第四章 对称性理论

§19 空间对称性和守恒定律

§19-1 概述

一、研究内容

研究时空变换和相关的算符
研究变换下的对称性和相应的守恒定律

二、对称性和守恒定律

空间平移对称性与动量守恒
空间转动对称性与角动量守恒
时间平移对称性与能量守恒
空间反演对称与宇称守恒
量子力学相移对称与电荷守恒……

§19-2 空间对称变换

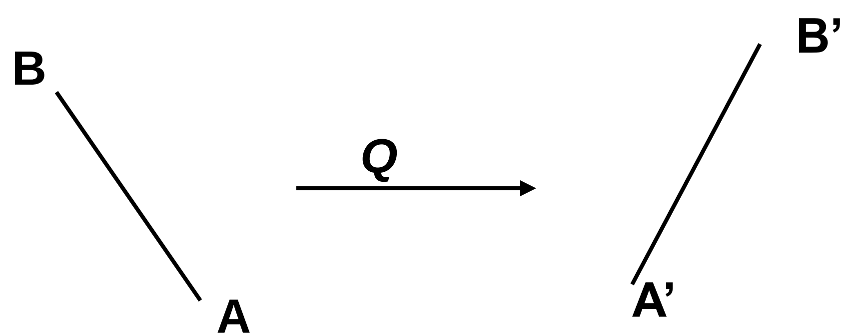
一、位置变换

设变换 Q是三维位形空间的算符，它将点 $\mathbf{r}$ 变为另一点 $\mathbf{r}'$

$$\mathbf{r}' = Q\mathbf{r} \qquad (19.1)$$

对每一个$\mathbf{r}$,$\mathbf{r}'$都有确定值。

变换 Q 是不改变任何两点距离的那些变换：



对称变换群：对某些物理系统，若位置变换的一个集合 $\{Q_i\}(i=1,2,3,\cdots)$是此系统的对称变换，即保持这个系统不变的变换，则这个集合必构成一个群，称为这个系统的对称变换群。

满足群的四个条件：

1．单位元存在： $1\cdot\vec{r}=\vec{r}$ $Q=1$

2．结合律成立： $Q_1(Q_2Q_3)=(Q_1Q_2)Q_3$

3．封闭性： $Q=Q_1Q_2$

4．逆元存在： $\vec{r}'=Q\vec{r}\Rightarrow\vec{r}=Q'\vec{r}'$， $Q'=Q^{-1}$

二、态函数的变换

态函数 $\psi(\mathbf{r})=\langle\mathbf{r}|\psi\rangle$用算符 Q 作一个整体的变换。

整体变换：新函数在新点处的值等于老函数在老点上的值，即

$$\psi'(r')=\psi(r) \qquad \psi'(Q\mathbf{r})=\psi(\mathbf{r}) \qquad \psi'(\mathbf{r})=\psi(Q^{-1}\mathbf{r}) \qquad (19.3)$$

新老函数的关系用一个函数空间的变换算符 $\hat{D}(Q)$ 表示：

$$\psi'(\mathbf{r})=\hat{D}(Q)\psi(\mathbf{r})=\psi(Q^{-1}\mathbf{r}) \qquad (19.4)$$

变换不影响其归一化，$\hat{D}(Q)$是幺正算符：

$$\hat{D}^{+}(Q)\hat{D}(Q)=\hat{D}(Q)\hat{D}^{+}(Q)=1$$

考虑连续两次变换：（Q 只对 **r** 作用）

$$\hat{D}(Q_1)\hat{D}(Q_2)\psi(\mathbf{r}) = \hat{D}(Q_1)\psi(Q_2^{-1}\mathbf{r}) = \psi[Q_2^{-1}(Q_1^{-1}\mathbf{r})]$$

$$= \psi[(Q_2^{-1}Q_1^{-1})\mathbf{r}] = \psi[(Q_1Q_2)^{-1}\mathbf{r}] = \hat{D}(Q_1Q_2)\psi(\mathbf{r})$$

得 $$\hat{D}(Q_1)\hat{D}Q_2) = \hat{D}(Q_1Q_2) \qquad \textbf{(19.5)}$$

$\{\hat{D}(Q)\}$ 构成一个群。

▲群 $\{\hat{D}(Q)\}$ 与群 $\{Q\}$ 是什么关系呢？

由于 $$\hat{D}(Q)\hat{D}(Q^{-1}) = \hat{D}(QQ^{-1}) = \hat{D}(1) = 1$$

所以 $$\hat{D}^{-1}(Q) = \hat{D}(Q^{-1}) \qquad \textbf{(19.6)}$$

同态，即 $Q \to \hat{D}(Q)$

三、态矢量的变换

在**Hilbert**空间中，状态 $|\psi\rangle$ 经过变换 Q 之后成为新态 $|\psi'\rangle$，则可定出一个幺正变换算符 $D(Q)$：

$$\left|\psi'\right\rangle = D(Q)\left|\psi\right\rangle \qquad \textbf{（19.7）}$$

