Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΠΡΩΤΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΥΡΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ημερομηνία: 07/11/2023

Οικονόμου Χρήστος

Α.Ε.Μ.: 10268

Email: cnoikonom@ece.auth.gr

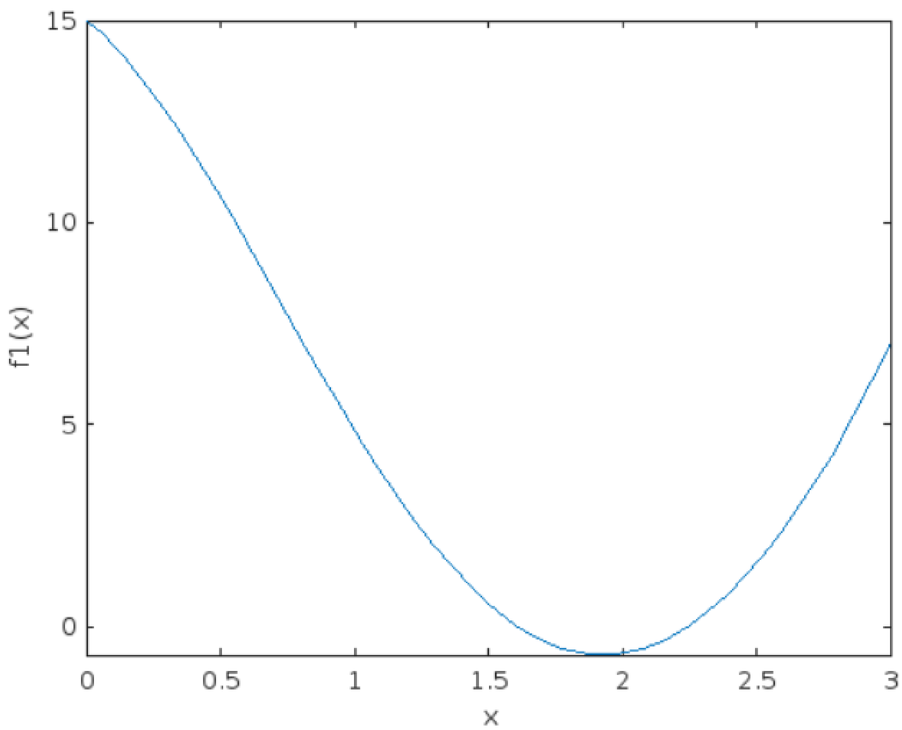
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

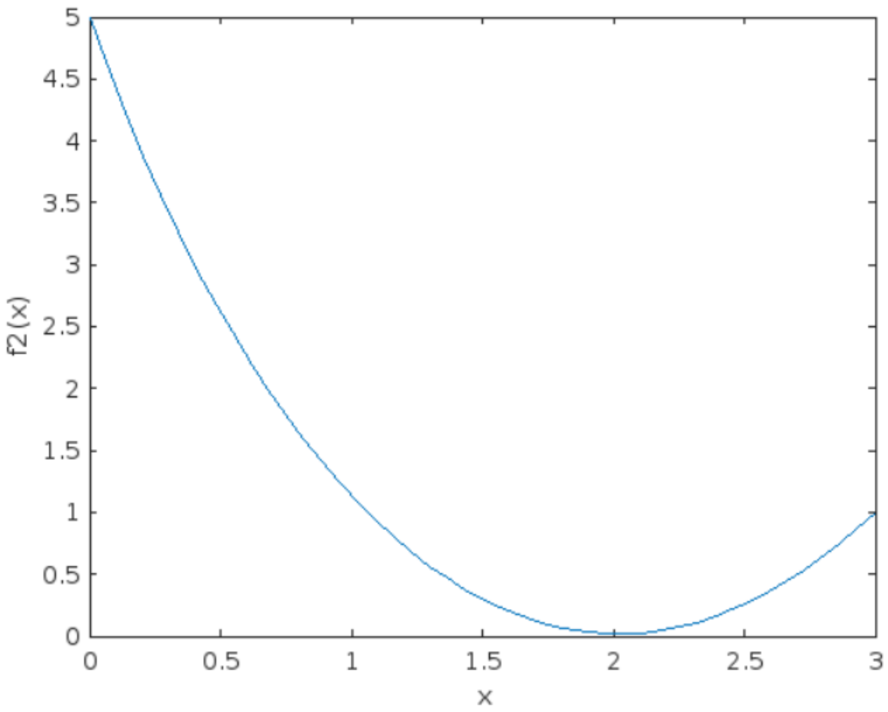
Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ελαχιστοποίηση μιας κυρτής συνάρτησης μίας μεταβλητής σε ένα δοσμένο διάστημα, μέσω ορισμένων βασικών αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται είναι η **Μέθοδος της Διχοτόμου**, η **Μέθοδος του Χρυσού Τομέα**, η **Μέθοδος Fibonacci** και η **Μέθοδος της Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγου**. Οι συναρτήσεις που μελετήθηκαν είναι οι:

- $f1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2\cos(x)$
- $f2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
- $f3(x) = x^2 \cdot \ln(0.5x) + \sin(0.2x)^2$

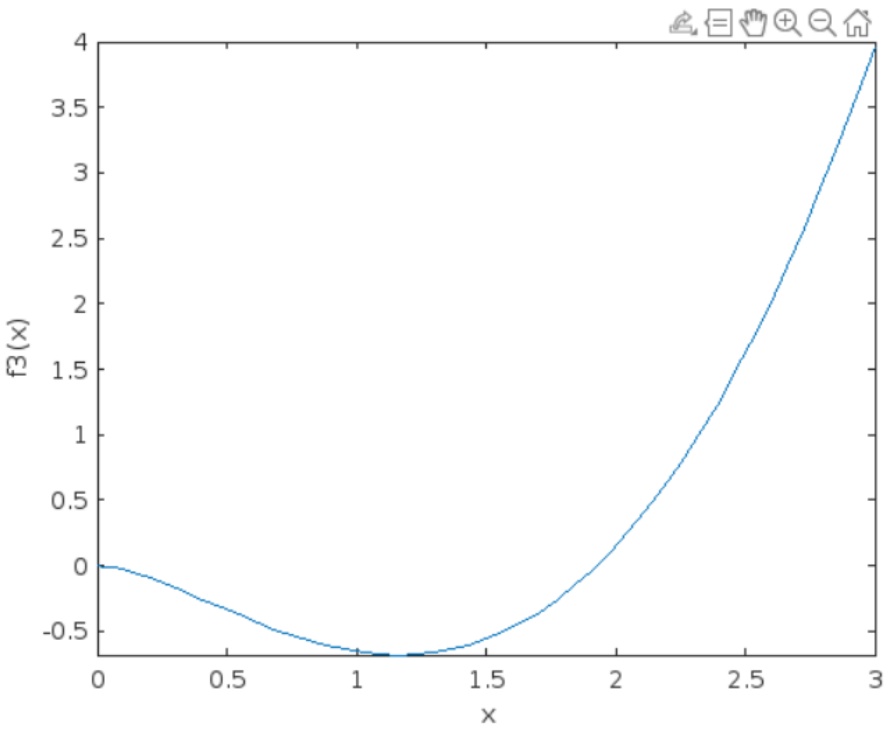
ενώ το αρχικό διάστημα, στο οποίο αναζητείται το ελάχιστο της κάθε μίας από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι το **[0, 3].**



