§7 位置表象和动量表象

在这一节和以后的两节里，我们根据量子力学的五条基本原理，讨论几个重要的算符— $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{L}}$以及各种情况下$\vec{\mathbf{H}}$的本征值、本征矢量以及相关的问题；同时建立一些常见的表象。

§7.1 本征值谱和本征矢量

一、算符X的本征值和本征矢

对一维运动。令

$$\mathbf{X}|x>=x|x> \quad （7.1）$$

$$\mathbf{P}|p>=p|p> \quad （7.2）$$

求位置和动量算符的其它本征值和本征矢。

用动量**P**构造一个幺正算符$Q^+(\xi)$:

$$Q^+(\xi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\xi P}$$

式中 ξ 是一个实数，$Q^+(\xi)$的伴算符为

$$Q(\xi)=[Q^+(\xi)]^{-1}=e^{\frac{i}{\hbar}\xi P}$$

利用对易关系

$$[X,f(P)]=i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)$$

则
$$[X,Q^+(\xi)]=i\hbar\frac{\partial}{\partial P}Q^+(\xi)=\xi Q^+(\xi)$$

即
$$XQ^+(\xi)=Q^+(\xi)X+\xi Q^+(\xi)$$

将式 $$XQ^{+}(\xi)=Q^{+}(\xi)X+\xi Q^{+}(\xi)$$

作用到 $|x>$ 上，得

$$\begin{aligned}XQ^{+}(\xi)|x> &= Q^{+}(\xi)X\,|x>+\xi Q^{+}(\xi)|x> \\ &= Q^{+}(\xi)x|x>+\xi Q^{+}(\xi)|x> \\ &= (x+\xi)Q^{+}(\xi)|x>\end{aligned}$$

由此可见, 若 $|x>$ 是**X**的属于本征值***x***的本征矢量，则 $Q^{+}(\xi)|x>$ 也是 **X** 的本征矢量，属于本征值 $x+\xi$。

既然 ξ 为任意实数时上述推论均能成立，就可以得出结论：

位置算符X的本征值可取一切实数。

这一结论说明，在量子力学中粒子位置的可取值与经典力学的情况并无不同。

由式 $XQ^+(\xi)|x>=(x+\xi)Q^+(\xi)|x>$

可令：

$$Q^+(\xi)|x>=|x+\xi>$$

由$Q^+(\xi)$的幺正性可知，$|x+\xi>$也是归一化的。

根据其表现形式，我们形象地称 $Q^+(\xi)$ 为作用于位置本征矢量上的上升算符。

写出上式的左矢形式，有

$$< x | Q(\xi) = < x + \xi |$$

称 $Q(\xi)$ 为作用左矢上的上升算符。

将 $Q(\xi)$ 作用于 $| x >$，由于 $Q(\xi) = Q^+(-\xi)$，则

$$Q(\xi) | x > = | x - \xi >$$

两边取复共轭，有 $< x | Q^+(\xi) = < x - \xi |$

可见 $Q(\xi)$ 是右矢 $| x >$ 的下降算符，而 $Q^+(\xi)$ 为左矢 $< x |$ 的下降算符。

有了 $Q^+(\xi)$ 和 $Q(\xi)$，就可以从任何一个本征矢量出发, 求出位置算符**X**全部本征矢量 $\{| x >\}$。

二、动量算符P的本征值和本征矢

类似地，引入算符

$$T^{+}(\pi)=e^{\frac{i}{\hbar}\pi X}, \quad T(\pi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\pi X}$$

式中 π 为一实数，则可得到

$$T^{+}(\pi)|p\rangle=|p+\pi\rangle, \quad T(\pi)|p\rangle=|p-\pi\rangle$$

$$\langle p|T^{+}(\pi)=\langle p-\pi|, \quad \langle p|T(\pi)=\langle p+\pi|$$

由此可知动量算符P的本征值也可取全部实数，而其全部本征矢量$\{|p\rangle\}$也可由一个本征矢量出发，用上升算符$T^{+}(\pi)$或下降算符$T(\pi)$构造出来。

§7.2 位置表象和动量表象

算符X和P都具有连续的本征值谱，对其本征矢量的完全性目前我们没法讨论。

这里假定X和P的本征矢量组$\{|x>\}$和$\{|p>\}$都是完全的，即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |x><x| = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, |p><p| = 1$$

