ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить решение линейных дифференциальных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Методы операционного исчисления предполагают реализацию следующей условной схемы решения задачи:

1). От искомых функций переходят к некоторым другим функциям – их изображениям.
2). Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями.
3). Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям.

В качестве преобразований, позволяющих перейти от функций к их изображениям и обратно, будем применять т.н. прямое и обратное преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа

I. Оригиналы и изображения.

Основными понятиями ОИ являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ от действительной переменной t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:
1). $f(t)\equiv 0$ при $t<0$.
2). $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t\geq 0$, т.е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причём на каждом конечном промежутке оси Ot таких точек лишь конечное число.
3). Существуют такие числа $M>0$ и $s_0\geq 0$, что $\forall t\geq 0\ \left(|f(t)|\leq Me^{s_0 t}\right)$, т.е. функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Наименьшее из всех чисел s_0, удовлетворяющих указанному неравенству, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Условия 1) – 3) выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы. Первое условие означает, что процесс начинается с момента времени $t=0$. Третьему условию удовлетворяют ограниченные функции (для них показатель роста $s_0=0$), степенные функции $t^n\ (n>0)$ (т.к. степенная функция растёт медленнее любой показательной) и многие другие функции.

Примеры «неоригиналов»: $f(t)=\dfrac{1}{t}$, $g(t)=3e^{t^2}$, $h(t)=\sin\dfrac{1}{t-1}$, $l(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{tg} t, & t\geq 0.\end{cases}$

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ комплексной переменной $p=s+i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к его изображению $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*. При этом соответствие между оригиналом и изображением записывается в виде $f(t)\doteqdot F(p)$ или $L\left[f(t)\right]=F(p)$.

<u>Замечание</u>: Принято оригиналы обозначать малыми латинскими или греческими буквами, а их изображения – соответствующими большими буквами.

<u>Теорема 1 (существование изображения)</u>: Для любого оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$, которое определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re}p=s>s_0$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$.

$\rhd$ Докажем существование изображения:
Пусть $p=s+i\sigma$ – произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re}p=s>s_0$. Учитывая, что $|f(t)|\le Me^{s_0t}$, получим:

$$|F(p)|=\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|\le\int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt\le M\int_0^{+\infty}e^{s_0t}\left|e^{-t(s+i\sigma)}\right|dt=$$

$$=\left[\left|e^{-t(s+i\sigma)}\right|=\left|e^{-ts}\left(\cos t\sigma-i\sin t\sigma\right)\right|=e^{-ts}\left|\cos t\sigma-i\sin t\sigma\right|=e^{-st}\right]=$$

$$=M\int_0^{+\infty}e^{s_0t}e^{-st}dt=M\int_0^{+\infty}e^{(s_0-s)t}dt=\frac{M}{s_0-s}e^{(s_0-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{M}{s-s_0}\,.$$

Т.о., несобственный интеграл (1) абсолютно сходится, т.е. изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re}p=s>s_0$. $\lhd$

<u>Следствие (необходимый признак существования изображения)</u>: Если функция $F(p)$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$.

$\rhd$ При доказательстве теоремы 1 получена оценка: $|F(p)|\le\dfrac{M}{s-s_0}$, где $M=const$, а $s=\operatorname{Re}p$.

Поскольку $s\to\infty$ при $p\to\infty$, то и $|F(p)|\underset{p\to\infty}{\to}\infty$, откуда $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$. $\lhd$

<u>Теорема 2 (о единственности оригинала)</u>: Если функция $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

Справедливость данного утверждения следует из того факта, что интеграл (1) не изменится, если функцию $f(t)$ заменить другой функцией, отличающейся от $f(t)$ в не более чем счётном количестве точек.

Пример: Найдём изображение *единичной функции Хевисайда* $1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$

Очевидно, данная функция является оригиналом.
По формуле (1) при $s=\operatorname{Re}p>0$ $\left(s_0=0\right)$ находим:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{-p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=0-\frac{1}{-p}=\frac{1}{p}.$$ Т.о., $1(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, или $1\risingdotseq\frac{1}{p}$.

Замечание: В дальнейшем функцию оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая $f(t)=f(t)\cdot 1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f(t), & t\ge 0.\end{cases}$

Пример: Найдём изображение функции $f(t)=e^{at}$, где a – любое действительное число.
Очевидно, данная функция является оригиналом. По формуле (1) при $\operatorname{Re}p>a$ получим:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{at}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{-(p-a)}e^{-(p-a)t}\Big|_0^{+\infty}=0-\frac{1}{-(p-a)}=\frac{1}{p-a}.$$ Т.о., $e^{at}\risingdotseq\frac{1}{p-a}$.