Εικόνα 1: *Γραφική Παράσταση της* $f1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2 cos(x)$



Εικόνα 2: *Γραφική Παράσταση της* $f2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$



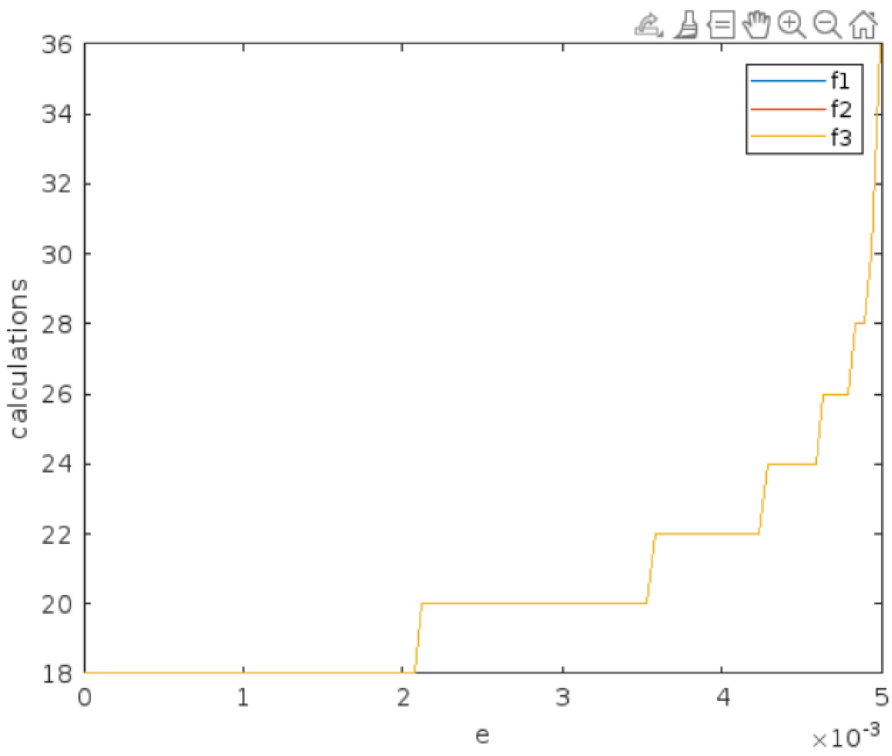
Εικόνα 3: *Γραφική Παράσταση της* $f3(x) = x^2 \cdot ln(0.5x) + sin(0.2x)^2$

Όπως γίνεται αντιληπτό από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, οι συναρτήσεις που μελετούνται είναι κυρτές στο διάστημα [0, 3], οπότε είναι δυνατή η αξιοποίηση των αλγορίθμων που προαναφέρθηκαν για την εύρεση των ελαχίστων τους στο διάστημα αυτό.

Μέθοδος Διχοτόμου

Η τεχνική αυτή αποσκοπεί στην εύρεση του ελαχίστου της εκάστοτε συνάρτησης, χωρίζοντας το διάστημα αναζήτησης σε τρία υποδιαστήματα, κατά προτίμηση ίσου εύρους (βέλτιστη περίπτωση – στρατηγική). Για την υλοποίησή της, χρησιμοποιούνται δύο πολύ σημαντικές παράμετροι: η απόσταση **ε** από τη διχοτόμο του διαστήματος αναζήτησης, καθώς και το εύρος **l** του διαστήματος αναζήτησης. Ο κώδικας για την υλοποίηση των διαγραμμάτων που αφορούν τη μέθοδο αυτή βρίσκεται στο αρχείο **bisection.m**.

Στη συγκεκριμένη εργασία, ζητείται η εφαρμογή της μεθόδου αυτής, αρχικά για **σταθερό l = 0.01** και για **μεταβαλλόμενο ε > 0**. Οι τιμές στις οποίες κυμαίνεται το ε ανήκουν στο διάστημα [0.00001, 0.00049], το οποίο προκύπτει από τη συνθήκη **l > 2ε <=> ε < l/2**, θεωρώντας ως ελάχιστη τιμή το ε = 0.00001. Η μεταβολή των υπολογισμών για τις τρεις συναρτήσεις που μελετώνται αποτυπώνεται στο διάγραμμα της Εικόνας 4.



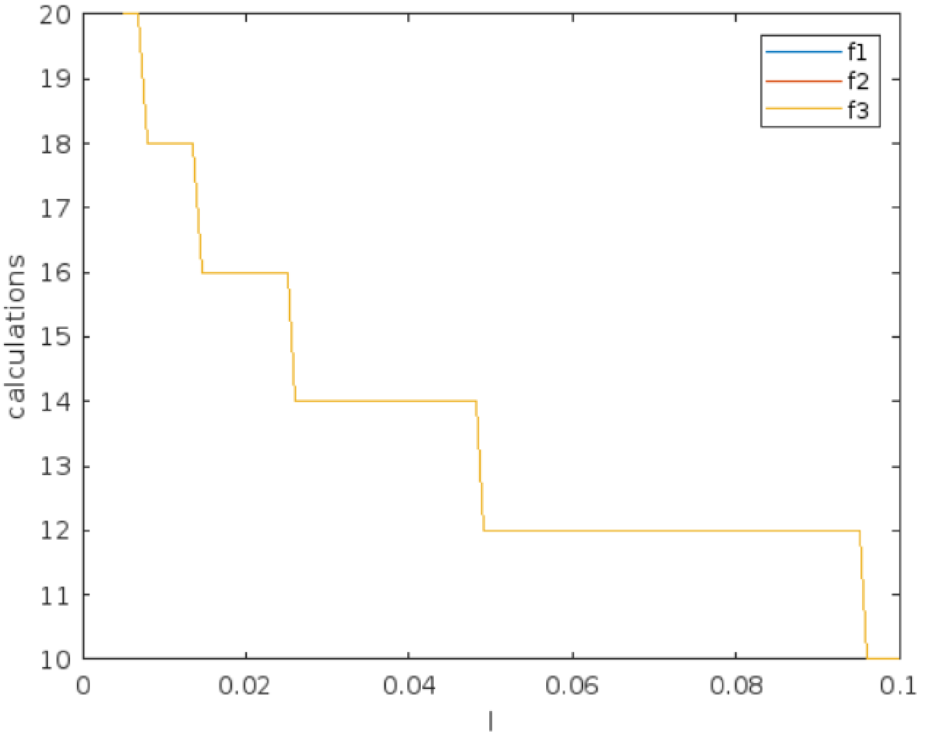
Εικόνα 4: *Μεταβολή των Υπολογισμών Αντικειμενικών Συναρτήσεων για l = 0.01 και μεταβλητό ε.*

