这是《小波变换和motion信号处理》系列的第二篇，深入小波。第一篇我进行了基础知识的铺垫，第三篇主要讲解应用。

在上一篇中讲到，每个小波变换都会有一个mother wavelet，我们称之为母小波，同时还有一个father wavelet，就是scaling function。而该小波的basis函数其实就是对这个母小波和父小波缩放和平移形成的。缩放倍数都是2的级数，平移的大小和当前其缩放的程度有关。还讲到，小波系统有很多种，不同的母小波，衍生的小波基就完全不同。小波展开的近似形式是这样：

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

其中的 $\psi_{j,k}(t)$ 就是小波级数，这些级数的组合就形成了小波变换中的基basis。和傅立叶级数有一点不同的是，小波级数通常是orthonormal basis，也就是说，它们不仅两两正交，还归一化了。

我们还讲了一般小波变换的三个特点，就是小波级数是二维的，能定位时域和频域，计算很快。但我们并没有深入讲解，比如，如何理解这个二维？它是如何同时定位频域和时域的？在这一篇文章里，我们就来讨论一下这些特性背后的原理。

首先，我们一直都在讲小波展开的近似形式。那什么是完整形式呢？之前讲到，小波basis的形成，是基于基本的小波函数，也就是母小波来做缩放和平移的。但是，母小波并非唯一的原始基。在构建小波基函数集合的时候，通常还要用到一个函数叫尺度函数，scaling function，人们通常都称其为父小波。它和母小波一样，也是归一化了，而且它还需要满足一个性质，就是它和对自己本身周期平移的函数两两正交：

$$||\varphi(t)|| = 1$$

$$\langle \varphi(t), \varphi(t-kT) \rangle = 0 \quad \forall k$$

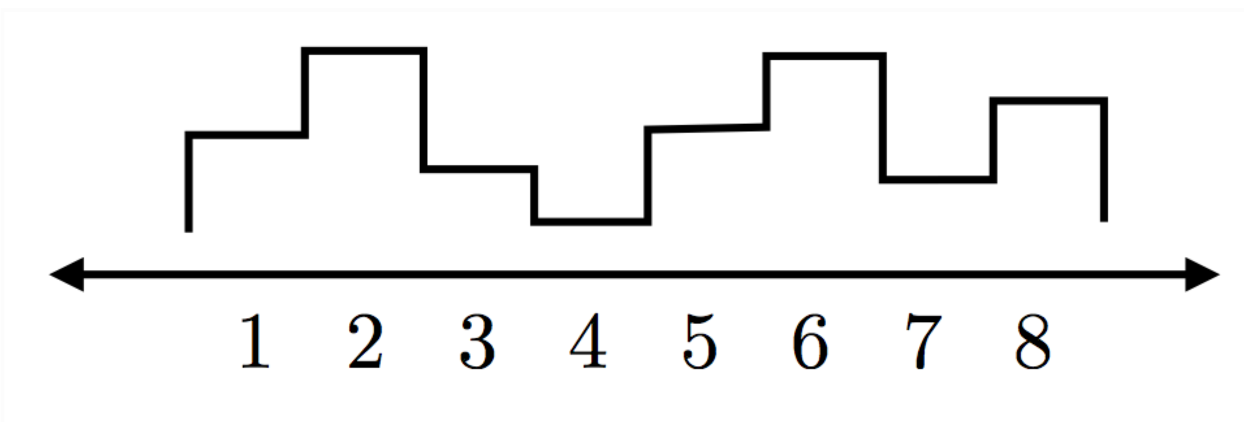
另外，为了方便处理，父小波和母小波也需要是正交的。可以说，完整的小波展开就是由母小波和父小波共同定义的

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi(t-k)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k}\psi(2^j t-k)$$

其中$\psi(t)$是母小波，$\varphi(t)$是父小波。需要提醒一点的是，这个正交纯粹是为了小波分析的方便而引入的特性，并不是说小波变换的基就一定必须是正交的。但大部分小波变换的基确实是正交的，所以本文就直接默认正交为小波变换的主要性质之一了。

引入这个父小波呢，主要是为了方便做多解析度分析（multiresolution analysis, MRA）。说到这里，你的问题可能会井喷了：好好的为什么出来一个父小波呢？这个scaling function是拿来干嘛的？它背后的物理意义是什么？wavelet function背后的物理意义又是什么？这个多解析度分析又是什么呢？不急，下面，我们围绕一个例子来巩固一下前面的知识，同时再引出新的特性。

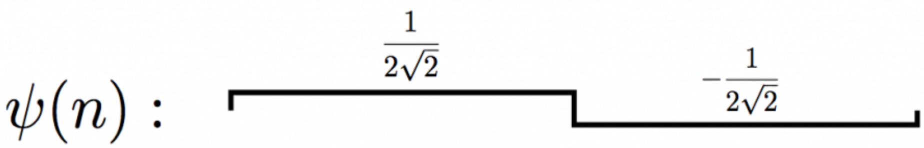
假设我们有这样一个信号：



该信号长度为8，是离散的一维信号。我们要考虑的，就是如何用小波将其展开。

为了方便讲解，我们考虑最简单的一种小波，哈尔小波。下面是它的一种母小波：

$$\psi(n) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \le n \le 4 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 5 \le n \le 8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



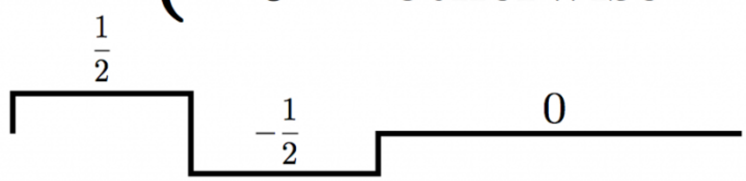
那如何构建基于这个母小波的基呢？刚才提到了，要缩放，要平移。我们先试试缩放，那就是ψ(2n)：

$$\psi(2n) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \le n \le 2 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 3 \le n \le 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

但这样的话，它与自己的内积就不是1了，不符合小波基orthonormal的要求，所以我们要在前面加一个系数根号二，这样我们就得到了另一个哈尔小波的basis function：

$$\sqrt{2}\psi(2n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \le n \le 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \le n \le 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\sqrt{2}\psi(2n)$:

