§31 产生算符和消灭算符

§31-1 定义

讨论B表象，以单粒子算符B的本征矢量{|b>}为基础。

一、产生算符$a^+(b)$

首先定义一个什么粒子都没有的状态|0>（真空态），从而确定了一个n=0的一维空间R_0。定义一个算符$a^+(b)$，用它来得出n=1,2,3,…等系统的B表象的基矢：

$$a^{+}(b)|0\rangle = |1;b\rangle$$

$$a^{+}(b)|1;b^{\alpha}\rangle = \sqrt{2}|2;bb^{\alpha}\rangle$$

$$a^{+}(b)|2;b^{\alpha}b^{\beta}\rangle = \sqrt{3}|3;bb^{\alpha}b^{\beta}\rangle$$

$$\cdots\cdots$$

$$a^{+}(b)|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle = \sqrt{n+1}|n+1;bb^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

称$\boldsymbol{a^{+}(b)}$为产生算符。它的意义是：$\boldsymbol{a^{+}(b)}$作用在一个$\boldsymbol{n}$粒子$\boldsymbol{B}$值确定的状态上，所得状态是在原状态中增加一个$\boldsymbol{B}$值为$\boldsymbol{b}$的粒子。

注意：对于Bose子和Fermi子，$a^+(b)$算符是不同的。

对于Bose子，b与已有的 $b^\alpha, b^\beta \cdots$之一可以相同；但对Fermi子，若b与已有的 $b^\alpha, b^\beta \cdots$之一相同，则$a^+(b)$对态作用的结果为零。

粒子数n任意的系统的基矢统一用真空态|0>和适当的产生算符表示出来：

$$|0\rangle \qquad \text{在}R_0\text{空间}$$

$$|1;b^{\alpha}\rangle = a^{+}(b^{\alpha})|0\rangle \qquad \text{在}R_1\text{空间}$$

$$|2;b^{\alpha}b^{\beta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}a^{+}(b^{\alpha})a^{+}(b^{\beta})|0\rangle \qquad \text{在}R_2\text{空间}$$

……

$$|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+}(b^{\alpha})a^{+}(b^{\beta})\cdots a^{+}(b^{\nu})|0\rangle \qquad \text{在}R_n\text{空间}$$

产生算符作用的次序对于Bose子没有关系，对Fermi子则不然。由于新产生的粒子规定要写在基矢的最左端，所以

$$a^+(b^\alpha)a^+(b^\beta)\left|n;b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle=\sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2;b^\alpha b^\beta b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle$$

$$\begin{aligned}a^+(b^\beta)a^+(b^\alpha)\left|n;b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle&=\sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2;b^\beta b^\alpha b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle\\&=\varepsilon\sqrt{(n+1)(n+2)}\left|n+2;b^\alpha b^\beta b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle\\&=\varepsilon a^+(b^\alpha)a^+(b^\beta)\left|n;b^\gamma\cdots b^\nu\right\rangle\end{aligned}$$

对易关系: $\boxed{a^+(b)a^+(b')-\varepsilon a^+(b')a^+(b)=0}$

二、消灭算符*a*(*b*)

作为$a^+(b)$的伴算符，$a(b)$是对左矢的产生算符：

$$\langle 0|a(b) = \langle 1;b|$$

$$\langle 1;b^\alpha|a(b) = \sqrt{2}\langle 2;bb^\alpha|$$

$$\langle 2;b^\alpha b^\beta|a(b) = \sqrt{3}\langle 3;bb^\alpha b^\beta|$$

……

$$\langle n;b^\alpha b^\beta \cdots b^\nu|a(b) = \sqrt{n+1}\langle n+1;bb^\alpha b^\beta \cdots b^\nu|$$

对易关系 $$\boxed{a(b)a(b') - \varepsilon a(b')a(b) = 0}$$

也可以写出 $$\langle 1;b^{\alpha}\big| = \langle 0\big|a(b^{\alpha})$$

$$\langle 2;b^{\alpha}b^{\beta}\,| = \frac{1}{\sqrt{2!}}\langle 0|a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

……

$$\langle n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\Big| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0\big|a(b^{\nu})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

将***a*(*b*)**作用在右矢上,

$$\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu}\Big|a\big(b\big) = \sqrt{n}\langle n;bb^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}\Big|$$

