

Análisis numérico de la ecuación de Richards

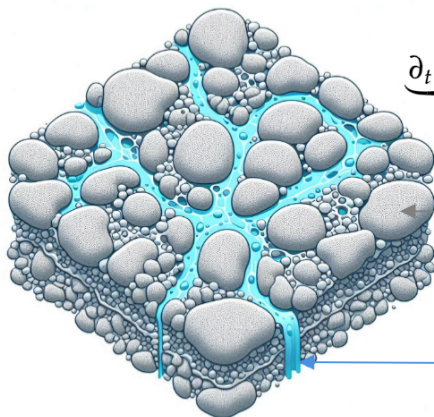
Carlos Enrique Nosa Guzman

Análisis Numérico II

cnosa@unal.edu.co

2024-1S

Introducción



$$\partial_t \theta(\Psi) = \nabla (K(\theta(\Psi)) \nabla (\Psi + z))$$

Ecuación de Richards

Medio poroso

Aire

Fluido en movimiento

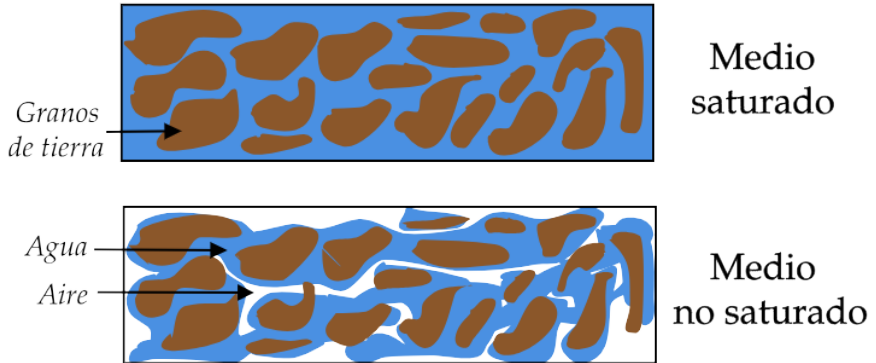
Medios porosos

Definición

- Un medio poroso es un material compuesto por una matriz sólida que contiene **poros**, los cuales están generalmente llenos de un fluido (líquido o gas). Este tipo de materiales, que también incluyen estructuras como espumas, se caracterizan principalmente por su porosidad.
- Además de la porosidad, las propiedades de un medio poroso, como la **permeabilidad**, resistencia a la tracción, y conductividad eléctrica, pueden derivarse de las propiedades de sus componentes y la estructura de los poros, aunque estas derivaciones suelen ser complejas.

Flujo en medios porosos saturados/insaturados

Definición



Contenido de agua

Definición

- El contenido de agua, o contenido de humedad, es la cantidad de agua presente en un material como suelo, roca, cerámica, cultivos o madera. Se expresa como una **proporción**, que varía desde 0 (completamente seco) hasta el valor máximo correspondiente a la **porosidad** del material en saturación. Este contenido puede medirse en términos volumétricos o de masa.
- El contenido volumétrico de agua θ se define como

$$\theta := \frac{V_{agua}}{V_{total}} = \frac{V_{agua}}{V_{agua} + V_{sólidos} + V_{aire}}.$$

Conductividad hidráulica

Definición

- La **conductividad hidráulica** representa la mayor o menor facilidad con la que el medio deja pasar el agua a través de él por unidad de área transversal a la dirección del flujo.
- Normalmente se representa con la letra K .
- Sus dimensiones son $[LT^{-1}]$
- K_S representa la conductividad hidráulica cuando se está en un medio saturado.

Cabezal hidráulico

Definición

El cabezal hidráulico es la cantidad de energía que tiene el fluido por cada unidad de peso. Es una forma útil de expresar la energía disponible en un sistema de flujo de fluidos porque permite comparar la energía en diferentes puntos del sistema independientemente de la cantidad de fluido.

$$\text{Cabezal hidráulico} = \frac{\text{Energía}}{\text{Peso}}.$$

- Se denota por la letra H .
- Sus unidades son $[L]$.
- **Depende** de la posición, velocidad, presión y viscosidad del fluido.