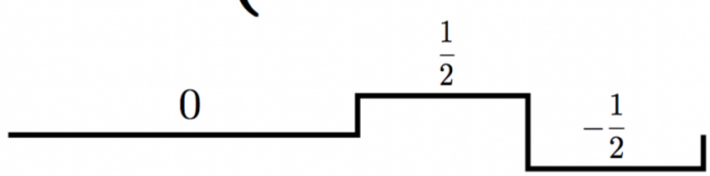


同理，我们可以一直这样推广下去做scale，得到4n，8n，…….下的basis function。当然在这个例子里，我们信号长度就是8，所以做到4n就够了。但推广来说，就是这种scaling对母小波的作用为 $2^{j/2}\psi(2^j n)$，这是归一化后的表示形式。

平移的话也很简单，我们可以对母小波进行平移，也可以对scale之后的basis function进行平移。比如对上一幅图中的basis function进行平移，就成了

$$\sqrt{2}\psi(2n-8) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 5 \le n \le 6 \\ -\frac{1}{2} & 7 \le n \le 8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\sqrt{2}\psi(2n-8)$:



看得出来，平移后的basis function和母小波以及仅仅scale过的小波，都是正交的，附合小波basis的特点。如果我们用ψ(n)来表示这个mother wavelet，那么这些orthonormal basis函数可以写成：

$$\psi_{j,k}(n) = 2^{j/2}\psi(2^j n - kN)$$

这里的k是可以看成时域的参数，因为它控制着小波基时域的转移，而j是频域的参数，因为它决定了小波基的频率特性。看到这里，你应该会感觉很熟悉，因为这里的平移和变换本质和刚才对scaling function的平移变换是一模一样的。

这样，我们就有了针对此信号space的哈尔小波basis组合：

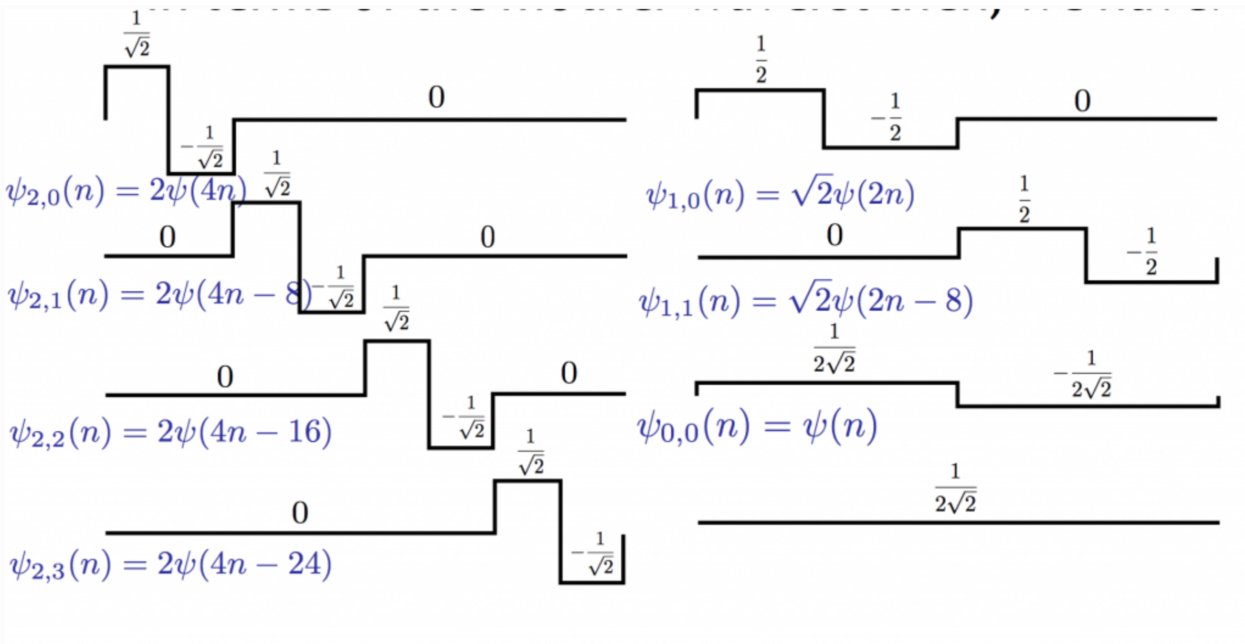


图1

可以看出，我们用到了三层频率尺度的小波函数，每往下一层，小波的数量都是上面一层的两倍。在图中，每一个小波基函数的表达形式都写在了波形的下面。
等等，你可能已经发现了，有问题。这里为什么多了个没有函数表达式的波形呢？这货明显不是wavelet function阿。没错，它是之前提到的scaling function，也就是父小波。然后你可能就会问，为啥这个凭空插了一个scaling function出来呢？明明目标信号已经可以用纯的小波基组合表示了。是，确实是，就算不包括scaling function，这些小波函数本身也组成了正交归一基，但如果仅限于此的话，小波变换也就没那么神奇的功效了。引入这个scaling function，才能引入我们提到的多解析度分析的理论，而小波变换的强大，就体现在这个多解析度上。

那在这里，我们怎么用这个多解析度呢？这个哈尔小波basis组合是怎么通过多解析度推导出来的呢？

话说在数学定义中，有一种空间叫Lebesgue空间，对于信号处理非常重要，可以用L^p(R)表示，指的是由p次可积函数所组成的函数空间。我们在小波变换中要研究的信号都是属于L^2(R)空间的，这个空间是R上的所有处处平方可积的可测函数的集合，这样就等于对信号提出了一个限制，就是信号能量必须是有限的，否则它就不可积了。小波变换的定义都是基于但不限于L^2(R)中的信号的。这玩意的特性要具体解释起来太数学了，牵涉到太多泛函知识，我就不在这里详述了。而且老实说我也没能力完全讲清楚，毕竟不是学这个的，有兴趣可以参考wiki。总之你记住，小波变换研究中所使用的信号基本都是平方可积的信号，但其应用不限于这种信号，就行了。