故可建立***x***表象和***p***表象。这里主要讨论前者。

一、位置表象的正交归一关系

$$<x|x'>=\delta(x-x')$$

二、矢量和算符在位置表象的表示

由于坐标算符的本征值是连续的，这里只能用本征值本身作为矩阵行和列的编号，因而这种矩阵的行和列将不是离散的而是连续的，故叫连续矩阵。

1. 矢量在**x**表象中的表示

设$|\psi>$是归一化矢量，则有

$$|\psi>=\int \mathrm{d}x\,|x><x|\psi>=\int |x>\psi_x\,\mathrm{d}x, \qquad \psi_x=<x|\psi>$$

x取一切值的 ψ_x 的全体完全等价于矢量$|\psi>$，称为矢量$|\psi>$的位置表象，常写为

$$|\psi>\to\psi_x\to\begin{pmatrix}\vdots\\ \psi_{x'}\\ \vdots\\ \psi_{x''}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

类似地，左矢$<\psi|$可以写成形式

$$<\psi|=\int \mathrm{d}\,x<\psi\,|\,x><x\,|=\int\psi_x^*<x\,|\,\mathrm{d}\,x$$

ψ_x^* 可以写成一连续的行矩阵

$$<\psi|\to\psi_x^*\to\begin{pmatrix}\cdots & \psi_{x'}^* & \cdots & \psi_{x''}^* & \cdots\end{pmatrix}$$

而内积$<\varphi|\psi>$也可以写成矩阵的形式

$$<\varphi|\psi>=\int \mathrm{d}\,x<\varphi|x><x|\psi>$$

$$=\int \varphi_x^*\psi_x\,\mathrm{d}\,x$$

即

$$<\varphi|\psi>=\begin{pmatrix}\cdots & \varphi_{x'}^* & \cdots & \varphi_{x''}^* & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots \\ \psi_{x'}^* \\ \vdots \\ \psi_{x''}^* \\ \vdots\end{pmatrix}$$

2. 算符在*x*表象中的表示

算符**A**在*x*表象中的表示为

$$A_{x'x} = < x'|A|x >$$

算符对矢量的作用也可写成矩阵形式，如对

$$|\varphi > = A|\psi >$$

$$< x'|\varphi > = < x'|A|\psi > = \int \mathrm{d}\, x < x'|A|x >< x|\psi >$$

即

$$\varphi_{x'} = < x'|A|\psi > = \int \mathrm{d}\, x A_{x'x} \psi_x$$

或

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{x'} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & A_{xx'} & \cdots \\ \cdots & A_{x'x} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi_x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3. 几个最基本的矢量和算符在位置表象中的具体形式

①位置表象中的基矢

讨论一个具体基矢$|x_0>$。

令 $|\nu>=|x_0>$，则其位置表象为

$$\nu_x=<x|x_0>=\delta(x-x_0)$$

$\boldsymbol{x}$: 列矩阵的行序号

$\boldsymbol{x_0}$: 常数，基矢所固有

此矩阵只在第$\boldsymbol{x_0}$行是一个**δ** 函数型的无穷大，其余都是零。

②位置算符在自身表象中的表示

$$X_{x'x}=<x'|X|x>=x<x'|x>=x\delta(x-x')$$

这是一个对角矩阵，其对角元是相同的行或列序号乘以**δ** 型的无穷大；

由于连续矩阵是以本征值本身作为行和列序号的，故所有的对角元都是本征值（乘以**δ** 函数）。这与离散情况有类似之处。

③动量本征矢量$|p>$在x表象中的形式

令$|O_x>$表示算符**X**的本征值为**0**的本征矢量，$|O_p>$表示算符**P**的本征值为**0**的矢量，则

$$
\begin{aligned}
<x|p> &= <x|T^{+}(p)|O_p> \\
&= <x|e^{\frac{i}{\hbar}pX}|O_p> \\
&= <x|e^{\frac{i}{\hbar}px}|O_p> \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}px}<x|O_p> \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}px}<O_x|Q(x)|O_p> \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}px}<O_x|e^{\frac{i}{\hbar}xP}|O_p> \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}px}<O_x|e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot 0}|O_p> \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}px}<O_x|O_p>
\end{aligned}
$$