Пример: Найдём изображение функции $f(t)=t$.
Очевидно, данная функция является оригиналом. По формуле (1) при $\operatorname{Re}p>0$ получим:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}t\cdot e^{-pt}dt=\left[\begin{matrix}u=t; & du=dt\\ dv=e^{-pt}dt; & v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right]=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\cdot t\Big|_0^b-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{p^2}.$$ Т.о., $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$.

II. Свойства преобразования Лапласа.

Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$, $g(t)\risingdotseq G(p)$. Непосредственно из свойств несобственных интегралов $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$ и $G(p)=\int\limits_0^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt$ получаем следующие свойства преобразования Лапласа:

1°. *Линейность*: $\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$ $\left(c_1f(t)+c_2g(t)\risingdotseq c_1F(p)+c_2G(p)\right)$, т.е. линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

$$\triangleright\ c_1f(t)+c_2g(t)\risingdotseq\int\limits_0^{+\infty}\left(c_1f(t)+c_2g(t)\right)e^{-pt}dt=c_1\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt+c_2\int\limits_0^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt=c_1F(p)+c_2G(p)\ \triangleleft$$

Пример: Найдём изображение функции $\sin t$:

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\risingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Аналогично находим: $\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}$, $\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{1}{p^2-1}$, $\operatorname{ch}t\risingdotseq\frac{p}{p^2-1}$.

2°. *Подобие*: $\forall\lambda>0\ \left(f(\lambda t)\fallingdotseq\dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)\right)$, т.е. умножение оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

$$\rhd\ \ f(\lambda t)\fallingdotseq\int\limits_0^{+\infty}f(\lambda t)\cdot e^{-pt}dt=\left[\begin{array}{l}\lambda t=\tau,\\ t=\dfrac{1}{\lambda}\tau,\\ dt=\dfrac{1}{\lambda}d\tau,\\ t\in[0;+\infty)\end{array}\right]=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}\cdot\frac{1}{\lambda}d\tau=\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{p}{\lambda}\right)\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)\ \lhd$$

Пример: Т.к. $\sin t\fallingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}$, то $\forall\omega>0\ \ \sin\omega t\fallingdotseq\dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=\dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{\omega^2}{p^2+\omega^2}=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Аналогично находим: $\cos\omega t\fallingdotseq\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{sh}\omega t\fallingdotseq\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{ch}\omega t\fallingdotseq\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

3°. *Затухание (смещение изображения)*: $\forall a\in\mathbb{C}\ \left(e^{at}f(t)\fallingdotseq F(p-a)\right)$, т.е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечёт за собой смещение аргумента изображения.

$$\rhd\ \ e^{at}\cdot f(t)\fallingdotseq\int\limits_0^{+\infty}e^{at}\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-(p-a)t}dt=F(p-a)\ \lhd$$

Благодаря этому свойству можно значительно расширить таблицу соответствий между оригиналами и изображениями:

$$e^{at}\sin\omega t\fallingdotseq\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2};\qquad e^{at}\cos\omega t\fallingdotseq\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2};$$

$$e^{at}\operatorname{sh}\omega t\fallingdotseq\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2};\qquad e^{at}\operatorname{ch}\omega t\fallingdotseq\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

Пример: Найти оригинал $f(t)$, если известно его изображение $F(p)=\dfrac{3p+2}{p^2-4p+13}$.

$$F(p)=\frac{3p+2}{p^2-4p+13}=\frac{3p+2}{(p-2)^2+9}=\frac{3(p-2)+8}{(p-2)^2+3^2}=3\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+3^2}+\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{(p-2)^2+3^2}.$$

Поэтому по свойствам 1° и 3° $f(t)=3e^{2t}\cos 3t+\dfrac{8}{3}e^{2t}\sin 3t$ (это – лишь один из бесконечного множества оригиналов).

4°. *Запаздывание (смещение оригинала)*: $\forall\tau>0\ \left(f(t-\tau)\fallingdotseq e^{-p\tau}F(p)\right)$, т.е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

$$\triangleright \; f(t-\tau) \doteqdot \int\limits_{0}^{+\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} t-\tau = t_1, \\ t = t_1+\tau, \\ dt = dt_1, \\ t_1 \in [-\tau; +\infty) \end{bmatrix} = \int\limits_{-\tau}^{+\infty} f(t_1)\cdot e^{-p(t_1+\tau)}dt_1 = \int\limits_{-\tau}^{0} 0\cdot e^{-p(t_1+\tau)}dt_1 +$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty} f(t_1)\cdot e^{-p(t_1+\tau)}dt_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t_1)\cdot e^{-pt_1}\cdot e^{-p\tau}dt_1 = e^{-p\tau}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t_1)\cdot e^{-pt_1}dt_1 = e^{-p\tau}F(p) \; \triangleleft$$

Графики функций $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо. Т.о., функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с запаздыванием на время τ.