对L^2(R)空间做MRA是在干嘛呢？就是说，在L^2(R)空间中，我们可以找出一个嵌套的空间序列$\{V_j\}_{j\in Z}$，并有下列性质：

(i) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset L^2(R)$

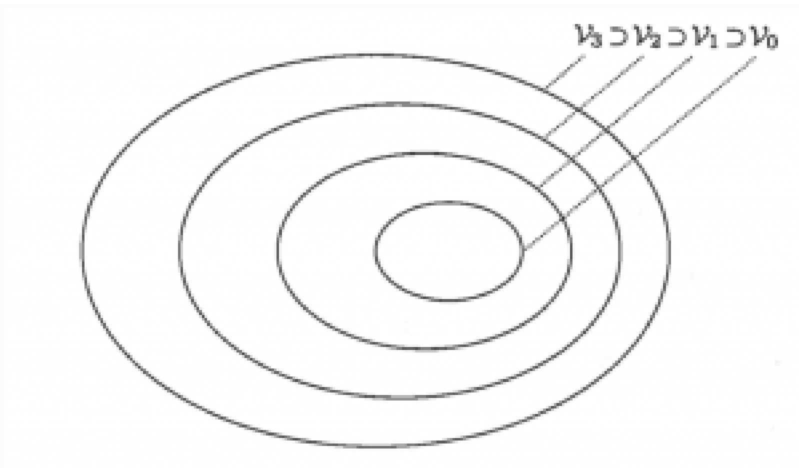
(ii) $\bigcap_j V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_j V_j} = L^2(R)$

(iii) $f(t) \in V_j \Longleftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$

(iv) $f(t) \in V_0 \Longrightarrow f(t-k) \in V_0$

(v) 有这样一个方程$\varphi(t)$，$\varphi(t-k)$是V_0 的orthonormal basis。

我来简单解释一下这些性质。这个V_j都是L^2(R)空间中的子空间，然后他们是由小到大的，交集是{0}，因为这是最小的子空间，并集就是L空间。是不是有点难以理解？没关系，看看下面这个图就清楚了：



这个图是圈圈套圈圈，最里面的圈是V0，之后分别是V1，V2，V3，V4 。那他们有趣的性质就是，假如有一个函数f(t)他属于一个某空间，那你将其在时域上平移，它还是属于这个空间。但如果你对它频域的放大或缩小，它就会相应移到下一个或者上一个空间了。

同时我们还知道，你要形容每一个空间的话，都需要有对应的orthonormal basis，这是必然的，那对于V0来讲，它的orthonormal basis就是

$$\varphi_k(t) = \varphi(t-k) \qquad k \in \mathbf{Z} \qquad \varphi \in L^2.$$

这一系列函数是什么呢？是$\varphi(t)$的时域变换，而且我们刚才也说了，时域上平移，是不会跳出这个空间的。这样，我们就可以说，由这一系列basis所定义的L^2(R)子空间V0被这些basis所span，表示成：

$$\mathcal{V}_0 = \overline{\operatorname*{Span}_k\{\varphi_k(t)\}}$$

k从负无穷到正无穷。上面的bar表示这是一个闭包空间，也就是说

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi_k(t) \quad \text{for any} \quad f(t) \in \mathcal{V}_0.$$

这样，我们就定义了基本的V0这个子空间。刚才说了，这个子空间的基都是对$\varphi(t)$的整数时域变换，这里我们称$\varphi(t)$为scaling function，所以换个说法，就是说这里整个子空间V0，由scaling function和其时域变换的兄弟们span。

当然，如果这个scaling function只是用来代表一个子空间的，那它的地位也就不会这么重要了。刚才我们提到，这个嵌套空间序列有一个性质，$f(t) \in V_j \Longleftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$。这就是这个函数，如果你对它频域的放大或缩小，它就会相应移到下一个或者上一个空间了。这个性质就有意思了，它代表什么呢？对于任何一个包含V0的更上一层的空间来讲，他们的基都可以通过对scaling function做频域的scale后再做时域上的整数变换得到！推广开来就是说，当

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$$

我们有

$$\mathcal{V}_j = \overline{\operatorname*{Span}_k \{\varphi_k(2^j t)\}} = \overline{\operatorname*{Span}_k \{\varphi_{j,k}(t)\}}$$

这也就意味着，对于任何属于V_j空间的函数f(t)，都可以表示为：

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi(2^j t + k).$$

到这里，我们就明白这些个子空间和那个凭空冒出来的scaling function的作用了。scaling的构建这些不同的子空间的基础，当j越大的时候，每一次你对频率变换后的scaling function所做的时域上的整数平移幅度会越小，这样在这个j子空间里面得到的f(t)表示粒度会很细，细节展现很多。反之亦然。通俗点说，就是对scaling function的变换平移给你不同的子空间，而不同的子空间给你不同的分辨率，这样你就可以用不同的分辨率去看目标信号。

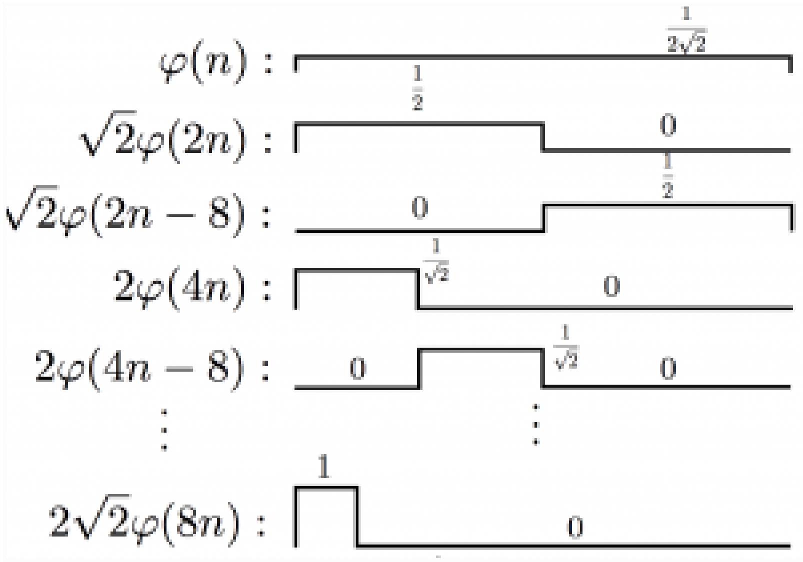
下面就是时候看看什么是MRA equation了，这是更加有趣，也是更加核心的地方。

通过刚才的讲解，V0属于V1，那scaling function $\varphi(t)$ 是在V0中的，自然也在V1中了。我们把他写成V1的基的线性组合，那就是

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\,\varphi(2t-n), \quad n \in \mathbf{Z}$$