由于 $\psi(\mathbf{r}) = \left\langle \mathbf{r} \middle| \psi \right\rangle \quad \psi'(\mathbf{r}) = \left\langle \mathbf{r} \middle| \psi' \right\rangle \quad \psi'(\mathbf{r}) = \hat{D}(Q)\psi(\mathbf{r}) = \psi(Q^{-1}\mathbf{r})$

可得

$$\psi'(\mathbf{r}) = \left\langle \mathbf{r} \middle| \psi' \right\rangle = \hat{D}(Q)\left\langle \mathbf{r} \middle| \psi \right\rangle = \left\langle Q^{-1}\mathbf{r} \middle| \psi \right\rangle$$

即

$$\left\langle \mathbf{r} \right| D(Q) \left| \psi \right\rangle = \hat{D}(Q)\left\langle \mathbf{r} \middle| \psi \right\rangle = \left\langle Q^{-1}\mathbf{r} \middle| \psi \right\rangle$$

所以

$$\left\langle \mathbf{r} \right| D(Q) = \left\langle Q^{-1}\mathbf{r} \right| \qquad \textbf{（19.8）}$$

$$\left\langle \mathbf{r} \right| D(Q) = \hat{D}(Q)\left\langle \mathbf{r} \right| \qquad \textbf{（19.9）}$$

(19.8)：Hilbert空间中*D*(*Q*)的定义式。

(19.9)：$D(Q)$与 $\hat{D}(Q)$ 的形式关系。

右矢形式： $D^{+}(Q)\left|\mathbf{r}\right\rangle = D^{-1}(Q)\left|\mathbf{r}\right\rangle = \left|Q^{-1}\mathbf{r}\right\rangle$

两边乘 $D(Q)$, 有 $\left|\mathbf{r}\right\rangle = D(Q)\left|Q^{-1}\mathbf{r}\right\rangle$

令 $\mathbf{r} \to Q\mathbf{r}$ ， 得 $\left|Q\mathbf{r}\right\rangle = D(Q)\left|\mathbf{r}\right\rangle$

即 $D(Q)\left|\mathbf{r}\right\rangle = \left|Q\mathbf{r}\right\rangle$

四、算符的变换

设对称变换前， $|\varphi\rangle = A|\psi\rangle$

现在分别对 $|\varphi\rangle$，$|\psi\rangle$ 作对称变换*Q*，即

$$|\varphi'\rangle = D(Q)|\varphi\rangle, \qquad |\psi'\rangle = D(Q)|\psi\rangle$$

$$|\varphi'\rangle = A'|\psi'\rangle$$

则 $$A' = D(Q)AD^{-1}(Q)$$

对位置算符**R**，其本征值方程为 $\mathbf{R}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$

用***D*(*Q*)**作用，得 $D(Q)\mathbf{R}D^{-1}(Q)D(Q)|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}D(Q)|\mathbf{r}\rangle$

所以 $\mathbf{R}'|Q\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|Q\mathbf{r}\rangle$ （**19.13**）

用Q^{-1}作用在等式 $\mathbf{R}|Q\mathbf{r}\rangle = Q\mathbf{r}|Q\mathbf{r}\rangle$

（本征值为***Q*r**的**R**的本征方程）

有 $Q^{-1}\mathbf{R}|Q\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|Q\mathbf{r}\rangle$ （**19.14**）

因为$|Q\mathbf{r}\rangle$为任意矢量，所以比较（**19.13**）和（**19.14**），

得 $\mathbf{R}' = Q^{-1}\mathbf{R} = D(Q)\mathbf{R}D^{-1}(Q)$

$$\mathbf{R}' = Q^{-1}\mathbf{R} = D(Q)\mathbf{R}D^{-1}(Q)$$

R 的双重身份： $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} R_i \mathbf{e}_i$

- ➢**Hilbert空间中的算符，**$D(Q)$ **只对** R_i **作用**
- ➢**位形空间中的矢量，**Q^{-1} **只对** $\mathbf{e_i}$ **作用。**

