隐函数曲线的绘制

对函数$V(x,y)$，有全微分

$$A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y=\Delta V \tag{1}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy=dV_0 \tag{2}$$

对于$V(x_0,y_0)=V_0$的等高线，有

$$\begin{gathered}A\cdot\Delta x+B\Delta y=0\\ \frac{\Delta x}{B}=-\frac{\Delta y}{A}\\ (x-x_0)=\Delta x \qquad (y-y_0)=\Delta y\end{gathered} \tag{3}$$

等高线上各点$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，满足上式

因此，

对于一个等高线上已知的点(x_0,y_0)，可以通过上式得到对应的许多组$(x+\Delta x,y+\Delta y)$

但考虑到，如果将Δx取比较大的值时，在对应的$(x+\Delta x,y+\Delta y)$处可能并没有等高线，

所以要对Δx取较小的值，求出对应的$(x_1=x_0+\Delta x,y_1=y_0+\Delta y)$后，得到新的等高线上的点，再对$(x_1,y_1)$取一小$\Delta x$迭代前述操作

为了保证$\Delta x,\Delta y$都足够小，

定义

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{B}=-\frac{\Delta y}{A} \tag{4}$$

在编程中，只要取Δt够小，就能保证$\Delta x,\Delta y$同时够小

即，

$$\begin{cases}\Delta x=B\Delta t\\ \Delta y=-A\Delta t\end{cases} \qquad or \qquad \begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y=-\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}t\end{cases} \tag{5}$$

得到$\Delta x,\Delta y$后，在初始的(x_0,y_0)上叠加一次$\Delta x,\Delta y$就得到一个等高线上新的点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$，多次重复迭代，得到一条闭合的等高线

例题

绘制两异号点电荷，电势取$V_0=3,2,1,0.5$处的等高线

即有函数

$$\begin{gathered}V(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)\\ r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \qquad r_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\end{gathered} \tag{6}$$

其中，

$$\begin{gathered}(x_1,y_1)=(-2,0) \quad (x_2,y_2)=(2,0)\\ q_1=-1 \qquad q_2=1\end{gathered} \tag{7}$$

取$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=1$，有偏微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\mathrm{q1}(\mathrm{y1}-y)}{\left((x-\mathrm{x1})^2+(y-\mathrm{y1})^2\right)^{3/2}} + \frac{\mathrm{q2}(\mathrm{y2}-y)}{\left((x-\mathrm{x2})^2+(y-\mathrm{y2})^2\right)^{3/2}} = -y\cdot\left(\frac{q_1}{r_1^3}+\frac{q_2}{r_2^3}\right) \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\mathrm{q1}(\mathrm{x1}-x)}{\left((x-\mathrm{x1})^2+(y-\mathrm{y1})^2\right)^{3/2}} + \frac{\mathrm{q2}(\mathrm{x2}-x)}{\left((x-\mathrm{x2})^2+(y-\mathrm{y2})^2\right)^{3/2}} = -\left(q_1\frac{x-x_1}{r_1^3}+q_2\frac{x-x_2}{r_2^3}\right)
\end{aligned} \tag{8}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= -y\cdot\left(\frac{q_1}{r_1^3}+\frac{q_2}{r_2^3}\right)\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}y &= \left(q_1\frac{x-x_1}{r_1^3}+q_2\frac{x-x_2}{r_2^3}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{9}
$$

此处可以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\partial V/\partial x}{\partial V/\partial y}\cdot\frac{dt}{dt} \\
&= -\frac{y\left(\frac{\mathrm{q1}}{\mathrm{r1}^3}+\frac{\mathrm{q2}}{\mathrm{r2}^3}\right)}{\frac{\mathrm{q1}(x-\mathrm{x1})}{\mathrm{r1}^3}+\frac{\mathrm{q2}(x-\mathrm{x2})}{\mathrm{r2}^3}} \\
&= -\frac{y\left(\mathrm{q1}\mathrm{r2}^3+\mathrm{q2}\mathrm{r1}^3\right)}{\mathrm{q1}\mathrm{r2}^3(x-\mathrm{x1})+\mathrm{q2}\mathrm{r1}^3(x-\mathrm{x2})}
\end{aligned} \tag{10}
$$

故，$\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$是可以同时缩放一个相同的比例，使

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}y = -\left[q_1\left(x-x_1\right)r_2^3+q_2\left(x-x_2\right)r_1^3\right]dt \\
&\mathrm{d}x = y\left(q_1r_2^3+q_2r_1^3\right)dt
\end{aligned} \tag{11}
$$

⭐采用这两个结果进行迭代，收敛速度比前述的结果要快得多

> 原因未知
>
> 另，这里为啥要把符号反过来，9跟11的符号反了

对于$V_0=0.2$的等高线，采用自然单位制，通过方程解得

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{|x+2|}=0.2 \\
\left\{x\to 2\sqrt{3}\right\},\left\{x\to 2\left(\sqrt{2}-1\right)\right\} \\
\{x\to 0.828427\},\{x\to 3.4641\}
\end{gathered} \tag{12}
$$

即有初始坐标

$$
\left(x_0',y_0'\right)=(0.828427,0) \qquad \left(x_0'',y_0''\right)=(3.4641,0) \tag{13}
$$

取$\mathrm{d}t=10^{-3}$，有

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_0'+\mathrm{d}x = x_0' = 0.828427 \\
y_1' &= y_0'+\mathrm{d}y(x_1') = 0.000853553
\end{aligned} \tag{14}
$$

> ❓这里有问题，x到底取的是上一个还是下一个值;对于y_1'的式子，后面用的是x_0'还是x_1'
>
> 采用x_1'会使得收敛速度更快，原因未知

继续迭代