现在关键问题是求 $<O_x|O_p>=?$

$$\because \quad \delta(p-p') = \langle p' | p \rangle$$

$$= \int \langle p' | x \rangle \langle x | p \rangle \, \mathrm{d}x$$

(利用式$\langle x | p \rangle = e^{\frac{i}{\hbar}px} \langle O_x | O_p \rangle$)

$$= \int e^{-\frac{i}{\hbar}p'x} e^{\frac{i}{\hbar}px} \left| \langle O_x | O_p \rangle \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \left| \langle O_x | O_p \rangle \right|^2 \int e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x} \, \mathrm{d}x$$

(利用$\delta(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} \, \mathrm{d}x$)

$$= \left| \langle O_x | O_p \rangle \right|^2 2\pi\hbar \, \delta(p-p')$$

$$\therefore \quad \langle O_x | O_p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

即

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

$$<x|p>=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

这就是动量本征矢量在***x***表象的矩阵形式。

这里，***p***：指定的本征值，固定不变

x：巡标，变化

$<x|p>$：由***p***表象到***x***表象的幺正变换矩阵

④动量算符P在位置表象中的形式

这是一个连续矩阵，即

$$P_{x'x}=<x'|P|x>$$

$$=\iint<x'|p'><p'|P|p><p|x>\mathrm{d}p'\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint e^{\frac{i}{\hbar} p' x'} p < p' | p > e^{-\frac{i}{\hbar} px} \, \mathrm{d} p' \mathrm{d} p$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint e^{\frac{i}{\hbar} p' x'} p \delta(p' - p) e^{-\frac{i}{\hbar} px} \, \mathrm{d} p' \mathrm{d} p$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} (x' - x) p} p \, \mathrm{d} p$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \int e^{\frac{i}{\hbar} (x' - x) p} \, \mathrm{d} p$$ **(利用式$\frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} \, \mathrm{d} k = \delta(x)$)**

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} [2\pi\hbar \delta(x' - x)]$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x)$$

或 $$P_{x'x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x' - x)$$

二、动量表象

可以类似地进行讨论。特别是讨论动量表象中矢量$|x>$和算符**X**的矩阵形式时，有

$$< p | x > = < x | p >^*$$

$$X_{p'p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \delta(p' - p)$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \delta(p' - p)$$

#

§7.3 位置表象的函数形式

我们已经建立了位置表象的矩阵形式，其特点是：算符**X**和**P**的矩阵中都带有一个δ函数。正是由于这一特点，我们再向前稍跨一步，就可以得到一种简洁且实用的表现形式，即位置表象的函数形式。

一、位置表象和算符X的函数形式

1. δ函数对连续矩阵相乘的优点

讨论下列关系的位置表象

$$|\varphi\rangle = X|\psi\rangle$$

则
$$<x|\varphi>=<x|X|\psi>$$
$$=\int \mathrm{d}\,x<x|X|x'><x'|\psi>$$
$$=\int \mathrm{d}\,x'\,X_{xx'}\psi_{x'}$$
即
$$\varphi_x=\int \mathrm{d}\,x'\,X_{xx'}\psi_{x'}$$
但是
$$X_{xx'}=<x|X|x'>$$
$$=x<x|x'>$$
$$=x\delta(x-x')$$
这就使得上述积分很容易计算，即
$$\varphi_x=\int \mathrm{d}\,x'\,x\delta(x-x')\psi_{x'}=x\psi_x$$
与式 $|\varphi>=X|\psi>$ 进行比较，上式正是我们所希望的关系。由此可以建立…

2. 位置表象的函数形式

如果将描写矢量的 ψ_x, φ_x 不看成一列矩阵，而看成是x的不同的函数 $\psi(x), \varphi(x)$ ，称之为态函数或波函数。

如果将算符**X**和**P**等也不看成矩阵, 而看成是一种对函数$\psi(x)$的作用，其结果可得出另一新函数。这种作用仍称为算符，用$\hat{X}, \hat{P}$表示。