Cabecal hidráulico

Definición

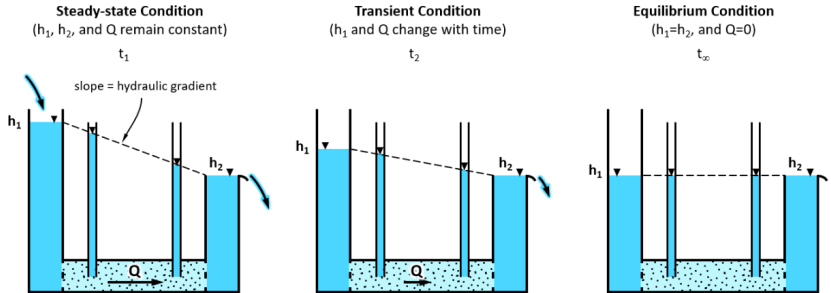
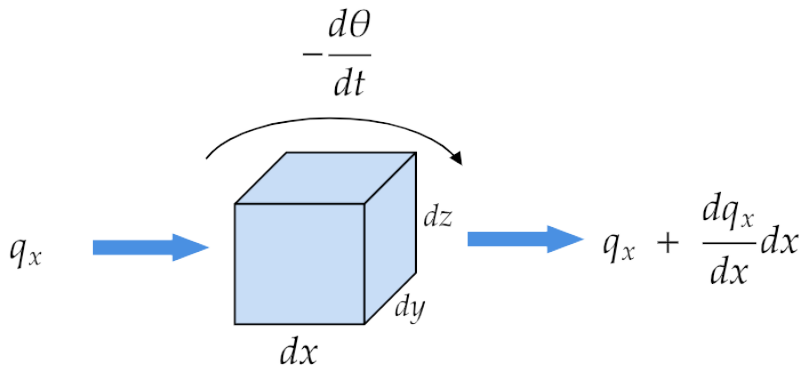


Figura: Cabecal hidráulico. Imagen tomada de [4]

Ecuación de continuidad

En mecánica de fluidos



Ecuación de continuidad

En mecánica de fluidos

La diferencia entre el **flujo volumétrico entrando y saliendo** de un volumen diferencial es igual a la **tasa del cambio del volumen respecto al tiempo** en el volumen diferencial (asumiendo que el fluido tiene densidad constante):

$$\frac{d\theta}{dt} + \nabla \mathbf{q} = 0.$$

Ley de Darcy-Buckingham

La ley de Darcy-Buckingham describe cómo el agua se mueve a través de suelos parcialmente saturados, teniendo en cuenta tanto la conductividad hidráulica que depende del cabezal hidráulico:

$$\mathbf{q} = -K(\mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{H}.$$

Ecuación de Richards

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad y la ley de Darcy-Buckingham se tiene que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \mathbf{q} = -\nabla(-K(\mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{H}) = \nabla \cdot (K(\mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{H}),$$

por ende, la **ecuación de Richards** es

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{H})}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{H}),$$

$$\frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\Psi) \cdot \nabla (\Psi + z)),$$

donde θ es el contenido de agua y K es la conductividad hidráulica, ambas funciones se pueden tomar dependiendo del cabezal hidráulico de presión Ψ .

