杜炳毅　SQT2100703054

1.3

利用适当坐标系中的 δ 函数, 将下列电荷分布表示成三维电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$.
a. 在球坐标中,均匀分布于半径为 R 的球壳上的电荷 Q.

b. 在柱坐标中，均匀分布于半径为 b 的圆柱面上的每单位长度电荷 λ.

c. 在柱坐标中,均匀分布于厚度忽略不计、半径为 R 的平面圆盘上的电荷 Q.

d. 与 (c) 同, 但用球坐标.

a.

$$\rho=\frac{Q}{4\pi R^2}\delta\left(|r-R|\right)=\frac{Q}{4\pi R^2}\delta\left(\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-R\right|\right) \tag{1}$$

b.

$$\rho=\frac{\lambda}{2\pi b}\delta(r-b)=\frac{\lambda}{2\pi b}\delta\left(\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-b\right|\right) \tag{2}$$

c.

$$\rho=\frac{Q}{\pi R^2}\varepsilon(R-r)\delta(z)=\frac{Q}{\pi R^2}\varepsilon\left(\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-r\right|\right)\delta(z) \tag{3}$$

d.

$$\rho=\frac{Q}{\pi R^2}\varepsilon(R-r)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{Q}{\pi R^2}\varepsilon\left(\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-r\right|\right)\delta\left[\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \tag{4}$$

1.4

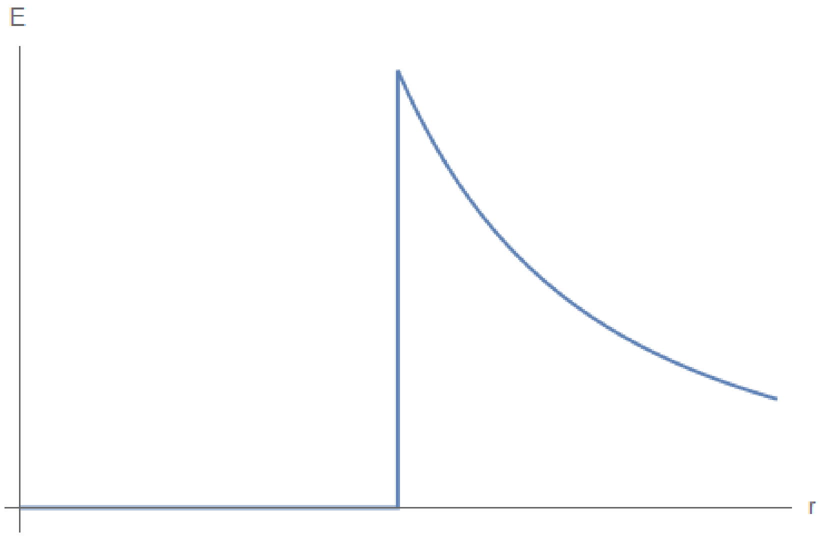
有三个半径均为 a 的带电球, 其中一个球是导电的, 另一个球在体内有均匀分布的电荷密度, 第三个球的电荷密度是球对称分布的, 并在径向上按 $r^n\ (n>-3)$ 变化, 这三个球各带总电荷 Q. 试用高斯定律求各球内、外的电场强度. 画出前两个球的电场强度对半径的关系曲线, 以及第三个球在 $n=-2$、$+2$ 时的 上述曲线.

①

球内电场强度为0

球外r处

$$\oiint E\,\mathrm{d}S=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad\rightarrow\quad E=\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \tag{5}$$



