Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΤΡΙΤΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ

Ημερομηνία: 12/12/2023

Οικονόμου Χρήστος

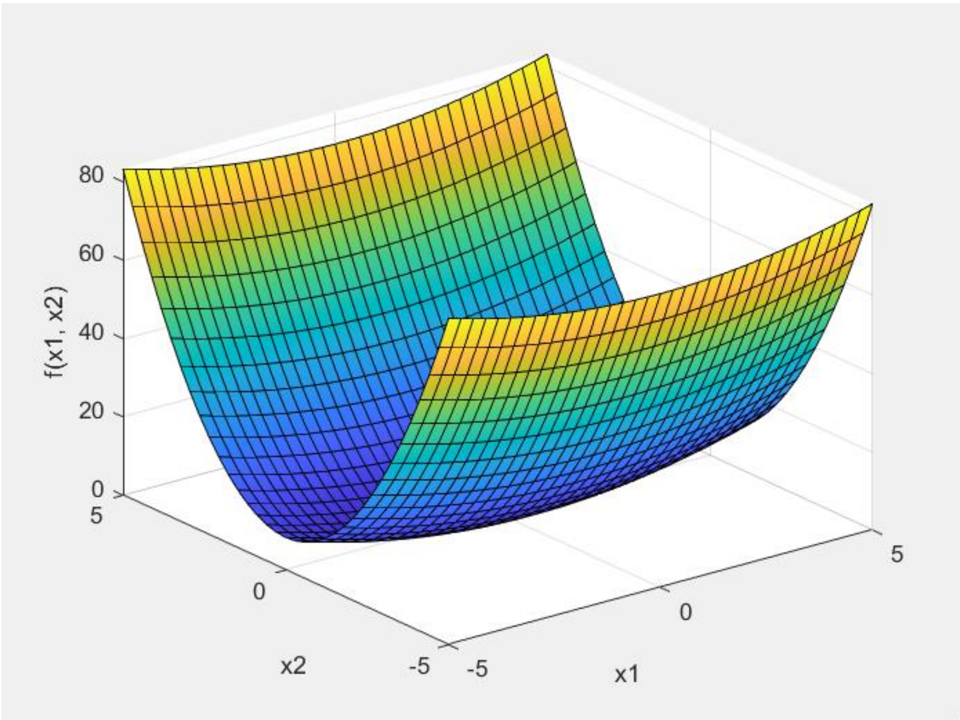
Α.Ε.Μ.: 10268

Email: cnoikonom@ece.auth.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η αξιοποίηση της **Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου με Προβολή** σε μια συγκεκριμένη συνάρτηση, αρχικά χωρίς, και, έπειτα, με περιορισμούς, ενώ παράλληλα χρησιμοποιούνται και διαφορετικές τιμές βήματος για τα διάφορα ερωτήματα της. Η συνάρτηση που μελετήθηκε είναι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$, $x = [x_1\ x_2\ ]^T$. Μια γραφική αποτύπωση της συνάρτησης αυτής φαίνεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: *Γραφική Παράσταση της* $f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο (0,0), όπως φαίνεται και στην γραφική παράσταση της Εικόνας 1.

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος της μέγιστης καθόδου με προβολή είναι αλγόριθμος εφικτών σημείων της μορφής:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\overline{x}_k - x_k),\ \gamma_k \in (0,1]$$

όπου

$$\overline{x}_k = \Pr X\,\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\},\ s_k > 0$$

και:

- k : αριθμός επανάληψης
- x : διάνυσμα - σημείο του $\mathbb{R}^n$
- $\overline{x}_k$: εφικτό σημείο του συνόλου X
- $\Pr X\,\{y\}$: ο τελεστής προβολής του σημείου y στο σύνολο X
- γ_k: βήμα αναζήτησης νέου εφικτού σημείου
- s_k: βήμα αναζήτησης στον αλγόριθμο μέγιστης καθόδου

Ο τελεστής προβολής $\Pr X\,(x_i)$, λόγω της μορφής των περιορισμών

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n\!: a_i < x_i < b_i\,,\ i = 1,2,\dots,n\}$$

θα έχει τη μορφή:

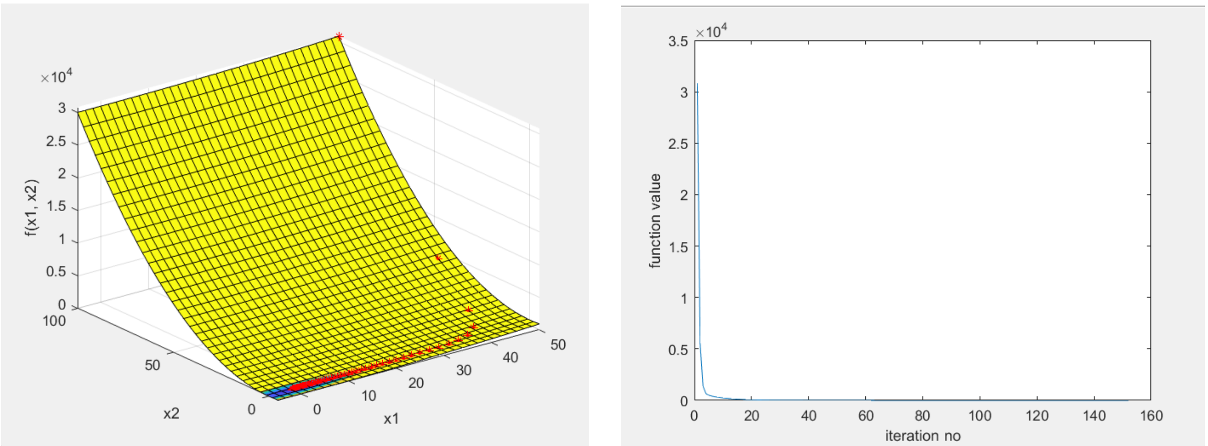
- a_i , αν $x_i \le a_i$
- b_i , αν $x_i \ge b_i$
- x_i, αν $a_i < x_i < b_i$

Επομένως, το x_k προσδιορίζεται αν κινηθούμε στην κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης με βήμα s_kκαι, στη συνέχεια, βρούμε την προβολή του $x_k - s_k\nabla f(x_k)$ στο X , καταλήγοντας, με τον τρόπο αυτόν, σε εφικτό σημείο. Έχοντας βρει την εφικτή κατεύθυνση αναζήτησης $\overline{x}_k - x_k$, κινούμαστε με βήμα $\gamma_k \in (0,1]$ σε αυτή και προσδιορίζουμε το νέο εφικτό σημείο x_{k+1}.

Ερωτήματα Εργαστηριακής Άσκησης

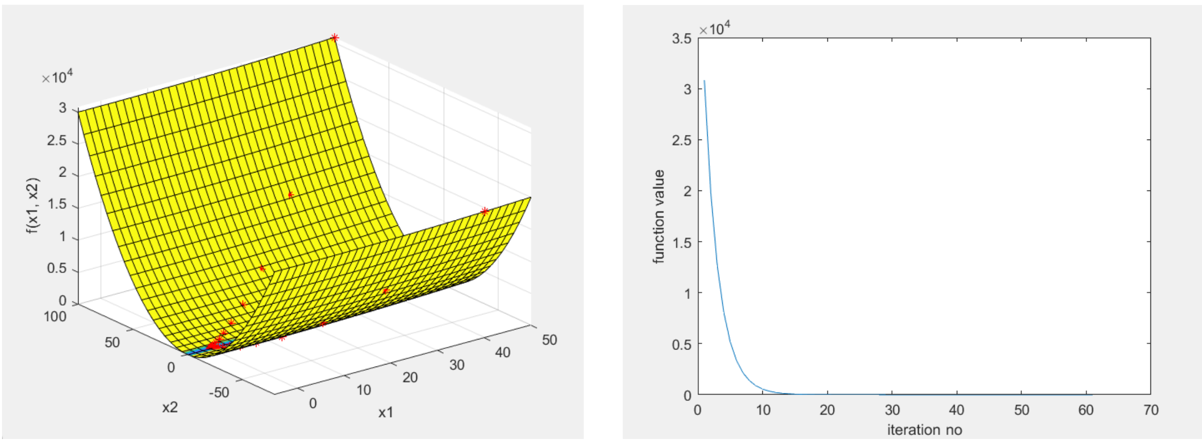
Θέμα 1

Στο πρώτο ερώτημα της εργασίας, απαιτείται η εφαρμογή της **Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου** στη συνάρτηση f(x) με ακρίβεια **ε = 0.001** και για τέσσερις διαφορετικές τιμές του βήματος γ_k. Ως σημείο εκκίνησης επιλέγεται το **(50, 100)**. Αρχικά, ο αλγόριθμος εκτελείται για **γ_k = 0.1** και τα αποτελέσματα της εφαρμογής του φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις της Εικόνας 2.

