例 2. $x\to+\infty$ 时 $\int_0^1 e^{ixt^2}dt$ 的完全渐近行为. 可以采用驻相法来求得积分 $I(x)=\int_0^1 e^{ixt^2}dt$ 的主要性态. 这里有 $\psi(t)=t^2$，因此驻点位于 $t=0$ 处. 这样，利用式(6.5.12)可得 $I(x)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\pi/x}\ e^{i\pi/4}$ $(x\to+\infty)$. 最陡下降法可以更简便地确定出 $I(x)$ 的完全渐近行为. [这里亦可利用分部积分法(参见习题 6.57).]

如同例 1 那样，我们试图将积分路径 C: $0\leqslant t\leqslant 1$ 变为 $\mathrm{Im}\rho(t)$ 取常数的两条路径(在这里 $\rho(t)=it^2$). 我们首先要寻找一条通过 $t=0$ 这点并使 $\mathrm{Im}\rho(t)$ 为常数的路径. 令 $t=u+iv$ (u, v 为实数)，我们得到 $\mathrm{Im}\rho(t)=u^2-v^2$. 在 $t=0$ 处 $\mathrm{Im}\rho=0$. 因此，通过 $t=0$ 点的等相位路径必定在沿着路径的任意处均满足 $u=v$ 或 $u=-v$ (参见图 6.6). 在路径 $u=-v$ 上 $\mathrm{Re}\rho(t)=2v^2$，于是 $|e^{x\rho(t)}|=e^{2xv^2}$ 随着 $t=(i-1)v\to\infty$ 而增加. 这便是所谓的最陡上升路径. 由于在这条路径上 $|e^{x\rho(t)}|$ 没有极大值，因而不能应用 Laplace 方法. 另一方面，路径 $u=v$ 是一条最陡下降路径，因为 $\mathrm{Re}\rho(t)=-2v^2$，于是 $|e^{x\rho(t)}|=e^{-2xv^2}$ 随着 $t=(1+i)v\to\infty$ 而下降. 路径 C_1: $t=(1+i)v$ $(0\leqslant v<\infty)$ 可以与例 1 中所采用的路径 C_1 相比拟.

其次，我们必须找到一条通过 $t=1$ 的最陡下降路径，使得其上的 $\mathrm{Im}\rho(t)$ 为常数. 在 $t=1$ 处，$\mathrm{Im}\rho(t)$ 的数值为 1. 因此，通过 $u=1$, $v=0$ 的等相位路径由 $u=\sqrt{v^2+1}$ 给定. 由于 $\mathrm{Re}\rho(t)=-2uv$ 在该等相位路径的 $0\leqslant v<\infty$ 部分上随着 $t=u+iv\to\infty$ 而下降，因此通过 $t=1$ 的最陡下降路径由 C_3: $t=\sqrt{v^2+1}+iv$ $(0\leqslant v<\infty)$ 给定. 请注意，当 $v\to+\infty$ 时 C_1 和 C_3 变成彼此相切 (参见图 6.6).

下面的步骤则是将原始路径 C: $0\leqslant t\leqslant 1$ 变更为 C_1+C_3，其中 C_3 从 $t=\infty$ 到 $t=1$. 沿着 C_1 $\mathrm{Im}\rho(t)=0$; 而沿着 C_3 则 $\mathrm{Im}\rho(t)=1$. 由于在 C_1 和 C_3 上 $\mathrm{Im}\rho(t)$ 的数值不同，原始路径显然不能连续地变为 C_1+C_3. 相反，我们必须再加上第三条路径 C_2，它连接起 C_1 和 C_3 之间的空隙. 我们取 C_2 为连接点 $(1+i)V$ (位于 C_1 上)和点 $\sqrt{V^2+1}+iV$ (位于 C_3 上)的直线(参见图 6.6). C 可以连续地变为 C_2 再加上 C_1 和 C_3 中满足 $0\leqslant v<V$ 的两个部分. 这样，当 $V\to\infty$ 时，来自路径 C_2 的贡献就趋于零. (为什么?)于是我们有

$$I(x)=\int_{C_1} e^{ixt^2}dt-\int_{C_3} e^{ixt^2}dt. \tag{6.6.5}$$

沿着 C_1 的积分可以精确地算出. 令 $t=(1+i)v$，我们可得

$$\int_{C_1} e^{ixt^2}dt=(1+i)\int_0^\infty e^{-2xv^2}dv=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\ e^{i\pi/4}. \tag{6.6.6}$$

这个积分贡献恰好就是我们前面采用驻相法求得的 $x\to+\infty$ 时 $I(x)$ 的主要性态.