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Το παραπάνω διάγραμμα είναι κοινό και για τις τρεις συναρτήσεις, καθώς οι παράμετροι που επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (ε, l και διάστημα αναζήτησης) είναι επίσης κοινές.

- Η αύξηση του ε συνεπάγεται την αύξηση του αριθμού των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης. Η μέθοδος, δηλαδή, συγκλίνει για ε < l/2, όπως ακριβώς προβλέπει και η θεωρία.

Στη συνέχεια, ζητείται η εφαρμογή της ίδιας μεθόδου, αρχικά για **σταθερό ε = 0.001** και για **μεταβαλλόμενο l**. Για το l επιλέγονται τιμές που ανήκουν στο διάστημα [0.005, 0.1], ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη **l > 2ε**. Η μεταβολή των υπολογισμών για τις τρεις συναρτήσεις που μελετώνται αποτυπώνεται στο διάγραμμα της Εικόνας 5

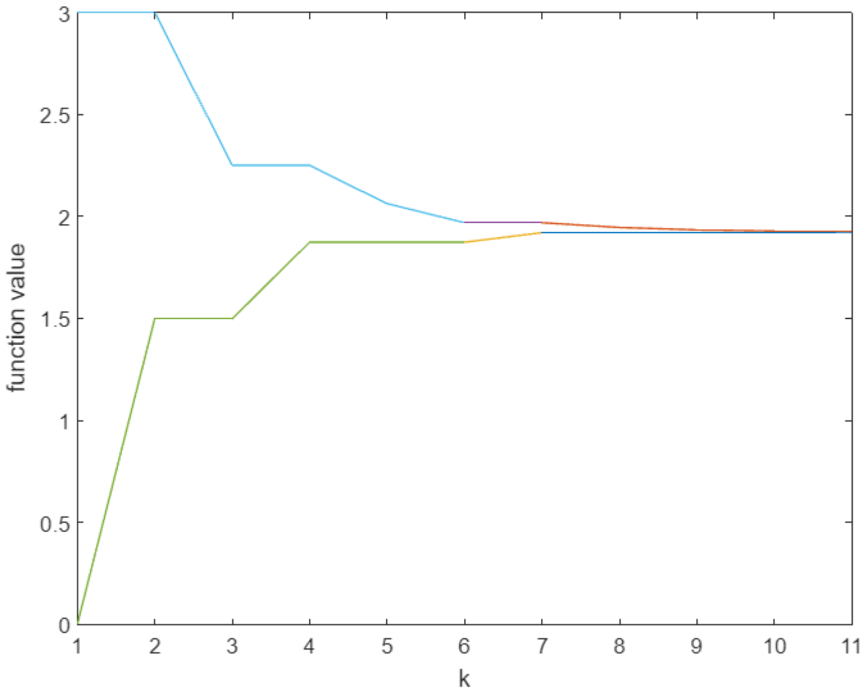


Εικόνα 5: *Μεταβολή των Υπολογισμών Αντικειμενικών Συναρτήσεων για ε = 0.001 και μεταβλητό l.*

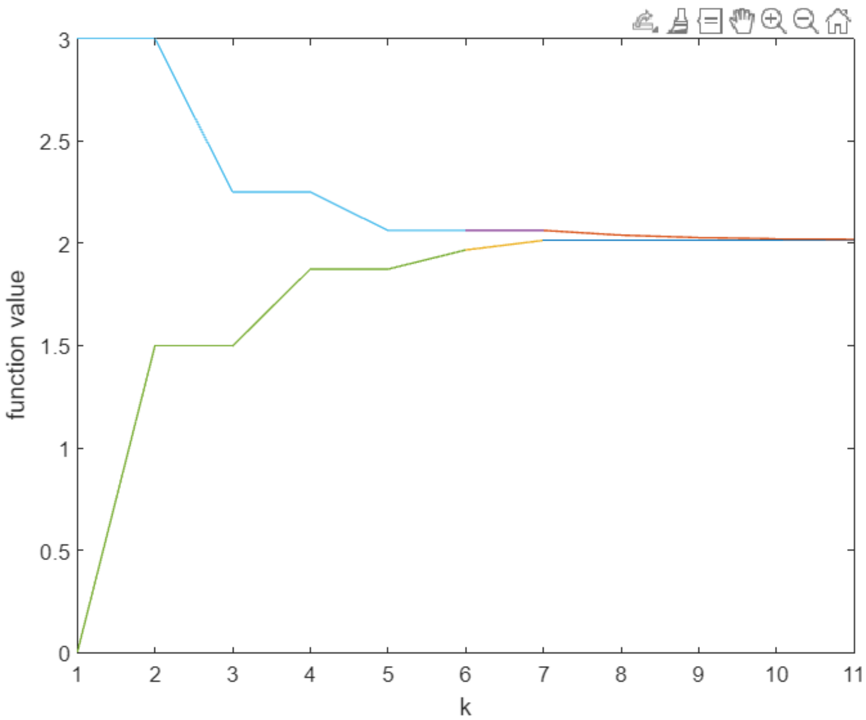
Παρατηρήσεις:

- Το παραπάνω διάγραμμα είναι κοινό και για τις τρεις συναρτήσεις, καθώς οι παράμετροι που επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (ε, l και διάστημα αναζήτησης) είναι επίσης κοινές.
- Με την αύξηση του l παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης.