与任一个右矢 $|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$ 作内积，则由30.9式有

$$\underline{\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|}\,\underline{a(b)|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle}$$

$$=\sqrt{n}\langle n;bb^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n;b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\Big(\langle b|b^{\alpha}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon\langle b|b^{\beta}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n-1;b^{\alpha}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon^{2}\langle b|b^{\gamma}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\varepsilon^{n-1}\langle b|b^{\nu}\rangle\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}\rangle\Big)$$

$$=\underline{\langle n-1;b^{\beta'}b^{\gamma'}\cdots b^{\nu'}|}\Big\{\frac{1}{\sqrt{n}}[\delta(b-b^{\alpha})|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon\delta(b-b^{\beta})|n-1;b^{\alpha}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle+\varepsilon^{2}\delta(b-b^{\gamma})|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$+\cdots+\varepsilon^{n-1}\delta(b-b^{\nu})|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}\rangle]\Big\}$$

上式对一切左矢成立，于是

$$
\begin{aligned}
a(b)\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[&\delta\left(b-b^{\alpha}\right)\left|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\right\rangle\\
&+\varepsilon\delta\left(b-b^{\beta}\right)\left|n-1;b^{\alpha}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\right\rangle\\
&+\varepsilon^{2}\delta\left(b-b^{\gamma}\right)\left|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle+\cdots\\
&+\varepsilon^{n-1}\delta\left(b-b^{\nu}\right)\left|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}\right\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

可见：

1）***a*(*b*)**把***n***粒子基矢变成**(*n*-1)**粒子基矢，因此***a*(*b*)**是消灭算符；

2）若在 $|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$ 态中有一个粒子处在***b***态，则算符***a*(*b*)**的作用正是去掉这个粒子得出其余**(*n*-1)**个粒子的态，如没有粒子处于***b***态，则***a*(*b*)**对此态的作用结果为零；

3）若在$|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$中有两个以上的粒子处于***b***态

(Bose子系统**)**，则***a*****(*****b*****)**的作用是将处于***b***态的粒子对称地（处于***b***态的粒子地位相同，都要去掉）去掉一个，仍得出**(*****n*****-1)**粒子的态。

4）可以得到对易关系

$$a(b)a^{+}(b')-\varepsilon a^{+}(b')a(b)=\delta(b-b')$$

§31-2 占有数密度算符和总粒子数算符

由产生算符和消灭算符可以造出两个算符：

$$N(b)=a^{+}(b)a(b),\qquad N=\int db N(b)$$

这两个算符对任意一基矢的作用是

$$
\begin{aligned}
& N(b)\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle \\
& =a^{+}(b)a(b)\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle \\
& =a^{+}(b)\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\delta(b-b^{\alpha})\left|n-1;b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\right\rangle+\varepsilon\delta(b-b^{\beta})\left|n-1;b^{\alpha}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\right\rangle+\cdots\right. \\
& \quad \left.+\varepsilon^{n-1}\delta(b-b^{\nu})\left|n-1;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}\right\rangle\right]
\end{aligned}
$$

$$= \delta(b-b^{\alpha})|n;bb^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle + \varepsilon\delta(b-b^{\beta})|n;bb^{\alpha}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle + \cdots$$

$$+ \varepsilon^{n-1}\delta(b-b^{\nu})|n;bb^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}\rangle$$

$$= \delta(b-b^{\alpha})|n;bb^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle + \delta(b-b^{\beta})|n;b^{\alpha}bb^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle + \cdots$$

$$+ \delta(b-b^{\nu})|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\mu}b\rangle$$

$$= [\sum_{\alpha}^{\nu}\delta(b-b^{\alpha})]|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

而 $$N|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle = \int dbN(b)\,|\,n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$= \left\{\int db\left[\sum_{\alpha}^{\nu}\delta(b-b^{\alpha})\right]\right\}|\,n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$= n|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle \quad (\text{共有}n\text{项求和})$$

最后一步利用了 $\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$

$$\boxed{N\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle = n\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle}$$

