《高等量子力学》2021 试题

1. 已知有限维线性空间的算符 \hat{A} 和 \hat{B} 对易,满足 $[\hat{A},\hat{B}]=0$, $\{|ilpha
angle\}$ 和 $\{|jeta
angle\}$ 分别为算符 \hat{A} 和 \hat{B} 的正交归一的本征矢量组,也即:

$$egin{aligned} \hat{A}|ilpha
angle &=a_i|ilpha
angle, \qquad lpha=1,2,\cdots,m_i \ \hat{B}|jeta
angle &=b_j|jeta
angle, \qquad eta=1,2,\cdots,m_j \end{aligned}$$

其中 m_i 和 m_j 分别为本征值 a_i 和 b_j 的简并度.

 \circ 证明如下定义的 $|i\alpha\rangle$ 是算符 \hat{A} 和 \hat{B} 的共同的本征矢量:

$$|jilpha
angle = \sum_eta |jeta
angle\langle jeta|ilpha
angle$$

它们是否是归一化的?彼此之间是否正交?

- \circ 全部 $|ji\alpha\rangle$ 的总数是多少? 它们是线性相关的还是线性无关的?
- 2. 若函数f(t)可以写成如下泰勒展开形式:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$$

其中 $c_n=f^{(n)}(0)$ 为已知系数,证明关于位置算符 \hat{x} 和动量算符 \hat{p} 的下列等式成立(已知 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$):

$$igl[\hat{x},f(\hat{p})igr]=i\hbarrac{\partial f(\hat{p})}{\partial\hat{p}}, \qquad igl[\hat{p},f(\hat{x})igr]=-i\hbarrac{\partial f(\hat{x})}{\partial\hat{x}}$$

3. 若 \hat{x} 和 \hat{p} 分别为一维位置和动量算符,满足 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$, $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$ 分别为 \hat{x} 和 \hat{p} 的本征值为x和p的本征矢量,满足连续本征值的归一化条件: $\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')$, $\langle p|p'\rangle=\delta(p-p')$,由此证明:

$$\langle x|p
angle = rac{e^{rac{i}{\hbar}xp}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

4. 已知 $\Psi(ec{r},t)$ 为电子波函数(四分量旋量),并满足自由的狄拉克方程

$$igg[i\hbarrac{\partial}{\partial t}-cec{lpha}\cdot(-i\hbarec{
abla})-eta mc^2igg]\Psi(ec{r},t)=0$$

其中c为真空中光速,证明如下连续性方程:

$$rac{\partial
ho}{\partial t} + ec{
abla} \cdot ec{j} = 0$$

其中 $ho = \Psi^\dagger \Psi$ 和 $\vec{j} = \Psi^\dagger c \vec{\alpha} \Psi$,并简要说明其物理含义。

5. 电量为e的带点粒子在电磁场(没有量子化的外场)中运动,其波函数 $\Psi(ec{r},t)$ 满足如下狄拉克方程:

$$i\hbarrac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi=\left[cec{lpha}\cdot\left(-i\hbarec{
abla}-rac{e}{c}ec{A}
ight)+eta mc^2+e\phi
ight]\Psi$$

将四分量旋量 Ψ 分解成两个二分量旋量组合: $\Psi=egin{bmatrix}\Psi_a\\\Psi_b\end{bmatrix}$, 在泡利—狄拉克表象下,哈密顿量 \hat{H} 为

$$\hat{H} = egin{bmatrix} mc^2 + e\phi & cec{\sigma}\cdot\left(-i\hbarec{
abla} - rac{e}{c}ec{A}
ight) \ cec{\sigma}\cdot\left(-i\hbarec{
abla} - rac{e}{c}ec{A}
ight) \end{bmatrix}$$

考虑非相对论极限,简要说明 Ψ_a 相对于 Ψ_b 为大量,并推导非相对论极限下的哈密顿量 $\hat{H}_{
m NR}$:

$$\hat{H}_{ ext{NR}} = rac{1}{2m} \Bigl(-i \hbar ec{
abla} - rac{e}{c} ec{A} \Bigr)^2 + e \phi - ec{\mu_s} \cdot ec{H}$$

其中 $ec{\mu}_s=rac{e\hbar}{2mc}ec{\sigma}$ 为自旋磁矩, $ec{H}=ec{
abla} imesec{A}$ 为磁场强度.