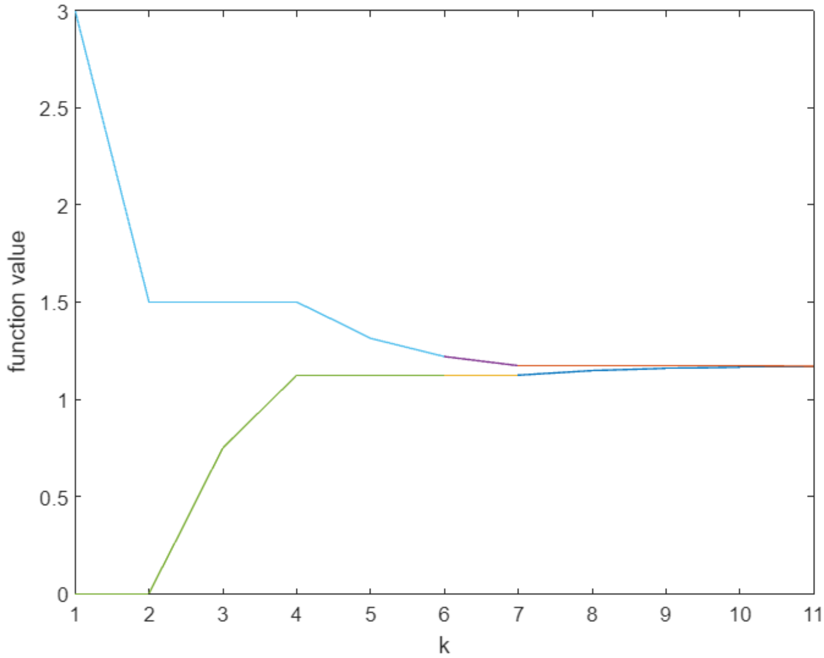
Παρακάτω παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, οι οποίες απεικονίζουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για **τρεις τιμές του l**, **0.005, 0.01, 0.1** και σταθερό **ε = 0.001**:



Εικόνα 6: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f1(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l και σταθερό ε = 0.001.*



Εικόνα 7: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f2(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l και σταθερό ε = 0.001.*

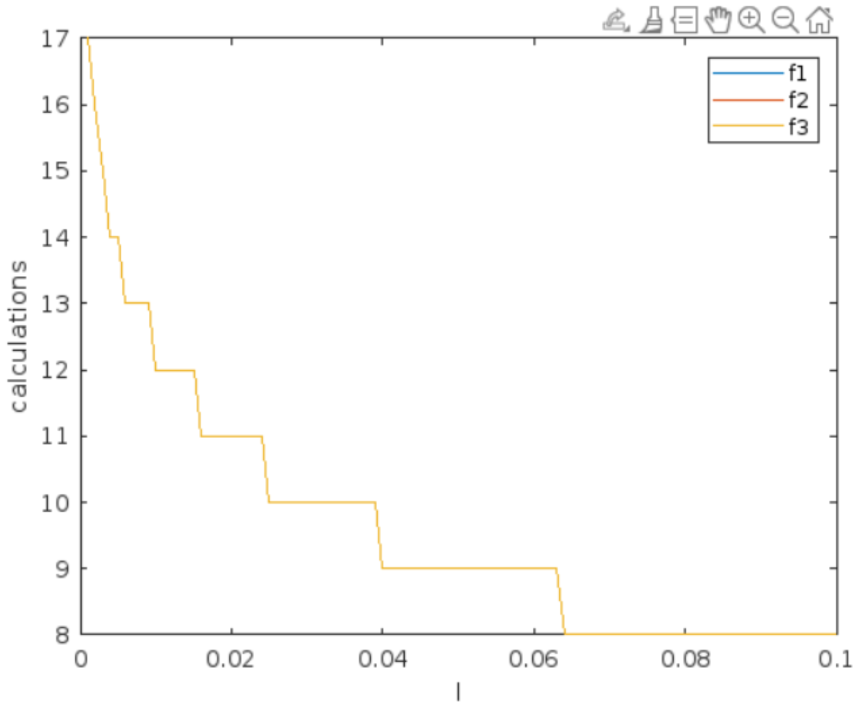


Εικόνα 8: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f3(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l και σταθερό ε = 0.001.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, είναι φανερό πως τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης συγκλίνουν, με την πάροδο των επαναλήψεων, προς το ελάχιστο της εκάστοτε συνάρτησης, μέχρι που, στο τέλος, η απόκλιση μεταξύ τους είναι απειροελάχιστη. Αυτό σχηματικά απεικονίζεται ως μία ευθεία, οπότε έχουμε φτάσει έναν ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας, με την πάροδο επαρκών επαναλήψεων.

Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Στην συγκεκριμένη μέθοδο, σε αντίθεση με την μέθοδο της διχοτόμου, το κάθε υποδιάστημα συνδέεται αναλογικά με το υποδιάστημα της προηγούμενης επανάληψης με σταθερά αναλογίας ίση με 0.618, αντί να μεταβάλλεται εξαρτώμενο από το ε. Συνεπώς, η μόνη παράμετρος που λαμβάνεται υπόψη είναι το εύρος του διαστήματος αναζήτησης (l). Το ζητούμενο είναι η μελέτη της μεταβολής των υπολογισμών για τιμές του l που ανήκουν στο διάστημα [0.005 , 0.1]. Ο κώδικας για την υλοποίηση των διαγραμμάτων που αφορούν τη μέθοδο αυτή βρίσκεται στο αρχείο **golden_ratio.m**.

