



Sede Bogotá
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación

Análisis numérico de la Ecuación de Richards

Carlos Enrique Nosa Guzmán
cnosa@unal.edu.co

Profesor: Juan Carlos Galvis Arrieta
Materia: Análisis Numérico II
Septiembre 2024

Resumen

En este trabajo se estudian algunos métodos numéricos para resolver la ecuación de Richards dependiente e independiente del tiempo, la cual describe el flujo de agua en medios porosos saturados y no saturados. La discretización temporal se maneja mediante el método de Euler implícito, garantizando estabilidad para pasos de tiempo grandes, mientras que la no linealidad espacial se aborda a través del método de Newton, usando la discretización dada por el método de los Elementos Finitos. La ecuación de Richards, conocida por su forma no lineal y degenerada elíptico-parabólica, presenta problemas de solución debido a la dependencia no lineal de la conductividad hidráulica y el contenido de agua con respecto a la presión. El proyecto explora el rendimiento de esta técnica de linealización en términos de tasas de convergencia, proporcionando un marco para resolver problemas de fluidos en medios porosos.

Palabras clave: Ecuación de Richards, Linealización, Método de Newton, Método de Elementos Finitos.

Índice

1. Introducción	3
2. Ecuación de Richards desde la física	4
2.1. Algunos conceptos	4
2.2. Ley de Darcy	5
2.3. Ecuación de continuidad	6
2.4. Deducción de la ecuación de Richards	6
3. Método de los elementos finitos	7
3.1. Ejemplo: Ecuación diferencial ordinaria	7
3.2. Ejemplo: Ecuación diferencial parcial	10
4. Linealización	13
4.1. Método de Newton	13
4.2. Método de Euler implícito	14
4.3. Método de Picard	15
5. Caso de estudio: Ecuación de Richards en una dimensión	16
5.1. Método de Newton	17
5.2. Método de Picard	19
6. Caso de estudio: Ecuación de Richards en dos dimensiones	20
6.1. Método de Newton	20
7. Conclusiones y Trabajo Futuro	22
8. Referencias	23

1. Introducción

El estudio de los flujos multifásicos en medios porosos tiene una amplia gama de aplicaciones en problemas de alta relevancia social, como la contaminación del agua y el suelo, el almacenamiento de dióxido de carbono (CO_2), la gestión de desechos nucleares y la recuperación de petróleo. Estos fenómenos, aunque diferentes en naturaleza, comparten características similares que pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Sin embargo, la complejidad inherente de estas ecuaciones, que son no lineales, acopladas y degeneradas, requiere el uso de técnicas numéricas avanzadas para su resolución.

En particular, la ecuación de Richards ha sido ampliamente empleada para modelar el flujo de agua en suelos, tanto en zonas saturadas como no saturadas. Esta ecuación describe el movimiento del agua en un medio poroso bajo la influencia de la gravedad y otras fuerzas, teniendo en cuenta la dependencia no lineal entre la presión del agua, el contenido de humedad y la conductividad hidráulica del medio. Aunque esta ecuación fue propuesta por L.A. Richards en 1930, aún hoy sigue siendo un reto numérico debido a su comportamiento altamente no lineal y su degeneración en ciertos rangos de parámetros, especialmente cuando se enfrenta a transiciones entre zonas saturadas y no saturadas del medio poroso. La ecuación de Richards, en su forma general, está dada por:

$$\partial_t \theta(h) - \nabla \cdot (K(\theta(h)) \nabla (h + z)) = f \quad (1)$$

donde h es el potencial de presión (o cabezal de presión), $\theta(h)$ representa el contenido de humedad, $K(\theta(h))$ es la conductividad hidráulica del medio, f es un forzante (por simplicidad $f = 0$) y z es la altura en la dirección contraria a la gravedad. La ecuación presenta comportamientos no lineales tanto en la relación entre el contenido de humedad y la presión, como entre la conductividad hidráulica y la saturación del medio. Este comportamiento es especialmente relevante en la zona no saturada del suelo, donde el aire y el agua coexisten en los poros.

Para resolver numéricamente la ecuación de Richards, es crucial aplicar discretizaciones tanto en el tiempo como en el espacio. En este proyecto, se utiliza el método de los elementos finitos (FEM) para la discretización espacial, un método para resolver ecuaciones en dominios complejos y con condiciones de frontera variadas. Para la discretización temporal, se opta por el método de Euler hacia atrás (o Euler implícito), una técnica implícita que es conocida por su estabilidad, especialmente en problemas donde las soluciones presentan evoluciones de largo plazo.