可见：

1）每一个n粒子基矢都是N的本征矢量，即对称化的n粒子空间R_n是N的本征子空间，本征值是系统的总粒子数n；

2）每一个基矢也是$N(b)$的本征矢量，其本征值要看基矢中的$b^{\alpha}b^{\beta}\ldots b^{\nu}\ldots$等不等于$b$，若没有等于$b$的，本征值为零，若有$l$个等于$b$的，则本征值是$l$个$\delta$函数之和。

N是总粒子数算符，$N(b)$是占有数密度算符。

对易关系

$$\boxed{\begin{aligned}&[N(b),a^{+}(b')]=a^{+}(b)\delta(b-b')\\&[N(b),a(b')]=-a(b)\delta(b-b')\end{aligned}}$$

将此二式积分，可得*N*与它们的对易关系

$$\boxed{\begin{aligned}&[N,a^{+}(b)]=a^{+}(b)\\&[N,a(b)]=-a(b)\end{aligned}}$$

以上四个对易关系对**Bose**子和**Fermi**子都一样。

§31-3　位置表象和表象变换

一、位置表象

如果取单粒子力学量$\boldsymbol{B}$为粒子的坐标$\boldsymbol{X}$（3D运动时包括X_1,X_2,X_3三个算符，它们是一组算符完备组），就可得到对称化的位置表象。这一表象中的对称化基矢为$|n;x^\alpha x^\beta\ldots x^\nu>$，它们满足正交归一化条件和完备性条件：

$$\left\langle n;x^{\alpha'}x^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\middle|n;x^{\alpha}x^{\beta}\cdots x^{\nu}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_P \varepsilon^p P\delta(x^{\alpha'}-x^{\alpha})\delta(x^{\beta'}-x^{\beta})\cdots\delta(x^{\nu'}-x^{\nu})$$

$$\iint\cdots\int dx^\alpha dx^\beta\cdots dx^\nu\left|n;x^\alpha x^\beta\cdots x^\nu\right\rangle\left\langle n;x^\alpha x^\beta\cdots x^\nu\right|=1$$

由于历史的原因，习惯上用

$\psi^{+}(x)$ 表示产生算符

$\psi(x)$ 表示消灭算符

位置表象是连续表象，产生和消灭算符的作用是

$$\psi^{+}(x)\left|n; x^{\alpha} x^{\beta} \cdots x^{\nu}\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1; x x^{\alpha} x^{\beta} \cdots x^{\nu}\right\rangle$$

$$\psi(x) \mid n; x^{\alpha} x^{\beta} \cdots x^{\nu}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\{\delta(x-x^{\alpha}) \mid n-1; x^{\beta} x^{\gamma} \cdots x^{\nu}\rangle$$

$$+\varepsilon \delta(x-x^{\beta})\left|n-1; x^{\alpha} x^{\gamma} \cdots x^{\nu}\right\rangle + \cdots + \varepsilon^{n-1} \delta(x-x^{\nu})\left|n-1; x^{\alpha} x^{\beta} \cdots x^{\mu}\right\rangle$$

对称化基矢可以写成由产生算符表示的形式：

$$\left|n; x^{\alpha} x^{\beta} \cdots x^{\nu}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \boldsymbol{\psi}^{+}(x^{\alpha}) \boldsymbol{\psi}^{+}(x^{\beta}) \cdots \boldsymbol{\psi}^{+}(x^{\nu}) \left|0\right\rangle$$

产生算符和消灭算符的对易关系是

$$\boldsymbol{\psi}^{+}(x)\boldsymbol{\psi}^{+}(x') - \varepsilon \boldsymbol{\psi}^{+}(x')\boldsymbol{\psi}^{+}(x) = 0$$

$$\boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\psi}(x') - \varepsilon \boldsymbol{\psi}(x')\boldsymbol{\psi}(x) = 0$$

$$\boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\psi}^{+}(x') - \varepsilon \boldsymbol{\psi}^{+}(x')\boldsymbol{\psi}(x) = \delta(x' - x)$$

