Ciencias matemáticas y de computación

Carlos Nexans

Índice

Métodos de demostración y lógica simbólica.

A menudo, las matemáticas del colegio y del bachillerato suponen resolver ecuaciones, desigualdades y realizar operaciones bien definidas mendiante procesos y métodos, no obstante, como se ha visto desde Matemáticas I, hay que ser capaz de enfrentarse también a funciones, conjuntos y otros objetos matemáticos. Lo que une todos estos conocimientos es el *razonamiento deductivo*.

El *razonamiento deductivo*, normalmente se presenta en forma de pruebas y demostraciones, aunque, en el fondo, también es el origen de los *procedimientos*. El curso de Álgebra I, a diferencia de las matemáticas comunes de ingeniería, es una materia en la cual la teoria juega un papel muy central. Esta seccion de lógica y métodos de prueba se agrega porque, a veces hay confusión sobre como hacer demostraciones dado que para algunos puede ser algo nuevo.

La lógica simbólica

Definición: una expresión booleana E, está conformada por constantes true y false (verdad y falsedad, respectivamente), variables booleanas y las operaciones $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$. Las constantes booleanas muchas veces se llaman *valores booleanos* y las variables, a menudo, se dice que son de tipo *booleano*. Las variables booleanas se denotan con letras minusculas y las expresiones con letras mayusculas, tipicamente [1, pág 25].

Definimos, las siguientes variables:

- p : mañana nevará
- q : mañana lloverá

En la siguiente tabla se pueden apreciar los simbolos y su significado en el lenguaje natural.

Simbolo	Nombre	Ejemplo	Traducción del ejemplo
$\neg$	negación	$\neg p$	Mañana no nevará
$\vee$	disyunción	$p \vee q$	Mañana nevará o mañana lloverá
$\vee$	conjunción	$p \wedge q$	Mañana nevará y mañana lloverá
$\Rightarrow$	implicación	$p \Rightarrow q$	Si mañana llueve, entonces mañana nevará.
$\Leftarrow$	consecuente	$p \Leftarrow q$	Que mañana llueva, es una consecuencia de que mañana nieve
$\Leftrightarrow$	equivalencia, doble implicación	$p \Leftrightarrow q$	Mañana llueve, si y solo si, mañana nieva

Traducción de teoremas y proposiciones

1) Si p es un número primo y p divide a ab, entonces p divide a a o p divide a b. Podemos definir las siguientes variables booleanas:

- r : p es un número primo
- s : p divide a ab
- t : p divide a a
- u : p divide a b

$$r \wedge s \Rightarrow t \vee u$$

2) Si $f(x)$ es un polinomio en $\mathbb{F}$, y $a \in \mathbb{F}$ entonces, $f(a) = 0$ si y solo si $x - a$ divide a $f(x)$.

- r : $f(x)$ es un polinomio en $\mathbb{F}$
- s : $a \in \mathbb{F}$
- t : $f(a) = 0$
- u : $x - a$ divide a $f(x)$

$$r \wedge s \Rightarrow (t \Leftrightarrow u)$$

3) Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}$ y $a \in \mathbb{F}$, entonces $f(a)$ es el resto de dividir $f(x)$ entre $x - a$.

- r : $f(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}$
- s : $a \in \mathbb{F}$
- t : $f(a)$ es el resto de dividir $f(x)$ entre $x - a$

$$r \wedge s \Rightarrow t$$

Una vez se tengan habilidades básicas de lógica proposicional, se hablarán de métodos de prueba y teoremas de lógica. Se propone al lector hacer los siguientes ejercicios y revisar los primeros capitulos de *How to prove it, a structured approach* [2].

