《高等量子力学》2021 试题

1. 已知有限维线性空间的算符$\hat{A}$和$\hat{B}$对易，满足$[\hat{A},\hat{B}]=0$，$\{|i\alpha\rangle\}$和$\{|j\beta\rangle\}$分别为算符$\hat{A}$和$\hat{B}$的正交归一的本征矢量组，也即：

$$\begin{aligned}\hat{A}|i\alpha\rangle&=a_i|i\alpha\rangle, \qquad \alpha=1,2,\cdots,m_i\\ \hat{B}|j\beta\rangle&=b_j|j\beta\rangle, \qquad \beta=1,2,\cdots,m_j\end{aligned}$$

   其中m_i和m_j分别为本征值a_i和b_j的简并度.

   - 证明如下定义的$|ji\alpha\rangle$是算符$\hat{A}$和$\hat{B}$的共同的本征矢量：

$$|ji\alpha\rangle=\sum_{\beta}|j\beta\rangle\langle j\beta|i\alpha\rangle$$

     它们是否是归一化的？彼此之间是否正交？
   - 全部$|ji\alpha\rangle$ 的总数是多少？它们是线性相关的还是线性无关的？

2. 若函数$f(t)$可以写成如下泰勒展开形式:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n$$

   其中$c_n=f^{(n)}(0)$为已知系数，证明关于位置算符$\hat{x}$和动量算符$\hat{p}$的下列等式成立(已知$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$):

$$\left[\hat{x},f(\hat{p})\right]=i\hbar\frac{\partial f(\hat{p})}{\partial\hat{p}}, \qquad \left[\hat{p},f(\hat{x})\right]=-i\hbar\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial\hat{x}}$$

3. 若$\hat{x}$和$\hat{p}$分别为一维位置和动量算符，满足$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$，$|x\rangle$和$|p\rangle$分别为$\hat{x}$和$\hat{p}$的本征值为x和p的本征矢量，满足连续本征值的归一化条件：$\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')$, $\langle p|p'\rangle=\delta(p-p')$, 由此证明：

$$\langle x|p\rangle=\frac{e^{\frac{i}{\hbar}xp}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

4. 已知$\Psi(\vec{r},t)$为电子波函数(四分量旋量)，并满足自由的狄拉克方程

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-c\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla})-\beta mc^2\right]\Psi(\vec{r},t)=0$$

   其中c为真空中光速，证明如下连续性方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$$

   其中 $\rho=\Psi^\dagger\Psi$和$\vec{j}=\Psi^\dagger c\vec{\alpha}\Psi$，并简要说明其物理含义。

5. 电量为e的带点粒子在电磁场(没有量子化的外场)中运动，其波函数$\Psi(\vec{r},t)$满足如下狄拉克方程：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi=\left[c\vec{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)+\beta mc^2+e\phi\right]\Psi$$

将四分量旋量Ψ分解成两个二分量旋量组合: $\Psi=\begin{bmatrix}\Psi_a\\ \Psi_b\end{bmatrix}$, 在泡利—狄拉克表象下，哈密顿量$\hat{H}$为

$$\hat{H}=\begin{bmatrix}mc^2+e\phi & c\vec{\sigma}\cdot\left(-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\\ c\vec{\sigma}\cdot\left(-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right) & -mc^2+e\phi\end{bmatrix}$$

考虑非相对论极限，简要说明Ψ_a相对于Ψ_b为大量，并推导非相对论极限下的哈密顿量$\hat{H}_{\mathrm{NR}}$:

$$\hat{H}_{\mathrm{NR}}=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+e\phi-\vec{\mu}_s\cdot\vec{H}$$

其中$\vec{\mu}_s=\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}$为自旋磁矩，$\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$为磁场强度.