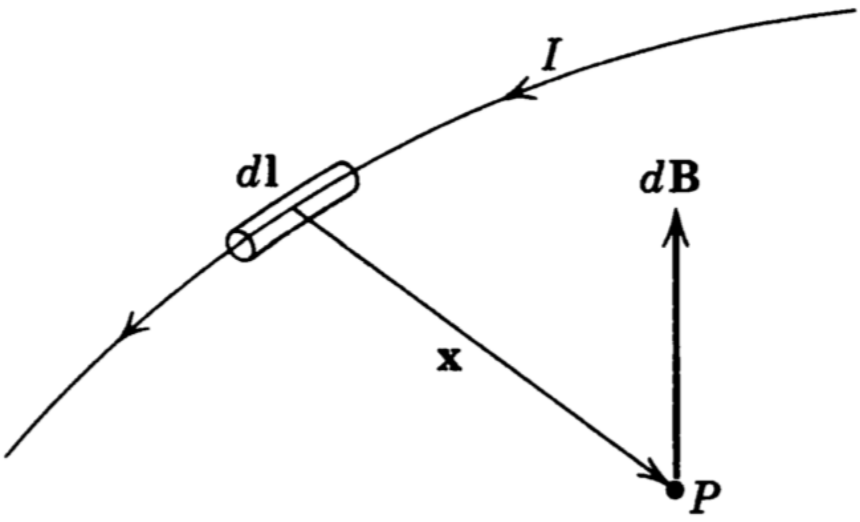
第四章不讲，多极展开、电偶看郭的

静磁学

1 基本规律

1.1 毕奥-萨法尔定律



描述磁感应强度$\vec{B}$与电流的关系的实验定律

$$d\mathbf{B}=kI\frac{(d\mathbf{l}\times\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3}\qquad or\qquad \mathbf{B}=kq\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\tag{1}$$

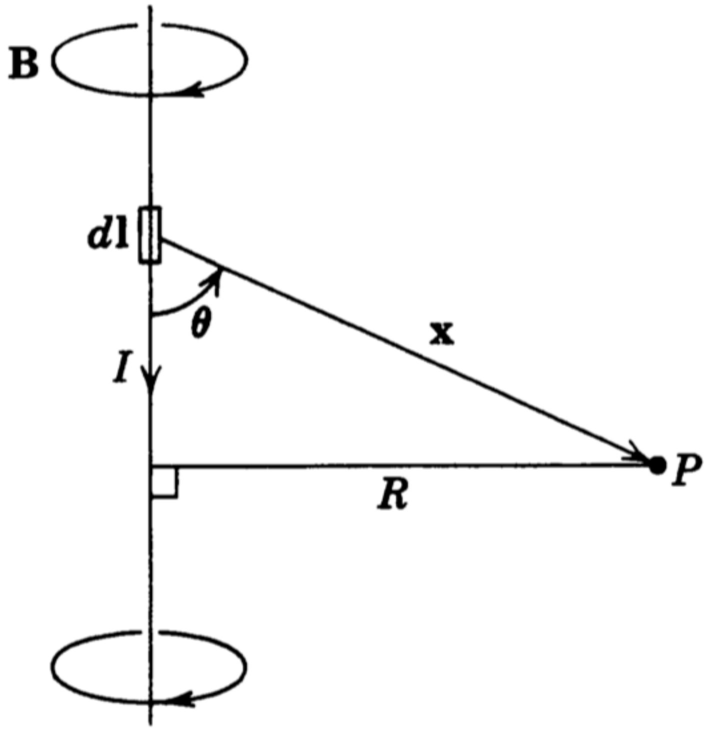
其中，k取决于单位制，在高斯单位制下取$k=\frac{1}{c}$，国际单位下取$k=\mu_n/4\pi=10^{-7}$