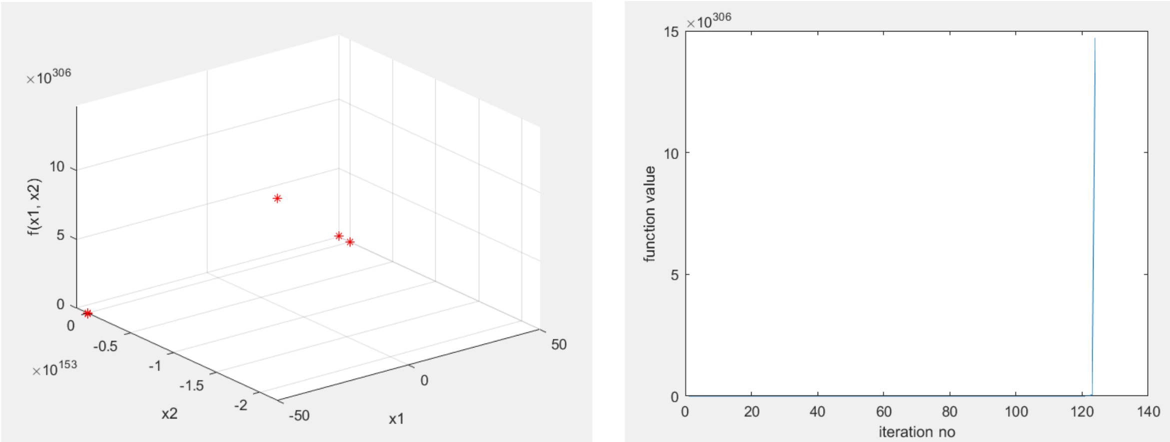


***Εικόνα 2**: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για ε = 0.001 και γ_k = 0.1*

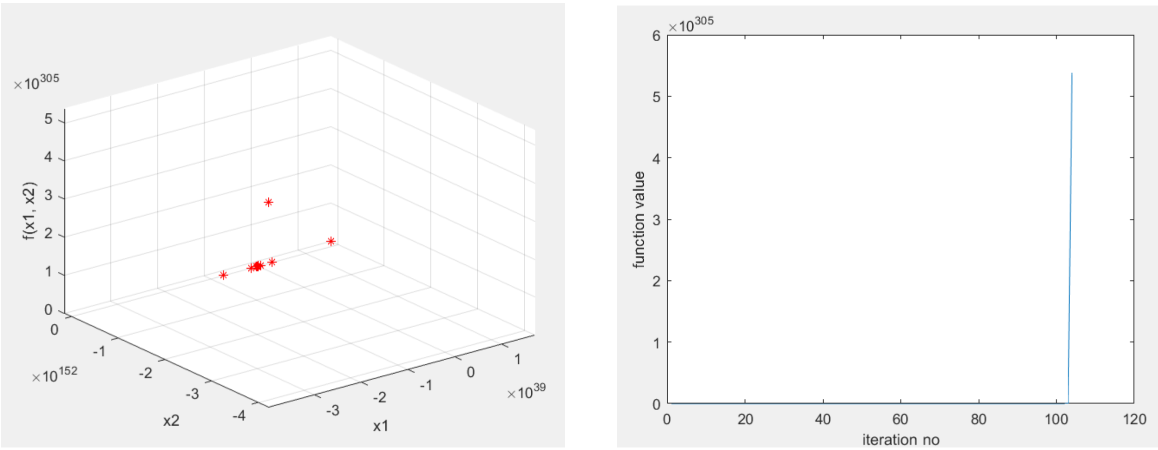
Εφαρμόζεται ο ίδιος αλγόριθμος και για **γ_k = 0.3** (Εικόνα 3), **γ_k = 3** (Εικόνα 4) και **γ_k = 5** (Εικόνα 5).



***Εικόνα 3**: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για ε = 0.001 και γ_k = 0.3*



***Εικόνα 4**: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για ε = 0.001 και γ_k = 3*



***Εικόνα 5**: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για ε = 0.001 και γ_k = 5*

Τα παραπάνω αποτελέσματα επαληθεύονται και μαθηματικά, μέσω της αναζήτησης τιμών του βήματος γ_k, για τις οποίες ο αλγόριθμος συγκλίνει. Αναλυτικότερα, η βασική προϋπόθεση για τη σύγκλιση της συγκεκριμένης μεθόδου αποτυπώνεται στη σχέση $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$. Πρέπει, δηλαδή, κάθε τιμή επόμενου βήματος να είναι μικρότερη από την προηγούμενη. Στόχος είναι η σύγκλιση στο ελάχιστο σημείο της συνάρτησης f(x), το οποίο είναι, όπως έχει προαναφερθεί, το (0,0). Με την εφαρμογή της μεθόδου μεγίστης καθόδου στη συνάρτηση αυτή, προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \cdot \nabla f \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \nabla f = \left[\frac{2}{3}x_1 \, , \, 6x_2\right]^T \quad (2)$$

