§ 16 γ 矩阵

在建立狄拉克方程的过程中，出现了一个新的空间—自旋空间。这一节我们从五个 γ 算符的对易关系入手找出这个空间的维数，进一步求出这些算符的矩阵表示。

§ 16.1 γ 矩阵的维数

求自旋空间的维数，可借助于有限群的知识，这里只做简单的介绍。

以 γ 算符乘法为群乘，以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 为生成元，取它们的各种乘积为群元，由 γ_μ 满足下列关系

$$\gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma_3^2=\gamma_4^2=1 \qquad \gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=0 \quad (\mu\neq\nu)$$

群元肯定是有限个。按照群元的构成分，可写为

$$\pm 1 \quad (e.g., \ \gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3 = -1, \quad \gamma_1\gamma_1 = 1)$$

$$\pm\gamma_1, \pm\gamma_2, \pm\gamma_3, \pm\gamma_4$$

$$\pm\gamma_1\gamma_2, \pm\gamma_1\gamma_3, \pm\gamma_1\gamma_4, \pm\gamma_2\gamma_3, \pm\gamma_2\gamma_4, \pm\gamma_3\gamma_4$$

$$\pm\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \pm\gamma_3\gamma_4\gamma_1, \pm\gamma_4\gamma_1\gamma_2, \pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

一共32个。这32个元构成一个群，称为Dirac群

。由群论的不可约表示（不再介绍）方法，可以发现这个狄拉克群有一个4维的不可约表示。这个4维的表示空间正是我们所寻找的 γ 算符所在的自旋空间。

§ 16.2 γ 矩阵的各种表示

上一节我们已经知道 γ 算符所在的空间是4D的，算符 $\gamma, \vec{\alpha}, \beta$ 的表示都应是 4×4 矩阵。下面用一个比较系统的方法求出 γ 矩阵的各种表示。

一. 矩阵构造的准备工作

前面所介绍的泡利矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

满足下面的关系

$$\sigma_i^2 = 1, \qquad i = 1,2,3$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad i \neq j$$

这时应把Pauli矩阵理解为三个形式不变的矩阵，而脱离与自旋的关系。因为Pauli 矩阵是在S_z表象中给出的，表象不同，表示当然也不同。

我们的目的是寻找四个矩阵，使之满足式

$$\sigma_i^2 = 1, \qquad i = 1,2,3,4$$
$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \quad i \neq j$$

以求得 $\gamma_\mu\ (\mu = 1,2,3,4)$。

现在不可能再找出一个2×2矩阵与Pauli矩阵满足反对易关系, 但可以利用矩阵直积构造几个4×4矩阵。

$$\sigma_i = 1 \otimes \sigma_i: \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_i = \sigma_i \otimes 1: \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

上两式中，处于矩阵元地位的σ_i是2×2矩阵(Pauli)，1代表2×2单位矩阵，而i代表2×2单位矩阵乘以i。

升格为4×4矩阵后，可以验证三个 σ_i 仍是平方为1和反对易的，三个 ρ_i 也是如此。下面证明：

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad (i \neq j)$$

利用矩阵直积运算规则，有

$$\sigma_i\sigma_j=(1\otimes\sigma_i)(1\otimes\sigma_j)=(1\cdot 1)\otimes(\sigma_i\sigma_j)$$
$$=-(1\cdot 1\otimes\sigma_j\sigma_i)=-(1\otimes\sigma_j)(1\otimes\sigma_i)$$
$$=-\sigma_j\sigma_i$$

可见 $$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=0\quad(i\neq j)$$

同理有 $$\rho_i^2=1$$
$$\rho_i\rho_j+\rho_j\rho_i=0\quad(i\neq j)$$

而 $$\sigma_i\rho_j-\rho_j\sigma_i=0\quad(i=j,\quad i\neq j)$$

且 $$\sigma_i\sigma_j=i\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\quad\rho_i\rho_j=i\sum_k\varepsilon_{ijk}\rho_k$$

二. 矩阵的构造

利用前面所得的4×4矩阵σ_i,ρ_i，寻找四个平方为1而又互相对易的矩阵。方法如下：

1.写出σ,ρ的9个乘积：

$$\rho_1\sigma_1,\ \rho_1\sigma_2,\ \rho_1\sigma_3$$

$$\rho_2\sigma_1,\ \rho_2\sigma_2,\ \rho_2\sigma_3$$

$$\rho_3\sigma_1,\ \rho_3\sigma_2,\ \rho_3\sigma_3$$

显然，由于σ,ρ都是对易的，上面的三个横行中，每行的三个矩阵都是彼此反对易而平方为1,三个竖列中每列的三个矩阵也是如此。例如第一行，令

$$A_1=\rho_1\sigma_1,\ A_2=\rho_1\sigma_2,\ A_3=\rho_1\sigma_3$$

$$A_1=\rho_1\sigma_1, A_2=\rho_1\sigma_2, A_3=\rho_1\sigma_3$$

则

$$A_1A_2+A_2A_1=\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_2+\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_1 \qquad (\because \sigma,\rho\text{对易})$$

$$=\sigma_1\rho_1\rho_1\sigma_2+\sigma_2\rho_1\rho_1\sigma_1 \qquad (\because \rho^2=1)$$

$$=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1$$

$$=0$$

即A_1，A_2是反对易的。

但

$$A_2^2=\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_2$$

$$=\sigma_2\rho_1\rho_1\sigma_2$$

$$=\sigma_2^2=1,\cdots$$

所以各矩阵平方和为1.