占有数密度算符与总粒子数算符是

$$N(x) = \boldsymbol{\psi}^{+}(x)\boldsymbol{\psi}(x), \quad N = \int dx N(x)$$

二、表象变换

讨论B表象和X表象之间的变换问题。

设X表象是已知的，现用X表象中的量去表示B表象中的量。B表象的对称化基矢是（应用完全性关系）

$$
\begin{aligned}
&\left|n; b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu}\right\rangle \\
&=\iint \cdots \int dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \cdots dx^{\nu'} \left|n; x^{\alpha'} x^{\beta'} \cdots x^{\nu'}\right\rangle \left\langle n; x^{\alpha'} x^{\beta'} \cdots x^{\nu'} \middle| n; b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu}\right\rangle
\end{aligned}
$$

式中的

$$\langle n; x^{\alpha'} x^{\beta'} \cdots x^{\nu'} \big| n; b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{P} \varepsilon^{p} P \langle x^{\alpha'} \big| b^{\alpha} \rangle \langle x^{\beta'} \big| b^{\beta} \rangle \cdots \langle x^{\nu'} \big| b^{\nu} \rangle$$

是由***X***表象变到***B***表象的变换矩阵。

用***X***表象产生和消灭算符去表示***B***表象中的产生和消灭算符：

$$a^{+}(b) \big| n; b^{\alpha} b^{\alpha} \cdots b^{\nu} \rangle = \sqrt{n+1} \big| n+1; b b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu} \rangle$$

$$= \sqrt{n+1} \iiint \cdots \int dx dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \cdots dx^{\nu'} \big| n+1; x x^{\alpha'} x^{\beta'} \cdots x^{\nu'} \rangle$$

$$\times \langle n+1; x x^{\alpha'} x^{\beta'} \cdots x^{\nu'} \big| n+1; b b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu} \rangle$$

利用内积定理

$$a^+(b)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle=\frac{1}{n+1}\iiint\cdots\int dxdx^{\alpha'}dx^{\beta'}\cdots dx^{\nu'}\Psi^+(x)\left|n;x^{\alpha'}x^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\right\rangle$$

$$\times\{\langle x|b\rangle\left\langle n;x^{\alpha'}x^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\middle|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle+\varepsilon\langle x^{\alpha'}|b\rangle\left\langle n;xx^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\middle|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle$$

$$+\cdots+\varepsilon^n\langle x^{\nu'}|b\rangle\left\langle n;xx^{\alpha'}\cdots x^{\mu'}\middle|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle\}$$

由于下式显然满足下列关系

$$\Psi^+(x)\left|n;x^{\alpha'}x^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\right\rangle=\varepsilon\Psi^+(x^{\alpha'})\left|n;xx^{\beta'}\cdots x^{\nu'}\right\rangle$$

$$=\varepsilon^2\Psi^+(x^{\beta'})\left|n;xx^{\alpha'}x^{\gamma'}\cdots x^{\nu'}\right\rangle=\cdots$$

故上式右边各项分别出现一个R_n空间的完全性关系，将这些完全性关系去掉，各项就剩下一重积分了，于是有

$$a^+(b)\left|n;b^\alpha b^\alpha\cdots b^\nu\right\rangle=\frac{1}{n+1}\{\int dx\langle x|b\rangle\Psi^+(x)+\int dx^{\alpha'}\left\langle x^{\alpha'}\right|b\rangle\Psi^+(x^{\alpha'})+\cdots$$

$$+\int dx^{\nu'}\left\langle x^{\nu'}\right|b\rangle\Psi^+(x^{\nu'})\}\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle$$

上式右边的**(*n*+1)**项积分是完全相同的，故得

$$a^+(b)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle=\int dx\langle x|b\rangle\Psi^+(x)\left|n;b^\alpha b^\beta\cdots b^\nu\right\rangle$$

$$\therefore\ a^+(b)=\int dx\langle x|b\rangle\Psi^+(x)$$

两边取伴算符，得

$$a(b)=\int dx\langle b|x\rangle\Psi(x)$$

这就是***X***表象和***B***表象之间产生算符和消灭算符的关系，式中只有***X***和***B***的单粒子本征矢量的内积，它是单粒子表象变换时的幺正矩阵元。

同样可以写出与上面相反的关系：

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi^{+}(x) &= \int db\langle b|x\rangle a^{+}(b)\\ \Psi(x) &= \int db\langle x|b\rangle a(b)\end{aligned}}$$

显然，若***B***为动量***P***，这时 $\langle x|p\rangle = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$