第一个关系，着眼于电流中电流元，不能针对孤立电流元（实际也不存在孤立电流源）考虑，$d\vec{B}$为场点的磁通量密度

第二个关系，将电流看作运动电荷，采用$q\vec{v}$代替$Id\vec{l}$

需要注意，第二个关系式同时间有关，因此只有电荷运动速度远小于光速、切加速度可忽略时才成立，对于静磁场情况成立

1.1.1 长直载流导线

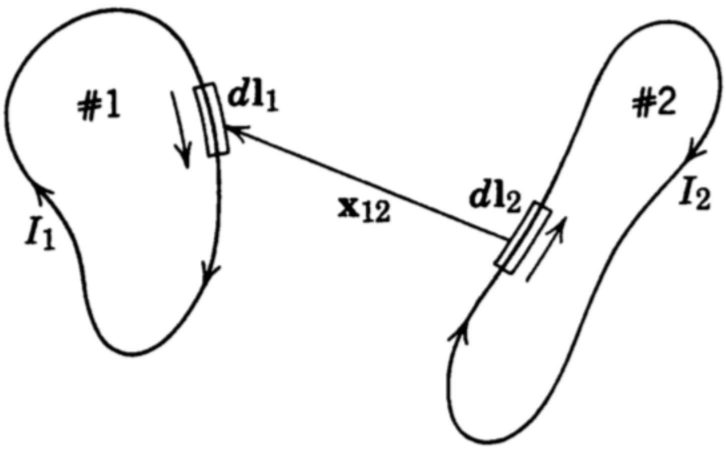


如上图所示

把磁通密度积分，有

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \tag{2}$$

1.2 磁场中的力



对于场中载流回路1的电流元$I_1 d\vec{l}_1$，所受的力微元为

$$d\mathbf{F} = I_1 \left(d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} \right) \tag{3}$$

记外场$\vec{B}$由载流回路2产生，对回路1,2回路积分有载流回路1所受的总力为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \tag{4}$$

积分项展开有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\\
(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\frac{d\mathbf{l}_1\times(d\mathbf{l}_2\times\mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3}=-(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}+d\mathbf{l}_2\left(\frac{d\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}\right)
\tag{6}
$$

有$d\vec{l}_1\cdot\vec{x}_{12}=d\vec{x}_{12}$

对于环路积分，考虑斯托克斯公式

$$
\iint_S\nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}
\tag{7}
$$

取，$\vec{F}=\nabla\cdot\vec{x}_{12}$也就是是个全微分

则有

$$
\oint\nabla\cdot\vec{x}_{12}d\vec{r}=\iint_S\nabla\times(\nabla\cdot\vec{x})d\vec{S}=0
\tag{8}
$$

?无穷处积分是怎么证明的

若积分路线是闭合的，或延伸到无穷远，第二项忽略，则有

$$
\mathbf{F}_{12}=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}
\tag{9}
$$

同样可以成电流密度$\vec{J}(\vec{x})$的形式

电流分布$\vec{J}$受力为

$$
\mathbf{F}=\int\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{B}(\mathbf{x})d^3x
\tag{10}
$$

所受力矩为

$$
\mathbf{N}=\int\mathbf{x}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{B})d^3x
\tag{11}
$$

1.2.1 双长直载流导线

对于双长直载流线圈$1,2$，导线1上的电流元受到的力为

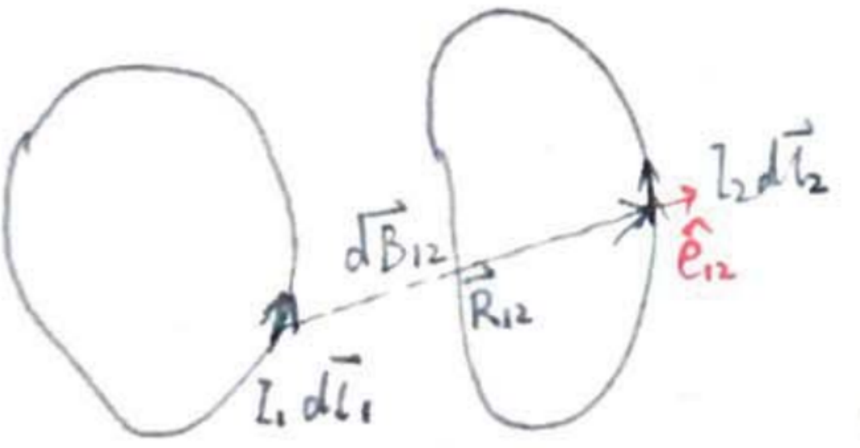
$$
\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}
\tag{12}
$$

