Resumen de teoría de Análisis en $\mathbb{R}$

Números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$

Axiomas de cuerpo

S_1. Conmutatividad de la suma: $a + b = b + a$

S_2. Asociatividad de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$

S_3. Existencia del elemento neutro de la suma: $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$

S_4. Existencia de inverso de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists(-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$

P_1. Conmutatividad del producto: $a \cdot b = b \cdot a$

P_2. Asociatividad del producto: $a(bc) = (ab)c$

P_3. Existencia del elemento neutro del producto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

P_4. Existencia de inverso del producto (excepto para cero): $\forall a \neq 0, \exists a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$*$ Distributividad del producto respecto de la suma: $a(b + c) = ab + ac$

Axiomas de orden

O_1. Tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \lor a = b \lor a > b$

O_2. Transitividad: $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

O_3. Monotonía de la suma: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4. Monotonía del producto: $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

Axioma de completitud Si A es un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ y A es acotado superiormente, entonces existe $c = \sup A$, el supremo de A. También conocido como **axioma del supremo**.

Cota superior: Sea $A \subset \mathbb{R}$, C es una cota superior de A si $\forall a \in A, a \leq C$.

Cota inferior: $\forall a \in A, a \geq C$.

Supremo: c es el supremo de A si cumple ambas condiciones:

c es una cota superior de A

c es la menor de las cotas de A: $\forall a \in A, a \leq k \Rightarrow k \geq c$

Supremo (definición equivalente) c es el supremo de A si:

c es una cota de A

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tal que $a > c - \varepsilon$

El principio de Arquímedes: Si $a \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$.

Consecuencias de la completitud de $\mathbb{R}$:

Entre dos números reales siempre se puede encontrar un racional y un irracional.

Unicidad del supremo e ínfimo: útil para probar que existe un solo número con una propiedad.

Potencias de base y exponente real.

Teoremas notables

- Si $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \inf A \leq \sup A$
- Si $A \subset \mathbb{R}, \inf A = \sup A \Rightarrow A = \{a\}, a \in \mathbb{R}$

Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Propiedades básicas del valor absoluto

$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, b \geq 0$

Definición equivalente: $\sqrt{a^2} = |a|$

Multiplicidad: $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Módulo o tamaño: $a \leq |a|$

Límites infinitos
Sea (a_n) una sucesión.

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

Sucesión monótona:
Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Si es creciente: $a_n \leq a_{n+1}$

Si es decreciente: $a_n \geq a_{n+1}$.

Criterio de convergencia: Si (a_n) es monótona y acotada, entonces (a_n) converge.

Si es monótona y no es acotada, entonces: $(a_n) \to +\infty$ si es creciente, $(a_n) \to -\infty$ si es decreciente.

Caracterización del supremo por sucesiones
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, acotado superiormente. $s = \sup A$ si cumple:

s es cota superior de A

$\exists$ una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \to s$

Álgebra de límites infinitos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ +\infty, & r > 1 \\ \text{no existe}, & r = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{G(n)} = \begin{cases} \infty, & \deg P > \deg G \\ 0, & \deg P < \deg G \\ c, & \deg P = \deg G \end{cases}$$

Sucesiones

Una sucesión (a_n) es una función $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Límite de sucesión:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ si $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

El límite, si existe, es único.

Cota de una sucesión:
(a_n) es acotada si $\exists M > 0$ tal que $|a_n| < M$.

Condición necesaria de convergencia:
Si (a_n) converge (tiene límite), entonces es acotada.

Teoremas notables:

Si $(a_n) \to l$ y
$l > b \Rightarrow \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b$

Si $(a_n) \to l$ y
$l < b \Rightarrow \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b$

Si $(a_n) \to l$ y $a_n \leq b \Rightarrow l \leq b$

Teorema del Sandwich:

Si (a_n), (b_n), (c_n) son sucesiones tales que
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ y
$a_n \leq b_n \leq c_n$,
entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Álgebra de límites

Sean (a_n), (b_n) sucesiones convergentes con límites l_1, l_2:

$\lim(a_n + b_n) = l_1 + l_2$

$\lim(a_n b_n) = l_1 l_2$

$\lim(ka_n) = kl_1$

$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}$, si $l_2 \neq 0$

$\lim|a_n| = |l_1|$

$\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

$\lim r^n = 0, |r| < 1$

Encajes de intervalos

Definición: $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$
Se hace más chico a medida que n crece.