§ 19-3 空间反演

一、空间反演算符

空间反演变换 P 的定义是： $P\mathbf{r} = -\mathbf{r}$

空间反演算符 P 是： $D(P)|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$

通常： $D(P) \to P$ ， $P|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$

空间反演群 $\{1, P\}$： $PP = 1$, $P^{-1} = P$ ， $1P = P1 = P$

函数空间的空间反演算符 $\hat{P}$：

根据19. 4式： $\hat{D}(Q)\psi(\mathbf{r}) = \psi(Q^{-1}\mathbf{r})$ 和 $P^{-1} = P$

$$\hat{P}\psi(r) = \psi(-r),\quad \hat{P}^2 = 1$$

因为 $\hat{P}^2=1$，所以 $\hat{P}$ 的本征值为 ± 1：

$$\hat{P}\psi(r)=\psi(-r)=\begin{cases}\psi(r) & \\ -\psi(r) & \\ \text{其他情况} & \end{cases}$$

偶宇称
奇宇称
无确切宇称

空间反演算符既是幺正算符 $P^{+}=P^{-1}$

又是厄米算符 $P^{+}=P$

$$P^{+}=P^{-1}=P$$

与 $P|\mathbf{r}\rangle=|-\mathbf{r}\rangle$ 相应的左矢形式为：

$$\langle r|P^{+}=\langle r|P=\langle -r|=\hat{P}\langle r|$$

二、算符在空间反演下的变换

1．位置算符R

在Hilbert空间中：

$$P\mathbf{R}P\left|\mathbf{r}\right\rangle = P\mathbf{R}\left|-\mathbf{r}\right\rangle = P(-\mathbf{r})\left|-\mathbf{r}\right\rangle = (-\mathbf{r})P\left|-\mathbf{r}\right\rangle = -\mathbf{r}\left|\mathbf{r}\right\rangle = -\mathbf{R}\left|\mathbf{r}\right\rangle$$

所以 $$P\mathbf{R}P = -\mathbf{R} \qquad (19.23)$$

在函数空间中：

$$\hat{P}\hat{\mathbf{R}}\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \hat{P}\hat{\mathbf{R}}\psi(-\mathbf{r}) = \hat{P}[\mathbf{r}\psi(-\mathbf{r})] = (-\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = -\hat{R}\psi(\mathbf{r})$$

所以 $$\hat{P}\hat{\mathbf{R}}\hat{P} = -\hat{\mathbf{R}} \qquad (19.24)$$

2．动量算符P

由于 $$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}} = \langle -\mathbf{r}|-\mathbf{p}\rangle$$

则 $$P|\mathbf{p}\rangle = P\sum|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \sum|-\mathbf{r}\rangle\langle -\mathbf{r}|-\mathbf{p}\rangle = |-\mathbf{p}\rangle$$

（19.25）

所以

$$P\mathbf{P}P|\mathbf{p}\rangle = P\mathbf{P}|-\mathbf{p}\rangle = P(-\mathbf{p})|-\mathbf{p}\rangle = -\mathbf{p}P|-\mathbf{p}\rangle = -\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = -\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle$$

$$P\mathbf{P}P = -\mathbf{P}$$ （19.26）

3．轨道角动量算符L

$$P\mathbf{L}P=(P\mathbf{R}P)\times(P\mathbf{P}P)=(-\mathbf{R})\times(-\mathbf{P})=\mathbf{L}$$

$$P\mathbf{L}P=\mathbf{L}$$

所以： $$P\mathbf{L}PP=P\mathbf{L}=\mathbf{L}P \quad (19.27)$$

即P与L对易

共同的本征函数是球谐函数

矢量算符：在空间反演下改变符号，如**R,P**

轴矢量（赝矢量）算符：

在空间反演下不变，如角动量算符**L**

并规定自旋算符是轴矢量算符。

真标量：在空间反演下**不**改变符号

赝标量：在空间反演下改变符号

§ 19-4 空间平移

一、平移群

无限小空间平移变换 $Q(d\boldsymbol{\lambda})$

$$\mathbf{r}' = Q(d\boldsymbol{\lambda})\mathbf{r} = \mathbf{r} + d\boldsymbol{\lambda} \qquad \textbf{(19.28)}$$

$Q(\boldsymbol{\lambda})$ 不是线性算符， $Q(\boldsymbol{\lambda})2\mathbf{r} \neq 2Q(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{r}$