则有 $$\Psi^{+}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int dp e^{-\frac{i}{\hbar}px} a^{+}(p)$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}px} a(p)$$

这非常类似单粒子在***x***表象的态函数与***p***表象的态函数之间的关系—**Fourier**变换。

§ 31-4 算符的二次量子化

一、力学量G的普遍形式

系统的力学量G可以写成

$$G=\sum_{i=1}^{n} g_i^{(1)}+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} g_{ij}^{(2)}+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\(i\neq j\neq k)}}^{n} g_{ijk}^{(3)}+\cdots$$

$g_i^{(1)}$　单体力学量，如动能、在外场中的势能等

$g_{ij}^{(2)}$　双体力学量，如相互作用势能等

$g_{ijk}^{(3)}$　三体力学量，凝聚态物理和原子核物理

二、G的二次量子化形式

写成对称化的*b*表象的形式，用完全性关系

$$\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}\left|b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle\left\langle b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right|=1$$

作用到G的两边，利用上升算符的作用规律，得

$$G=\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}$$

$$\times\left|b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right\rangle\left\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right|G\left|b^{\alpha}\,b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle\left\langle b^{\alpha}\,b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right|$$

$$=\frac{1}{n!}\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}$$

$$\times a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})\cdots a^{+}(b^{\nu'})\left|0\right\rangle\left\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'}\right|G\left|b^{\alpha}\,b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle$$

$$\times\left\langle 0\right|a(b^{\nu})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

上式积分中的矩阵元

$$\left\langle b^{\alpha'} b^{\beta'} \cdots b^{\nu'} \middle| G \middle| b^{\alpha} \, b^{\beta} \cdots b^{\nu} \right\rangle$$

中，单体算符项为

$$\left\langle b^{\alpha'} b^{\beta'} \cdots b^{\nu'} \middle| \sum_i g_i^{(1)} \middle| b^{\alpha} b^{\beta} \cdots b^{\nu} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{P'} \sum_{P} \varepsilon^{p'+p} P' P \Big\{ {}_1\left\langle b^{\alpha'} \middle| g_1^{(1)} \middle| b^{\alpha} \right\rangle_1 {}_2\left\langle b^{\beta'} \middle| b^{\beta} \right\rangle_2 \cdots {}_n\left\langle b^{\nu'} \middle| b^{\nu} \right\rangle_n +$$

$$+ {}_1\left\langle b^{\alpha'} \middle| b^{\alpha} \right\rangle_1 {}_2\left\langle b^{\beta'} \middle| g_2^{(1)} \middle| b^{\beta} \right\rangle_2 \cdots {}_n\left\langle b^{\nu'} \middle| b^{\nu} \right\rangle_n + \cdots$$

$$+ {}_1\left\langle b^{\alpha'} \middle| b^{\alpha} \right\rangle_1 {}_2\left\langle b^{\beta'} \middle| b^{\beta} \right\rangle_2 \cdots {}_n\left\langle b^{\nu'} \middle| g_n^{(1)} \middle| b^{\nu} \right\rangle_n$$

双体项算符为

$$\frac{1}{2!}\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}\cdots b^{\nu'} \mid \sum_i\sum_j g_{ij}^{(2)} \mid b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{(n!)^2}\sum_{P'}\sum_{P}\varepsilon^{p'+p}P'P\Big\{{}_1\langle b^{\alpha'}|_2\langle b^{\beta'}|g_{12}^{(2)}|b^{\alpha}\rangle_1|b^{\beta}\rangle_2\,{}_3\langle b^{\gamma'}|b^{\gamma}\rangle_3\cdots{}_n\langle b^{\nu'}|b^{\nu}\rangle_n$$

$$+\cdots+{}_1\langle b^{\alpha'}|b^{\alpha}\rangle_1\,{}_2\langle b^{\beta'}|_3\langle b^{\gamma'}|g_{23}^{(2)}|b^{\beta}\rangle_2|b^{\gamma}\rangle_3\cdots{}_n\langle b^{\nu'}|b^{\nu}\rangle_n+\cdots\Big\}$$

首先，可以把 $\dfrac{1}{(n!)^2}\sum_{P'}\sum_{P}\varepsilon^{p'+p}P'P$ 完全消去。

然后，（**31.30**）式中的***n***项单体算符项在积分后也是完全相同的，同样（**31.31**）式中的***n*(*n*-1)/2**项积分后也是完全相同的，依次类推。