Longitud del intervalo:
$l(I_n) = b_n - a_n$

Teorema del encaje de intervalos:
Si $\lim\limits_{n\to\infty} l(I_n) = 0 \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$, x existe y es único.
Este teorema es útil para subsecuencias y equivale al axioma del supremo.

Definición de subsecuencia:
(a_{n_k}) es una subsecuencia de (a_n) si (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales y
$a_{n_k} = a_n, n \in K, K \subset \mathbb{N}$.

Teorema de Bolzano–Weierstrass:
Toda sucesión acotada tiene una subsecuencia convergente.

Teorema de convergencia de subsecuencias:
Toda sucesión (a_n) es convergente con límite l si y sólo si toda subsecuencia de (a_n) es convergente con límite l.

Sucesiones de Cauchy:
Equivalente a límite por definición.
Una sucesión (a_n) es de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Propiedades de las sucesiones de Cauchy:

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Si (a_n) es de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$, entonces (a_n) converge con $\lim a_n = a$.
En esencia, permite reescribir una sucesión de Cauchy para hallar su límite.
Norega p.129

Teorema de Bolzano–Weierstrass

Toda sucesión acotada tiene una subsecuencia convergente.
Esta es una consecuencia del Teorema de encaje de intervalos.

Convergencia de subsecuencias

Una sucesión (a_n) es convergente si y sólo si toda subsecuencia (a_{n_k}) es convergente al mismo límite.

Este teorema permite demostrar que una sucesión no es convergente, encontrando dos subsecuencias que no converjan o converjan a distinto límite.

Exponencial – definición inductiva

$a^0 = 1$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$, $n \geq 0$

$a^{-n} = 1/a^n$, definición para negativos.

Exponencial – extensión a racionales

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$,

$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$,

$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

Propiedades fundamentales del exponente racional

(se extienden a los reales mediante la definición por supremo)

Producto de potencias: $a^r a^s = a^{r+s}$

Potencia de potencia: $(a^r)^s = a^{rs}$

Cociente de potencias: $a^r / a^s = a^{r-s}$

Exponencial de producto: $(ab)^r = a^r b^r$

Normalización: $a^1 = a$, $a^0 = 1$

Definición de exponencial – exponente real

$a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\}$

$a^r = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > r\}$

De esta definición se desprende que el exponente es único.
Al poder trabajar con racionales dentro del conjunto, se heredan las propiedades del exponencial.

El número e, $2 < e < 3$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Logaritmo natural

$f(x) = e^x$ es biyectiva.

Definición por supremo: $\log(y) = \sup\{x \in \mathbb{R} : e^x < y\}$, $y > 0$

Función inversa de e^x

Propiedades fundamentales:

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$\log(a^b) = b\log(a)$

Desigualdades notables

Desigualdad de Bernoulli:
$(1+h)^n \geq 1 + nh$, $h > -1$

Desigualdad del triángulo:
$|a+b| \leq |a| + |b|$
$|\sum a_i| \leq \sum |a_i|$

Desigualdad de Cauchy–Schwarz:
Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reales:
$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$

Desigualdad de la media aritmética y geométrica (AM–GM):
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
para dos números: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Desigualdad del triángulo invertida:
$||x| - |y|| \leq |x - y|$

AM–GM de cuadrados:
$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab|$

Desigualdad del triángulo – variación para límites:
$|x| = |x + y - y| \leq |x - y| + |y|$

Técnicas comunes para límites por definición:

Acotar con desigualdad triangular. Si $f(x) \to L \Rightarrow |f(x) - L| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - L|$

Sucesiones cuadráticas o polinómicas: AM–GM generalizada o Cauchy–Schwarz. Ejemplo: $a_n = 1/\sqrt{n}$

Límites con potencias: desigualdad de Bernoulli. Ejemplo: $a_n = (1 + 1/n)^n$

Productos notables y propiedades típicas

Diferencia de cuadrados:
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Binomio de Newton:
$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i}b^i$

Factorización de diferencias:
$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{m-1} a^{k-1-i}b^i$

Serie geométrica:
$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, a \neq 1$

Serie aritmética:
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tamaño del conjunto potencia:
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

Desigualdad trigonométrica notable:
$\sin x \leq x \leq \tan x$ para $x \in (0, \pi/2)$
Propiedad clave para probar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Identidades pitagóricas:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$,
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Ángulos dobles:
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Suma de ángulos:
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

Identidad de potencias:
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Límites de funciones reales

Definición de límite:

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

El límite, si existe, es único.