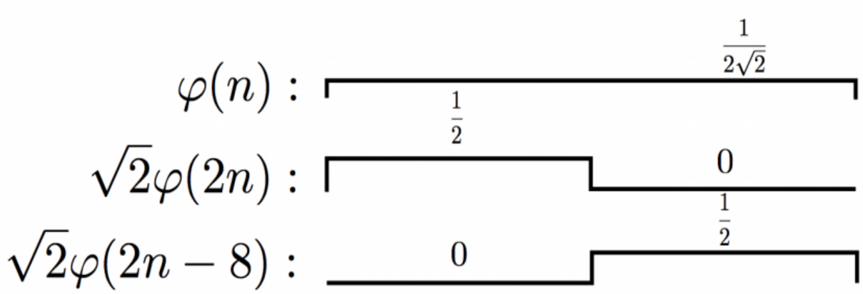
其中的h(n)是scaling function的系数，也叫做scaling filter或者scaling vector，可以是实数，也可以是虚数。根号2是为了维持norm为1的。看，在这个公式里，我们就把属于V0的函数用V1的基表示出来了。同理，我们可以循环如此，把属于V0的 $\varphi(t)$ 在V2, V3, …, Vn中表示出来。这些方程就是MRA equation，也叫refinement equation，它是scaling function理论的基础，也是小波分析的基础之一。

好，稍微总结一下。到现在，已经讲了关于scaling function的基本理论知识，知道了信号空间可以分为不同精细度的子空间，这些子空间的basis集合就是scaling function或者频率变换之后的scaling function，如下图所示：



上图就是四个子空间的basis集合的展览。通过前面的讨论，我们还知道，一开始的scaling function可以通过更精细的子空间的scaling function（它们都是对应子空间的basis）来构建。比如

$$\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\varphi(2n)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\varphi(2n-8)\right)$$



对于更加finer的scale：

$$\varphi(n) = \frac{1}{2}\left(2\varphi(4n)\right) + \frac{1}{2}\left(2\varphi(4n-8)\right) + \frac{1}{2}\left(2\varphi(4n-16)\right) + \frac{1}{2}\left(2\varphi(4n-24)\right)$$

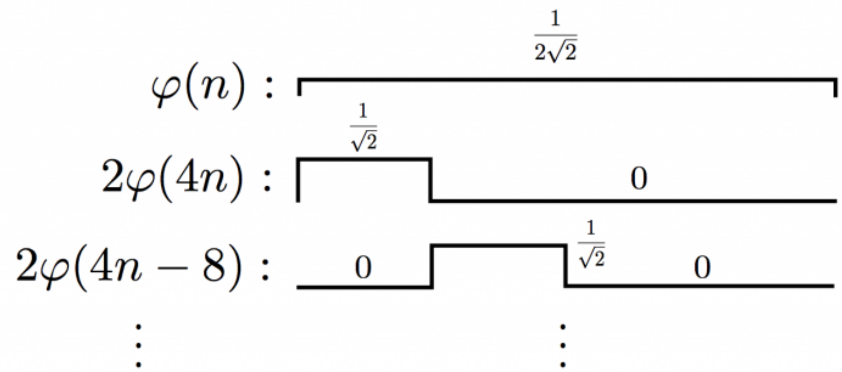


图2

依此类推。实际上，对于任何scale和translate过的scaling function，都可以用更加精细的scale层面上的scaling function构建出来。

然后，我们有各种scale下的scaling function了，该看看它们分别所对应的嵌套的空间序列$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$了。先看看V0，自然就是以基本的scaling function为基础去span出来的：

$$\mathcal{V}_0 = \mathrm{span}\{\varphi(n)\}$$

这个不新鲜，刚才就讲过了。这个子空间代表什么样的信号？常量信号。道理很简单，这个scaling function在整个信号长度上，没有任何变化。继续往下看：

$$\mathcal{V}_1 = \mathrm{span}\{\sqrt{2}\varphi(2n), \sqrt{2}\varphi(2n-1)\}$$

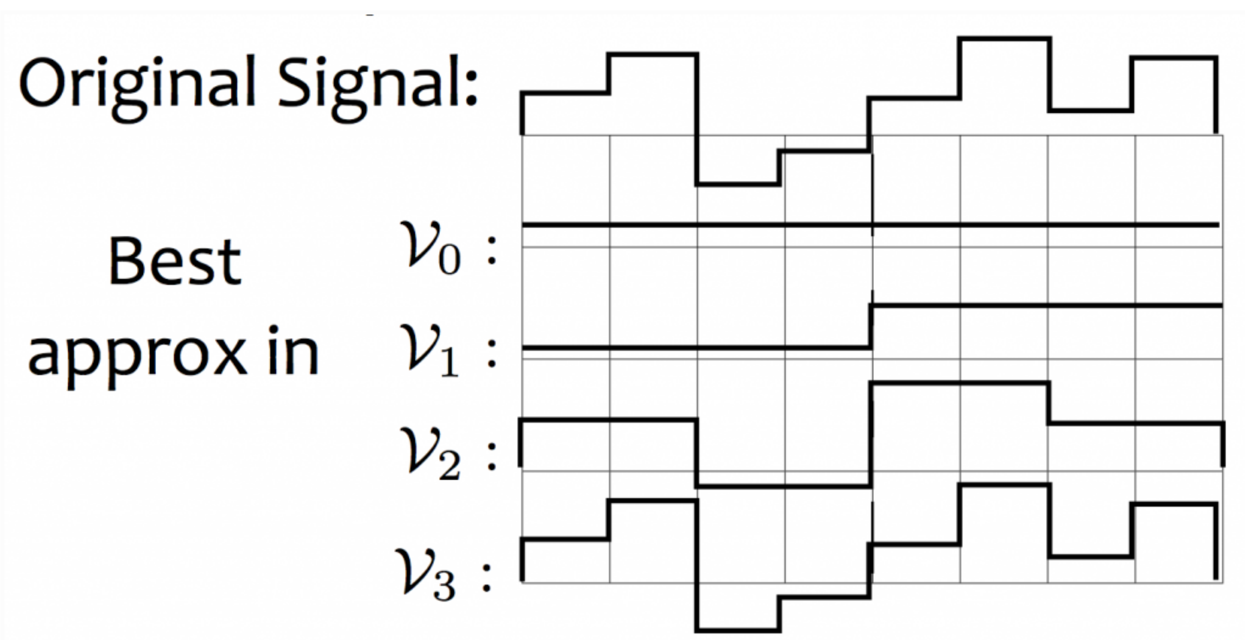
这个相比V0更加finer的子空间，代表着这样一种信号，它从1-4是常量，从5-8是另一个常量。同理我们有：

$$\mathcal{V}_2 = \text{span}\{2\varphi(4n - 8k), k = 0, 1, 2, 3\}$$
$$\mathcal{V}_3 = \text{span}\{4\varphi(8n - 8k), k = 0, \ldots, 7\}$$