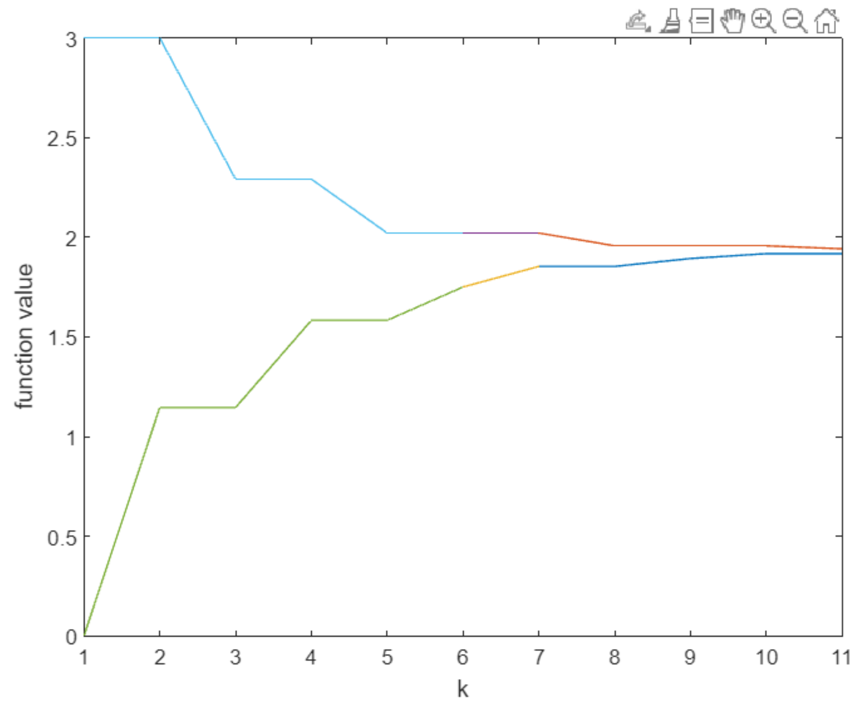


***Εικόνα 9**: Μεταβολή των Υπολογισμών Αντικειμενικών Συναρτήσεων για μεταβλητό l.*

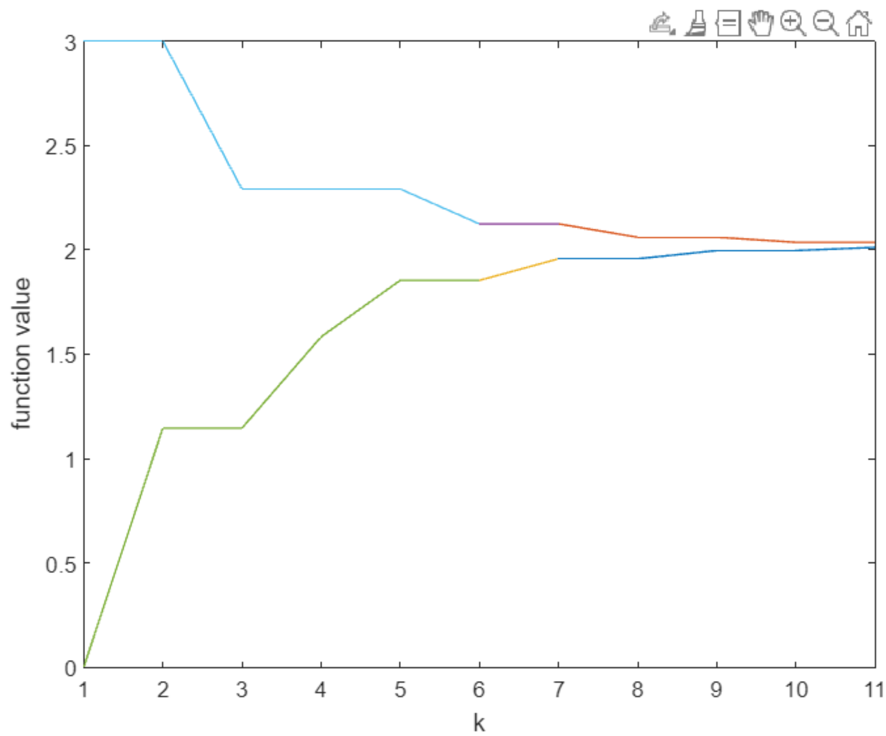
<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Το παραπάνω διάγραμμα είναι κοινό και για τις τρεις συναρτήσεις, καθώς οι παράμετροι που επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (l και διάστημα αναζήτησης) είναι επίσης κοινές.
- Με την αύξηση του l παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης.

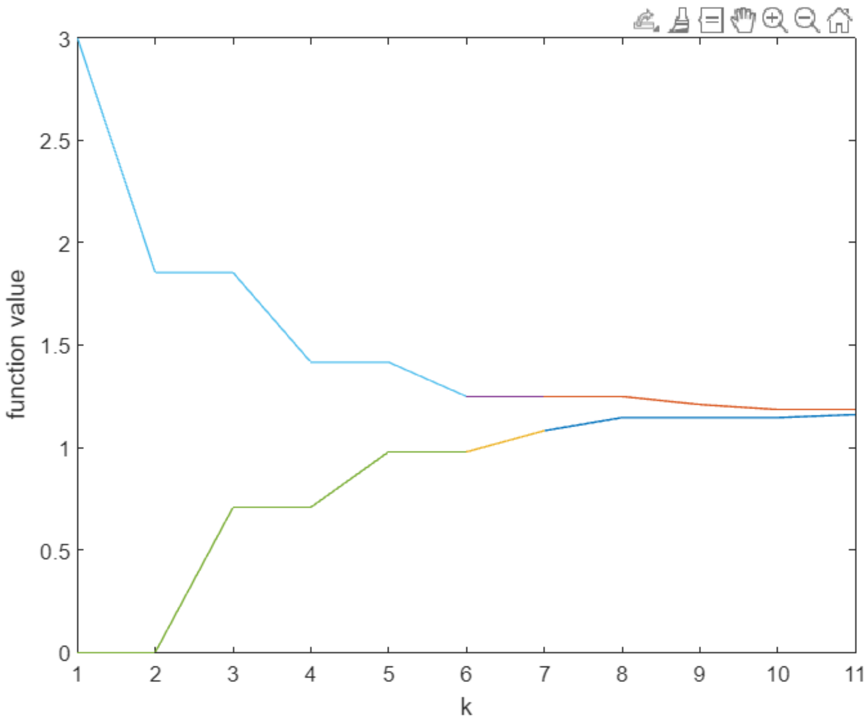
Παρακάτω παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, οι οποίες απεικονίζουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για **τρεις τιμές του l, 0.005, 0.01 και 0.1**:



Εικόνα 10: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f1(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*



Εικόνα 11: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f2(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*

