杜炳毅 SQT2100703054

9.3

半径为R、电导率为无穷大的金属球壳的两半被极小的绝缘间隙隔开。在两半球之间施加一交变电势，使电势为$\pm V\cos\omega t$。在长波极限下，求辐射场、辐射功率的角分布以及球体的总辐射功率

长波极限下，由（3.36），有壳层外电势

$$\Phi(r,\theta)=V\left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^4P_3(\cos\theta)+\cdots\right] \tag{1}$$

对应于，$\Phi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$，有球体偶极矩

$$\vec{p}=6\pi\varepsilon_0VR^2\hat{z} \tag{2}$$

由（9.19）有

$$\vec{H}=\frac{ck^2}{4\pi}(\vec{n}\times\vec{P})\frac{e^{ikr}}{r}=-\frac{3}{2}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\frac{V}{z_D}\sin\theta\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r}\hat{\phi} \tag{3}$$

$$\vec{E}=z_0\vec{H}\times\vec{n}=-\frac{3}{2}V\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\sin\theta\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r}\hat{\theta} \tag{4}$$

有单位立体角的辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c^2Z_0}{32\pi^2}k^4|(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}|^2=\frac{c^2Z_0}{32\pi^2}k^4\left(|\vec{p}|^2-|\vec{p}\cdot\vec{n}|^2\right)=\frac{9}{8}\left(\frac{wR}{c}\right)^4\frac{v^2}{z_0}\sin^2\theta \tag{5}$$

总共率为

$$P=\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=3\pi\left(\frac{\omega R}{c}\right)^4\frac{v^2}{z_0} \tag{6}$$