1. Dé una expresión E de las siguientes proposiciones:
   1. Juan y Pedro dicen la verdad, o bien, ambos mienten.
   2. No irás a esquiar o bien, si vas a esquiar entonces no habrá nieve.
   3. Alicia no fué a la universidad y Pedro también.
2. Diga si las siguientes expresiones tienen una estructura correcta:
   1. $\neg(P, Q \wedge R)$
   2. $\neg(P \vee Q \wedge R) \Rightarrow (p \Leftrightarrow s)$
   3. $\neg(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow (m \wedge n)$

Metodos de demostracion basicos

Demostraciones que involucran implicacion, para demostrar $P \Rightarrow Q$

El metateorema de deducción extendido. Suponga que al considerar las expresiones $P_1, P_2, ..., P_n$ como verdades, podemos demostrar Q. Entonces la expresion $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$ es una verdad o teorema.

El método directo: Para demostrar $P \Rightarrow Q$, suponga que P es cierto, y mediante el uso de proposiciones, lemas, teoremas o corolarios conocidos, demuestre Q. Ejemplo, demuestre que si $x > 3$ e $y < 2$, entonces $x^2 - 2y > 5$

Suponga que $x > 3$ e $y < 2$. Se tiene que $x^2 = xx > 3x$ y $3x > 3 * 3 = 9$, entonces $x^2 > 9$. Por otro lado, la segunda desigualdad implica que $2y < 4$, de donde $-4 < -2y$. "Sumando" ambos resultados, obtenemos:

$$x^2 - 2y > 9 - 4 = 5$$

En ocasiones, no es sencillo demostrar por el método directo, por ejemplo, consideremos la siguiente proposición: si p es un número primo y p divide a ab, entonces p divide a a o p divide a b. Suponer la hipótesis no nos deja demostrar la conclusión tan fácilmente, para solucionar este problema, podemos conseguir otra expresión equivalente mas sencilla de demostrar utilizando teoremas de lógica [1, pag. 52-78]:

1) **Equivalencia** $p \Leftrightarrow q$ se puede definir como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
2) **Contrareciproco**, $p \Rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$.
3) **Debilitamiento y fortalecimiento**
   a. $p \wedge q \Rightarrow p$
   b. $p \Rightarrow p \vee q$
   c. $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
4) **Definicion de implicacion**. La expresion $p \Rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$
5) **Leyes de De Morgan**
   a. $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg p \vee \neg q$
   b. $\neg(p \vee q)$ es equivalente a $\neg p \wedge \neg q$
6) **Analisis de casos**
   a. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ es equivalente a $p \vee q \Rightarrow r$
   b. $(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$ es equivalente a r
7) **Shunting** $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es equivalente a $p \wedge q \Rightarrow r$
8) **Tercero excluído** $p \vee \neg p$ es verdadero.
9) **Doble negación** $\neg\neg p$ es equivalente a p

Hay muchos mas teoremas de logica, pero estos son bastante resaltantes, instamos al lector a leer el capítulo 3 de *A logical approach to discrete math* [1], para añadir más herramientas de deducción.

Mediante estos teoremas, introduciremos los siguientes métodos de prueba

El contrarecíproco: para demostrar $P \Rightarrow Q$, se puede demostrar $\neg Q \Rightarrow \neg P$; dado que ambas afirmaciones son equivalentes, con una se puede concluir la otra

Análisis de casos: por los teoremas agrupados en el punto 6, tenemos:

1. Para demostrar $P \vee Q \Rightarrow R$, se puede demostrar $P \Rightarrow R$ y, $Q \Rightarrow R$.
2. Para demostrar Q, podemos partir de una cierta expresion P y demostrar que $P \Rightarrow Q$ y $\neg P \Rightarrow Q$.

"Para asegurarte de que todas tus afirmaciones esten bien justificadas, debes ser esceptico de cada inferencia que hagas en tus demostraciones. Si tienes dudas de que tu justificacion sea correcta, entonces no es correcta. Despues de todo, ¿Si tu propio razonamiento no te convence, como esperas convencer a alguien más?" [2, pag. 86].

Contradicción:

1. Para demostrar P, podemos suponer que $\neg P$ es cierto y llegar a cualquier falsedad o contradicción, mediante teoremas conocidos.
2. Podemos realizar el mismo procedimiento para demostrar una expresión que involucre una implicación.

$$\neg(P \Rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg(\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg\neg P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P \wedge \neg Q$$

Quiere decir que, para demostrar $P \Rightarrow Q$, podemos suponer que P y $\neg Q$ son verdades y llegar a una contradicción.