于是得

$$
\begin{aligned}
G=&\frac{1}{n!}\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})\cdots a^{+}(b^{\nu'})\left|0\right\rangle\\
&\times\Big\{n\langle b^{\alpha'}\,|\,g^{(1)}\,|\,b^{\alpha}\rangle\delta(b^{\beta'}-b^{\beta})\delta(b^{\gamma'}-b^{\gamma})\cdots\delta(b^{\nu'}-b^{\nu})\\
&+\frac{n(n-1)}{2!}(b^{\alpha'}b^{\beta'}\,|\,g^{(2)}\,|\,b^{\alpha}b^{\beta})\delta(b^{\gamma'}-b^{\gamma})\cdots\delta(b^{\nu'}-b^{\nu})\\
&+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}\,|\,g^{(3)}\,|\,b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})\cdots\delta(b^{\nu'}-b^{\nu})\\
&+\cdots\Big\}\left\langle 0\right|a(b^{\nu})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})
\end{aligned}
$$

在上式等号右边双体算符的积分中出现

$$(b^{\alpha'}b^{\beta'}\mid g^{(2)}\mid b^{\alpha}b^{\beta}) = {}_i\langle b^{\alpha'}|_j\langle b^{\beta'}\mid g_{ij}^{(2)}\mid b^{\alpha}\rangle_i b^{\beta}\rangle_j$$

即双体算符在***i***处于$\langle b^{\alpha'}|$态，***j***处于$\langle b^{\beta'}|$态及***i***的$|b^{\alpha}\rangle$态和***j***的$|b^{\beta}\rangle$之间的矩阵元。

不论***i***和***j***取什么值，这一矩阵元是相同的。

$|b^{\alpha}\rangle_i\,|b^{\beta}\rangle_j$ 未经过对称化处理

计算(31.33)式中的积分。先讨论单粒子项：首先可以进行(n-1)重积分，把δ函数积掉。然后通过上升算符的作用后，就会看到式中出现了一个(n-1)粒子系统基矢的完全性关系，去掉这个完全性关系（因为它等于1）就又带走了（n-1）重积分，最后只剩下两重积分，即单粒子项为

$$\frac{1}{n!}\iint\cdots\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\cdots db^{\nu'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})\cdots a^{+}(b^{\nu'})|0\rangle$$

$$\times n\langle b^{\alpha'}|g^{(1)}|b^{\alpha}\rangle\delta(b^{\beta'}-b^{\beta})\cdots\delta(b^{\nu'}-b^{\nu})\langle 0|a(b^{\nu})\cdots a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

$$=\frac{1}{n!}\int db^{\alpha'}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}a^{+}(b^{\alpha'})\sqrt{(n-1)!}\,|b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}\rangle$$

$$\times n\langle b^{\alpha'}|g^{(1)}|b^{\alpha}\rangle\sqrt{(n-1)!}\langle b^{\beta}b^{\gamma}\cdots b^{\nu}|a(b^{\alpha})$$

$$=\int\int db^{\alpha'}db^{\alpha}a^{+}(b^{\alpha'})\langle b^{\alpha'}|g^{(1)}|b^{\alpha}\rangle a(b^{\alpha})$$

其余各项也可类似处理，最后得算符*G*的表示式为

$$G=\int\int db^{\alpha'}db^{\alpha}a^{+}(b^{\alpha'})\langle b^{\alpha'}|g^{(1)}|b^{\alpha}\rangle a(b^{\alpha})$$

$$+\frac{1}{2!}\int\int db^{\alpha'}db^{\beta'}\int\int db^{\alpha}db^{\beta}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})(b^{\alpha'}b^{\beta'}|g^{(2)}|b^{\alpha}b^{\beta})a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

$$+\frac{1}{3!}\int\int db^{\alpha'}db^{\beta'}db^{\gamma'}\int\int\int db^{\alpha}db^{\beta}db^{\gamma}a^{+}(b^{\alpha'})a^{+}(b^{\beta'})a^{+}(b^{\gamma'})$$

$$\times(b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}|g^{(3)}|b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma})a(b^{\gamma})a(b^{\beta})a(b^{\alpha})+\cdots$$

