

<< 经典电动力学 >>

数学补充

1. 微分定理

$$\iiint_V dV \nabla \varphi(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S} \varphi(\vec{r})$$

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (\text{Gauss})$$

$$\iint_S d\vec{S} \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = \oint_L d\vec{l} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (\text{Stokes})$$

2. ∇ 算符及其性质 "nabla" vs "del"

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

梯度 $\nabla \varphi$ (矢)

散度 $\nabla \cdot \vec{A}$ (标)

旋度 $\nabla \times \vec{A}$ (矢)

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

参见前页

$$\text{球: } \nabla r = \hat{e}_r, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\hat{e}_r}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \hat{e}_r = \frac{2}{r} \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

3. 曲线坐标系下 ∇ 的形式

见附录页

练习: 柱系下形式

$$\nabla^2 \vec{A}(\rho, \phi, z) = ?$$

球系下形式

$$\nabla^2 \vec{A}(r, \theta, \phi) = ?$$