Cuantificacion y logica de predicados

Contenido

Análisis en $\mathbb{R}$

Los números reales forman una estructura algebraica con operaciones de suma y producto, y una relación de orden que cumple ciertas propiedades fundamentales. A continuación se presentan los axiomas y teoremas más importantes que caracterizan a $\mathbb{R}$.

Construcción Axiomática

Axioma 0.1 (Conmutatividad de la suma)**.** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$

Axioma 0.2 (Asociatividad de la suma)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Axioma 0.3 (Elemento neutro de la suma)**.** Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$: $a+0 = 0+a = a$

Axioma 0.4 (Elemento opuesto de la suma)**.** Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que: $a+(-a) = 0$

Axioma 0.5 (Conmutatividad del producto)**.** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$

Axioma 0.6 (Asociatividad del producto)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Axioma 0.7 (Elemento neutro del producto)**.** Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Axioma 0.8 (Elemento inverso del producto)**.** Para todo $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$

Axioma 0.9 (Distributividad)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a(b + c) = ab + ac$

Axioma 0.10 (Reflexividad del orden)**.** Para todo $a \in \mathbb{R}$: $a \leq a$

Axioma 0.11 (Antisimetría del orden)**.** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

Axioma 0.12 (Transitividad del orden)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Axioma 0.13 (Compatibilidad del orden con la suma)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

Axioma 0.14 (Compatibilidad del orden con el producto)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

Axioma 0.15 (Completitud)**.** Todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

Valor Absoluto

Teorema 0.16 (Definición de Valor Absoluto)**.** El valor absoluto de un número real a se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Teorema 0.17 (Caracterización del Valor Absoluto). Para $a \in \mathbb{R}$ y $b \geq 0$, $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.

Teorema 0.18 (Multiplicatividad del Valor Absoluto). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Teorema 0.19 (Cociente del Valor Absoluto). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Teorema 0.20 (Cota Inferior del Valor Absoluto). Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \leq |a|$.

Teorema 0.21 (Desigualdad del triángulo invertida). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Teorema 0.22 (Desigualdad triangular). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Sucesiones

Definición 0.23 (Sucesión). Una sucesión (a_n) es una función $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Definición 0.24 (Límite de sucesión). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

Teorema 0.25 (Unicidad del límite). Si una sucesión tiene límite, este es único.

Definición 0.26 (Sucesión acotada). Una sucesión (a_n) es acotada si $\exists M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 0.27 (Condición necesaria de convergencia). Si una sucesión (a_n) converge, entonces es acotada.

Teorema 0.28 (Teorema del Sandwich para sucesiones). Si (a_n), (b_n), (c_n) son sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Teorema 0.29 (Álgebra de límites de sucesiones). Sean (a_n), (b_n) sucesiones convergentes con límites l_1, l_2:

1. $\lim(a_n + b_n) = l_1 + l_2$
2. $\lim(a_n b_n) = l_1 l_2$
3. $\lim(k a_n) = k l_1$
4. $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}$, si $l_2 \neq 0$
5. $\lim |a_n| = |l_1|$

Definición 0.30 (Sucesión monótona). Una sucesión es monótona si es creciente ($a_n \leq a_{n+1}$) o decreciente ($a_n \geq a_{n+1}$).

Teorema 0.31 (Convergencia de sucesiones monótonas). Si una sucesión es monótona y acotada, entonces converge.

Teorema 0.32 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 0.33 (Criterio de Cauchy)**.** Una sucesión (a_n) es convergente si y solo si es de Cauchy, es decir:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Teorema 0.34 (Teorema de Heine-Borel)**.** Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Límites y Continuidad

Definición 0.35 (Límite de una función)**.** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Teorema 0.36 (Unicidad del límite funcional)**.** Si una función tiene límite en un punto, este es único.