Modelos para θ y K

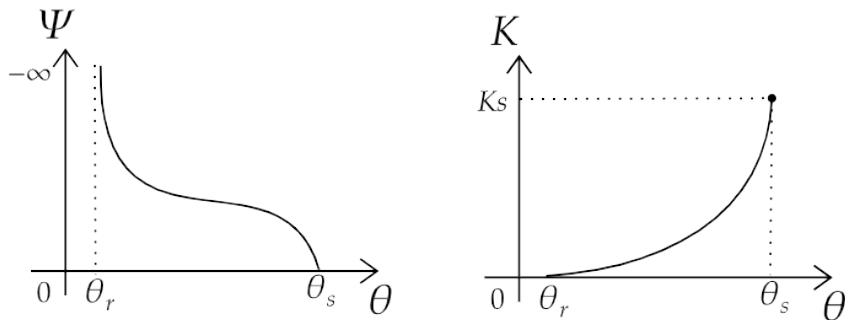


Figura: Modelo Van Genuchten Mualem para K y θ .

Modelos para θ y K

Van Genuchten Mualem

$$\theta(\Psi) = \begin{cases} \theta_R + (\theta_S - \theta_R) \left[\frac{1}{1 + (-\alpha\Psi)^n} \right]^{\frac{n-1}{n}}, & \Psi \leq 0 \\ \theta_S, & \Psi > 0 \end{cases}$$

$$K(\theta(\Psi)) = \begin{cases} K_S \theta(\Psi)^{\frac{1}{2}} \left[1 - (1 - \theta(\Psi)^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}} \right]^2, & \Psi \leq 0 \\ K_S, & \Psi > 0 \end{cases},$$

Ec. de Richards con condiciones de contorno

Formulación fuerte

En un dominio $\Omega \times (0, T] \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ se desea encontrar una función $\Psi : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(x, z, t) \in C^2$ cumpla

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \theta(\Psi) - \nabla \cdot (K(\theta(\Psi)) \nabla (\Psi + z)) = f & \text{en } \Omega \\ \Psi(x, z, 0) = \Psi_0(x, z) & \text{en } \Omega \\ \Psi = g & \text{en } \Gamma_D \\ \nabla \Psi \cdot \eta = h & \text{en } \Gamma_N \end{array} \right.$$

con f, g, h y Ψ_0 funciones conocidas definidas sobre los dominios correspondientes.

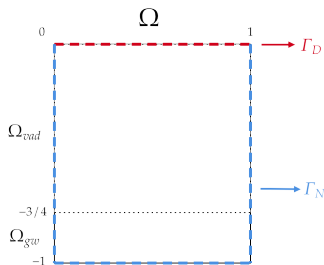
Caso estacionario

En un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ se desea encontrar una función $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(x, z) \in C^2$ cumpla

$$(S) \begin{cases} -\nabla \cdot (K(\theta(\Psi)) \nabla (\Psi + z)) = f & \text{en } \Omega \\ \Psi = g & \text{en } \Gamma_D \\ \nabla \Psi \cdot \eta = h & \text{en } \Gamma_N \end{cases}$$

con f, g, h funciones conocidas definidas sobre los dominios correspondientes.

Ejemplo

Figura: Dominio Ω .

Encontrar una función $\Psi : [0, 1] \times [-1, 0] \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(x, z, t) \in C^2$ cumpla

$$\mathcal{R}(\Psi) = f \quad \text{en } \Omega$$

$$\Psi(x, z, 0) = \Psi_0(x, z) \quad \text{en } \Omega$$

$$\Psi = 3 \quad \text{en } \Gamma_D$$

$$\nabla \Psi \cdot \eta = 0 \quad \text{en } \Gamma_N$$

Método de Euler implícito

Discretización temporal

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

El método de Euler implícito calcula la siguiente aproximación y_{k+1} usando la fórmula:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

donde h es el tamaño del paso, y_k es la **aproximación actual**, y $f(t_{k+1}, y_{k+1})$ es la función evaluada en el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) .

Método de elementos finitos

Discretización espacial

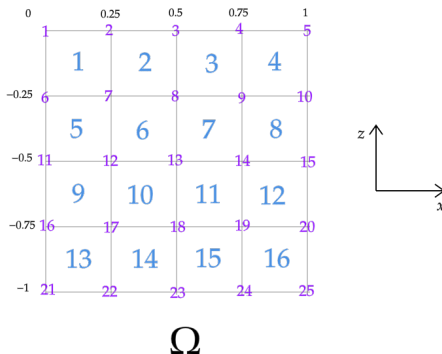


Figura: Discretización del dominio Ω .