现在我们来计算沿路径 C_3 的积分对于 $I(x)$ 的贡献. 请注意，如果我们作变换 $t=\sqrt{v^2+1}+iv$ $(0\leqslant v<\infty)$，那么 $\rho(t)=it^2=i-2v\sqrt{v^2+1}$. 这样就证明了 C_3 是一条等相位曲线. 它也是一条最陡下降曲线. 寻求积分在 C_3 上完全渐近展开的简易方法是采用 Watson 引理. 为此，必须将积分写成 $\int_0^\infty f(s)e^{-xs}ds$ 这种形式. 这样就启发人们将变量从 t 变为 s，此处 s 的定义为

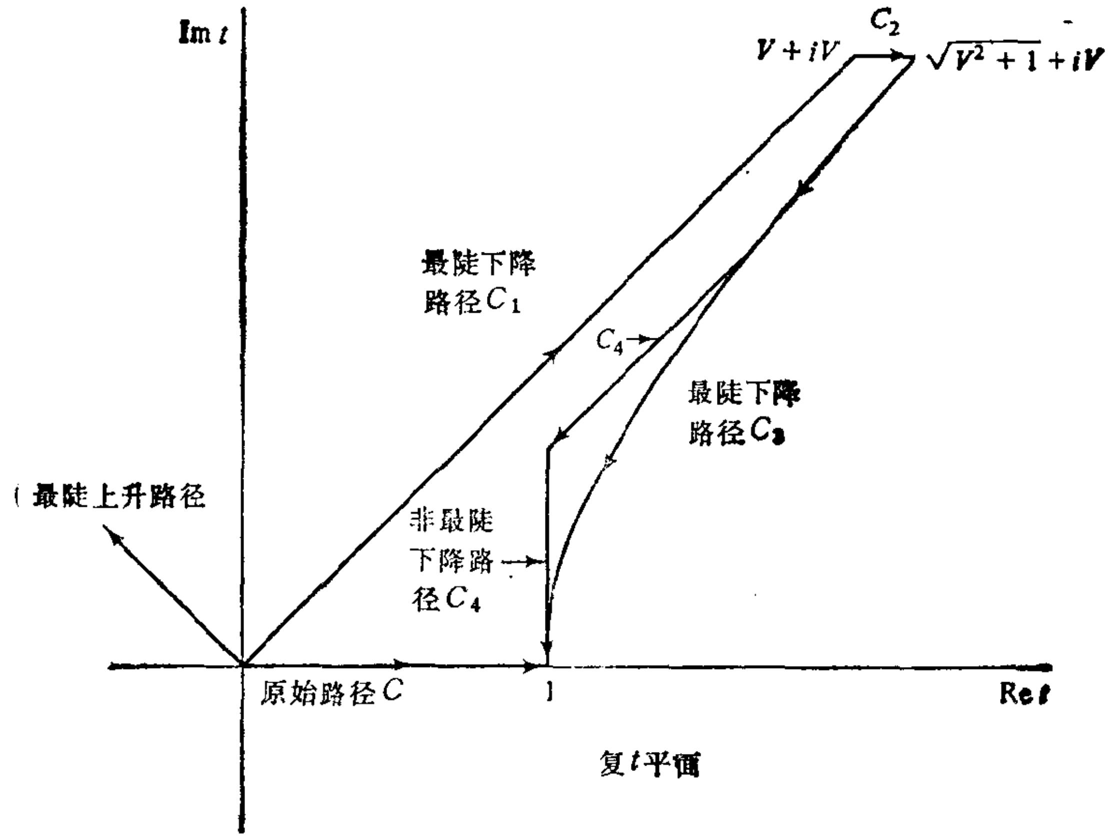

图 6.6 如果原始路径C分解为 $C_1+C_2+C_3$ 而且允许V趋向无穷大 (∞)，那么例 2 中的 Fourier 积分 $I(x)$就可以变成为一对 Laplace 积分. 为了简化沿着 C_3 的积分计算，我们可以用 C_4 代替路径 C_3 中较低的曲线部分

$$\rho(t) = it^2 = i - s; \tag{6.6.7}$$

可以看到: $s = 2v\sqrt{v^2+1}$ 为实数并且在 C_3 上满足 $0 \leqslant s < \infty$. 由于 $t = (1 + is)^{1/2}$ 以及 $dt/ds = \frac{1}{2}i(1+is)^{-1/2}$，于是有

$$\int_{C_3} e^{ixt^2}dt = \frac{1}{2}ie^{ix}\int_0^\infty \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+is}}ds.$$