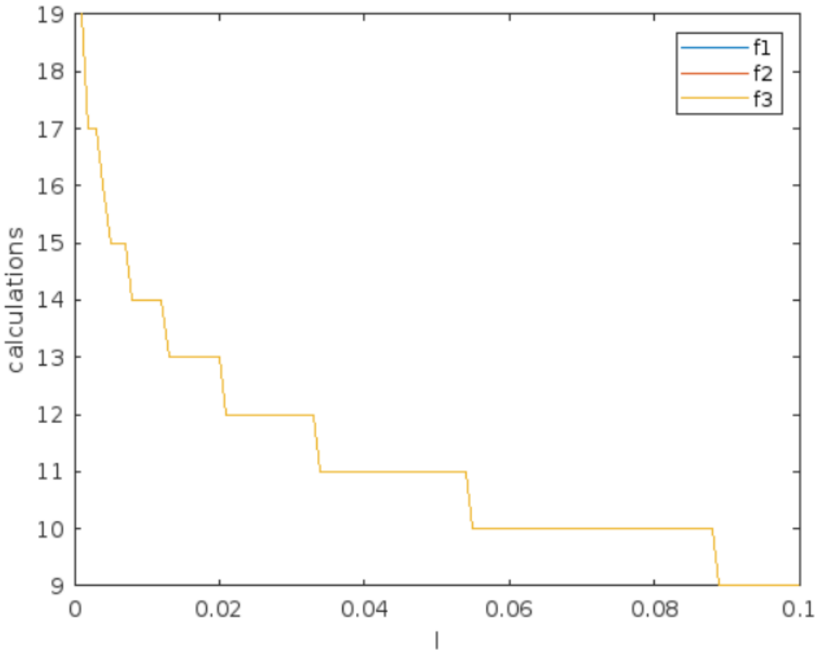


Εικόνα 12: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f3(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, είναι φανερό πως τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης συγκλίνουν, με την πάροδο των επαναλήψεων, προς το ελάχιστο της εκάστοτε συνάρτησης, μέχρι που, στο τέλος, η απόκλιση μεταξύ τους είναι απειροελάχιστη. Αυτό σχηματικά απεικονίζεται ως μία ευθεία, οπότε έχουμε φτάσει έναν ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας, με την πάροδο επαρκών επαναλήψεων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι, για τις διάφορες τιμές του l, το μόνο που αλλάζει είναι το πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν, μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (όσο μεγαλύτερη η τιμή του l, τόσο λιγότερες οι απαιτούμενες επαναλήψεις).

Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος Fibonacci ακολουθεί παρόμοια λογική με αυτή της μεθόδου του χρυσού τομέα. Η ειδοποιός τους διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι, μετά από κάθε επανάληψη, το διάστημα αναζήτησης συγκλίνει κατά $\frac{F(n-k)}{F(n-k+1)}$. Ο κώδικας για την υλοποίηση των διαγραμμάτων που αφορούν τη μέθοδο αυτή βρίσκεται στο αρχείο **fibonacci_method.m**.

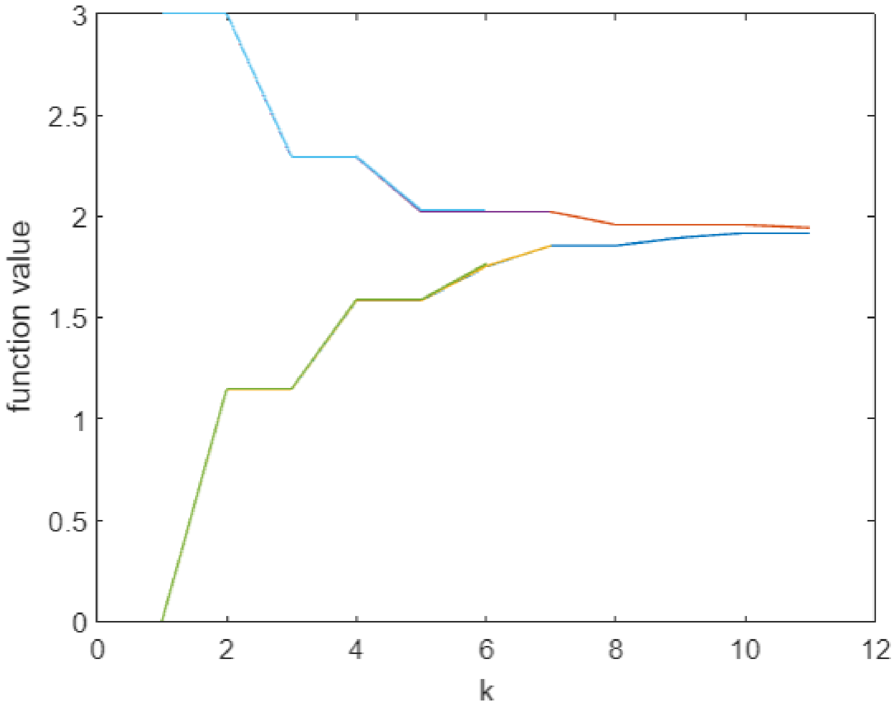


Εικόνα 13: *Μεταβολή των Υπολογισμών Αντικειμενικών Συναρτήσεων για μεταβλητό l.*

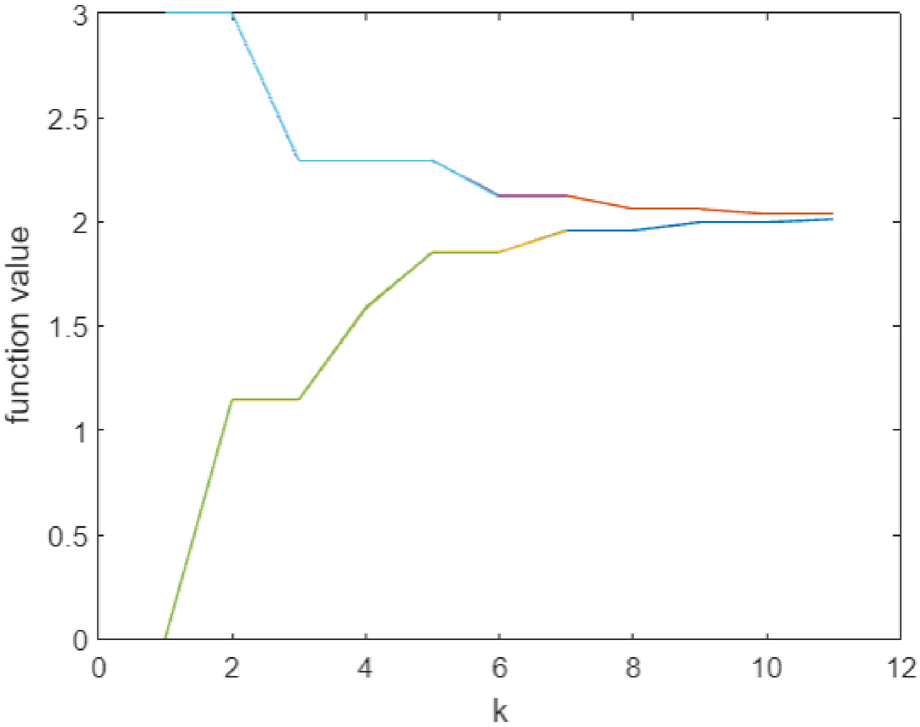
<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Το παραπάνω διάγραμμα είναι κοινό και για τις τρεις συναρτήσεις, καθώς οι παράμετροι που επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (l και διάστημα αναζήτησης) είναι επίσης κοινές.
- Με την αύξηση του l παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης.