Teorema 0.37 (Álgebra de límites funcionales)**.** Sean f, g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$. Entonces:

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$
3. Si $l_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Definición 0.38 (Continuidad)**.** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teorema 0.39 (Composición de funciones continuas)**.** Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Teorema 0.40 (Teorema del Valor Intermedio)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a) \neq f(b)$ y k es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Proof. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(a) < k < f(b)$. Definimos el conjunto:

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq k\}$$

1) A es no vacío pues $a \in A$ ya que $f(a) < k$.

2) A está acotado superiormente por b pues $f(b) > k$.

3) Por el axioma de completitud, existe $c = \sup A$.

4) Veamos que $f(c) = k$:

Supongamos que $f(c) < k$. Por la continuidad de f en c, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < k - f(c)$$

En particular, para $x = c + \frac{\delta}{2}$:

$$f(x) < f(c) + (k - f(c)) = k$$

Por lo tanto $x \in A$, pero $x > c$, contradiciendo que c es el supremo de A.

De manera similar, si $f(c) > k$, por continuidad existiría un punto antes de c donde f tomaría valores mayores que k, contradiciendo la definición de A.

Por lo tanto, necesariamente $f(c) = k$. $\square$

Teorema 0.41 (Teorema de Weierstrass)**.** Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo en ese intervalo.

Teorema 0.42 (Teorema del Valor Medio)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 0.43 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

1. La función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
2. Si G es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Exponenciales y Logaritmos

Definición 0.44 (Exponencial - definición inductiva)**.** Para $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$:

1. $a^0 = 1$
2. $a^{n+1} = a^n \cdot a$, $n \geq 0$
3. $a^{-n} = 1/a^n$

Definición 0.45 (Exponencial - extensión a racionales)**.** Para $a > 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Teorema 0.46 (Propiedades del exponente racional)**.** Para $a, b > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$:

1. $a^r a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{rs}$

3. $a^r/a^s = a^{r-s}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$
5. $a^1 = a$, $a^0 = 1$

Definición 0.47 (Exponencial - exponente real)**.** Para $a > 0$ y $r \in \mathbb{R}$:

$$a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > r\}$$

Definición 0.48 (El número e)**.**

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

donde $2 < e < 3$

Definición 0.49 (Logaritmo natural)**.** Para $y > 0$:

$$\log(y) = \sup\{x \in \mathbb{R} : e^x < y\}$$

Es la función inversa de e^x.

Teorema 0.50 (Propiedades del logaritmo)**.** Para $a, b > 0$:

1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log(a^b) = b\log(a)$

Desigualdades Notables

Teorema 0.51 (Desigualdad de Bernoulli)**.** Para $h > -1$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Teorema 0.52 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reales:

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$$

Teorema 0.53 (Desigualdad de la media aritmética y geométrica (AM-GM))**.** Para $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

En particular, para dos números:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Teorema 0.54 (Desigualdad trigonométrica)**.** Para $x \in (0, \pi/2)$:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

Esta propiedad es clave para probar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Teorema 0.55 (Teorema de Taylor)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un intervalo I y sea $a \in I$. Entonces para todo $x \in I$ existe c entre a y x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Resumen de teoría de Análisis en $\mathbb{R}$

Números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$

Axiomas de cuerpo

S_1. Conmutatividad de la suma: $a + b = b + a$

S_2. Asociatividad de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$

S_3. Existencia del elemento neutro de la suma: $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$

S_4. Existencia de inverso de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists(-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$

P_1. Conmutatividad del producto: $a \cdot b = b \cdot a$

P_2. Asociatividad del producto: $a(bc) = (ab)c$

P_3. Existencia del elemento neutro del producto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

P_4. Existencia de inverso del producto (excepto para cero): $\forall a \neq 0, \exists a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$*$ Distributividad del producto respecto de la suma: $a(b + c) = ab + ac$

Axiomas de orden

O_1. Tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \vee a = b \vee a > b$

O_2. Transitividad: $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

O_3. Monotonía de la suma: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4. Monotonía del producto: $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

Axioma de completitud Si A es un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ y A es acotado superiormente, entonces existe $c = \sup A$, el supremo de A. También conocido como **axioma del supremo**.

