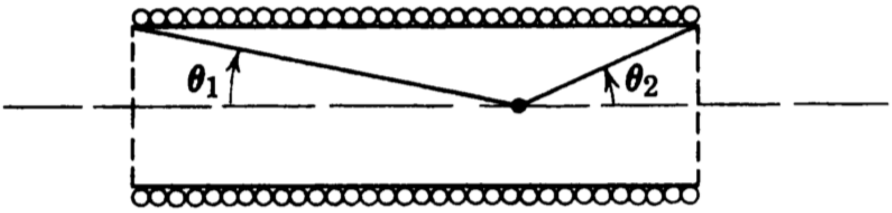
杜炳毅 SQT2100703054

5.3

长度为L的半径为a的右旋螺线管，每单位长度上有N匝，其上流经电流I。证明，$NL \to \infty$时，在螺线管轴线上的磁感应强度为

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{26}$$

角度定义如下所示



根据圆环电流模型，有径向分量

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2 \cos\theta}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\left[1 + \frac{15a^2r^2\sin^2\theta}{4(a^2+r^2)^2} + \cdots\right] \tag{27}$$

取轴线上有$\theta = 0$，有最低阶

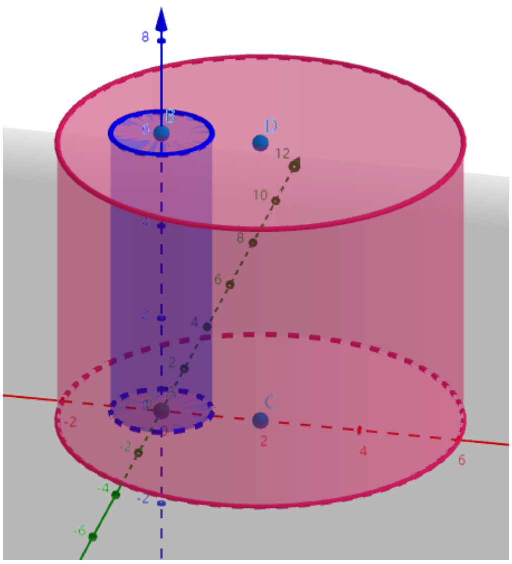
$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}} \tag{28}$$

积分有

$$B_z = N \cdot \int_{a/\tan(\theta_1)}^{-a/\tan(\theta_2)} B_r d\theta = \frac{\mu_0 NI}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{29}$$

5.6

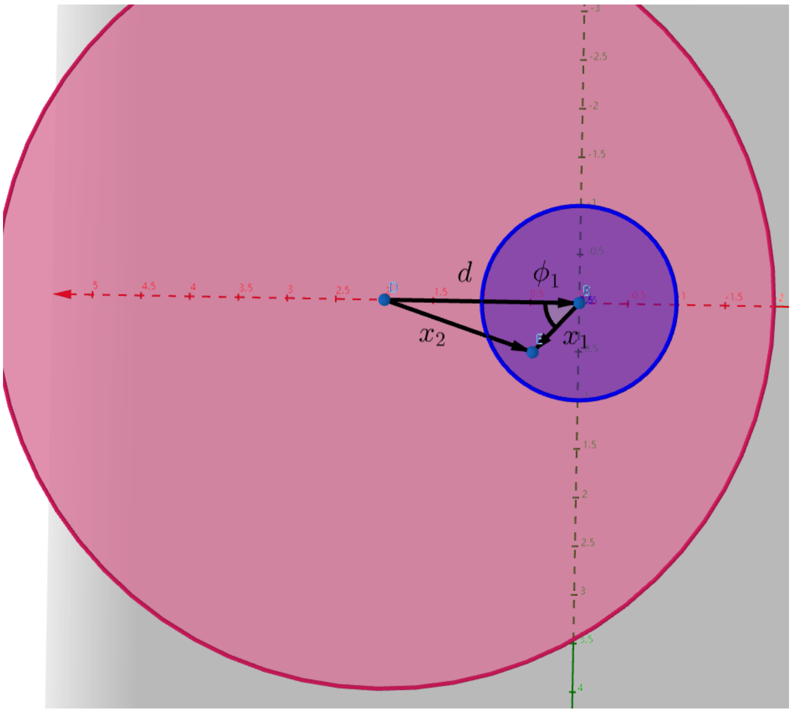
半径为a的圆柱形导体，内部有一半径为b、平行于圆柱轴线的孔洞，孔洞中心距离轴线$d(d+b<a)$。在圆柱导体的其余部分内电流密度均匀且与轴线平行。利用安培环路定理和线性叠加原理，求孔内磁通量密度的大小和方向