于是式 $|\varphi>= X|\psi>$ 位置表象的函数形式可以写成

$$\varphi(x) = \hat{X}\psi(x)$$

而从式 $\varphi_x = x\psi_x$ 可以看出，算符**X**的函数形式可以定义为

$$\hat{X}\psi(x) = x\psi(x) \quad (\text{for all}\,\psi(x))$$

二、动量算符P的函数形式

对

$$|\varphi>=P|\psi>$$

有

$$\varphi(x) = \varphi_x \quad =< x|\varphi>$$

$$=\int < x|P|x'>< x'|\psi > \mathrm{d}\,x'$$

$$=\int P_{xx'}\psi_{x'}\,\mathrm{d}\,x'$$

$$=\int[i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')]\psi_{x'}\,\mathrm{d}\,x'$$

$$=i\hbar\delta(x-x')\psi_{x'}\Big|_{x'=-\infty}^{x'=+\infty}-\int\delta(x-x')[i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\psi_{x'}]\mathrm{d}\,x'$$

$$=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_x$$

结合 $\varphi=\hat{P}\psi$ 则有 $\varphi(x)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$

故动量算符在坐标表象中的表示是：$\hat{P}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

（现在请考虑：如何求坐标算符在动量表象中的表示？）

容易证明坐标算符和动量算符的对易关系是

$$[\hat{X},\hat{P}]=i\hbar$$

#

三、算符的函数形式的应用及厄米算符

由于所有算符都可以写成**X**和**P**的函数，所以在 x 表象的函数形式中，一切量子力学公式都可以避免矩阵乘积的积分,使公式大大简化。

无经典对应的物理量,一般无连续本征值谱,不存在这一问题,唯一需要保留积分运算的是内积，即

$$<\varphi|\psi>=\int<\varphi|x><x|\psi>\mathrm{d}\,x$$

$$=\int\varphi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}\,x$$

在函数形式中，算符**A**的伴算符$\hat{A}^{+}$的定义是对任意$\varphi(x),\psi(x)$，满足

$$\int[\hat{A}^{+}\varphi(x)]^{*}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x=\int\varphi^{*}(x)\hat{A}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

厄米算符$\hat{H}$满足

$$\int[\hat{H}\varphi(x)]^{*}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x=\int\varphi^{*}(x)\hat{H}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

对于动量算符**P**来说，由于要经过一个分部积分

$$\int\varphi^{*}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-i\hbar\varphi\psi\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+\int[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi]^{*}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

所以，$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$只对于满足一定的边界条件的函数组成的函数空间才是厄米的。

量子力学的位置表象的函数形式，就是初等量子力学一开始所用的表示形式。

四、函数空间

以上建立的实变量*x*复函数空间，同**Hilbert**空间一一对应，此空间就是函数空间。

此空间中每一个函数就是函数空间中的一个矢量，并与**Hilbert**空间中的一个矢量相对应。

两空间中各有相对应的算符，都可以描写相应的物理量，并给出量子力学的各种关系。

§7.4 xyz表象和$r\theta\varphi$表象

一、xyz表象

比照三维运动位置矢量的表达式，相应的算符可以写成下列形式

$$\vec{X}=\vec{R}=\sum_i X_i\vec{e}_i=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

三个位置算符 X,Y,Z是相互对易的，各自有一组本征矢量，并各自构成一个Hilbert空间，即

$$X\,|\,x>=x\,|\,x>,$$

$$Y\,|\,y>=y\,|\,y>,$$

$$Z\,|\,z>=z\,|\,z>.$$

描写单粒子三维运动状态的Hilbert空间就是这三个空间的直积空间，其基矢为

$$|\vec{r}>=|xyz>=|x>\otimes|y>\otimes|z>$$

$|xyz>$是位置算符X,Y,Z的共同本征矢量，本征值分别为x,y,z。

按照直积空间算符的写法，$\vec{R}$ 可严格定义为

$$\vec{R}=X\vec{i}\otimes I\otimes I+I\otimes Y\vec{j}\otimes I+I\otimes I\otimes Z\vec{k}$$

上式中,$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是单位矢量，而 I 是单位算符。从这里可以理解矢量和算符的细微差别：