V2代表的信号，是分别在1，2; 3，4; 5，6; 7，8上有相同值的信号。那么V3呢？则表示任何信号，因为对于V3来讲，任何一个时间刻度上的值都可以不一样。而且现在，我们也可以通过上面的一些scaling functions的波形验证了之前提到的多解析度分析中的一个核心性质，那就是：

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3$$

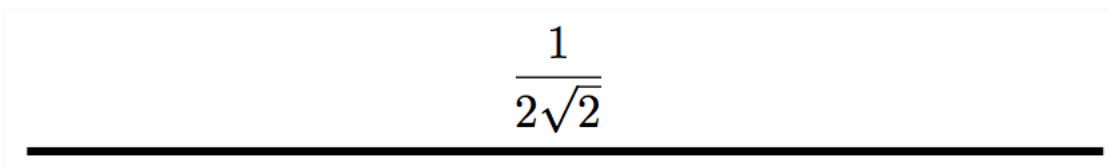
我们之前讲了一堆多解析度的理论，但直到现在，通过这些图形化的分析，我们可能才会真正理解它。那好，既然我们有一个现成的信号，那就来看看，对这个信号作多解析度分析是啥样子的：



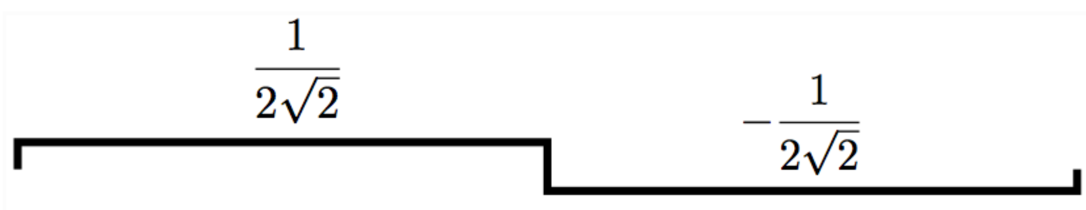
你看，在不同的子空间，对于同一个信号就有不同的诠释。诠释最好的当然是V3，完全不损失细节。这就是多解析度的意义。我们可以有嵌套的，由scaling function演变的basis function集合，每一个集合都提供对原始信号的某种近似，解析度越高，近似越精确。

说到这里，可能你对scaling function以及多解析度分析已经比较理解了。但是，我们还没有涉及到它们在小波变换中的具体应用，也就是还没有回答刚才那个问题：凭空插了一个scaling function到小波basis组合中干嘛。也就是说，我们希望理解scaling function是怎么和小波函数结合的呢，多解析度能给小波变换带来什么样的好处呢。这其实就是是小波变换中的核心知识。理解了这个，后面的小波变换就是纯数学计算了。

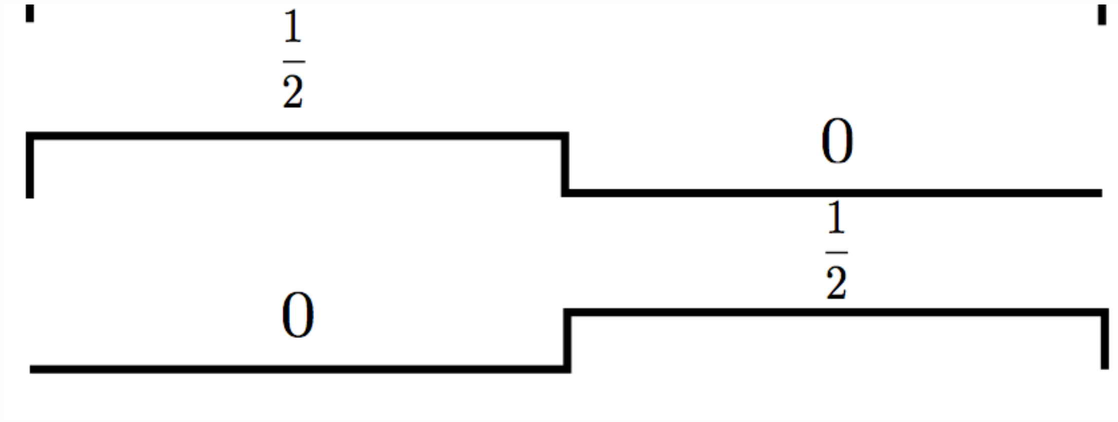
好，我们已经知道，对于子空间V0，basis是scaling function：