Método de elementos finitos

Discretización espacial

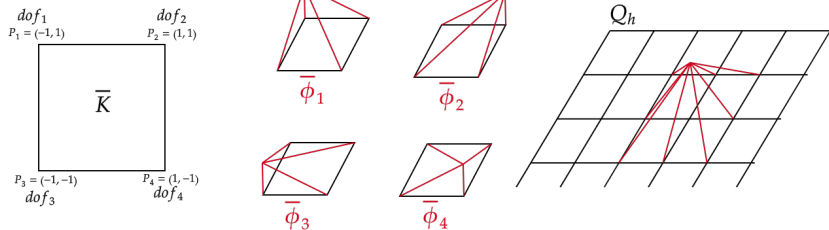


Figura: Elemento finito base, funciones base y conjunto de funciones sobre los elementos finitos.

Método de elementos finitos

Discretización espacial

i	$\bar{\phi}_i$	$\partial_x \bar{\phi}_i$	$\partial_z \bar{\phi}_i$
1	$\frac{-1}{4}(1-x)(-1-z)$	$\frac{-1}{4}(-1-z)$	$\frac{-1}{4}(1-x)$
2	$\frac{1}{4}(-1-x)(-1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-x)$
3	$\frac{1}{4}(1-x)(1-z)$	$\frac{1}{4}(1-z)$	$\frac{1}{4}(1-x)$
4	$\frac{-1}{4}(-1-x)(1-z)$	$\frac{-1}{4}(1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-x)$

Cuadro: Información de las funciones base.

Método de elementos finitos

Discretización espacial

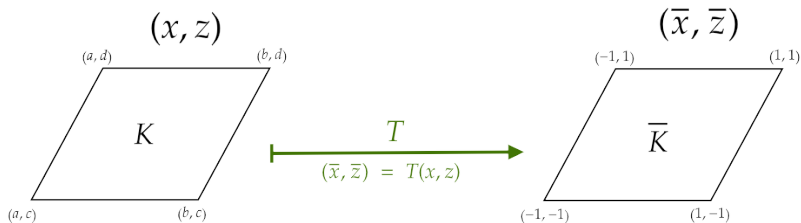


Figura: Transformación lineal entre elemento finito base y cualquier otro elemento finito.

Método de elementos finitos

Discretización espacial

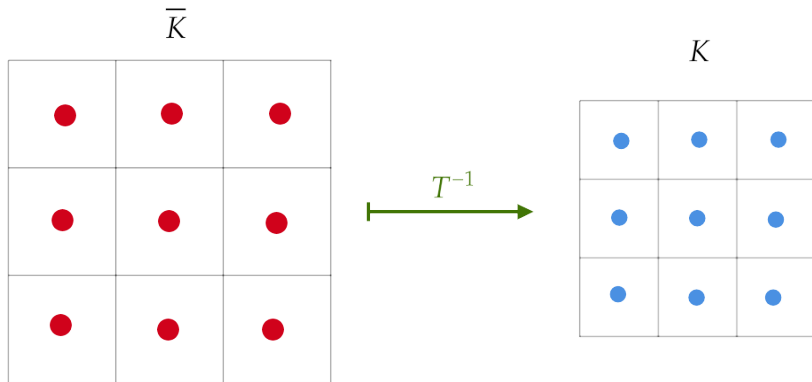


Figura: Cuadratura de Gauss.

