误差及其分类

1 固有误差

1.1 模型误差

由实际问题抽象、简化为数学问题（建立数学模型时）所引起的误差

1.2 观测误差

测量工具限制或再数据的获取时，随机因素所引起的物理量的误差

2 计算误差

2.1 截断误差

用数值方法求解数学模型时得到的正确解和模型准确解间的误差-方法误差

如，计算通过级数近似计算：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \tag{1}$$

取前三项计算$\sin x$近似值，$S = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

则截断误差为：$R = \sin x - S$

2.2 舍入误差

由于计算机所表示的位数有限，通常用四舍五入的办法取值引起的误差

3 绝对误差和相对误差

记，x^*为近似值，x为准确值

绝对误差

$$e(x) = x - x^* \tag{2}$$

相对误差

$$e_r(x) = \frac{e(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x} \tag{3}$$

减小误差的原则

1 选用数值稳定性好的算法

要计算使用算法的误差增长公式，如不增长就认为算法数值稳定性好

例，对于递推公式$A_n = 1 - nA_{n-1}$

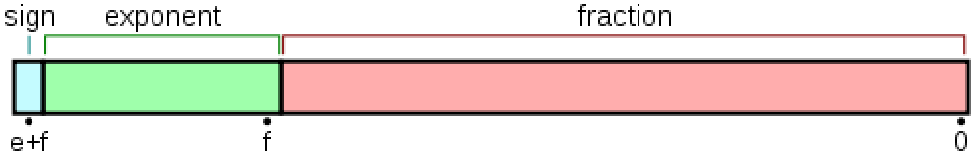
有传递误差，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_n &= -n \cdot \mathrm{d}A_{n-1} \\ &= \pm n! \cdot A_0 \end{aligned} \tag{4}$$

可见，随n的只能加，其误差迅速增加

2 避免两个相近数相减

根据IEEE 754标准，浮点数按照下述标准存储



$$\text{Value} = \text{sign} \times \text{exponent} \times \text{fraction} \tag{5}$$

Value：浮点数值

Sign：符号位，占用一位

Exponent：指数偏移，IEEE 754规定该值为$2^{n-1}-1$，其中n为存储指数的位数

Fraction：分数部分，

TODO

3 避免大数和很小的数直接相加

略

4 减少运算次数

显然，对于Numpy可以使用Numexp自动进行减少运算次数的优化

系统误差的传递

1 加减运算

$$\begin{aligned} R &= A + B - C \\ E_R &= E_A + E_B - E_C \end{aligned} \tag{6}$$

2 乘除运算

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{C} \\ \frac{E_R}{R} &= \frac{E_A}{A} + \frac{E_B}{B} - \frac{E_C}{C} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R &= B\mathrm{d}A + A\mathrm{d}B \\ \frac{\mathrm{d}R}{R} &= \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}B}{B} \end{aligned} \tag{8}$$

3 指数运算

$$\begin{aligned} R &= mA^n \\ \frac{E_R}{R} &= n\frac{E_A}{A} \end{aligned} \tag{9}$$

4 对数关系

$$
\begin{gathered}
R = m \lg A \\
E_R = 0.434m \frac{E_A}{A}
\end{gathered} \tag{10}
$$

误差传递的计算方式 - 百度文库 (baidu.com)

5 例题

求积分

$$
I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \tag{11}
$$

采用递推法，得到递推公式

$$
I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \tag{12}
$$

又有

$$
I_0 = \ln \frac{6}{5} = 0.182321559 \tag{13}
$$

方法1：正向递推公式，$I_n = n^{-1} - 5I_{n-1}$

方法2：逆向递推公式，$I_{n-1} = 1/5\left(n^{-1} - I_n\right)$

对于正向递推

$$
I_n = n^{-1} - 5I_{n-1} \tag{14}
$$

有传递误差

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}I_n = -5 \times \mathrm{d}I_{n-1} \\
\mathrm{d}I_n = (-5)^n \times \mathrm{d}I_0
\end{gathered} \tag{15}
$$

这种微分计算的方法可见论文“怎样用微分公式计算误差”

对于反向递推

$$
I_{n-1} = 1/5\left(n^{-1} - I_n\right) \tag{16}
$$

有传递误差

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}I_{n-1} = -5^{-1} \mathrm{d}I_n \\
\mathrm{d}I_k = -5^{-(n-k)} \times \mathrm{d}I_n
\end{gathered} \tag{17}
$$

显然，正向递推误差随n增加，指数增长；反向递推误差随n增加，指数减小