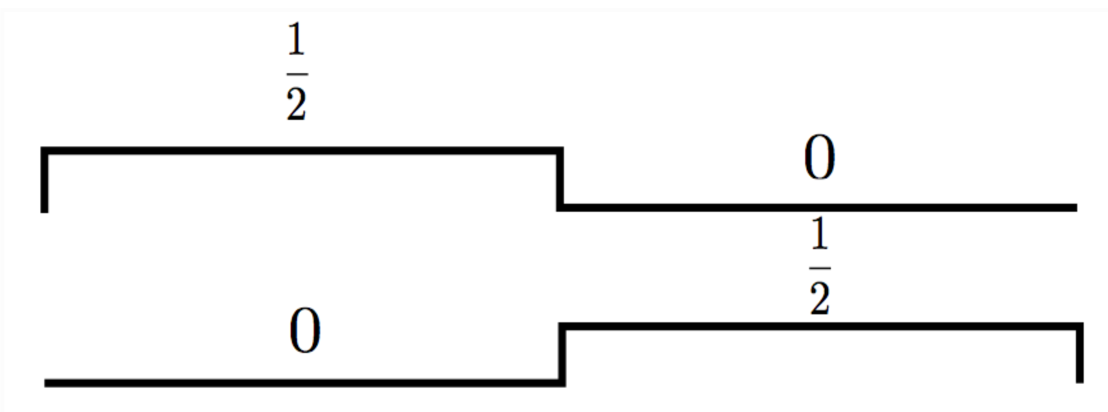
对应的小波函数是：



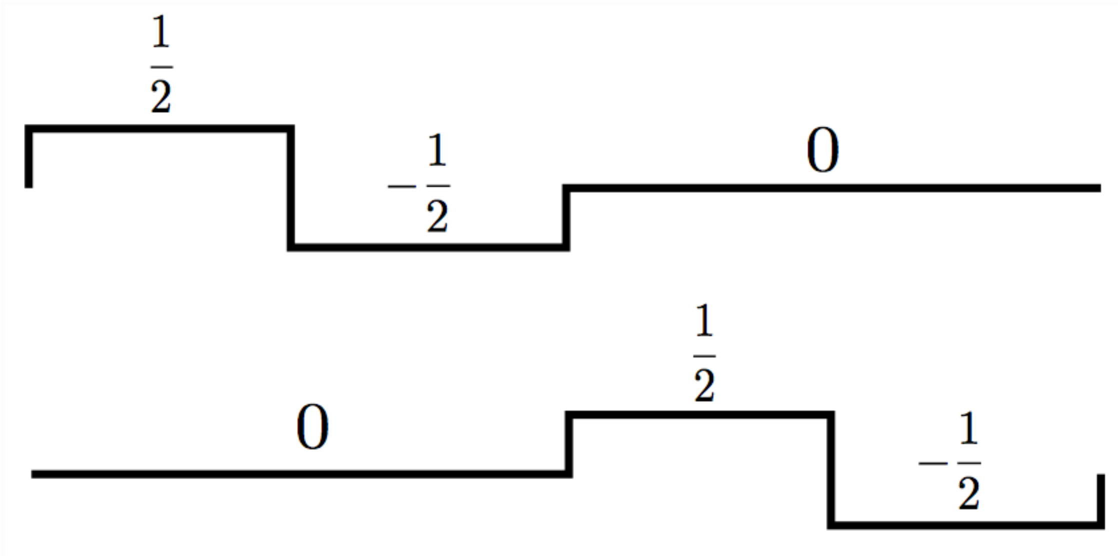
然后子空间V1的basis集合是这俩哥们：



看出什么规律了么？多看几次这三个图，你会惊讶地发现，在V0中的scaling function和wavelet function的组合，其实就是V1中的basis！继续这样推导，V1本来的的basis是：



然后V1中对应的wavelet function是



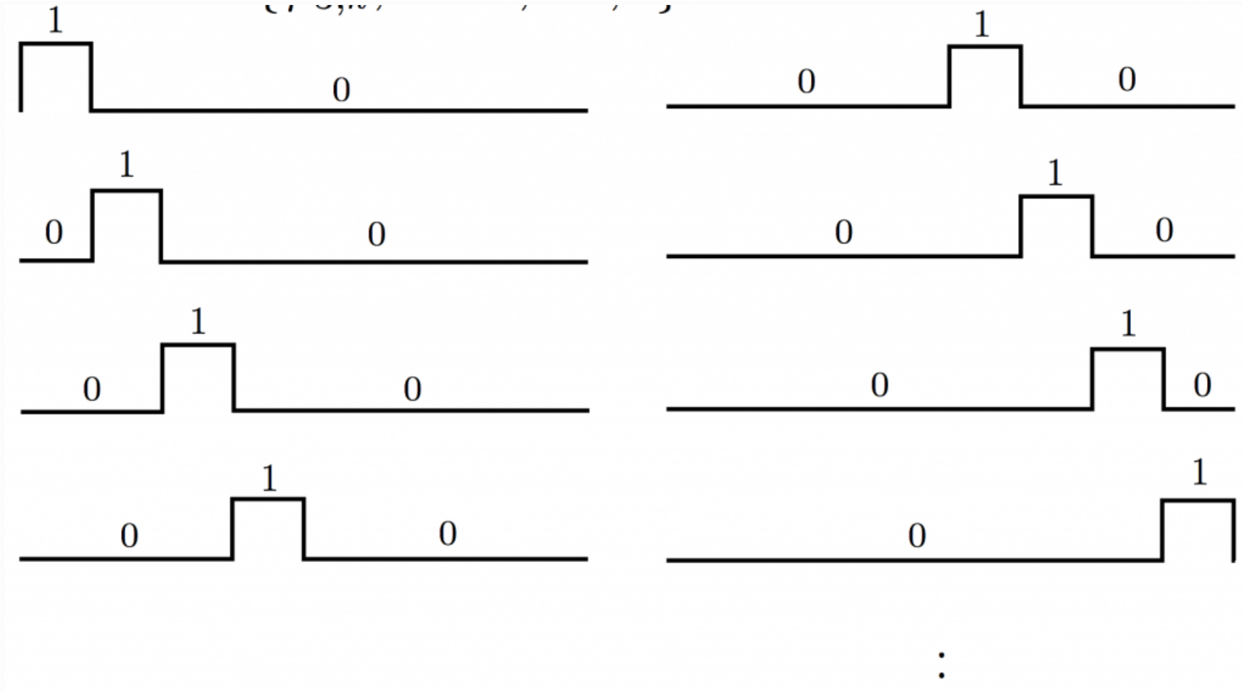
他们的组合，本质上也就是V2的basis（参考图2）。你继续推导下去，会得到同样的结论：在scale j的wavelet function，可以被用来将Vj的basis扩展到V(j+1)中去！这是一个非常非常关键的性质，因为这代表着，对任何一个子空间Vj，我们现在有两种方法去得到它的orthonormal basis：

1. 一种就是它本来的basis $\varphi_{j,k}$，对任意k。
2. 第二种就是它上一个子空间的basis $\varphi_{j-1,k}$，对任意k，以及上一级子空间的wavelet function $\psi_{j-1,k}$，对任意k。

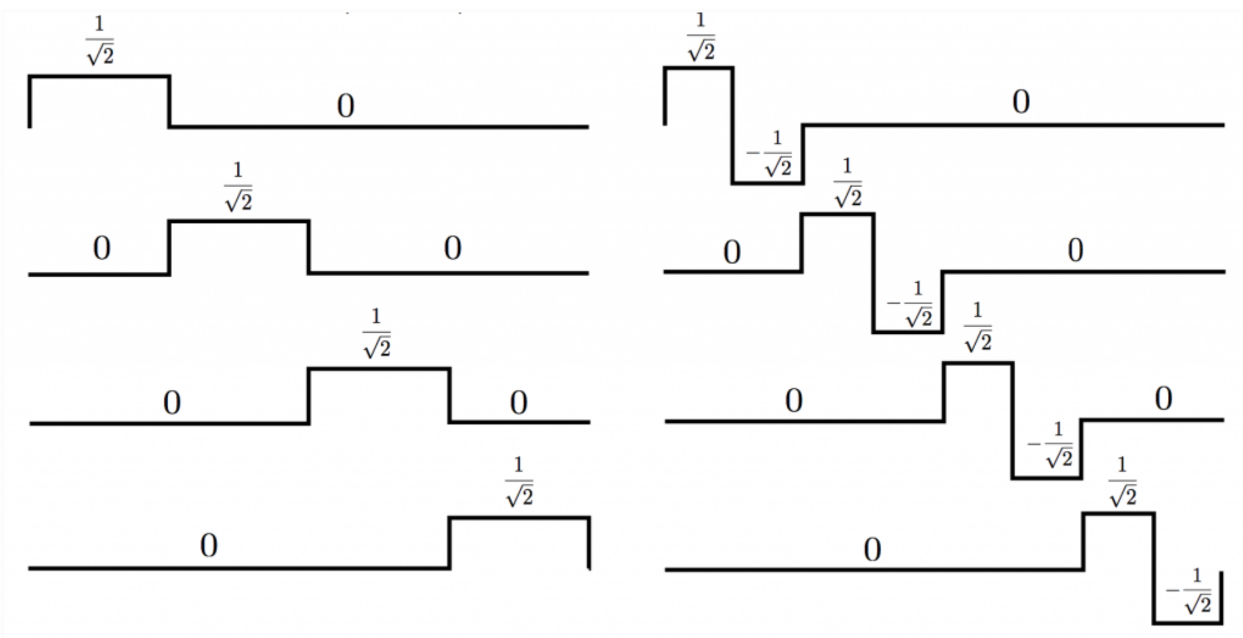
第二种选择能给我们带来额外的好处，那就是我们可以循环不断地用上一级子空间的scaling function以及wavelet function的组合来作为当前子空间的基。