为了应用 Watson 引理，我们采用 Taylor 展开

$$(1+is)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-is)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/ n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

于是得到

$$\int_{C_3} e^{ixt^2}dt \sim \frac{1}{2}ie^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{n+1}}, \quad x\to+\infty. \tag{6.6.8}$$

将此结果与式(6.6.6)中的结果组合起来，便给出 $x\to+\infty$ 时 $I(x)$ 的完全渐近展开

$$I(x)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\ e^{i\pi/4}-\frac{1}{2}ie^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\ \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{n+1}},\quad x\to+\infty.\quad(6.6.9)$$

最后，我们要提一下另外一种方法，它也可以得到式(6.6.8)中给出的沿 C_3 积分的结果．式(6.6.7)中的变换是曲线 C_3 关于实参数 s 的准确的参数表示．但是，正如我们在第 6.4 节中讨论 Laplace 方法时所知道的那样，只是直接同 $t=1$ 处极大值毗邻的区域才对于路径 C_3 上积分的完全渐近展开有贡献．因此，无需严格地跟随着曲线 C_3，完全可以将积分路径 C_3 改为另一条路径，只要后者满足三个条件：依然通过 $t=1$ 处的极大值；在 $|e^{x\rho(t)}|$ 下降的意义上讲依然是一条下降路径；在 $|t|$ 充分大处重新同 C_3 相连接．由于被积函数是解析的，这样变更路径 C_3 并不会改变积分值．对于本例而言，替代 C_3 的最方便形式是路径 C_4．后者从 $t=1$ 出发，平行于 t 虚轴垂直向上，然后在上半个平面内的任意点处重新并入 C_3（参见图 6.6)．对于积分的完全渐近展开有贡献的只是 C_4 在 $t=1$ 邻域内的那段垂直直线．我们可以将 $t=1$ 附近的 C_4 直线部分参数化，即用 $t=1+iv$ 来表示之(其中 v 为实数并且 $0\leqslant v\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon$ 为小量)．于是

$$\begin{aligned}\int_{C_3}e^{ixt^2}dt&=\int_{C_4}e^{ixt^2}dt\sim i\int_0^{\varepsilon}e^{ix(1+iv)^2}dv\\&=ie^{ix}\int_0^{\varepsilon}e^{-2xv}e^{-ixv^2}dv,\ x\to+\infty.\end{aligned}$$

利用 Laplace 方法

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon}e^{-2xv}e^{-ixv^2}dv&\sim\int_0^{\varepsilon}e^{-2xv}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ix)^nv^{2n}}{n!}\ dv\\&\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i^n)(2n)!}{2^{2n+1}n!x^{n+1}},\quad x\to+\infty.\end{aligned}$$

由于 $(2n)!/(2^{2n}n!)=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$，我们又重新准确地导出了式(6.6.8)．

在这种计算中，我们是采用路径 C_4（它开始的部分是直线）来代替曲线路径 C_3．这种方法是十分重要的计算手段，而且它在最陡下降法中常常是很有用处的．应当注意的是，尽管 C_4 是 $|e^{x\rho(t)}|$ 下降的一条曲线，但它既不是等相位曲线也不是最陡下降曲线．我们还可以采用其它的下降曲线来代替 C_4（参见习题 6.58)．

例 3．最陡下降法的复杂的实例．广义 Fourier 积分

$$I(x)=\int_0^1\exp(ixe^{-1/s})ds\qquad(6.6.10)$$

在 $x\to+\infty$ 时的主要性态是什么？由于 $s=0$ 是一个无穷阶驻点（即 $s\to0+$ 时 $e^{-1/s}$ 的所有导数均为零)，因此本例需要一些复杂的技巧．我们从讨论驻相法得知：如果式(6.5.1)中的 ψ 在驻点的第一个非零导数为 $\psi^{(p)}$，那么当 $x\to+\infty$ 时 $I(x)$ 必定按 $x^{-1/p}$ 方式趋于零．所以我们可以预期，如果被积函数有一个无穷阶驻点的话，当 $x\to+\infty$ 时 $I(x)$ 趋于零的速度就要比 $1/x$ 的任意幂次都慢些．但是 Riemann-Lebesgue 引理可以保证 $x\to+\infty$ 时 $I(x)$ 确实趋于零．