Свойство запаздывания удобно применять при нахождении изображений функций, описываемых на разных участках разными аналитическими выражениями.

Запаздывающую функцию $g(t) = \begin{cases} f(t-\tau), & t \ge \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$ записывают с помощью единичной функции Хевисайда: $g(t) = f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$, и уже к ней применяют свойство запаздывания: $f(t) \doteqdot F(p) \;\; \Rightarrow \;\; g(t) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$.

__*Пример*__: Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} t+1, & t \ge 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

$$f(t) = (t+1)\cdot 1(t-2) = \big((t-2)+3\big)\cdot 1(t-2) \doteqdot \left[g(t) = t+3 \doteqdot \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p} \right] \doteqdot e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p}\right).$$

Функцию Хевисайда применяют и в том случае, когда оригинал на разных участках задаётся разными аналитическими выражениями: $f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \le t < a_1, \\ f_2(t), & a_1 \le t < a_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ f_n(t), & a_{n-1} \le t < a_n \end{cases}$.

Для этого функцию записывают одним аналитическим выражением вида $f(t) = f_1(t)\cdot\eta(0,a_1) + f_2(t)\cdot\eta(a_1,a_2) + \ldots + f_n(t)\cdot\eta(a_{n-1},a_n)$, где $\eta(\alpha,\beta)$ – единичный импульс на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Очевидно, что $\eta(\alpha,\beta) = 1(t-\alpha) - 1(t-\beta)$.

<u>Пример</u>: Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0\le t<2,\\ 2, & 2\le t<3,\\ 5-t, & 3\le t<5,\\ 0, & t\ge 5.\end{cases}$

$$f(t)=t\big[1(t)-1(t-2)\big]+2\big[1(t-2)-1(t-3)\big]+(5-t)\big[1(t-3)-1(t-5)\big]=t\cdot 1(t)-(t-2)\cdot 1(t-2)-$$
$$-(t-3)\cdot 1(t-3)+(t-5)\cdot 1(t-5)\doteqdot\frac{1}{p^2}-e^{-2p}\frac{1}{p^2}-e^{-3p}\frac{1}{p^2}+e^{-5p}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-2p}-e^{-3p}+e^{-5p}\right).$$

<u>Замечание</u>: Если функция $f(t)$ является периодической с периодом *T*, то её изображение задаётся формулой: $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$.

5°. *<u>Дифференцирование оригинала</u>*: Если функции $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то $f'(t)\doteqdot p\cdot F(p)-f(0)$, **(1)**

$$f''(t)\doteqdot p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0);$$
$$f'''(t)\doteqdot p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

$\triangleright$ $f'(t)\doteqdot\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(t)\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}u=e^{-pt}, & du=-pe^{-pt}dt\\ dv=f'(t)dt, & v=f(t)\end{bmatrix}=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int_{-\tau}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt=$

$=-f(0)+pF(p)$.

Пользуясь полученным результатом, находим изображение 2-ой производной:

$$f''(t)=\big(f'(t)\big)'\doteqdot p\cdot\big(p\cdot F(p)-f(0)\big)-f'(0)=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0).$$

Аналогичным образом получим изображения производных любых порядков. $\triangleleft$

<u>Замечание</u>: Данные особенно просто выглядят при $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=0$. В этом случае $f'(t)\doteqdot p\cdot F(p)$, $f''(t)\doteqdot p^2\cdot F(p)$, …, $f^{(n)}(t)\doteqdot p^n\cdot F(p)$, т.е. *n*-кратному дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p^n.

Свойство 5° вместе со свойством линейности используется для решения линейных дифференциальных уравнений.

<u>Пример</u>: Найти изображение выражения $x'''(t)-5x''(t)+x'(t)-3x(t)+2$, если $x(0)=2$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.

6°. *<u>Дифференцирование изображения</u>*: $(-t)\cdot f(t)\doteqdot F'(p)$;

$$(-t)^2 \cdot f(t) \risingdotseq F''(p);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-t)^n \cdot f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p),$$

т.е. умножение оригинала на функцию $(-t)$ приводит к дифференцированию изображения.

$\rhd$ $F'(p) = \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right)'_p = \int\limits_0^{+\infty} \left(f(t) \cdot e^{-pt} \right)'_p dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(f(t) \cdot (-t) e^{-pt} \right) dt = \int\limits_0^{+\infty} \left((-t) f(t) \right) \cdot e^{-pt} dt$.

Поэтому оригиналом для $F'(p)$ будет $(-t) \cdot f(t)$.

