# 第五章　电磁波的辐射

## §.1 定域源的多极势展开

1. 基本推迟解

$$\varphi(\vec r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec r', t-\frac{R}{c})}{R}\,dV'$$

$$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r', t-\frac{R}{c})}{R}\,dV'$$

小推论：无源区 $\rho=0$, $\vec J=0$，且场可仅由 $A$ 决定。

对于时谐场、定域源

$$\vec\rho(\vec r', t) = \rho(\vec r')e^{-i\omega t}$$

$$\vec J(\vec r', t) = \vec J(\vec r')e^{-i\omega t}$$ ，则有势化为

$$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r')e^{-i\omega t}e^{ikR}}{R}\,dV'$$

$$= A(\vec r)e^{-i\omega t}$$ ，其中

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r')e^{ikR}}{R}\,dV'$$

从而 $\vec B = \nabla\times\vec A$ ， $\vec E = i\frac{c}{k}\nabla\times\vec B$

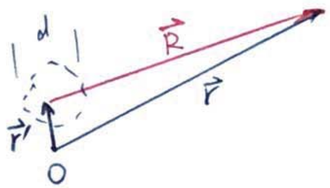
$\vec B(\vec r,t) = \vec B(\vec r)e^{-i\omega t}$ ， $\vec E(\vec r,t) = \vec E(\vec r)e^{-i\omega t}$

2. 势的多极展开

① 近场（静态）　$d \ll r \ll \lambda$

中场（感应区）　$d \ll \lambda \sim r$

远场（辐射区）　$d \ll \lambda \ll r$




$$R = r - \vec r'\cdot\hat e_r$$

① 近：$\lambda\to\infty$ ，$e^{ikR}\to 1$ ，此时

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r')}{R}\,dV'$$　静态解

~~② 远：~~ 展开 $\frac{1}{R}$ ，利用 球函数加法定理

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}\int r'^l J(\vec r')Y_{lm}(\theta',\phi')\,dV'$$

② 中：展开 $\frac{e^{ikR}}{R}$ ，利用 5.98 式

$$A(\vec r) = \mu_0 ik\sum_{l,m}h_l^{(1)}(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)\int \vec J(\vec r')j_l(kr')Y_{lm}^*(\theta',\phi')\,dV'$$

③ 远，分母 $R\approx r$ ，分子 $R\approx r-\vec r'\cdot\hat e_r$

$$A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec J(\vec r')e^{-ik\hat e_r\cdot\vec r'}\,dV'$$

但注意 $k\hat e_r \neq \vec k$

展 $e^{-ik\hat{e}_r\cdot\vec{r}'} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}(\hat{e}_r\cdot\vec{r}')^n$ ，则

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\int \vec{J}(\vec{r}')(\hat{e}_r\cdot\vec{r}')^n\, dV'$$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\int \vec{J}(\vec{r}')\,dV' - ik\int \vec{J}(\vec{r}')\,\hat{e}_r\cdot\vec{r}'\, dV' + \cdots\right]$$

其中第一项 $\int \vec{J}(\vec{r}')\,dV' = \frac{d\vec{p}}{dt}$

证： $\int \rho(\vec{r}')\,\vec{v}(\vec{r}')\,dV' = \int \rho(\vec{r}')\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\,dV'$

$$= \frac{d}{dt}\int \rho(\vec{r}')\,\vec{r}'(t)\,dV' = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\therefore A^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\dot{\vec{p}}$