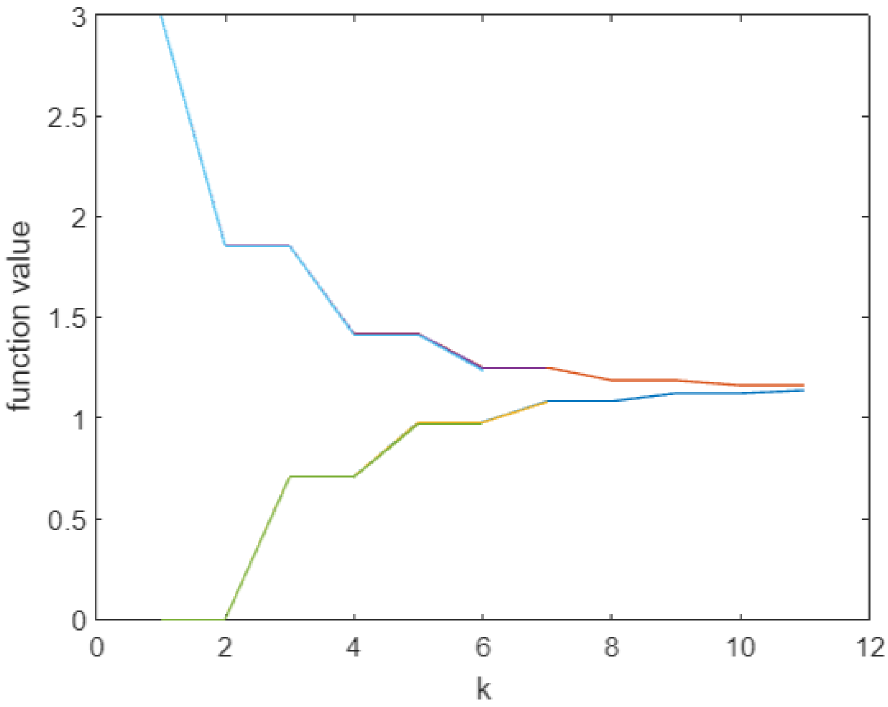
Παρακάτω παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, οι οποίες απεικονίζουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για **τρεις τιμές του l**, **0.005, 0.01 και 0.1**:



Εικόνα 14: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f1(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*



Εικόνα 15: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f2(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*

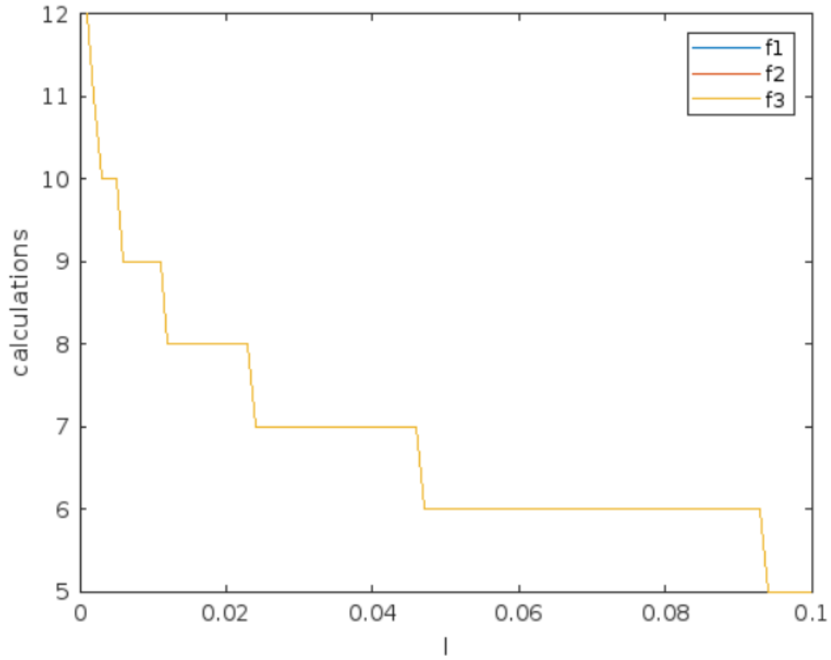


Εικόνα 16: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f3(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, είναι φανερό πως τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης συγκλίνουν, με την πάροδο των επαναλήψεων, προς το ελάχιστο της εκάστοτε συνάρτησης, μέχρι που, στο τέλος, η απόκλιση μεταξύ τους είναι απειροελάχιστη. Αυτό σχηματικά απεικονίζεται ως μία ευθεία, οπότε έχουμε φτάσει έναν ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας, με την πάροδο επαρκών επαναλήψεων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι, για τις διάφορες τιμές του l, το μόνο που αλλάζει είναι το πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν, μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (όσο μεγαλύτερη η τιμή του l, τόσο λιγότερες οι απαιτούμενες επαναλήψεις).

Μέθοδος Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγου

Η παρούσα μέθοδος αποσκοπεί στην εύρεση ενός σημείου x_k μέσω της παραγώγου $\frac{df(x)}{dx} \mid x = \ xk$, το οποίο θα ελαχιστοποιεί, σε κάθε επανάληψη, το εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Ο κώδικας για την υλοποίηση των διαγραμμάτων που αφορούν τη μέθοδο αυτή βρίσκεται στο αρχείο **bisection_with_derivative.m**.

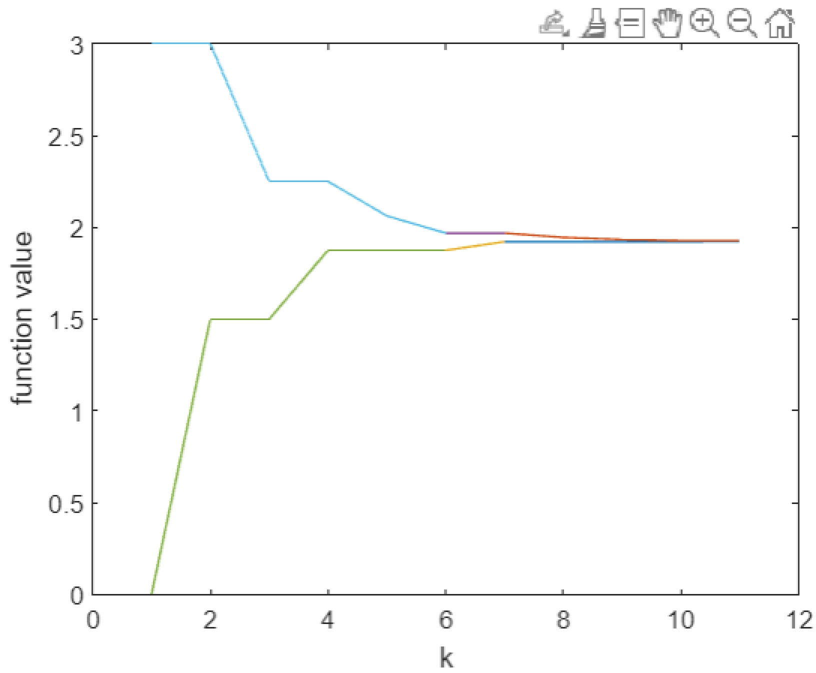


Εικόνα 17: *Μεταβολή των Υπολογισμών Αντικειμενικών Συναρτήσεων για μεταβλητό l.*