Cota superior: Sea $A \subset \mathbb{R}$, C es una cota superior de A si $\forall a \in A, a \leq C$.

Cota inferior: $\forall a \in A, a \geq C$.

Supremo: c es el supremo de A si cumple ambas condiciones:

c es una cota superior de A

c es la menor de las cotas de A: $\forall a \in A, a \leq k \Rightarrow k \geq c$

Supremo (definición equivalente) c es el supremo de A si:

c es una cota de A

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tal que $a > c - \varepsilon$

El principio de Arquímedes: Si $a \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$.

Consecuencias de la completitud de $\mathbb{R}$:

Entre dos números reales siempre se puede encontrar un racional y un irracional.

Unicidad del supremo e ínfimo: útil para probar que existe un solo número con una propiedad.

Potencias de base y exponente real.

Teoremas notables

- Si $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \inf A \leq \sup A$
- Si $A \subset \mathbb{R}, \inf A = \sup A \Rightarrow A = \{a\}, a \in \mathbb{R}$

Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Propiedades básicas del valor absoluto

$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, b \geq 0$

Definición equivalente: $\sqrt{a^2} = |a|$

Multiplicidad: $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Módulo o tamaño: $a \leq |a|$

Límites infinitos

Sea (a_n) una sucesión.

$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

Sucesión monótona:
Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Si es creciente: $a_n \leq a_{n+1}$

Si es decreciente: $a_n \geq a_{n+1}$.

Criterio de convergencia: Si (a_n) es monótona y acotada, entonces (a_n) converge.

Si es monótona y no es acotada, entonces:
$(a_n) \to +\infty$ si es creciente,
$(a_n) \to -\infty$ si es decreciente.

Caracterización del supremo por sucesiones
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, acotado superiormente. $s = \sup A$ si cumple:

s es cota superior de A

$\exists$ una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \to s$

Álgebra de límites infinitos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ +\infty, & r > 1 \\ \text{no existe}, & r = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{G(n)} = \begin{cases} \infty, & \deg P > \deg G \\ 0, & \deg P < \deg G \\ c, & \deg P = \deg G \end{cases}$$

Sucesiones

Una sucesión (a_n) es una función $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Límite de sucesión:
$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

El límite, si existe, es único.

Cota de una sucesión:
(a_n) es acotada si $\exists M > 0$ tal que $|a_n| < M$.

Condición necesaria de convergencia:
Si (a_n) converge (tiene límite), entonces es acotada.

Teoremas notables:

Si $(a_n) \to l$ y $l > b \Rightarrow \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b$

Si $(a_n) \to l$ y $l < b \Rightarrow \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b$

Si $(a_n) \to l$ y $a_n \leq b \Rightarrow l \leq b$

Teorema del Sandwich:

Si (a_n), (b_n), (c_n) son sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Álgebra de límites

Sean (a_n), (b_n) sucesiones convergentes con límites l_1, l_2:

$\lim(a_n + b_n) = l_1 + l_2$

$\lim(a_n b_n) = l_1 l_2$

$\lim(k a_n) = k l_1$

$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}$, si $l_2 \neq 0$

$\lim |a_n| = |l_1|$

$\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

$\lim r^n = 0, |r| < 1$

Encajes de intervalos

Definición: $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$
Se hace más chico a medida que n crece.

Longitud del intervalo:
$l(I_n) = b_n - a_n$

Teorema del encaje de intervalos:
Si $\lim_{n\to\infty} l(I_n) = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$,
x existe y es único.
Este teorema es útil para subsecuencias y equivale al axioma del supremo.

Definición de subsecuencia: (a_{n_k}) es una subsecuencia de (a_n) si (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales y $a_{n_k} = a_n, n \in K, K \subset \mathbb{N}$.

Teorema de Bolzano–Weierstrass:
Toda sucesión acotada tiene una subsecuencia convergente.

Teorema de convergencia

de subsecuencias:
Toda sucesión (a_n) es convergente con límite l si y sólo si toda subsecuencia de (a_n) es convergente con límite l.