前者有方向性，后者是作用算符；

矢量往往以本征值的形式出现。

若令$|\vec{r}>$是算符$\vec{R}$的本征矢量，本征值为$\vec{r}$，即

$$\vec{R}|\vec{r}>=\vec{r}|\vec{r}>$$

以后为方便起见将省去直积号$\otimes$，比如

$$|\vec{r}>=|x>|y>|z>=|xyz>$$

$$\vec{R}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

微观粒子的状态由直积空间中的一个归一化矢量$|\psi>$来描写，其在$|xyz>$上的分量是

$$<\vec{r}|\psi>=<xyz|\psi>=\psi(\vec{r})=\psi(xyz)$$

即是位置表象中的态函数。

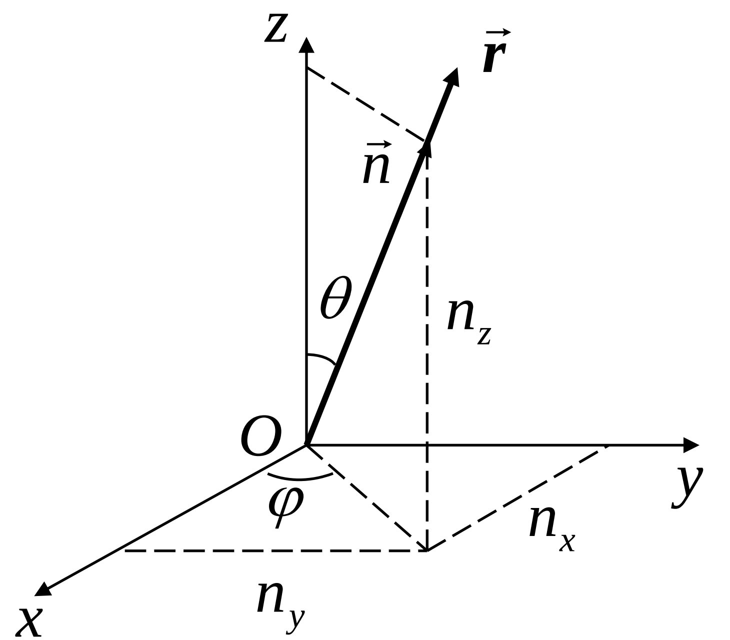
总之，取单粒子基矢$\{|xyz>\}$构成的表象称为xyz表象.

二、$r\theta\varphi$表象

取r 为 $\vec{r}$ 的长度，$\vec{n}$为径矢方向上的单位矢量，如右图

则

$$\vec{r} = r\vec{n}$$



若以 z 轴为极轴取球坐标，则

$$n_x = \sin\theta\cos\varphi,$$

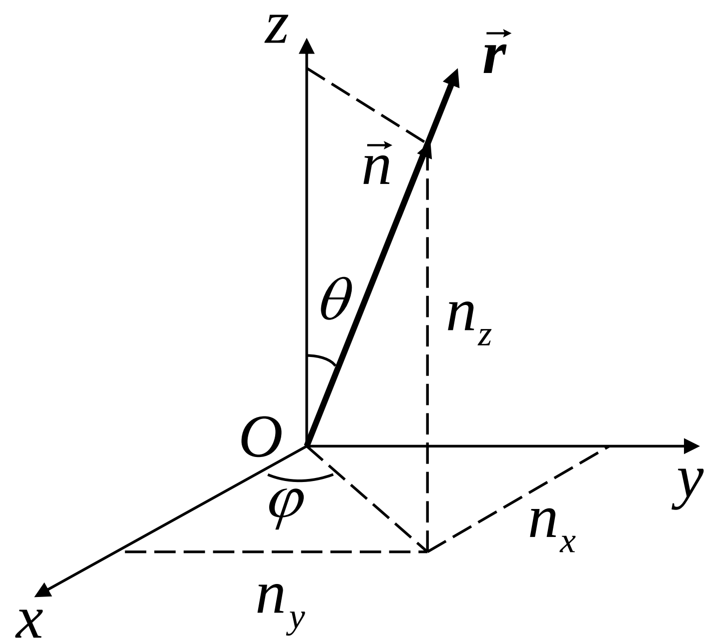
$$n_y = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$n_z = \cos\theta$$

与r和 $\vec{n}$对应的算符为R和 $\vec{N}$

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{R}}{R}$$



后者称为方向算符。

设R和 $\vec{N}$的本征矢量为
$|r>$和$|\theta\varphi>$，则

$$R|r> = r|r> \qquad \vec{N}|\theta\varphi> = \vec{n}(\theta,\varphi)|\theta\varphi>$$