$$\rho_1\sigma_1,\ \rho_1\sigma_2,\ \rho_1\sigma_3\ ,\rho_2\ ,\rho_3$$

$$\rho_2\sigma_1,\ \rho_2\sigma_2,\ \rho_2\sigma_3$$

$$\rho_3\sigma_1,\ \rho_3\sigma_2,\ \rho_3\sigma_3$$

2. 补齐上述乘积中各行、列的元素

在第一行中再加入一矩阵 ρ_2

它与前面的三个矩阵互相反对易，且 $\rho_2^2=1$

再在后面加一个矩阵 ρ_3

它与原有的三个矩阵及 ρ_2 都反对易，且 $\rho_3^2=1$

这样在第一行中，我们找到了5个平方为1，互为反对易的4×4矩阵。

$$\rho_1\sigma_1, \rho_1\sigma_2, \rho_1\sigma_3, \rho_2, \rho_3$$

$$\rho_2\sigma_1, \rho_2\sigma_2, \rho_2\sigma_3, \rho_3, \rho_1$$

$$\rho_3\sigma_1, \rho_3\sigma_2, \rho_3\sigma_3, \rho_1, \rho_2$$

赋予其中四个以 $\gamma_1 \sim \gamma_4$，剩下的那个冠以正负号就是 γ_5。

其它各行、列都可以分别补上两个矩阵，成为5个一组的平方为1、互相反对易的矩阵。

详见下表：

γ 矩阵的各种表示

	4	5	6		
1	$\rho_1\sigma_1$ $\begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix}$	$\rho_1\sigma_2$ $\begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}$	$\rho_1\sigma_3$ $\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ \sigma_3 & 0\end{pmatrix}$	ρ_2 $\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$	ρ_3 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
2	$\rho_2\sigma_1$ $\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_1\\ i\sigma_1 & 0\end{pmatrix}$	$\rho_2\sigma_1$ $\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}$	$\rho_2\sigma_3$ $\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_3\\ i\sigma_3 & 0\end{pmatrix}$	ρ_3 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	ρ_1 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
3	$\rho_3\sigma_1$ $\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & -\sigma_1\end{pmatrix}$	$\rho_3\sigma_2$ $\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & -\sigma_2\end{pmatrix}$	$\rho_3\sigma_3$ $\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & -\sigma_3\end{pmatrix}$	ρ_1 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	ρ_2 $\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$
	σ_2 $\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}$	σ_3 $\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$	σ_1 $\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$		
	σ_3 $\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$	σ_1 $\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$	σ_2 $\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}$		

在上表中，我们把第1、2、3行称为第1、2、3组，而把第1、2、3列称为第4、5、6组，每组有5个平方为1而又互相反对易的4×4矩阵,每个矩阵都是厄米和幺正的，而每一组中的5个矩阵都可以随意令它们为$\gamma_1\sim\gamma_5$（加以适当的正负号）。

三. γ 矩阵的确定

在不同的文献中，不同的表象选用不同的 γ矩阵，教材中都有介绍。这里介绍两组比较通用的标准表象或Pauli-Dirac表象，其中第一组给 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ ，第二组给出$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$。见下表

Pauli-Dirac表象中的 α_i,β,γ_i

第一组	$\rho_1\sigma_1$	$\rho_1\sigma_2$	$\rho_1\sigma_3$	ρ_2	ρ_3	通用
	α_1	α_2	α_3		β	
第二组	$\rho_2\sigma_1$	$\rho_2\sigma_2$	$\rho_2\sigma_3$	ρ_3	ρ_1	通用
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$-\gamma_5$	

Pauli-Dirac表象中的 $\alpha_i, \beta, \gamma_i$

第一组	$\rho_1\sigma_1$	$\rho_1\sigma_2$	$\rho_1\sigma_3$	ρ_2	ρ_3	通用
	α_1	α_2	α_3		β	
第二组	$\rho_2\sigma_1$	$\rho_2\sigma_2$	$\rho_2\sigma_3$	ρ_3	ρ_1	通用
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$-\gamma_5$	

上表所确定的γ矩阵是比较常用的，称为Pauli-Dirac表象或标准表象，其特点是 γ_4是对角的：

$$\gamma_4 = \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而α矩阵具有下列形式

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

注意教材中的符号错误

利用

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\hbar\vec{\Sigma},\quad \Sigma_i=-\frac{i}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\alpha_j\alpha_k$$

可得自旋算符的矩阵形式是对角的：

$$\vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

注意：算符 $\vec{\Sigma}$ 代表物理量，在不同表象中矩阵形式是不同的，与前面提到的形式不变的4$\times$4 σ 矩阵不同。

在讨论单电子的Dirac方程时，绝大多数使用Dirac-Pauli表象，其它表象多用在量子场论中。