Sucesiones de Cauchy:
Equivalente a límite por definición.
Una sucesión (a_n) es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Propiedades de las sucesiones de Cauchy:

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Si (a_n) es de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$, entonces (a_n) converge con $\lim a_n = a$.
En esencia, permite reescribir una sucesión de Cauchy para hallar su límite.
Norega p.129

Teorema de Bolzano–Weierstrass

Toda sucesión acotada tiene una subsecuencia convergente.
Esta es una consecuencia del Teorema de encaje de intervalos.

Convergencia de subsecuencias

Una sucesión (a_n) es convergente si y sólo si toda subsecuencia (a_{n_k}) es convergente al mismo límite.

Este teorema permite demostrar que una sucesión no es convergente, encontrando dos subsecuencias que no converjan o converjan a distinto límite.

Exponencial – definición inductiva

$a^0 = 1$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$, $n \geq 0$

$a^{-n} = 1/a^n$, definición para negativos.

Exponencial – extensión a racionales

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$,

$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$,

$a^{m\cdot n} = (a^m)^n$

Propiedades fundamentales del exponente racional
(se extienden a los reales mediante la definición por supremo)

Producto de potencias:
$a^r a^s = a^{r+s}$

Potencia de potencia:
$(a^r)^s = a^{rs}$

Cociente de potencias:
$a^r/a^s = a^{r-s}$

Exponencial de producto:
$(ab)^r = a^r b^r$

Normalización: $a^1 = a$, $a^0 = 1$

Definición de exponencial – exponente real

$a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\}$

$a^r = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > r\}$

De esta definición se desprende que el exponente es único.
Al poder trabajar con racionales dentro del conjunto, se heredan las propiedades del exponencial.

El número e, $2 < e < 3$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Logaritmo natural

$f(x) = e^x$ es biyectiva.

Definición por supremo:
$\log(y) = \sup\{x \in \mathbb{R} : e^x < y\}$, $y > 0$

Función inversa de e^x

Propiedades fundamentales:

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$\log(a^b) = b\log(a)$

Desigualdades notables

Desigualdad de Bernoulli:
$(1+h)^n \geq 1 + nh$, $h > -1$

Desigualdad del triángulo:
$|a+b| \leq |a| + |b|$
$|\sum a_i| \leq \sum |a_i|$

Desigualdad de Cauchy–Schwarz:
Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales:
$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$

Desigualdad de la media aritmética y geométrica (AM–GM):
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$
para dos números:
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Desigualdad del triángulo invertida:
$||x| - |y|| \leq |x-y|$

AM–GM de cuadrados:
$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab|$

Desigualdad del triángulo – variación para límites:
$|x| = |x+y-y| \leq |x-y| + |y|$

Técnicas comunes para límites por definición:

Acotar con desigualdad triangular. Si $f(x) \to L \Rightarrow |f(x) - L| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - L|$

Sucesiones cuadráticas o polinómicas: AM–GM generalizada o Cauchy–Schwarz. Ejemplo: $a_n = 1/\sqrt{n}$

Límites con potencias: desigualdad de Bernoulli. Ejemplo: $a_n = (1+1/n)^n$

Productos notables y propiedades típicas

Diferencia de cuadrados:
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Binomio de Newton:
$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i$

Factorización de diferencias:
$a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=0}^{m-1} a^{k-1-i} b^i$

Serie geométrica:
$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, a \neq 1$

Serie aritmética:
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tamaño del conjunto potencia:
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Desigualdad trigonométrica notable:
$\sin x \leq x \leq \tan x$ para $x \in (0, \pi/2)$
Propiedad clave para probar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Identidades pitagóricas:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$,
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Ángulos dobles:
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Suma de ángulos:
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Identidad de potencias:
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Límites de funciones reales

Definición de límite:

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, se dice que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

El límite, si existe, es único.