方向垂直于另一导线

1.2.2 双电流环

洛伦兹力$\vec{F}_L=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$

微元$\vec{f}_L=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$



有磁感应

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\vec{l}_1 \times \hat{e}_{12}}{R_{12}^2} \tag{13}$$

有力

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12} \\ &= \frac{\mu_0 l_1 l_2}{4\pi}\frac{d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l}_1 \times \hat{e}_{12}\right)}{R_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} d\vec{l}_l \frac{\overrightarrow{d\vec{l}_2} \cdot \hat{e}_{12}}{R_{12}^2} - \frac{\mu_{x_1} I_1 I_2}{4\pi}\frac{\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)\hat{e}_{12}}{R_{12}^2} \end{aligned} \tag{14}$$

积分有

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_1 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2} d\vec{l}_1 \frac{d\vec{l}_2 \cdot \hat{e}_{12}}{R_{12}^2} - \frac{\mu_1 I_1 I_2}{42}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{R_{12}^2} e_{\hat{12}} \tag{15}$$

同理长直导线模型，有

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_1 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R_{12}^2}\hat{e}_{12} \tag{16}$$

1.3 矢势

毕奥-萨法尔定律，写成电流密度形式有

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right) \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^3} d^3x' \tag{17}$$

利用$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\right)$，有

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} d^3x' \tag{18}$$

定义其中矢势$\vec{A}$

$$\begin{gathered} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} d^3x' \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \end{gathered} \tag{19}$$

即

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{20}$$

可以直接得到**静磁学第一方程**

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{21}$$

1.4 矢势方程及边值关系

对于(18)，计算旋度有

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}d^3x' \tag{22}$$

利用：$\nabla\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$，有

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\int\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\right)d^3x'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)\nabla^2\left(\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\right)d^3x' \tag{23}$$

利用，$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$和$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-4\pi\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)$有

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\int\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\right)d^3x'+\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{x}) \tag{24}$$

分部积分得

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}d^3x' \tag{25}$$

对于静磁场$\nabla\cdot\vec{J}=0$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J} \tag{26}$$

称为**静磁学第二方程**

也即安培定律

其积分形式称为**安培环路定理**

$$\oint_C\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I \tag{27}$$

高度对称情况中，可以用于计算磁场

将上述两静电学方程，代入矢势有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\mu_0\mathbf{J}\\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}\end{gathered} \tag{28}$$

取库伦规范$\nabla\cdot\vec{A}=0$有

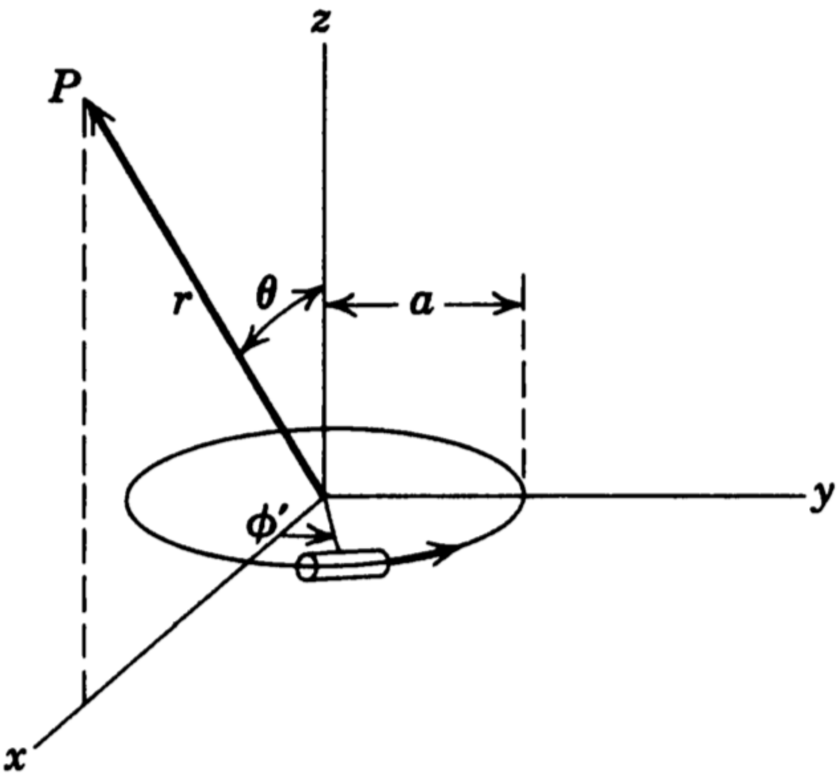
$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J} \tag{29}$$