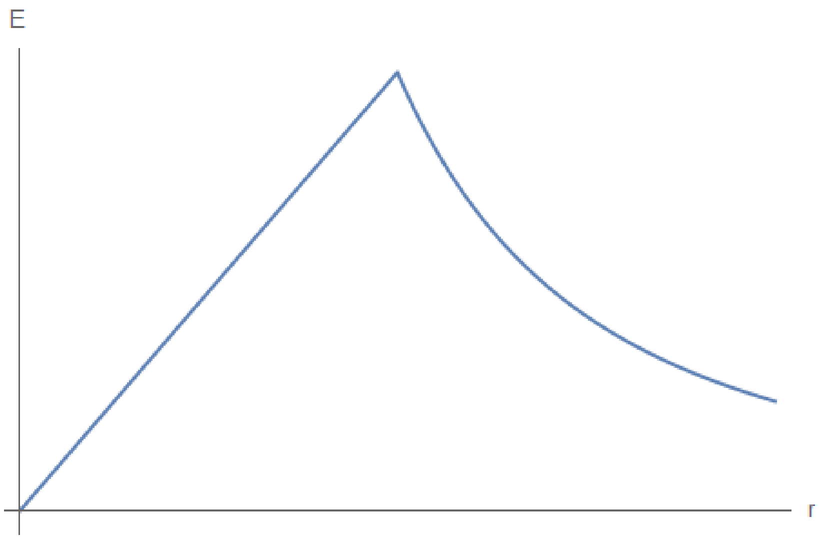
②

球内

$$\oiint E\,\mathrm{d}S = \frac{Q \cdot r^3/a^3}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{Q \cdot r^3/a^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{Qr}{4\varepsilon_0 \pi a^3} \tag{6}$$

球外

$$\oiint E\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \tag{7}$$



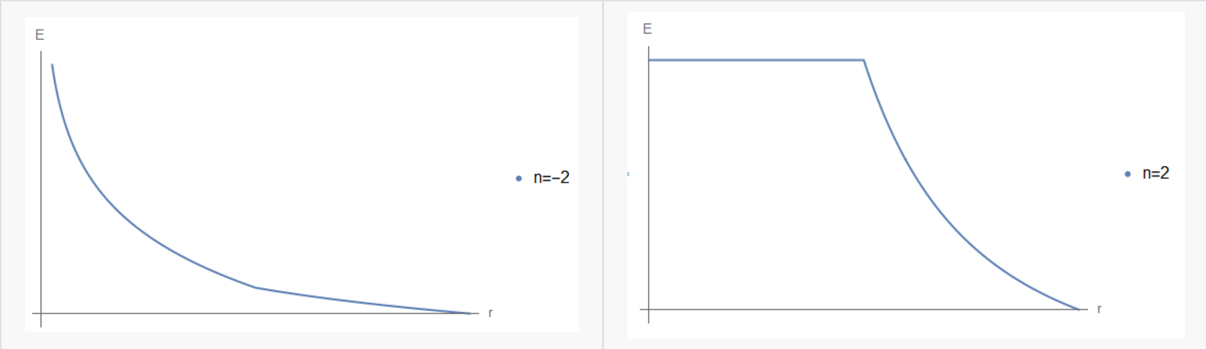
③

球内

$$\oiint E\,\mathrm{d}S = \frac{Q \cdot r^n/a^n}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{Q \cdot r^n/a^n}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{Qr^{n-2}}{4\varepsilon_0 \pi a^n} \tag{8}$$

球外

$$\oiint E\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \tag{9}$$



1.5

中性氢原子的势对时间的平均值由下式给出:

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right) \tag{10}$$

式中 q 是电子电荷的量值, $\alpha^{-1}=a_0/2, a_0$ 是玻尔半径。

试求出能够给出这一势的电荷分布 (连续的与离散的两种情形), 并从物理上解释你的结果.

根据泊松方程，$\nabla^2\Phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，有

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi&=\nabla^2\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)\right]\\&=\nabla^2\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]\\&=\nabla^2\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}\right)+\frac{1}{8\pi\epsilon_0}q\alpha e^{-\alpha r}\right]+\nabla^2\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\\&=\frac{\alpha^3qe^{\alpha(-r)}}{8\pi\epsilon_0}-\frac{q}{\epsilon_0}\delta(r)=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{11}$$

> $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$，为了把奇异项$\frac{1}{r}$提到外面单独用$\delta$表示

