***Принцип математической индукции.***

Рассмотрим множество натуральных чисел *N*. *Инструментом* для доказательства *истинности* утверждений относительно всех натуральных чисел является принцип *математической индукции*. Сформулируем его.

Пусть *P(n)* есть такое утверждение, что:

1. *P(1)* истинно, и
2. *для каждого* *k*, если *P(k)* истинно, то *P(k+1*) истинно.

Тогда *P(n*) истинно для любого натурального числа *n*.

В символической записи принцип математической индукции имеет вид:

.

Рассмотрим примеры.

*Пример 1.*

Докажем методом математической индукции, что  делится на *6* при любом натуральном показателе *n*, т.е. имеет место равенство: , где .

1. При *n = 1* имеем: . И, следовательно, *P(1)* – истинно.
2. Теперь покажем, что для , если *P(k)* истинно, то *P(k+1)* истинно. Предположим, что  делится на *6*, т. е.  для некоторого натурального числа *m.* Запишем утверждение для *(k+1)* и выполним *эквивалентные преобразования*.Имеем:

, где и .

Следовательно, утверждение верно для . При доказательстве мы использовали *свойства делимости целых чисел*.

Это утверждение мы можем доказать и через *сравнения*. Данное утверждение равносильно следующему:

 .

Имеем:

. Отсюда, возводя сравнение в степень:

. И наконец, отнимая от обеих частей сравнения *1* :

 .

*Пример 2.*

Докажем методом математической индукции, что  выполняется равенство:

.

1. При *n = 1* имеем *1 = 1*, следовательно, *P(1)* истинно;
2. Предположим что, *P(k)* истинно для некоторого .т е. верно равенство:

 *(1)*

и докажем, что из истинности этого утверждения следует истинность для (*k+1)*:

. (2)

Прибавим к обеим частям *(1)* слагаемое *(2k+1)* (отношение равенства при этом не изменяется). Имеем:

.

Как видим, из предположения об истинности *(1)* следует истинность *(2)*, следовательно, равенство  верно .

Сформулируем принцип математической индукции в другой, *эквивалентной* форме:

Пусть *P(n)* – утверждение. Если:

1. *P(1)* истинно, и
2. для произвольного *k* из истинности *P(m)* для всех *m < k* следует истинность  *P(k)*, то *P(n*) истинно для всех натуральных чисел *n*.

И, наконец, сформулируем принцип индукции для целых чисел.

Пусть *P(n)* – утверждение, обладающее свойствами:

1. *P(j)* истинно, и
2. для произвольного , если *P(k)* истинно, то *P(k+1)* истинно.

То *P(n)* истинно для каждого .

Например, неравенство , справедливое для доказывается, используя метод математической индукции для целых чисел. Здесь *j=4*. Часто начинают доказательства с *j=0*, как например, в теореме о мощности булеана.

Докажем теорему о мощности булеана методом математической индукции.

*Теорема.* Для конечного множества *A* мощность его булеана:

Пусть задано множество *A*, мощности *k*: *|A |= k*. Индукция по |*A*|.

1. Если |*A* | *= k = 0,* то  и . Следовательно, . Для случая |*A* | = 0 теорема верна.
2. Предположим, что теорема верна для множества мощности : .

Покажем, что из предположения справедливости теоремы для множества мощности меньше *k*, например, *k-1*, следует выполнение теоремы для множества мощности *k*.

Рассмотрим множество , *|A| = k*. Зафиксируем элемент .

Разобьем множество *всех* подмножеств *A* (его булеан) на *2* класса: *1* класс – семейство подмножеств, не содержащие элемент , и во *2-ой* класс входят подмножества, содержащие элемент . Т.е. и .

Очевидно, и .

По индукционному предположению , поскольку  - это булеан множества , состоящего из *(k-1)* элемента и , поскольку каждый элемент второго класса  получается из соответствующего элемента первого класса  добавлением к нему . Следовательно, 

Следовательно, теорема верна .

Эту теорему мы могли бы доказать, кодируя каждое подмножество множества *A* двоичным числом, где наличие *1* в некоторой позиции числа означало бы присутствие соответствующего элемента в подмножестве, *0*, соответственно, его отсутствие.