即，矢势得每一个直角分量都满足泊松方程

在无界空间中$\vec{A}$有解

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}d^3x' \tag{30}$$

1.4.1 圆形电流回路



圆形回路半径为a，位于$x-y$平面，圆心在原点，载流为I，电流密度$\vec{J}$只有ϕ方向分量

$$J_\phi = I\sin\theta'\delta\left(\cos\theta'\right)\frac{\delta\left(r'-a\right)}{a} \tag{31}$$

有总电流密度

$$\mathbf{J} = -J_\phi\sin\phi'\mathbf{i} + J_\phi\cos\phi'\mathbf{j} \tag{32}$$

考虑$x-z$平面，该平面上$\phi'=0$，电流密度的x分量没有贡献，代入(30)有

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int r'^2 dr' d\Omega' \frac{\sin\theta'\cos\phi'\delta\left(\cos\theta'\right)\delta\left(r'-a\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{33}$$

其中，$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \left[r^2+r'^2-2rr'\left(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi'\right)\right]^{1/2}$

对δ积分有

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi' d\phi'}{\left(a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'\right)^{1/2}} \tag{34}$$

该积分通过全椭圆积分K,E表示

$$\begin{aligned} A_\phi(r,\theta) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{4Ia}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\sin\theta}}\left[\frac{\left(2-k^2\right)K(k)-2E(k)}{k^2}\right] \\ k^2 &= \frac{4ar\sin\theta}{a^2+r^2+2ar\sin\theta} \end{aligned} \tag{35}$$

并有磁感应分量

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) \\ B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right) \\ B_\phi &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

$$B_\phi = 0$$

当k^2很小，即$a \gg r, a \ll r$或$\theta \ll 1$时，

考虑

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'\right)^{1/2}} &= \frac{1}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2ar}{a^2+r^2}\sin\theta\cos\phi'\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}} \cdot \left(1+\frac{ar}{a^2+r^2}\sin\theta\cos\phi'\right)\end{aligned} \tag{37}$$

再对(34)变形有

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I a^2 r\sin\theta}{4\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\left[1+\frac{15a^2r^2\sin^2\theta}{8\left(a^2+r^2\right)^2}+\cdots\right] \tag{38}$$

❓分母少了个π

得到磁感应分量

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0 I a^2\cos\theta}{2\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\left[1+\frac{15a^2r^2\sin^2\theta}{4\left(a^2+r^2\right)^2}+\cdots\right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0 I a^2\sin\theta}{4\left(a^2+r^2\right)^{5/2}}\left[2a^2-r^2+\frac{15a^2r^2\sin^2\theta\left(4a^2-3r^2\right)}{8\left(a^2+r^2\right)^2}+\cdots\right]\end{aligned} \tag{39}$$

就可以得到$a \gg r, a \ll r$（回路中心及远离回路处）或$\theta \ll 1$（轴附近）处的磁场

对于远离回路处有

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(I\pi a^2\right)\frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(I\pi a^2\right)\frac{\sin\theta}{r^3}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