Οπότε, η αναζήτηση ανάγεται στις τιμές που ικανοποιούν την ανίσωση:

$f\left(x_{1,k+1}\ ,\ x_{2,k+1}\right)\ < f\left(x_{1,k}\ ,\ x_{2,k}\right)$, όπου, αντικαθιστώντας τις (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{1}{3}x_{1,k+1}^2 + 3x_{2,k+1}^2 < \frac{1}{3}x_{1,k}^2 + 3x_{2,k}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x_{1,k}^2\left(1-\frac{2}{3}\gamma_k\right)^2 + 3x_{2,k}^2(1-6\gamma_k)^2 < \frac{1}{3}x_{1,k}^2 + 3x_{2,k}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x_{1,k}^2\left[\left(1-\frac{2}{3}\gamma_k\right)^2 - 1\right] + 3x_{2,k}^2[(1-6\gamma_k)^2 - 1] < 0$$

Από τη δομή της τελικής ανίσωσης και δεδομένου ότι $\gamma_k > 0$ (αναφέρεται στη θεωρία), συμπεραίνουμε πως

$$\left(1-\tfrac{2}{3}\gamma_k\right)^2 - 1 < 0 \qquad \text{και} \qquad (1-6\gamma_k)^2 - 1 < 0 \qquad \Rightarrow$$

$$0 < \gamma_k < 3 \qquad \text{και} \qquad 0 < \gamma_k < \tfrac{1}{3}$$

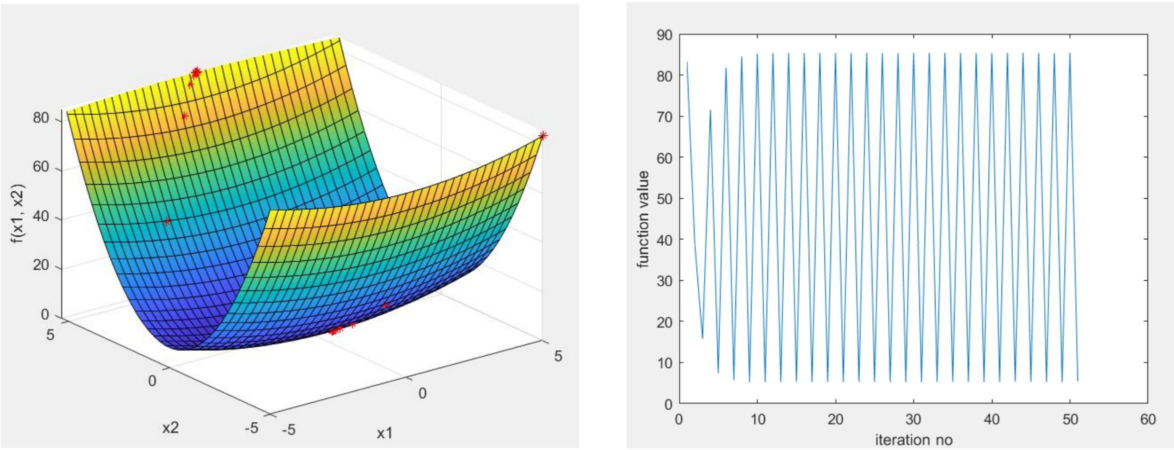
Επομένως, προκύπτει πως ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο σημείο της f(x) για $\gamma_k < \frac{1}{3}$, κάτι που συνάδει με τα πειραματικά μας αποτελέσματα, καθώς παρατηρούμε πως για τις τιμές 0.1 και 0.3 του γ_k , η συνάρτηση συγκλίνει στο (0,0), ενώ για $\gamma_k = 3$ και $\gamma_k = 5$ δεν υπάρχει σύγκλιση.