在位置表象中，将 $\hat{D}(d\boldsymbol{\lambda})$ 作用于态函数 $\psi(\mathbf{r})$ 上，

得
$$\psi'(\mathbf{r}) = \hat{D}(d\boldsymbol{\lambda})\psi(\mathbf{r}) = \psi[Q^{-1}(d\boldsymbol{\lambda})\mathbf{r}] = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda})$$

$$= \psi(\mathbf{r}) - d\lambda \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) = (1 - \frac{i}{\hbar} d\boldsymbol{\lambda} \cdot \hat{\mathbf{P}})\psi(\mathbf{r})$$

即
$$\hat{D}(d\boldsymbol{\lambda}) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\boldsymbol{\lambda} \cdot \hat{\mathbf{P}}$$

对于有限的平移，有

$$\hat{D}(\boldsymbol{\lambda}) = \hat{D}(d\boldsymbol{\lambda}) \cdot \hat{D}(d\boldsymbol{\lambda}) \cdot \hat{D}(d\boldsymbol{\lambda}) \cdots \hat{D}(d\boldsymbol{\lambda})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{n}\cdot\hat{\mathbf{P}})^n = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\lambda}\cdot\hat{\mathbf{P}}} \qquad \textbf{（19.30）}$$

$\hat{D}(\boldsymbol{\lambda})$是线性算符，$\left\{\hat{D}(\boldsymbol{\lambda})\right\}$与 $\left\{Q(\boldsymbol{\lambda})\right\}$同构。

二、态矢量的平移算符

在Hilbert空间中，有 $|\psi'\rangle = D(\boldsymbol{\lambda})|\psi\rangle$ （19.31）

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}} \tag{19.32}$$

由 $D(Q)|\mathbf{r}\rangle = |Q\mathbf{r}\rangle$ ，知

$$D(\boldsymbol{\lambda})|\mathbf{r}\rangle = |Q(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}+\boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{19.33}$$

所以态矢量的平移算符正是位置本征矢量的上升算符

$$Q^{+}(\boldsymbol{\lambda})$$

三、位置算符和动量算符的平移变换

对位置算符**R**：由（**19.15**）式

$$\mathbf{R}' = Q^{-1}\mathbf{R} = D(Q)\mathbf{R}D^{-1}(Q)$$

得 $$\mathbf{R}' = D(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{R}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = Q^{-1}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{R} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(19.34)}$$

对动量算符**P**，由 $D(\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}}$ 知 $[D(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{P}] = 0$

所以 $$\mathbf{P}' = D(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{P}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{P} \qquad \text{(19.35)}$$

即动量算符在平移变换下是不变的。

§19-5 空间转动

一、空间转动和转动群

绕**n**轴转$d\varphi$角的无限小转动算符 $Q(\mathbf{n}d\varphi)$：

$$\mathbf{r}' = Q(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{r} = \mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + d\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r}$$

3D正当转动群：绕所有的轴转一切角度的正当转动算符的集合 $\{Q(\mathbf{n}\varphi)\}$构成的群。

二、函数空间和Hilbert空间中的转动算符

在位置表象中态函数 $\psi(\mathbf{r})$ 的转动变换是

$$\psi'(\mathbf{r}) = \hat{D}(\mathbf{n}d\varphi)\psi(\mathbf{r}) = \psi[Q^{-1}(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{r}]$$ （由**19.4**）

$$= \psi(\mathbf{r} - d\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - d\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r}\cdot\nabla\psi(\mathbf{r})$$ （略高阶项）

$$= (1 - \frac{i}{\hbar}d\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})\psi(\mathbf{r})$$

（应用 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ 和 $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$ ）

函数空间中： $\hat{D}(\mathbf{n}d\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar}d\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$

$$\hat{D}(\mathbf{n}\varphi) = \lim_{m\to\infty}(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\varphi}{m}\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})^m = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}}$$

Hilbert空间中：

$$D(\mathbf{n}d\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$$

$$D(\mathbf{n}\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}}$$

三、算符的变换

1.位置算符R

$$\mathbf{R}' = D(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{R}D^{-1}(\mathbf{n}d\varphi)$$

$$= (1 - \frac{i}{\hbar}d\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})\mathbf{R}(1 + \frac{i}{\hbar}d\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})$$

$$= \mathbf{R} - \frac{i}{\hbar}d\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})\mathbf{R} + \frac{i}{\hbar}d\varphi\mathbf{R}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}) + \frac{(d\varphi)^2}{\hbar^2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})^2\mathbf{R}$$

$$= \mathbf{R} - \frac{i}{\hbar}d\varphi[\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}, \mathbf{R}]$$

$$\because (d\varphi)^2 \to 0$$

$$= \mathbf{R} - \frac{i}{\hbar} d\varphi \sum_{ij} n_i [L_i, R_j] \mathbf{j}$$

$$= \mathbf{R} - \frac{i}{\hbar} d\varphi \sum_{ijk} i\hbar \varepsilon_{ijk} n_i R_k \mathbf{j}$$ ∵（6.19）式

$$= \mathbf{R} - d\varphi \mathbf{n} \times \mathbf{R} = Q^{-1}(\mathbf{n} d\varphi)\mathbf{R}$$ $\because \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_i B_j \mathbf{e_k}$