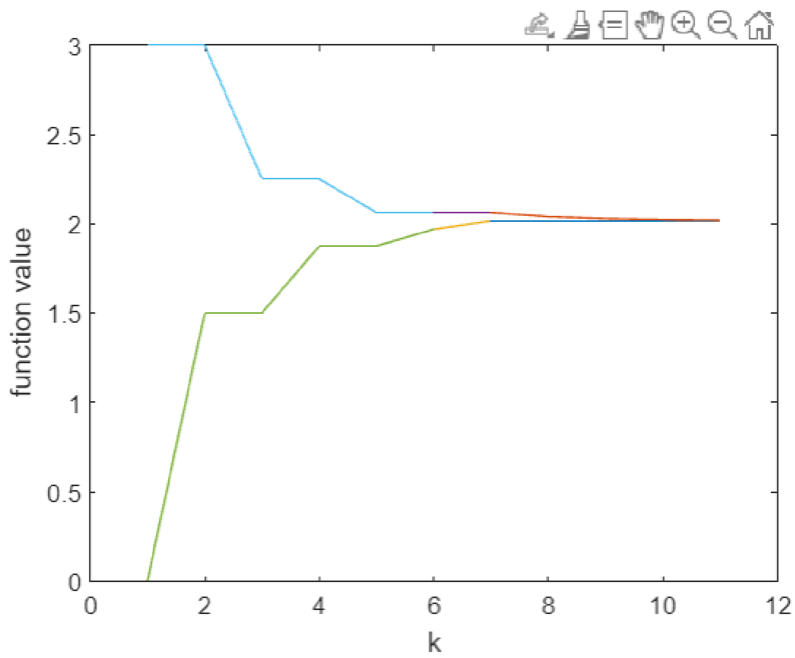
<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Το παραπάνω διάγραμμα είναι κοινό και για τις τρεις συναρτήσεις, καθώς οι παράμετροι που επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (l και διάστημα αναζήτησης) είναι επίσης κοινές.
- Με την αύξηση του l παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης.

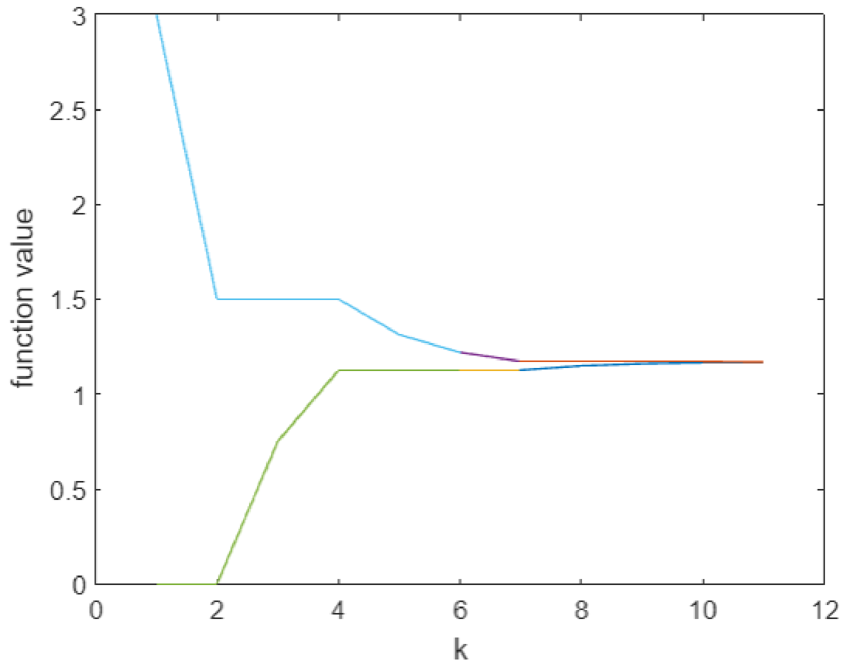
Παρακάτω παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, οι οποίες απεικονίζουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για **τρεις τιμές του l**, **0.005, 0.01 και 0.1**:



Εικόνα 18: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f1(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*



Εικόνα 19: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f2(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*



Εικόνα 20: *Σύγκλιση ορίων διαστήματος αναζήτησης της f3(x) συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για διάφορες τιμές του l.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, είναι φανερό πως τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης συγκλίνουν, με την πάροδο των επαναλήψεων, προς το ελάχιστο της εκάστοτε συνάρτησης, μέχρι που, στο τέλος, η απόκλιση μεταξύ τους είναι απειροελάχιστη. Αυτό σχηματικά απεικονίζεται ως μία ευθεία, οπότε έχουμε φτάσει έναν ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας, με την πάροδο επαρκών επαναλήψεων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι, για τις διάφορες τιμές του l, το μόνο που αλλάζει είναι το πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν, μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (όσο μεγαλύτερη η τιμή του l, τόσο λιγότερες οι απαιτούμενες επαναλήψεις).

Συγκριτικός Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα διαγράμματα μεταβολής των υπολογισμών για τις αντικειμενικές συναρτήσεις των τεσσάρων μεθόδων, προκύπτουν τα εξής **συμπεράσματα**:

- Σειρά αποδοτικότητας μεθόδων χωρίς χρήση παραγώγων (η οποία επιβεβαιώνεται και από τη θεωρία):
    1. Μέθοδος Διχοτόμου
    2. Μέθοδος Χρυσού Τομέα
    3. Μέθοδος Fibonacci
- Όσο αυξάνεται το n (δηλαδή όσο το l ελαττώνεται), η μέθοδος του χρυσού τομέα τείνει να ταυτιστεί με τη μέθοδο Fibonacci, σε ό,τι έχει να κάνει με τον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βιβλιογραφικές Πηγές

1. Γεώργιος Α. Ροβιθάκης, «Τεχνικές Βελτιστοποίησης», Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