Teorema del Sandwich:

Sean f, g, h funciones definidas en (a,b), salvo quizás en $x_0 \in (a,b)$, con: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$ y $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Lema de orden en límites:

Suponga que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Si $b < l \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > b$

Si $b > l \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < b$

Composición de funciones para límites:

Sean f, g funciones $(a, b) \to \mathbb{R}$, excepto quizás en $x_0 \in (a, b)$ y $f : (c, d) \to \mathbb{R}$, excepto quizás en $y_0 \in (c, d)$ con $g(x) \neq y_0$ para $x = x_0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} f(y) = l$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = l$

Este teorema permite hacer cambio de variable en un límite, calcular dos límites más simples para obtener un límite más complicado.

Álgebra de límites

Sean f, g funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$. Entonces:

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

$\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = l_1 l_2$

Si $l_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

$\lim_{x \to a} (f(x))^n = l_1^n$, para $n \in \mathbb{N}$

Definición de límite alternativa, por sucesiones

Sea f una función definida en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall (x_n)$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, se verifica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Este teorema es útil para probar que una función no tiene límite cuando $x \to x_0$, encontrando dos sucesiones $(x_n) \to x_0$ tales que $f(x_n)$ no sean convergentes o converjan a distinto límite.

Límites laterales de funciones

Estas definiciones recorren $x \to x_0$ por izquierda o por derecha.

Por la derecha:
$x \to x_0^+ \Rightarrow |x - x_0| = x - x_0$
Por la izquierda:
$x \to x_0^- \Rightarrow |x - x_0| = x_0 - x$

Límite por la derecha:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ si y sólo si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Límite por la izquierda:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ si y sólo si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Propiedad de límite lateral:
Sea f una función real, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

En ambos casos, i→ii, ii→i, se demuestra directamente al ser consecuencia de propiedades del valor absoluto.

Límites infinitos

Un límite es infinito si podemos achicar o agrandar $f(x)$ tanto como queramos cuando $x \to x_0$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

El límite infinito sin signo se considera:

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Estas definiciones se pueden extender a límites laterales.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Límites al infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists K > 0, x > K \Rightarrow f(x) > M$

Continuidad de funciones reales

Definición de continuidad:

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Además, si f es continua para todo $x \in (a, b)$, decimos que es continua en (a, b).

Acutación de función continua:

Si $a < f(x_0) < b$, f es continua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$ |x - x_0| < a < f(x) < b

$$
Este teorema no tiene nombre propio en la bibliografía, pero resulta útil para probar otros teoremas más fuertes. *(Norega, p.202)*

Composición de funciones continuas:
Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Álgebra de funciones continuas:
Sean f y g funciones continuas en x_0, las siguientes funciones son continuas en x_0:

$(f+g)(x)$

$(f \cdot g)(x)$

$\dfrac{f}{g}(x)$ dado que $g(x) \neq 0$

Funciones continuas notables:

$P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado $n \in \mathbb{N}$, es continua en $\mathbb{R}$.

a^x en $\mathbb{R}$, $\log x$ es continua en $x > 0$

$\sin x$, $\cos x$

Clasificación de continuidad

Evitable: si se puede redefinir una función en la discontinuidad para obtener una función continua.

Primera especie: los límites laterales difieren.

Segunda especie: cualquier otro caso; por ejemplo, $\sin(1/x)$ cuando $x \to 0$, los límites laterales no existen.

Funciones continuas en intervalo cerrado:
Sea f una función, se dice que f es continua en $[a,b]$ si es continua en (c,d), con $[a,b] \subset (c,d)$.

Propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados:

Una función continua en $[a,b]$ es acotada en $[a,b]$.

Una función continua en $[a,b]$ alcanza mínimo y máximo en $[a,b]$.

Teorema de Bolzano:

Si f es una función continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Nota:
$c = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ y $f(c) = 0$, porque $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ conducen al absurdo.

Teorema de valor intermedio

Una generalización del teorema de Bolzano.
Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < f(b)$, sea $d \in (f(a), f(b))$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Ley de conservación de signo:
Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in (a,b)$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$$

Continuidad de función inversa:

Si $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva, continua y monótona, entonces $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ es continua.

Continuidad uniforme:

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Teorema de Heine–Cantor:
Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces es uniformemente continua en $[a,b]$.