ε_{ijk} : **Levi-Civita symbol**

2.动量算符P和角动量算符L：

$$\mathbf{P}' = D(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{P}D^{-1}(\mathbf{n}d\varphi) = \mathbf{P} - d\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{P} = Q^{-1}(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{P}$$

$$\mathbf{L}' = D(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{L}D^{-1}(\mathbf{n}d\varphi) = \mathbf{L} - d\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{L} = Q^{-1}(\mathbf{n}d\varphi)\mathbf{L}$$

四、标量算符和矢量算符

1. 标量算符：在转动下不变得单分量算符，满足

$$D(\mathbf{n}\varphi)SD^{-1}(\mathbf{n}\varphi) = S \quad \text{或} \quad [S, D(\mathbf{n}d\varphi)] = 0$$

2. 矢量算符：在**3D**位形空间转动下，函数空间或**Hilbert**空间中与位置算符有同样变换特性的三分量算符，满足

$$D(\mathbf{n}\varphi)\mathbf{V}D^{-1}(\mathbf{n}\varphi) = Q^{-1}(\mathbf{n}\varphi)\mathbf{V}$$

标量和矢量算符按空间反演变换下的性质分别有“真”和“赝”或“真”和“轴”之分。

矢量算符的任意分量与轨道角动量算符的任意分量的对易关系：

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{L},\mathbf{m}\cdot\mathbf{V}]=i\hbar\mathbf{n}\times\mathbf{m}\cdot\mathbf{V}$$

五、自旋空间中的转动变换

自旋是一种角动量，**S**与**L**一样是轴矢量，即在空间反演下不改变符号；**S**与**L**三个分量的对易关系类似：

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k$$

自旋空间中与空间转动 $Q(\mathbf{n}d\varphi)$对应的

变换算符 $D'(\mathbf{n}d\varphi)$为：

$$D'(\mathbf{n}\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}}$$

在带有自旋粒子的态空间（直积空间）中：

空间平移算符为 $D(\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}}$，并只对位形Hilbert空间有作用；

空间反演算符为 $P|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$，对自旋算符的作用为

$$PSP = \mathbf{S}$$

空间转动算符为 $D(\mathbf{n}\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$

§19-6 空间变换对称性和守恒定律

一、系统在空间变换下的对称性

系统在某一空间对称变换下具有不变性或对称性，不是指系统在变换后状态不变，而是指系统在变换前后运动规律不变。

设系统的运动满足Schrödinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle$$

施以一个空间变换 $\mathbf{r} \to Q(\lambda)\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

在空间变换下，Schrödinger方程变为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}D(Q)|\psi(t)\rangle = D(Q)HD^{-1}(Q)D(Q)|\psi(t)\rangle$$

如果系统在这一变换下具有不变性或对称性，则要求：

$$D(Q)HD^{-1}(Q) = H$$

即 $$[D(Q), H] = 0$$

二、守恒量

1．平移对称性与动量守恒：

空间平移算符： $D(\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}}$

如果 $[H, D(\lambda)] = 0$

有 $[H, \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}] = 0$

则此系统具有 $\boldsymbol{\lambda}$ 方向上的平移对称性，$\boldsymbol{\lambda}$ 方向的动量分量是守恒量。

如果 $[H, \mathbf{P}] = 0$，则所有方向上的动量守恒。

2．转动对称性与角动量守恒：

空间转动算符 $D(\mathbf{n}\varphi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$

如果 $[H,\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}]=0$ 则角动量在 $\mathbf{n}$ 方向上的分量守恒。

如果 $[H,\mathbf{J}]=0$ 则角动量 $\mathbf{J}$ 是一个守恒量。

3．空间反演对称性与宇称守恒：

如果 $[H,P]=0$ 则宇称守恒。

三、其他空间变换对称性

晶体点群对称性：离散的对称性，没有守恒量相对应。