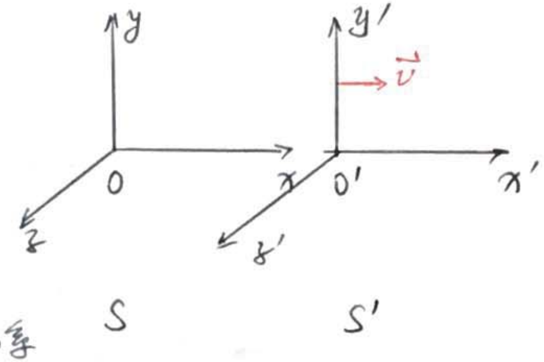
2. Lorentz 变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}ct \\ ct' = a_{21}x + a_{22}ct \end{cases}$$



思考：为什么是线性关系.

由于光速不变，在两系中，分别满足: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$, $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

构造：$f(x)=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, $g(x')=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$

联系 $f(x)=A(v)\,g(x')$ 因 $g=0$ 时 必 $f=0$

同理 $g(x')=A(v)\,f(x)$ $\therefore A=\pm1$ 只留 +

定义间隔 $s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ 或 $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$

$\parallel$

$s'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$ ...

将变换代入上述间隔中

$$c^2t^2-x^2-\cancel{y^2}-\cancel{z^2}=(a_{21}x+a_{22}ct)^2-(a_{11}x+a_{12}ct)^2-\cancel{y^2}-\cancel{z^2}$$

$$(a_{11}^2-a_{21}^2-1)x^2+2(a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22})xct+(a_{12}^2-a_{22}^2+1)c^2t^2=0$$

x, t 相互独立，恒成立，则

$$\begin{cases} a_{11}^2-a_{21}^2=1 \\ a_{11}a_{12}=a_{21}a_{22} \\ a_{12}^2-a_{22}^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=\sqrt{1+a_{21}^2} & (\text{连续性} >0) \\ a_{22}=\sqrt{1+a_{12}^2} & (\text{— — —}) \\ a_{12}=a_{21} \end{cases}$$

再由相对运动，O' 在 S' 中 $x'=0$。而在 S 中 $x=vt$

代回到变换中，得

$$0=a_{11}vt+a_{12}ct$$

$$\Rightarrow a_{12}=-\frac{v}{c}a_{11}$$

联立解出 $a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $a_{12}=-\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $a_{21}=a_{12}$, $a_{22}=a_{11}$

那么
$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x-\frac{v}{c}\cdot ct\right) \\ ct'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{v}{c}x+ct\right) \end{cases}$$

定义 $\vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c}$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Lorentz 变换

(正) $$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \\ y'=y,\ z'=z \end{cases}$$ 或 (逆) $$\begin{cases} x=\gamma(x'+vt') \\ t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right) \\ y=y',\ z=z' \end{cases}$$

低速下 $\beta\to0$, $\gamma=1$ 化为

$x=x'+vt$, $t=t'$, $y=y'$, $z=z'$ Galileo

统一形式为 (11.19) 得

由于 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \gamma^2-\beta^2\gamma^2=1$

令 $\cosh\zeta=\gamma$, $\sinh\zeta=\beta\gamma$ 定义 $\tanh\zeta=\beta$

可以将 Lorentz 变换改写

$$\begin{pmatrix}x\\ ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ ct'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\zeta & \sinh\zeta\\ \sinh\zeta & \cosh\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ ct'\end{pmatrix}$$

类似于转动矩阵

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

3. 典型推论

间隔 $ds^2=c^2dt^2-d\vec{r}^2$

有一随动系 S'，速度为 $\vec{v}$（与运动粒子相连），在S系看来

$d\vec{r}=\vec{v}\,dt$，则 $ds^2=(c^2-v^2)dt^2=(1-\beta^2)c^2dt^2$

而在 S' 系中 $ds'^2=c^2dt'^2-d\vec{r}'^2$ $(d\vec{r}'=0)$

$=c^2dt'^2$

∵间隔不变 $ds^2=ds'^2$，则有 $dt=\dfrac{dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma dt'$ 钟慢

若两个系中长度 $\begin{cases}dl=v\,dt\\ dl'=v\,dt'\end{cases}\longrightarrow dl=\dfrac{dl'}{\gamma}$ 尺缩

同时的相对性：$dt'=\gamma\left(dt-\dfrac{v}{c^2}dx\right)$

事件：(x, y, z, t)

4. 四维矢量、Doppler effect (shift)

如：$\vec{r}=Q\vec{r}'$ 或 $r_i=Q_{ij}r_j'$ （三） $r^2=C$

$x_i=A_{ij}x_j'$ （四） $s^2=C$

类似于上述坐标 $(\vec{r}, ct)$ 变换，对于任何满足协变性（相对论下）的矢量 $(\vec{A}, A_0)$

$$\begin{cases}A_0=\gamma(A_0'+\vec{\beta}\cdot\vec{A}')\\ A_1=\gamma(A_1'+\beta A_0')\end{cases}\qquad A_\perp=A_\perp'$$

保持 $\vec{A}^2-A_0^2=C$

对于平面电磁波，相位 $\phi=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}$ （S系）

$\phi'=\omega't'-\vec{k}'\cdot\vec{r}'$ （S'系）

相位一定相等 $\phi=\phi'$，则

$$\phi=\frac{\omega}{c}\cdot ct-\vec{k}\cdot\vec{r}=\left(\overset{k_0}{\frac{\omega}{c}}, -\vec{k}\right)\begin{pmatrix}ct\\ \vec{r}\end{pmatrix}$$

Lorentz $\begin{cases}k_0=\gamma(k_0'+\beta k_x')\\ k_x=\gamma(k_x'+\beta k_0')\end{cases}$，$k_\perp=k_\perp'$

一式：$\dfrac{\omega}{c}=\gamma\left(\dfrac{\omega'}{c}+\dfrac{v}{c}k_x'\right)=\gamma\dfrac{\omega'}{c}\left(1+v\dfrac{k_x'}{\omega'}\right)$ $\omega=ck$, $\omega'=ck'$

∴ $\omega=\gamma\omega'(1+\beta\cos\theta)$

二式：$\tan\theta=\dfrac{k_\perp}{k_x}=\dfrac{k_\perp'}{\gamma\left(k_x'+\beta\frac{\omega'}{c}\right)}=\dfrac{\tan\theta'}{\gamma\left(1+\beta\frac{\omega'}{c}\frac{1}{k'\cos\theta'}\right)}=\dfrac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta'+\beta)}$