Далее, $(-t)^2 f(t) = (-t) \cdot \left[(-t) \cdot f(t) \right] \risingdotseq \left(F'(p) \right)' = F''(p)$, и т.д… $\lhd$

Пример: Найдём изображение функции $f(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

$1 \risingdotseq \dfrac{1}{p} \;\Rightarrow\; (-t)^n \cdot 1 \risingdotseq \left(\dfrac{1}{p} \right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, откуда $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

С учетом свойства затухания получим: $e^{at} t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$.

Пример: Найдём изображение функции $f(t) = t \cdot \sin \omega t$:

$\sin \omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} \;\Rightarrow (-t) \cdot \sin \omega t \risingdotseq \left(\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)' = \dfrac{-2\omega p}{\left(p^2 + \omega^2 \right)^2}$, откуда $t \cdot \sin \omega t \risingdotseq \dfrac{2\omega p}{\left(p^2 + \omega^2 \right)^2}$.

С учетом свойства затухания получим: $e^{at} t \sin \omega t \risingdotseq \dfrac{2\omega (p-a)}{\left((p-a)^2 + \omega^2 \right)^2}$.

Аналогично получаем: $t \cdot \cos \omega t \risingdotseq \dfrac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2 \right)^2}$, $\quad t \cdot \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \dfrac{2\omega p}{\left(p^2 - \omega^2 \right)^2}$, $\quad t \cdot \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \dfrac{p^2 + \omega^2}{\left(p^2 - \omega^2 \right)^2}$.

7°. ***Интегрирование оригинала***: $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, т.е. интегрирование оригинала от 0 до t приводит к делению его изображения на p.

$\rhd$ Можно доказать, что функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau) d\tau$ является оригиналом. Пусть $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$.

Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем: $\varphi'(t) \risingdotseq p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$.

С другой стороны, $\varphi'(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \right)'_t = f(t)$, откуда $F(p) = p\Phi(p)$. Т.о., $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. $\lhd$

8°. *Интегрирование изображения*: Если $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho$ сходится, то $\dfrac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho$, деление оригинала на t соответствует интегрированию изображения от p до ∞.

$$\triangleright \int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho = \int\limits_p^{\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-\rho t}dt\right)d\rho = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_p^{\infty} e^{-\rho t}\,d\rho\right)f(t)dt = \int\limits_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{-\rho t}\Big|_p^{\infty}\right)f(t)dt = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)e^{-pt}dt,$$

чему соответствует оригинал $\dfrac{f(t)}{t}$ $\triangleleft$

Пример: Найти изображения функций $\dfrac{\sin t}{t}$ и $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

Т.к. $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, то $\dfrac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty}\left(\dfrac{1}{\rho^2+1}\right)d\rho = \operatorname{arctg}\rho\Big|_p^{\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$.

Применяя к полученному соотношению свойство интегрирования оригинала, получим:

$$\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p}{p} = \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

9°. *Умножение изображений*: $f(t)*g(t) \doteqdot F(p)\cdot G(p)$, где $f(t)*g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$ – *свёртка функций* $f(t)$ и $g(t)$.

Пример: Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

$\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2} = \dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$, а $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому $\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t * \sin t =$

$$= \int\limits_0^t \sin(\tau)\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{1}{2}\left(\cos(2\tau-t) - \cos t\right)d\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t - \cos t\cdot\tau\Big|_0^t\right) = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right).$$

Следствие (формула Дюамеля): Если $f(t)*g(t) \doteqdot F(p)\cdot G(p)$ и функция $f'(t)$ также является оригиналом, то $f'(t)*g(t) + f(0)\cdot g(t) \doteqdot p\cdot F(p)\cdot G(p)$.

10°. *Умножение оригиналов*: $f(t)\cdot g(t) \doteqdot \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\cdot G(p-z)dz$, где путь интегрирования – вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$.

Составим таблицу, устанавливающую соответствие между оригиналами и их изображениями:

f(t)	F(p)
1	$\dfrac{1}{p}$
$\sin(\alpha t)$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$sh(at)$	$\dfrac{a}{p^2-\alpha^2}$
$ch(at)$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$

f(p)	F(p)
$e^{-\alpha t}\sin(\alpha t)$	$\dfrac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\alpha t)$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{(n+1)}}$
$t\sin(\alpha t)$	$\dfrac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$t\cos(\alpha t)$	$\dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$

Ряды. Теория функций комплексной переменной. Преобразования Лапласа. Задачи и упражнения (стр. 45-48)
https://rep.bstu.by/handle/data/8566

Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления (стр. 48-60)
https://rep.bstu.by/handle/data/3393

Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. – Ч.2.

Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. − М.: Наука, 1981.

Аттестационная работа https://rep.bstu.by/handle/data/4487 . (стр. 30-48)
Варианты по списку в журнале. Оформлять в отдельной тетрадке.