题中模型等效为两载流圆柱叠加，

在红色圆柱内有均匀沿z正方向的电流密度$\vec{J}$

在蓝色圆柱内有均匀沿z负方向的电流密度$-\vec{J}$



红色圆柱在(x_1,ϕ_1,z)处产生的场在半径为x_2的回路上满足

$$\begin{gathered}\oint_{x_2}\vec{B}_2 d\vec{l}=\mu_0\cdot\pi\vec{x}_2{}^2\cdot\vec{J}\\ \vec{x}_2=\vec{x}_1+\vec{d}\\ \downarrow\\ \vec{B}_2=\frac{\mu_0 J}{2}\cdot\hat{z}\times\left(\vec{x}_1+\vec{d}\right)\end{gathered}\tag{30}$$

蓝色圆柱在(x_1,ϕ_1,z)处产生的场在半径为x_1的回路上满足

$$\begin{gathered}\oint_{x_1}\vec{B}_1 d\vec{l}=\mu_0\cdot\pi x_1^2\vec{J}\\ \downarrow\\ \vec{B}_2=-\frac{\mu_0 J}{2}\cdot\hat{z}\times\vec{x}_1\end{gathered}\tag{31}$$

求和有孔内场

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 J}{2}\cdot\hat{z}\times\vec{d}\tag{32}$$

5.13

半径为a的球，其表面有均匀电荷分布σ，球以固定角速度ω绕一直径转动。求球内外失势和磁通密度

有电流密度

$$\vec{J}=\sigma\vec{\omega}\times\vec{x}\delta(|\vec{x}|-a)\tag{33}$$

有失势

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'=\frac{\mu_0\sigma a^3}{4\pi}\vec{\omega}\times\int\frac{\hat{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\Omega'\tag{34}$$

利用球格林函数

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)\tag{35}$$

仅考虑最低阶有

$$\int \frac{\hat{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d\Omega' = \frac{4\pi}{3} \frac{r_<}{r_>^2} \hat{x} \tag{36}$$

有失势

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma a^3}{3r} \frac{r_<}{r_>^2} \vec{\omega} \times \vec{x} \tag{37}$$

有展开

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \sigma a}{3} \vec{\omega} \times \vec{x} & r < a \\ \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{x} & r > a \end{cases} \tag{38}$$

磁通

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{in}} = \frac{\mu_0 \sigma a}{3} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = \frac{2\mu_0 \sigma a}{3} \vec{\omega} & r < a \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{out}} = \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{x}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3} \frac{3\hat{x}(\omega \cdot \hat{x}) - \vec{\omega}}{r^3} & r > a \end{cases} \tag{39}$$