得到

$$\rho(r)=-\frac{\alpha^3qe^{\alpha(-r)}}{8\pi}+q\delta(r) \tag{12}$$

即，$r=0$处有一离散分布正电荷，全空间有一总电量为$-\frac{\alpha^3q}{8\pi}$、电荷密度沿径向指数衰减的连续分布的电子云

1.10

证明均值定理：在无电荷空间中任一点的静电势之值，等于以该点为球心的任一球面上势的平均值

对无电荷区域取任意球面为边界，可视为给定边界电荷面密度为0，

考虑Neumanu边界条件，有电势

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho\left(\vec{r'}\right)GdV'+\frac{1}{4\pi}\oint_{S'}\left[G\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right]dS'+\langle\varphi\rangle_S\\&=\frac{1}{4\pi}\oint_{S'}\left[G\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right]dS'+\langle\varphi\rangle_S\\&=-\frac{1}{4\pi}\oint_{S'}GEdS'+\langle\varphi\rangle_S\\&=\langle\varphi\rangle_S\end{aligned} \tag{13}$$

QED

1.11

试用高斯定律证明，在弯曲的带电导体的表面上，电场强度的法向导数由下式给出

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{14}$$

式中，$R_1.R_2$是曲面的主曲率半径

> 关于主曲率半径 R_1 和 R_2 定义: 由于对一个曲面, 过其中一点做一个切平面, 平行切平 面总有两个互相垂直的方向, 对每一个方向都有一个曲率半径, 所以总共有两个曲率半径。

在导体的表面的一面积元 ΔS 处沿导体的表面法向方向取一小体积元，使两底面分别在导体内外，

设导体 ΔS 上所带的电荷为 q，而上下底面均与法向垂直，

取一包住整个面元ΔS的高斯面，由高斯定理

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{15}$$

导体静电平衡时，导体附近的电场强度处处于表面垂直，故 $\vec{E}//\Delta\vec{S}$， 有

$$\begin{aligned} E\Delta S&=\frac{q}{\varepsilon_0}\\ E&=\frac{q}{\Delta S\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{16}$$

记 $s=\Delta S$，则 $E=\frac{q}{s\varepsilon_0}$，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial s}&=-\frac{q}{s^2\varepsilon_0}=-\frac{E}{s}\\ \frac{\partial E}{\partial n}&=\frac{\partial E}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial n}=-\frac{E}{s}\frac{\partial s}{\partial n}\end{aligned} \tag{17}$$

对于曲面主曲率半径R_1,R_2有

$$\frac{\partial s}{\partial n}=s\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{18}$$

所以，

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{19}$$

QED

1.12

证明格林互易定理: 若 Φ 是体积 V 内的体电荷密度 ρ 与导电曲面 S(V 的边界面）上面电荷密度 σ 所产生的势, 而 $\Phi\prime$ 是另一电荷分布 $\rho\prime$ 与 $\sigma\prime$ 所产生的势, 则

$$\int_V\rho\Phi' d^3x+\int_S\sigma\Phi' da=\int_V\rho'\Phi d^3x+\int_S\sigma'\Phi da \tag{20}$$

上式移项得

$$\int_V \left(\rho\Phi' - \rho'\Phi\right)dV = \int_S \left(\sigma'\Phi - \sigma\Phi'\right)\cdot d\vec{S} \tag{21}$$

对于左侧

根据泊松方程有，

$$\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\Phi \qquad \rho' = -\varepsilon_0\nabla^2\Phi' \tag{22}$$

代入左侧有，并利用格林定理有

$$\begin{aligned}\int_V \left(\rho\Phi' - \rho'\Phi\right)dV &= \varepsilon_0\int_V \left(\Phi\nabla^2\Phi' - \Phi'\nabla^2\Phi\right)dV \\ &= \varepsilon_0\int_S \left(\Phi\nabla\Phi' - \Phi'\nabla\Phi\right)\cdot d\vec{S} \\ &= \varepsilon_0\int_S \left(\Phi'\vec{E} - \Phi\vec{E}'\right)\cdot d\vec{S} \\ &= \int_S \left(\Phi'\vec{D} - \Phi\vec{D}'\right)\cdot d\vec{S}\end{aligned} \tag{23}$$