Método de elementos finitos

Discretización espacial

Para la integración numérica se utiliza cuadratura de Gauss de tres puntos aplicada dos veces de la siguiente manera: Dada una función F definida sobre el dominio K , se tiene que,

$$\int_K F = \frac{1}{4N^2} \int_{\bar{K}} F \circ T^{-1} \approx \frac{1}{4N^2} \mathbf{w}^T (F \circ T^{-1})(\xi) \mathbf{w},$$

con los pesos de cuadratura $\mathbf{w}^T = [5/9, 0, 5/9]$ y los puntos de evaluación de la cuadratura

$$\xi = \begin{bmatrix} (-\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}) & (0, -\sqrt{3/5}) & (\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}) \\ (-\sqrt{3/5}, 0) & (0, 0) & (\sqrt{3/5}, 0) \\ (-\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) & (0, \sqrt{3/5}) & (\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) \end{bmatrix}.$$

Forma variacional

Definiciones

- $L^2(\Omega)$ es el espacio de funciones de valor real cuadrado integrables sobre el dominio Ω .
- $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ es el subespacio de funciones que también contienen las derivadas de primer orden en $L^2(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ es el subespacio de funciones que se anulan en $\partial\Omega$.
- $\langle f_1, f_2 \rangle := \int_{\Omega} f_1 \cdot f_2$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$.

Forma variacional

Sin discretización temporal

Encontrar $\Psi \in H^1(\Omega \times (0, T])$ tal que se cumpla

$$\langle \partial_t \theta(\Psi), \varphi \rangle + \langle K(\theta(\Psi))(\nabla \Psi + \nabla z), \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega \times (0, T])$.

Forma variacional

Con discretización temporal

Sea $N \in \mathbb{N}$ estrictamente positivo, y definamos el tamaño del paso de tiempo $\tau = \frac{T}{N}$, así como $t_n = n\tau$ para $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Sea $n \in \{1, \dots, N\}$ y

$$\Psi_h^{n-1} \in V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) \mid v_h|_T \in P_1(T), T \in \mathcal{T}_h\}$$

dado. Encontrar $\Psi_h^n \in V_h$ tal que se cumpla

$$\langle \theta(\Psi_h^n) - \theta(\Psi_h^{n-1}), v_h \rangle + \tau \langle K(\Theta(\Psi_h^n))(\nabla \Psi_h^n + \nabla z), \nabla v_h \rangle = \tau \langle f^n, v_h \rangle$$

para todo $v_h \in V_h$. En el primer paso tomamos $\Psi_h^0 = P_h \Psi_0$.

Método de Newton

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

La idea es encontrar un funcional F tal que si existe \bar{y} tal que $F(\bar{y}) = 0$ implique que \bar{y} es la solución de la anterior ecuación diferencial. Teniendo en cuenta lo anterior, se procede con el método de Newton,

$$y_{n+1} = y_n - dF(y_n)^{-1} F(y_n).$$

Método de Newton

Denotemos la solución discreta en el nivel de tiempo n (que ahora está fijo) y la iteración $j \in \mathbb{N}$ por $\Psi_h^{n,j}$ de ahora en adelante. Las iteraciones siempre comienzan con la solución en el último paso de tiempo, es decir, $\Psi_h^{n,0} = \Psi_h^{n-1}$.

El método de Newton se expresa como sigue:

Dado Ψ_h^{n-1} y $\Psi_h^{n,j-1} \in V_h$, encuentra $\Psi_h^{n,j} \in V_h$, de modo que se cumpla

$$\begin{aligned} & \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}), v_h \rangle + \langle \theta'(\Psi_h^{n,j-1})(\Psi_h^{n,j} - \Psi_h^{n,j-1}), v_h \rangle + \\ & \tau \langle K(\Psi_h^{n,j-1})(\nabla \Psi_h^{n,j} + \nabla z), \nabla v_h \rangle \\ & + \tau \langle K'(\Psi_h^{n,j-1})(\nabla \Psi_h^{n,j-1} + \nabla z)(\Psi_h^{n,j} - \Psi_h^{n,j-1}), \nabla v_h \rangle \\ & = \tau \langle f^n, v_h \rangle + \langle \theta(\Psi_h^{n-1}), v_h \rangle \end{aligned}$$

para todo $v_h \in V_h$.