Για τα επόμενα ερωτήματα της εργασίας, λαμβάνουμε υπόψη τους εξής **περιορισμούς**:

$$-10 \le x_1 \le 5 \qquad \text{και} \qquad -8 \le x_2 \le 12$$

Θέμα 2

Στο δεύτερο ερώτημα, ζητείται η χρήση του αλγορίθμου **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή**, με $\boldsymbol{s_k = 5}$, $\boldsymbol{\gamma_k = 0.5}$, σημείο εκκίνησης το **(5, −5)** και ακρίβεια $\boldsymbol{\varepsilon = 0.01}$. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή αυτή αποτυπώνονται στις γραφικές παραστάσεις της Εικόνας 6.



***Εικόνα 6**: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για ε = 0.01, γ_k = 0.5, s_k = 5 και σημείο εκκίνησης το (5, -5)*

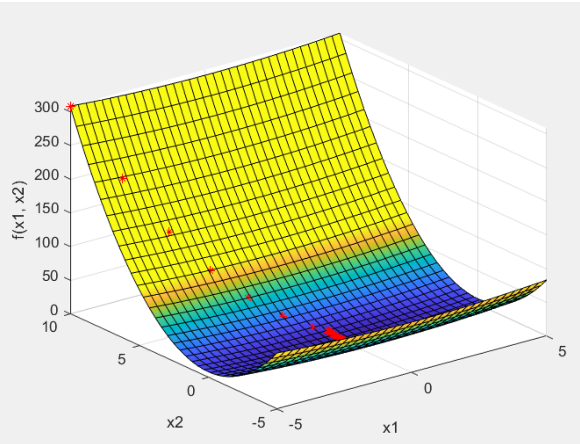
<u>Παρατηρήσεις:</u>

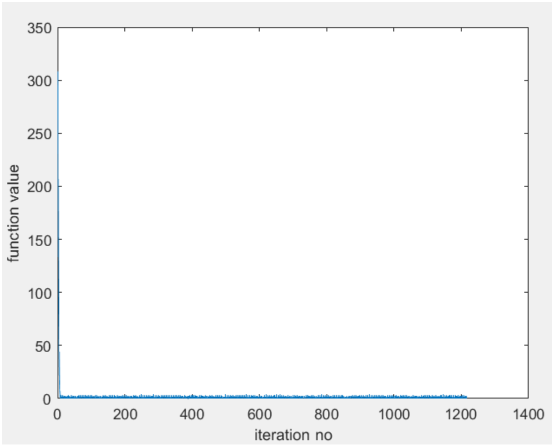
Από τις δύο γραφικές παραστάσεις, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως η μέθοδος παρουσιάζει έντονη ταλάντωση μεταξύ δύο σημείων ((0, 5.333) και (0, -1.333)), όμως δεν συγκλίνει στο (0,0). Παρατηρείται, επιπλέον, πως εφόσον βρισκόμαστε στην περιοχή των εφικτών σημείων, το βήμα θα είναι $s_k \cdot \gamma_k = 2.5 > \frac{1}{3}$, οπότε, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πρώτου ερωτήματος, επιβεβαιώνεται το συμπέρασμά μας.

Συγκρίνοντας τα παρόντα αποτελέσματα με αυτά του πρώτου θέματος, φαίνεται πως, ενώ η τιμή του βήματος s_k είναι αρκετά υψηλή, δεν παρατηρείται τόσο μεγάλη απόκλιση του αλγορίθμου, σε σχέση με την απόκλιση που υπήρχε στο πρώτο ερώτημα, λόγω υψηλών τιμών του γ_k. Αυτό είναι λογικό, καθώς η επιλογή του σημείου ($x_{1,k+1}$, $x_{2,k+1}$) γίνεται με τον συνδυασμό των βημάτων γ_k και s_k, όπως προβλέπει η μεθοδολογία του αλγορίθμου.

Θέμα 3

Το τρίτο ζητούμενο αφορά την χρήση της μεθόδου **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή**, με s_k **= 15**, γ_k **= 0.1**, σημείο εκκίνησης το **(-5, 10)** και ακρίβεια ε **= 0.01**. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή αυτή αποτυπώνονται στις γραφικές παραστάσεις της Εικόνας 7.





***Εικόνα** 7: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για ε = 0.01, γ_k = 0.1, s_k = 15 και σημείο εκκίνησης το (-5, 10)*

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Με αυτά τα δεδομένα, ο αλγόριθμος επιστρέφει το (0,0) ως ελάχιστο και δίνει σωστό αποτέλεσμα όταν τερματίζει, παρόλο που, αρχικά, παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις σε μια περιοχή περί του ολικού ελαχίστου (όχι όμως μεταξύ των ίδιων σημείων, όπως στο Ερώτημα 2). Παρ'όλα αυτά, η σύγκλιση αυτή δεν μπορεί να κριθεί απόλυτα εγγυημένη και αξιόπιστη.