对于导体表面，考虑边界条件$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f$，进一步有

$$\int_V \left(\rho\Phi' - \rho'\Phi\right)dV = \int_S \left(\Phi'\sigma - \Phi\sigma'\right)\cdot dS \tag{24}$$

QED

1.14

考虑1.10节中，由曲面S包围得体积V中Dirichlet和Neumann边界条件下的格林函数。应用格林定理（1.35）,取积分变量为y、令$\phi = G(\mathbf{x},\mathbf{y}), \psi = G\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)$，且$\nabla_{\mathrm{y}}^2 G(\mathbf{z},\mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{y}-\mathbf{z})$，找出差分$\left[G\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) - G\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}\right)\right]$在边界曲面$S$上的积分的表达式

(a) 根据电势的Dirichlet边界条件和格林函数的其他相关边界条件，证明$G_D(x,x')$必关于x, x'对称

(b) 根据电势的Neumann边界条件，和格林函数$G_N\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)$的边界条件（1.45）式，证明$G_N\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)$一般不对称，但$G_N\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) - F(\mathbf{x})$必关于$x, x'$对称，其中，

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{S}\oint_S G_N(\mathbf{x},\mathbf{y})da_y \tag{25}$$

(c) 证明对格林函数附加$F(x)$，不影响电势$\Phi(x)$。关于Neumann格林函数的例子，见问题3.26

> 1.35
>
> $$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right)d^3x = \oint_S \left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]da \tag{26}$$
>
> 1.45
>
> $$\frac{\partial G_N}{\partial n'}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{for } \mathbf{x}' \text{ on } S \tag{27}$$

(a)

取积分变量为y、令$\phi = G(\mathbf{x},\mathbf{y}), \psi = G\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)$，根据格林定理，有

$$\int_V \left(G(x,y)\nabla^2 G(x',y) - G(x',y)\nabla^2 G(x,y)\right)d^3x = \oint_S \left[G(x,y)\frac{\partial G(x',y)}{\partial n} - G(x',y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\right]da \tag{28}$$

对于右侧，考虑Dirichlet边界条件$G_D(\vec{r},\vec{r'})\Big|_S' = 0$，故为0

对于左侧，考虑$\nabla'^2 G\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) = -4\pi\delta\left(x - x'\right)$，有

$$\int_V \left(4\pi G(x',y)\delta(x-y)-4\pi G(x,y)\delta(x'-y)\right)d^3x=4\pi\left(G(x',y)-G(x,y)\right)=0 \tag{29}$$

得到

$$G(x',y)=G(x,y) \tag{30}$$

所以，Dirichlet情况下，G_D关于x,x'对称

(b)

同(a)，考虑Neumann边界条件，$\frac{\partial G_N(\bar{r},r)}{\partial n'}\Big|_{S'}=-\frac{4\pi}{S}$，有

$$\begin{aligned} 4\pi\left(G(x',y)-G(x,y)\right)&=\frac{4\pi}{S}\oint_S\left[G(x',y)-G(x,y)\right]da \\ G(x',y)-G(x,y)&=\frac{1}{S}\oint_S\left[G(x',y)-G(x,y)\right]da \end{aligned} \tag{31}$$

所以对于Neumann边界条件下，G_N不一定关于x,x'对称

上式变形有

$$G(x',y)-\frac{1}{S}\oint_S G(x',y)da=G(x,y)-\frac{1}{S}\oint_S G(x,y)da \tag{32}$$

取$F(\mathbf{x})=\frac{1}{S}\oint_S G_N(\mathbf{x},\mathbf{y})da_y$

则有，

$$G_N\left(\mathbf{x},y\right)-F(\mathbf{x})=G_N\left(\mathbf{x}',y\right)-F(\mathbf{x}') \tag{33}$$

所以对于Neumann边界条件下，$G_N\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)-F(\mathbf{x})$必关于$x,x'$对称

(c)

由静电场唯一性定理，电势仅取决于边界条件，故F不影响电势$\Phi(x)$