换句话说，如果针对V3这个子空间，它实际上就有四种不同的，但是等价的orthonormal basis：

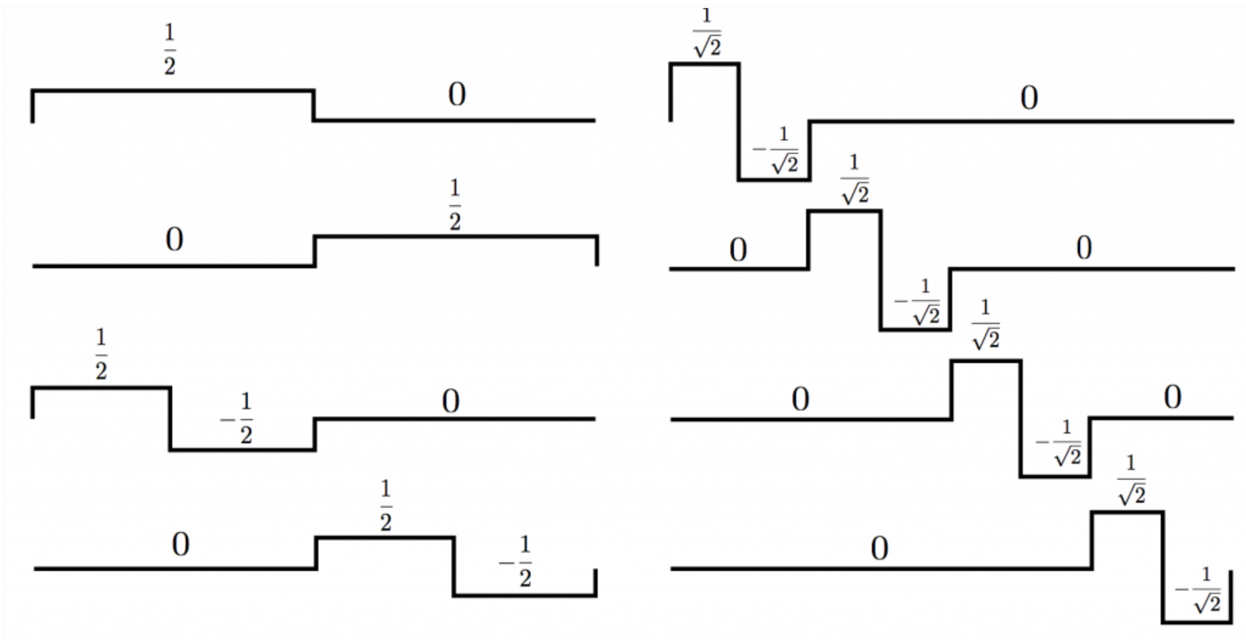
1. 本级(V3)的scaling function basis set



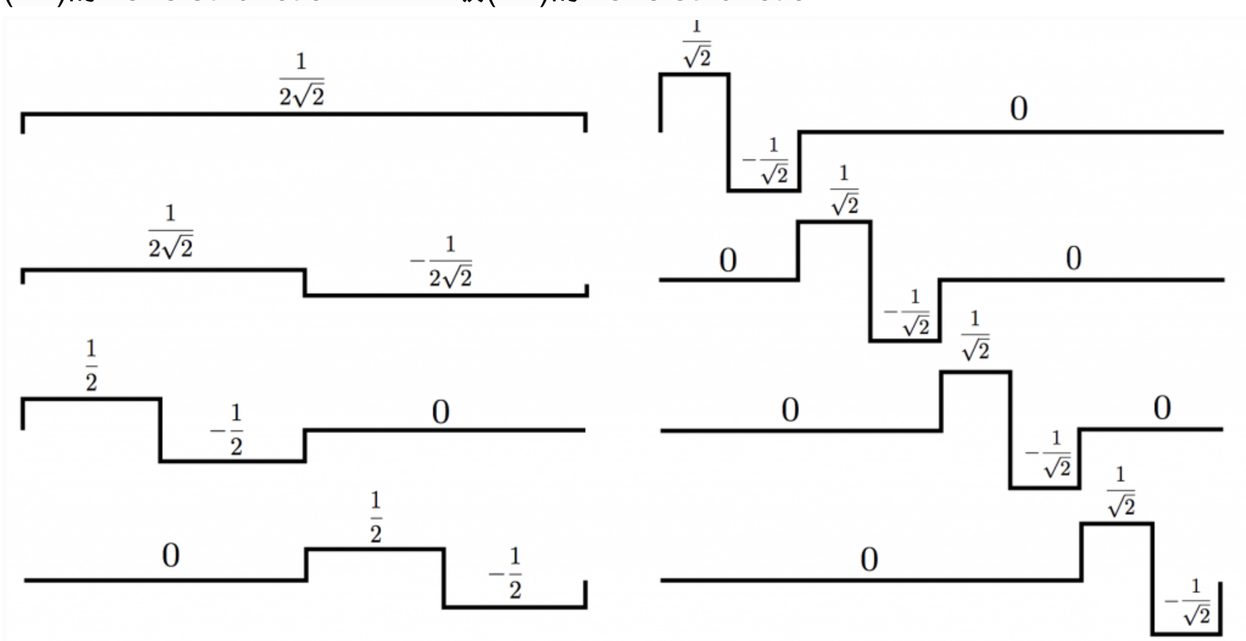
2. 上一级(V2)的scaling function + wavelet function;