Ο πρακτικός τρόπος που προτείνεται, ώστε να υπάρχει σίγουρα επιτυχής σύγκλιση του αλγορίθμου, είναι η κατάλληλη επιλογή των βημάτων s_k και γ_k μέσω της εφαρμογής της μεθόδου μέγιστης καθόδου με προβολή στη συνάρτηση f(x). Αναλυτικότερα:

$x_{1,k+1} = x_{1,k} + \gamma_k(\bar{x}_{1,k} - x_{1,k})$ και $x_{2,k+1} = x_{2,k} + \gamma_k(\bar{x}_{2,k} - x_{2,k})$

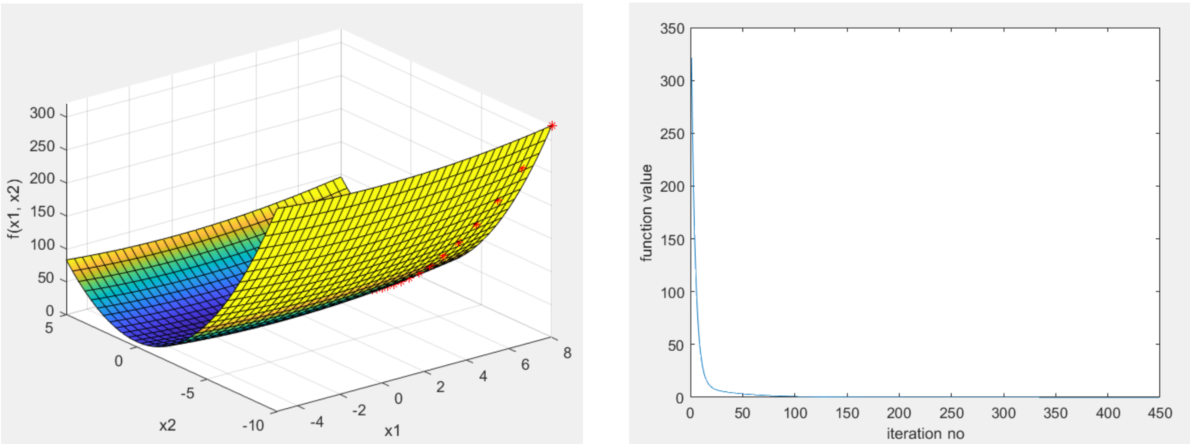
όπου:

$\bar{x}_{1,k} = \Pr X\left\{x_{1,k} - s_k \cdot \frac{2}{3}x_{1,k}\right\}$ και $\bar{x}_{2,k} = \Pr X\left\{x_{2,k} - s_k \cdot 6x_{2,k}\right\}$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή του πρώτου ερωτήματος για τις παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στο ότι εγγυημένη σύγκλιση θα υπάρχει, αν $s_k \cdot \gamma_k < \frac{1}{3}$.

Θέμα 4

Το τελευταίο ερώτημα της εργασίας πραγματεύεται την αξιοποίηση της μεθόδου **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή**, με $\boldsymbol{s_k}$ **= 0.1**, $\boldsymbol{\gamma_k}$ **= 0.2**, σημείο εκκίνησης το **(8, -10)** και ακρίβεια $\boldsymbol{\varepsilon}$ **= 0.01**. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή αυτή αποτυπώνονται στις γραφικές παραστάσεις της Εικόνας 8.



Εικόνα 8: *Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για ε = 0.01, γ_k = 0.2, s_k = 0.1 και σημείο εκκίνησης το (8, -10)*

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Εδώ ως σημείο εκκίνησης επιλέγεται σημείο εκτός της περιοχής των περιορισμών. Ωστόσο, μέσω της προβολής του σημείου εντός του χώρου των εφικτών σημείων από τον αλγόριθμο, καθώς η αναζήτηση έξω από αυτά δεν έχει νόημα, η σύγκλιση είναι επιτυχής (έπειτα από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων), όπως φαίνεται από την Εικόνα 8. Η επιτυχία της σύγκλισης ήταν αναμενόμενη αφού το γινόμενο των βημάτων είναι $s_k \cdot \gamma_k = 0.02 < \frac{1}{3}$, ικανοποιώντας την συνθήκη που αποδείχθηκε παραπάνω.

Βιβλιογραφικές Πηγές

1. Γεώργιος Α. Ροβιθάκης, «Τεχνικές Βελτιστοποίησης», Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