Teorema del Sandwich:

Sean f, g, h funciones definidas en (a,b), salvo quizás en $x_0 \in (a,b)$, con: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ y $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Lema de orden en límites:

Suponga que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Si $b < l \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > b$

Si $b > l \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < b$

Composición de funciones para límites:

Sean f, g funciones $(a,b) \to \mathbb{R}$, excepto quizás en $x_0 \in (a,b)$ y $f : (c,d) \to \mathbb{R}$, excepto quizás en $y_0 \in (c,d)$ con $g(x) \neq y_0$ para $x = x_0$ y

$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$,
$\lim_{y \to y_0} f(y) = l$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = l$

Este teorema permite hacer cambio de variable en un límite, calcular dos límites más simples para obtener un límite más complicado.

Álgebra de límites

Sean f, g funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$. Entonces:

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

$\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = l_1 l_2$

Si $l_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

$\lim_{x \to a} (f(x))^n = l_1^n$, para $n \in \mathbb{N}$

Definición de límite alternativa, por sucesiones

Sea f una función definida en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$.
Las siguientes proposiciones son equivalentes:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall (x_n)$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, se verifica que
$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$
Este teorema es útil para probar que una función no tiene límite cuando $x \to x_0$, encontrando dos sucesiones $(x_n) \to x_0$ tales que $f(x_n)$ no sean convergentes o converjan a distinto límite.

Límites laterales de funciones

Estas definiciones recorren $x \to x_0$ por izquierda o por derecha.

Por la derecha:
$x \to x_0^+ \Rightarrow |x - x_0| = x - x_0$
Por la izquierda:
$x \to x_0^- \Rightarrow |x - x_0| = x_0 - x$

Límite por la derecha:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Límite por la izquierda:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ si y sólo si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Propiedad de límite lateral:
Sea f una función real, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

En ambos casos, i→ii, ii→i, se demuestra directamente al ser consecuencia de propiedades del valor absoluto.

Límites infinitos

Un límite es infinito si podemos achicar o agrandar $f(x)$ tanto como queramos cuando $x \to x_0$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

El límite infinito sin signo se considera:

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Estas definiciones se pueden extender a límites laterales.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Límites al infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists K > 0, x > K \Rightarrow f(x) > M$

Continuidad de funciones reales

Definición de continuidad:

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Además, si f es continua para todo $x \in (a, b)$, decimos que es continua en (a, b).

Acutación de función continua:

Si $a < f(x_0) < b$, f es continua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$ |x - x_0| <   a < f(x) < b

$$
Este teorema no tiene nombre propio en la bibliografía, pero resulta útil para probar otros teoremas más fuertes.
(Norega, p.202)

Composición de funciones continuas:
Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Álgebra de funciones continuas:
Sean f y g funciones continuas en x_0, las siguientes funciones son continuas en x_0:

$(f + g)(x)$

$(f \cdot g)(x)$

$\dfrac{f}{g}(x)$ dado que $g(x) \neq 0$

Funciones continuas notables:

$P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado $n \in \mathbb{N}$, es continua en $\mathbb{R}$.

a^x en $\mathbb{R}$, $\log x$ es continua en $x > 0$

$\sin x$, $\cos x$

Clasificación de continuidad

Evitable: si se puede redefinir una función en la discontinuidad para obtener una función continua.

Primera especie: los límites laterales difieren.

Segunda especie: cualquier otro caso; por ejemplo, $\sin(1/x)$ cuando $x \to 0$, los límites laterales no existen.

Funciones continuas en intervalo cerrado:
Sea f una función, se dice que f es continua en $[a, b]$ si es continua en (c, d), con $[a, b] \subset (c, d)$.

Propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados:

Una función continua en $[a, b]$ es acotada en $[a, b]$.

Una función continua en $[a, b]$ alcanza mínimo y máximo en $[a, b]$.

Teorema de Bolzano:

Si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Nota:
$c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ y $f(c) = 0$, porque $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ conducen al absurdo.

Teorema de valor intermedio

Una generalización del teorema de Bolzano.
Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$, sea $d \in (f(a), f(b))$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Ley de conservación de signo:
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$$

Continuidad de función inversa:

Si $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva, continua y monótona, entonces $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ es continua.

Continuidad uniforme:

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es uniformemente continua si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Teorema de Heine–Cantor: Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en $[a, b]$.