可见算符R的本征矢量$|r>$就是$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$本征矢量, 其本征值取R^2的本征值开方即可；

$$\vec{N}\,|\,\theta\varphi> = \vec{n}(\theta,\varphi)\,|\,\theta\varphi>$$

而方向算符 $\vec{N}$的本征值是三维物理空间中的一个单位矢量，用 $\vec{n}(\theta,\varphi)$表示，本征矢量 $|\,\theta\varphi>$是$|\,\vec{n}(\theta,\varphi)>$的简写，于是有

$$\vec{R} = R\vec{N}$$

$$R\vec{N}\,|\,r>|\,\theta\varphi> = r\vec{n}(\theta,\varphi)\,|\,r>|\,\theta\varphi>$$

$$= \vec{r}(r,\theta,\varphi)\,|\,r\theta\varphi>$$

即 $$\vec{R}\,|\,r\theta\varphi> = \vec{r}(r,\theta,\varphi)\,|\,r\theta\varphi>$$

到此为止，我们发现位置算符 $\vec{R}$有两种直积分解形式：

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = R\vec{N}$$

而 $\vec{R}$的本征矢量$\{|\vec{r}>\}$所张成的空间相应的也有两种直积分解方式，即

$$|\vec{r}>=|xyz>$$

$$|\vec{r}>=|r\theta\varphi>$$

因此，全体$|xyz>$和全体$|r\theta\varphi>$分别是这个空间的一组基矢，它们是一一对应的，即

当 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$时，有

$$|r\theta\varphi>=|xyz>$$

我们已经介绍，单粒子基矢$\{|xyz>\}$构成的表象为 xyz 表象。类似地，基矢$\{|r\theta\varphi>\}$构成的表象称为$r\theta\varphi$ 表象。

2、归一化关系

本征矢量 $|x,y,z>$的归一化关系为

$$<x'y'z'|xyz>=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

下面看$|r>,|\theta\varphi>$的归一化关系。

利用$|r>$的完全性关系，则

$$|r'>=\int|r><r|r'>r^2\,\mathrm{d}r$$

但
$$|r'>=\int|r>\delta(r-r')\,\mathrm{d}r$$

以上两式比较，得

$$<r|r'>=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')$$

这就是$|r>$ 的归一化关系。

同样利用$|\theta\varphi>$的完全性关系，有

$$|\theta'\varphi'>=\iint|\theta\varphi><\theta\varphi|\theta'\varphi'>\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

又根据δ 函数的定义

$$|\theta'\varphi'>=\iint|\theta\varphi>\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

以上两式比较，得

$$<\theta\varphi|\theta'\varphi'>=\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')$$

这就是$|\theta\varphi>$的归一化关系。

三、基矢的正交归一完全性关系

1、完全性关系

本征矢量组$\{|x,y,z>\}$的完全性关系是

$$\iiint |xyz><xyz|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=1$$

而本征矢量组$\{|r\theta\varphi>\}$的完全性关系是

$$\iiint |r\theta\varphi><r\theta\varphi|\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=1$$

分解开写有

$$\int |r><r|\,r^2\,\mathrm{d}r\iint |\theta\varphi><\theta\varphi|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=1$$

即
$$\int |r><r|\,r^2\,\mathrm{d}r=1$$

$$\iint |\theta\varphi><\theta\varphi|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=1$$

3. 任意态函数按照基矢的展开

(1) 按基矢|xyz>展开

在函数空间中，算符X的本征值为x'的本征矢量$|x'>$的函数形式为

$$<x|x'>=\delta(x-x')$$

由于在函数空间中x,y,z是自变量，所以这里x'表示本征值，即

$$\hat{X}<x|x'>=x'\delta(x-x')$$

同样对于算符R，有

$$\hat{R}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\vec{r}\,'\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

任意态函数$\psi(x,y,z)$按位置表象基矢的展开式为

$$\psi(x,y,z)=\int\psi(x',y',z')\delta(x-x')\delta(y-y')\times \\ \times\delta(z-z')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$$

(2) 按基矢$|r\theta\varphi>$展开

在$r\theta\varphi$表象中，基矢$|r\theta\varphi>$的函数形式为

$$<r'\theta'\varphi'|r\theta\varphi>=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')$$

任意态函数$\psi(r,\theta,\varphi)$按此基矢的展开式为

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\int\psi(r',\theta',\varphi')\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\times \\ \times\delta(\varphi-\varphi')\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'$$

另外描写同一状态的矢量$\psi(x,y,z)$与$\psi(r,\theta,\varphi)$之间的关系可以这样得出：

令前者中

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

即可得后者。

而 $\psi(r,\theta,\varphi)$ 的归一化条件是

$$<\psi\,|\,\psi>=\int\psi^{*}(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)r^{2}\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=1$$

§7.5 函数空间的性质

（自己阅读）