质（含真空） $\vec{D}\propto\vec{E}$，$\vec{B}\propto\vec{H}$，则有

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

特例：真空 ……

2. 电磁场的动量

流入：$-\oint \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{\sigma}$ 动量流密度

一部分 $\frac{d}{dt}\int \vec{g}\,dV$ 动量密度

另一部分（动量率） $\int \vec{f}\,dV$

由守恒 $-\oint \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{d}{dt}\int \vec{g}\,dV + \int \vec{f}\,dV$

$$\Rightarrow\quad \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} + \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} = -\vec{f}$$

由 $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$

表一　表四

$$= (\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} + \left(\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B}$$

$$= (\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{H}) + \vec{B}\times\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

其中 $\vec{B}\times\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) + \vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

表二

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})$$

$$\therefore\ \vec{f} = (\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E}) + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{H} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})$$

表三

则有 $\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B} \overset{\text{真}}{=} \frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{H}$

另一项 $\left[(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})\right]_x$

$$= E_x\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right) - D_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + D_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$= \left(E_x\frac{\partial D_x}{\partial x} - D_y\frac{\partial E_y}{\partial x} - D_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \left(E_x\frac{\partial D_y}{\partial y} + D_y\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \left(E_x\frac{\partial D_z}{\partial z} + D_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x) - \left(D_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y\frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xD_z)$$

匀.同

$$= \frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xD_z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x + E_yD_y + E_zD_z)$$

$$= \nabla\cdot(\vec{D}E_x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}\cdot\vec{D})$$

同理对 y, z 分量，故 $(\nabla\cdot\vec{D})\vec{E} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\cdot(\vec{D}\vec{E}) - \frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot\vec{D})$

$$= \nabla\cdot(\vec{D}\vec{E}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot[\overleftrightarrow{I}(\vec{E}\cdot\vec{D})] = \nabla\cdot\left(\vec{D}\vec{E} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\,\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\left[\overleftrightarrow{I}(\vec{E}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\vec{E}\right] + \frac{1}{2}\left[\overleftrightarrow{I}(\vec{H}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\vec{H}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{真空}} \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I} - \vec{E}\vec{E}\right) + \mu_0\frac{1}{2}\left(H^2\overleftrightarrow{I} - \vec{H}\vec{H}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_0(-E_x^2+E_y^2+E_z^2)+\frac{1}{2}\mu_0(-H_x^2+H_y^2+H_z^2) & -\varepsilon_0E_xE_y-\mu_0H_xH_y & -\varepsilon_0E_xE_z-\mu_0H_xH_z \\ \cdots & \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_x^2-E_y^2+E_z^2)+\frac{1}{2}\mu_0(H_x^2-H_y^2+H_z^2) & -\varepsilon_0E_yE_z-\mu_0H_yH_z \\ \cdots\ \text{对称} & \cdots & \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_x^2+E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2}\mu_0(H_x^2+H_y^2-H_z^2) \end{pmatrix}$$

若无 $\vec{f}$，则 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = -\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} = -\vec{K}$

$$\vec{K} = -\int\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\,dV$$

$$= -\oint d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

$$= -\oint \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\,d\sigma$$

压强 $K_n = -\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}$

3. 电磁场的角动量

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{M} + \frac{\partial\vec{l}}{\partial t} = -\vec{r}\times\vec{f}$$

角动量流密度　　角动量密度　　力矩密度

作业：6.3(d)×、6.5、6.10、6.11(b)×