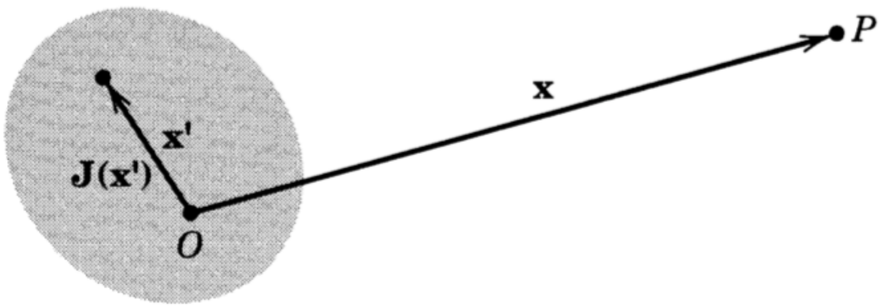
边值

P147

电多极展开，复习郭，j是球坐标

张量运算代替课本分量形式

2 定域电流在远处产生的场及磁矩



考虑定域电流在远处（$|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$）产生的场

利用幂展开，对$\mathbf{x}'$展开

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \cdots \tag{41}$$

则根据(30)有矢势分量有展开式

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}|}\int J_i\left(\mathbf{x}'\right)d^3x' + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\cdot\int J_i\left(\mathbf{x}'\right)\mathbf{x}'d^3x' + \cdots\right] \tag{42}$$

考虑$\vec{J}$定域，且静磁场$\nabla\cdot\vec{J}=0$，

对第一项，

考虑$\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$，取$\vec{A}=\vec{J}$，　$\vec{B}=\vec{x}'$，有

其中，$\nabla\cdot\vec{x} = I$单位向量的模

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}') = (\nabla\cdot\vec{J})\vec{x}' + (\vec{J}\cdot\nabla)\vec{x}' = (\nabla\cdot\vec{J})\vec{x}' + \vec{J}\\ \vec{J} = \nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}') - (\nabla\cdot\vec{J})\vec{x}'\end{aligned} \tag{43}$$

对第一项分部积分有

对于稳恒电流有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \tag{44}$$

对于S足够大，则有

$$\begin{aligned}\int\vec{J}(\vec{x}')d^3\vec{x}' &= \int\nabla'\cdot\left(\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\right) - \int\nabla'\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\\ &= \oiint_S d\vec{S}'\cdot\vec{J}'\vec{x}' - 0 = 0\end{aligned} \tag{45}$$

对于第二项，

考虑

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overrightarrow{\vec{A}\vec{B}\vec{C}}) &= (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}\vec{C} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}\vec{C}\\ &= (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}\vec{C} + (\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})\vec{C} + \vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla\vec{C})\end{aligned} \tag{46}$$

取$\vec{A}=\vec{J}$，　$\vec{B}=\vec{C}=\vec{x}'$，有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{J}\vec{x}'\vec{x}') &= (\nabla\cdot\vec{J})\vec{x}'\vec{x}' + (\vec{J}\cdot\nabla\vec{x}')\vec{x}' + \vec{x}'(\vec{J}\cdot\nabla\vec{x}')\\ &= \vec{J}\vec{x}' + \vec{x}'\vec{J} \neq 2\vec{J}'\vec{x}'\end{aligned} \tag{47}$$

对上式积分有

$$\begin{aligned}\int\left(\vec{J}\vec{x}'+\vec{x}'\vec{J}\right)d^3\vec{x}'&=\int\nabla\cdot\left(\vec{J}\vec{x}'\vec{x}'\right)\\&=\oiint d\vec{S}\cdot\left(\vec{J}\vec{x}'\vec{x}'\right)=0\end{aligned}\tag{48}$$

有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{x}'J_id^3x'&\equiv\sum_j x_j\int x_j'J_id^3x'\\&=-\frac{1}{2}\sum_j x_j\int\left(x_i'J_j-x_j'J_i\right)d^3x'\\&=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}x_j\int\left(\mathbf{x}'\times\mathbf{J}\right)_kd^3x'\\&=-\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}\times\int\left(\mathbf{x}'\times\mathbf{J}\right)d^3x'\right]_i\end{aligned}\tag{49}$$