3．上上一级(V1)的scaling function + 上上一级(V1)的wavelet function + 上一级(V2)的wavelet function;



4. 上上上一级(V0)的scaling function + 上上上一级(V0)的wavelet function + 上上一级(V1)的wavelet function + 上一级(V2)的wavelet function



好，看看最后一种选取方式，有没有感到眼熟？对了，它就是我们之前提到的“针对此信号space的哈尔小波basis组合”，参见图1。现在我们知道了，这个scaling function不是凭空插进去的，而是通过不断的嵌套迭代出来的：)

那为什么我们最后选定的是这种选取方式呢？实际上，刚才介绍的这个性质已经告诉我们，对于任何的scale j0，我们都可以给我们的signal space找到一组orthonormal basis，这个basis是通过组合scale j0上的scaling function以及所有在scale j，j>=j0上的wavelets得到的。这样，基于这个orthonormal basis，所有信号空间中的信号都可以写成组成这个basis的functions的线性组合：

$$s(n) = \sum_k c_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(n) + \sum_{j>j_0}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(n)$$

对应的系数的计算和平常一样：

$$c_{j_0,k} = \langle s(n), \varphi_{j_0,k}(n)\rangle$$

$$d_{j,k} = \langle s(n), \psi_{j,k}(n)\rangle$$

这，就是最终的，也是最核心的，小波变换形式。不管是信号压缩，滤波，还是别的方式处理，只要是用小波变换，都逃不出这个基础流程：

1. 选取合适的wavelet function和scaling function，从已有的信号中，反算出系数c和d
2. 对系数做对应处理
3. 从处理后的系数中重新构建信号

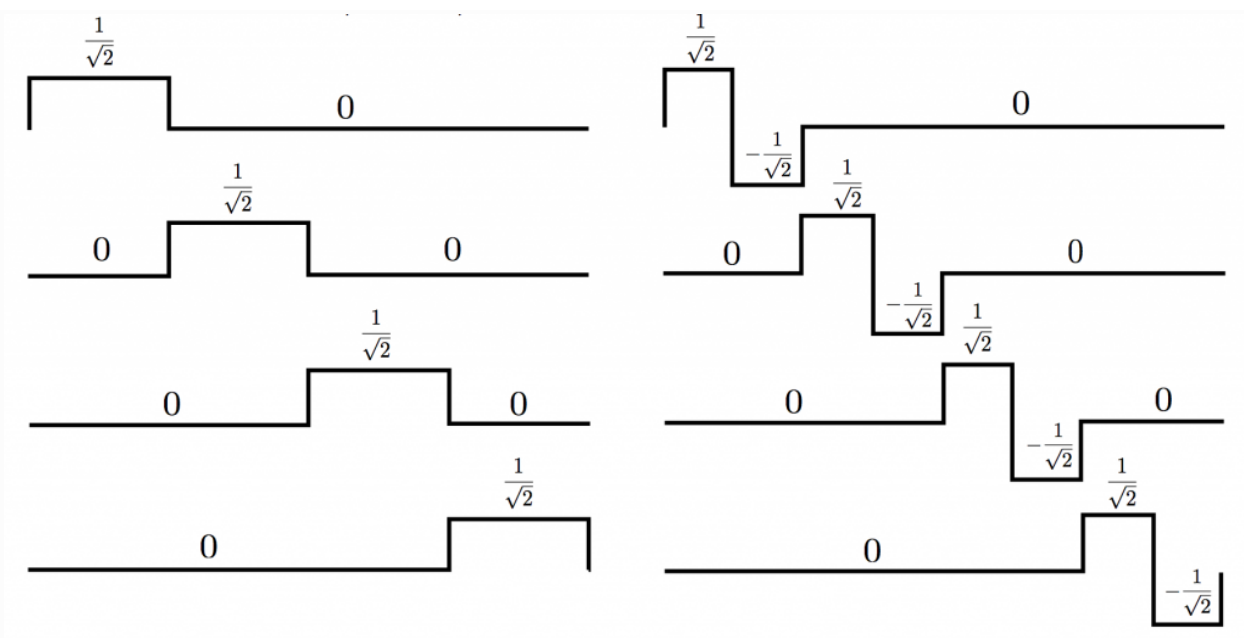
这里的系数处理是区别你的应用的重点。比如图像或者视频压缩，就希望选取能将能量聚集到很小一部分系数中的小波，然后抛弃那些能量很小的小波系数，只保留

少数的这些大头系数，再反变换回去。这样的话，图像信号的能量并没有怎么丢失，图像体积却大大减小了。

还有一个没有解释的问题是，为什么要强调尺度函数和小波函数组成一个orthonormal basis呢？计算方便是一方面，还有一个原因是，如果他们满足这个性质，就满足瑞利能量定理，也就是说，信号的能量，可以完全用每个频域里面的展开部分的能量，也就是他们的展开系数表示：

$$\int |g(t)|^2 \, dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c(l)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_j(k)|^2$$

到这里，我们对小波变换的形式就讲完了。虽然是用的最简单的哈尔小波为例子，但举一反三即可。我们着重介绍了多解析度分析以及它给小波变换带来的杀手锏：时域频域同时定位。结束之前，再多说几句小波变换的意义。我们拿刚才例子中V3子空间的第二种可选择的orthonormal basis作为例子：



左边这四个basis组成元素，也就是scaling functions，的系数，表征的是信号的local平均（想想它们和信号的内积形式），而右边的这四个basis组成元素，也就是

wavelet functions，的系数则表征了在local平均中丢失的信号细节。得益于此，多解析度分析能够对信号在越来越宽的区域上取平均，等同于做低通滤波，而且，它还能保留因为平均而损失的信号细节，等同于做高通滤波！这样，我们终于可以解释了wavelet function和scaling function背后的物理意义了：wavelet function等同于对信号做高通滤波保留变化细节，而scaling function等同于对信号做低通滤波保留平滑的shape！

对小波变换的基础知识，我们就讲到这里。需要注意的是，这只是小波变换最基本最基本的知识，但也是最核心的知识。掌握了这些，代表你对小波变换的物理意义有了一定的了解。但对于小波变换本身的讲解，一本书都不一定能将讲透，还有很多的基础知识我都没有讲，比如如何构建自己的scaling function，选取合适的系数集h[k]，并由此构建自己的wavelet functions。所以，如果有深入下去研究的同学，好好买一本书来看吧。而只是希望用小波变换来服务自己的应用的同学，个人觉得这些知识已经足够让你用来起步了。