这是算符*G*的二次量子化形式。

在对称化的位置表象中的形式：

$$H=\int dx\boldsymbol{\psi}^{+}(x)\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V(x)\right]\boldsymbol{\psi}(x)$$
$$+\frac{1}{2}\int\int dxdx'\boldsymbol{\psi}^{+}(x)\boldsymbol{\psi}^{+}(x')V(|x-x'|)\boldsymbol{\psi}(x')\boldsymbol{\psi}(x)$$

§31-5 巨Hilbert空间（Fock空间）

对于全同粒子系统，已经有了对称化的**Hilbert**空间R_n，其中n是粒子数，可以等于**0,1,2,…**。但是产生算符和消灭算符并不是上述任何一个空间的算符，它作用于一个空间中的矢量上，得出的是另一个空间中的矢量。产生算符作用到R_n中的一个矢量时，得出的是$(n+1)$粒子的状态，即R_{n+1}中的矢量。同样，消灭算符则得出一个R_{n-1}中的矢量。可见使用产生和消灭算符，就要同R_n以外的空间R_{n+1}和R_{n-1}，甚至R_{n+2}和R_{n-2}打交道。

现在取$\boldsymbol{R_0,R_1,R_2},\ldots$等所有粒子数不同的空间的直和，构成一个大空间$\boldsymbol{R_G}$，称为巨Hilbert空间或Fock空间

$$R_G = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 + \cdots + R_n \oplus \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus R_n$$

每一个$\boldsymbol{n}$粒子空间都是巨Hilbert空间的一个子空间，每个子空间都是总粒子数算符$\boldsymbol{N}$的本征子空间，本征值就是$\boldsymbol{n}$。这是简并度极高的本征子空间。

设 $|\Psi^0\rangle, |\Psi^1\rangle, \cdots |\Psi^n\rangle$分别是在各子空间 $R_0, R_1, \cdots R_n$

中的矢量，则巨**Hilbert**空间中一般的矢量可以表为

$$|\Psi\rangle\rangle = |\Psi^0\rangle c_0 \oplus |\Psi^1\rangle c_1 \oplus \cdots \oplus |\Psi^n\rangle c_n \oplus \cdots$$

粒子数不同的两个子空间$\boldsymbol{R_n}$和$\boldsymbol{R_{n'}}$中矢量是自动正交的，例如

$$\langle b^{\alpha'} b^{\beta'} b^{\gamma'} | b^{\alpha} b^{\beta} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \langle 0 | a(b^{\gamma'}) a(b^{\beta'}) a(b^{\alpha'}) | b^{\alpha} b^{\beta} \rangle$$

右矢中只有两个粒子，故作用后肯定等于零。一般说来，凡在真空左矢**<0|**和右矢**|0>**当中存在数目不同的产生算符和消灭算符的乘积，其结果必为零。

由于产生算符和消灭算符对各个子空间$\boldsymbol{R_n}$都适用，而多粒子系统的所有算符$\boldsymbol{G}$都可以表为这两种算符的组合形式而又不明显出现粒子数$\boldsymbol{n}$，所以所有的算符都是在整个巨**Hilbert**空间中通用的。

如果$\boldsymbol{n}$粒子系统在运动过程中粒子数不变，那么$\boldsymbol{R_n}$空间的基矢 $\{|n;b^\alpha b^\beta \cdots b^\nu\rangle\}$ 就是完全的，

完全性关系是

$$\iint\cdots\int db^\alpha db^\beta \cdots db^\nu |n;b^\alpha b^\beta \cdots b^\nu\rangle\langle n;b^\alpha b^\beta \cdots b^\nu| = 1$$

如果运动过程中粒子数可以发生变化，即矢量可以跑出$\boldsymbol{R}_{\mathbf{n}}$之外，则这个关系就不能用了。代替的是巨**Hilbert**空间的完全性关系！

$$\sum_{n=0}^{\infty}\iint\cdots\int db^{\alpha}db^{\beta}\cdots db^{\nu}\left|n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right\rangle\left\langle n;b^{\alpha}b^{\beta}\cdots b^{\nu}\right|=1$$