Método de Picard

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

El método de Picard consiste en construir la sucesión de funciones definidas por

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_{n-1}(x)) dx$$

tomando $y_0(t) = y_0$.

Método de Picard

El método de Picard modificado se expresa como sigue:

Dado Ψ_h^{n-1} y $\Psi_h^{n,j-1} \in V_h$, encuentra $\Psi_h^{n,j} \in V_h$, de modo que se cumpla

$$\begin{aligned} & \langle \theta(\Psi_h^{n,j-1}), v_h \rangle + \langle \theta'(\Psi_h^{n,j-1})(\Psi_h^{n,j} - \Psi_h^{n,j-1}), v_h \rangle \\ & + \tau \langle K(\Psi_h^{n,j-1})(\nabla \Psi_h^{n,j} + \nabla z), \nabla v_h \rangle \\ & = \tau \langle f^n, v_h \rangle + \langle \theta(\Psi_h^{n-1}), v_h \rangle \end{aligned}$$

para todo $v_h \in V_h$.

Comentarios

- El alcance del proyecto es describir dos métodos de linealización para la *ecuación de Richards*.
- Toda las implementaciones se hacen desde las discretizaciones hasta los métodos de linealización.
- Hasta el momento solo se ha realizado el estudio físico de la ecuación y la implementación para el caso estacionario.


```

begin
  #Funciones base y sus gradientes en el elemento de referencia
  function  $\phi_{10}(x,z)$ 
    return  $(-1/4) * (1-x) * (-1-z)$ 
  end
  function  $\phi_{20}(x,z)$ 
    return  $(1/4) * (-1-x) * (-1-z)$ 
  end
  function  $\phi_{30}(x,z)$ 
    return  $(1/4) * (1-x) * (1-z)$ 
  end
  function  $\phi_{40}(x,z)$ 
    return  $(-1/4) * (-1-x) * (1-z)$ 
  end
  function  $\partial\phi_{10}(x,z)$ 
    return  $[(1/4) * (-1-z), (1/4) * (1-x)]$ 
  end
  function  $\partial\phi_{20}(x,z)$ 
    return  $[(-1/4) * (-1-z), (-1/4) * (-1-x)]$ 
  end
  function  $\partial\phi_{30}(x,z)$ 
    return  $[(-1/4) * (1-z), (-1/4) * (1-x)]$ 
  end
  function  $\partial\phi_{40}(x,z)$ 
    return  $[(1/4) * (1-z), (1/4) * (-1-x)]$ 
  end

  #Pesos de cuadratura en el elemento de referencia
   $w_0 = [5/9; 8/9; 5/9]$ 
  #Puntos de cuadratura en el elemento de referencia
   $\xi_0 = [(-\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}), (-\sqrt{3/5}, 0), (-\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5});$ 
     $(0, -\sqrt{3/5}), (0, 0), (0, \sqrt{3/5});$ 
     $(\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}), (\sqrt{3/5}, 0), (\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5})];$ 
end

```

Figura: Código en Julia.

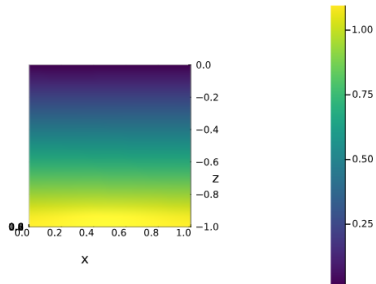


Figura: Algunos resultados.

Referencias

- 1). Knabner, P. and Angermann L., Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations, Springer Verlag, 2003.
- 2). List, F., & Radu, F. A. (2015, julio 28). A study on iterative methods for solving Richards' equation. arXiv.Org.
<https://doi.org/10.1007/s10596-016-9566-3>
- 3). Bear, J., & Bachmat, Y. (2012). Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Springer Science & Business Media.