综上(42)化为

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\\\mathbf{m}=\frac{1}{2}\int\mathbf{x}'\times\mathbf{J}\left(\mathbf{x}'\right)d^3x'\end{gathered}\tag{50}$$

$\vec{A}$即失势的最低阶非零项。

其中，$\vec{m}$定义为磁矩

磁矩密度或此话强度定义为

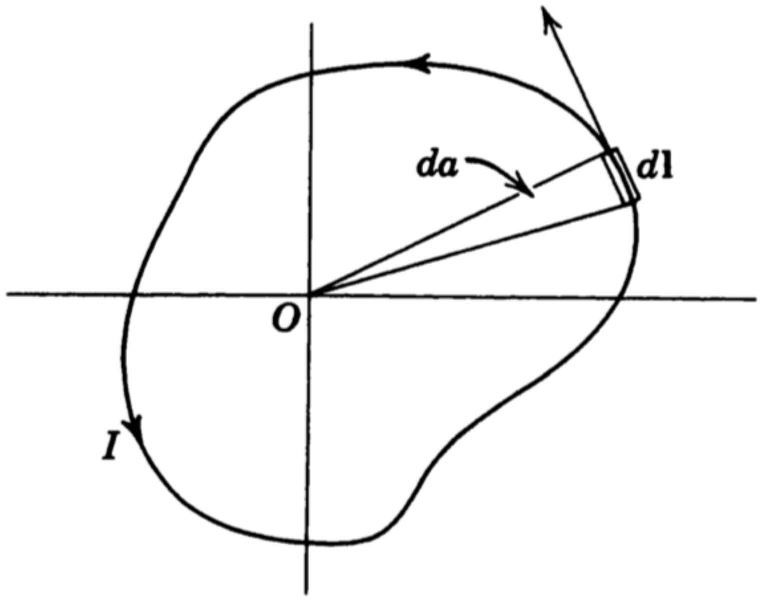
$$\mathcal{M}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}[\mathbf{x}\times\mathbf{J}(\mathbf{x})]\tag{51}$$

可以求得磁感应强度

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}\tag{52}$$

其中，$\vec{n}$为$\vec{x}$方向单位适量

2.0.2 平面回路



如电流在任意形状的平面回路内流动，记电流为I，线元为$d\vec{l}$，则有磁矩

$$\mathbf{m}=\frac{I}{2}\oint\mathbf{x}\times d\mathbf{l} \tag{53}$$

即，磁矩可以表示为与回路面积的简单关系

$$|\mathbf{m}|=I\times(\text{ Area }) \tag{54}$$

若电流分部由若干带电粒子组成，各自带电荷q_i，质量为M_i，以速度v_i运动，则有电流密度

$$\mathbf{J}=\sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right) \tag{55}$$

有磁矩，

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\mathbf{x}_i\times\mathbf{v}_i\right) \tag{56}$$

其中，轨道角动量$\vec{L}_i=M_i(\vec{x}_i\times\vec{v}_i)$，磁矩可写作

$$\mathbf{m}=\sum_i\frac{q_i}{2M_i}\mathbf{L}_i \tag{57}$$

若所有粒子具有相同的荷质比$q_i/M_i=e/M$，磁矩可表示为总角动量形式

$$\mathbf{m}=\frac{e}{2M}\sum_i\mathbf{L}_i=\frac{e}{2M}\mathbf{L} \tag{58}$$

即，经典角动量-磁矩关系

> 该角动量关系不是用于自旋角动量，对于电子需要考虑g因子

3 定域电流在外磁场中

定域电流分布在外磁场$\vec{B}$中所受力的最低阶为

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=(\mathbf{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{m}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\\ F_i=\sum_{jk}\epsilon_{ijk}(\mathbf{m}\times\nabla)_jB_k(\mathbf{x})\end{gathered} \tag{59}$$

第二式为分量形式，

一般有$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，因此简化为

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \tag{60}$$

对于静磁场，有$\nabla \times \vec{B} = 0$，进一步化简有

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} \tag{61}$$

5.3 5.6 13 26

13建议 书上积分方法