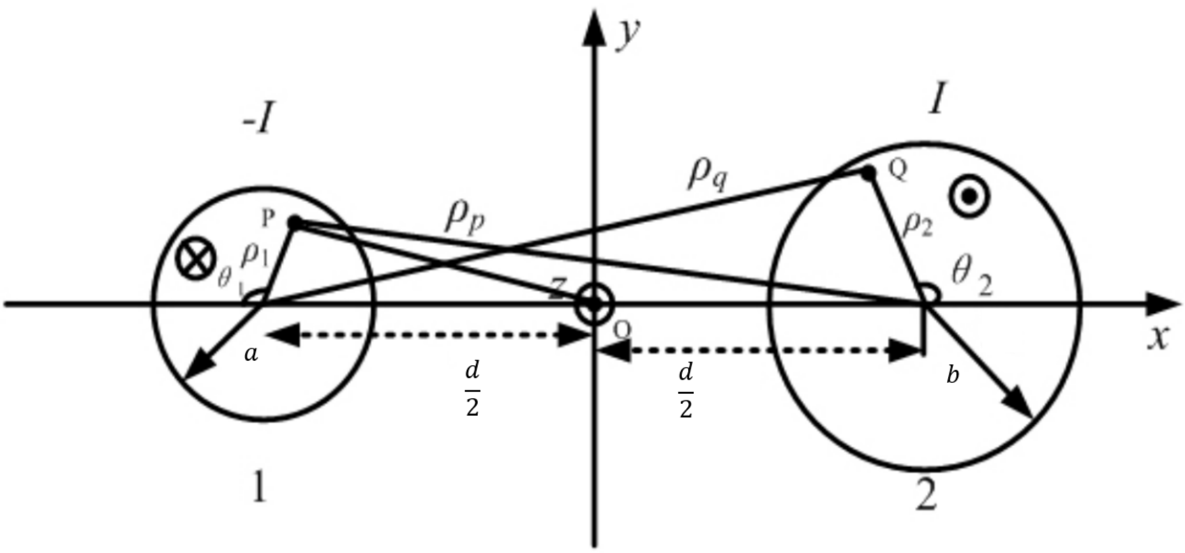
5.26

由一对半径分别为a, b的屏蔽平行导线组成的双线传输线，其间距$d > a + b$，一电流从一条线流过再从另一条线流回，电流均匀分布在每根导线的截面上，证明单位长度的电感为

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 2\ln\left(\frac{d^2}{ab} \right) \right] \tag{40}$$

> 无限长平行导线？

建立下图所示坐标系



考虑$x-y$平面，

对于导线1内场点P，导线1产生的磁场满足

$$\iint_{S_{\mathrm{P}}} \mathbf{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_a^{d/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathrm{d}\rho + \int_{\rho_1}^{a} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \mathrm{d}\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\mathrm{In} \frac{a}{d/2} - \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^2}{2a^2} \right) \tag{41}$$

导线2产生的磁场满足

$$\iint_{S_{\mathrm{p}}} \boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{a}}^{\rho_{\mathrm{p}}} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \mathrm{In} \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{d/2} \tag{42}$$

其中，$\rho_{\mathrm{p}} = \sqrt{d^2 + \rho_1^2 + 2d\rho_1 \cos\theta_1}$

有失势

$$A_{\mathrm{p}} = \iint_{S_{\mathrm{P}}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{43}$$

联立上述三式有

$$A_{\mathrm{p}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{d/2}-\left(\ln\frac{a}{d/2}-\frac{1}{2}+\frac{\rho_1^2}{2a^2}\right)\right] \tag{44}$$

同理可得，导线2内场点Q有失势

$$A_{\mathrm{q}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_{\mathrm{q}}}{d/2}-\left(\ln\frac{b}{d/2}-\frac{1}{2}+\frac{\rho_2^2}{2b^2}\right)\right] \tag{45}$$

其中，$\rho_{\mathrm{q}}=\sqrt{d^2+\rho_2^2+2d\rho_2\cos\theta_2}$

综上，有单位长度传输线的空间上的磁能

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\iint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}S \tag{46}$$

对于右侧第一项，利用，$\int_0^\pi \ln(a+b\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\quad(a\geq|b|>0)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}S&=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln\left(d^2+\rho_1^2+2d\rho_1\cos\theta_1\right)\rho_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\rho_1-\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a^2}\left(\ln a-\frac{1}{2}+\frac{\rho_1^2}{2a^2}\right)\rho_1\,\mathrm{d}\rho_1\\&=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{d}{a}+\frac{1}{4}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

同理对第二项有

$$\frac{1}{2}\iint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot J\,\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{d}{b}+\frac{1}{4}\right) \tag{48}$$

有磁能

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{d}{a}+\ln\frac{d}{b}+\frac{1}{2}\right) \tag{49}$$

利用，$W_{\mathrm{m}}=\psi I/2=LI^2/2$，有电感

$$L=\frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln\frac{d^2}{ab}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[1+2\ln\left(\frac{d^2}{ab}\right)\right] \tag{50}$$

QED