Uno de los principales desafíos en la resolución de la ecuación de Richards radica en su linealización, ya que la ecuación es fuertemente no lineal debido a las relaciones entre h , θ y K . En este trabajo se implementan dos métodos de linealización principales:

- **Método de Newton:** Este método posee convergencia cuadrática, lo que lo convierte en una opción altamente eficiente cuando se encuentra ‘cerca’ de la solución. Sin embargo, su convergencia es local y puede fallar en casos de fuerte no linealidad o cuando la solución inicial no está lo suficientemente ‘cerca’ de la verdadera solución.
- **Método de Picard:** Aunque presenta una convergencia más lenta respecto al método de Newton, el método de Picard es ampliamente utilizado debido a su robustez en casos donde el método de Newton puede no converger, como en problemas con degeneración significativa.

El objetivo de este proyecto es implementar en Julia una solución numérica eficiente para la ecuación de Richards, comparando el rendimiento de los métodos de Newton y Picard en términos de tiempo, convergencia y robustez. Se busca también analizar el impacto de la degeneración de la ecuación en las zonas de transición entre flujo saturado y no saturado, y cómo estas transiciones afectan la estabilidad y la precisión de los métodos numéricos. Este proyecto no solo proporciona una implementación numérica para la ecuación de Richards, sino que también contribuye al análisis y evaluación de los diferentes enfoques de linealización en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con dependencia temporal y espacial. La validación de los resultados se llevará a cabo comparando las soluciones numéricas obtenidas con estudios previos y datos experimentales disponibles en la literatura.

En el presente documento se hace una introducción desde el punto de vista físico de la ecuación de Richards en la sección 2, luego, se explica y ejemplifica el método de los elementos finitos en diferentes escenarios en la sección 3, para posteriormente en la sección 4 mencionar los métodos para manejar numéricamente la no linealidad de ecuaciones diferenciales parciales mostrando paralelamente diversos ejemplos. En la sección 5 y 6 se hace el estudio y el análisis de la ecuación de Richards en una y dos dimensiones, y, finalmente, en la sección 8 se dan algunos comentarios que concluyen el proyecto y vislumbran un posible trabajo futuro.

El proyecto tiene un [repositorio](#) donde se encuentran todos los cuadernos en Julia, imágenes, gifs y documentos asociados.

2. Ecuación de Richards desde la física

La ecuación de Richards es fundamental en la descripción del flujo de agua en medios porosos, tanto en condiciones saturadas como no saturadas. Es una ecuación de tipo elíptico-parabólica (elíptica sin tiempo, y parabólica con tiempo) que captura la dinámica del flujo de agua en medios como el suelo, donde la interacción entre la fase líquida y la fase sólida del medio tiene un papel fundamental. Esta ecuación resulta del acoplamiento entre la ley de Darcy, que describe el movimiento del agua en función del gradiente de presión, y la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa. La deducción realizada en esta sección fue tomada de [Bear].

2.1. Algunos conceptos

Para comprender a fondo la ecuación de Richards, es necesario definir algunos conceptos físicos fundamentales que juegan un papel central en la modelación del flujo de agua en medios porosos:

- **Medio poroso:** Un medio poroso es un material compuesto por una matriz sólida con espacios vacíos o poros distribuidos en su estructura. Estos poros pueden estar conectados entre sí, permitiendo el paso de fluidos como el agua o el aire a través del material. La capacidad de un medio poroso para almacenar y transmitir fluidos depende tanto del tamaño y la forma de los poros como de la conectividad entre ellos. Ejemplos comunes de medios porosos incluyen el suelo, la roca, las arenas, y ciertos tipos de materiales sintéticos o naturales. En aplicaciones como la hidrología o la geotecnia, los medios porosos son fundamentales para describir el flujo de agua subterránea y otros procesos relacionados con la transferencia de fluidos.
- **Permeabilidad:** La permeabilidad es una propiedad de los medios porosos que describe la capacidad del material para permitir el paso de fluidos a través de sus poros. Además de la porosidad, las propiedades de un medio poroso, como la permeabilidad, la resistencia a la tracción y la conductividad eléctrica, pueden derivarse tanto de las características de sus componentes como de la estructura de sus poros. Sin embargo, estas derivaciones suelen ser complejas, ya que dependen de factores como el tamaño, la forma, la distribución y la conectividad de los poros. La permeabilidad, por lo tanto, refleja no solo cuán poroso es un material, sino también cómo están estructurados los poros para permitir el flujo de fluidos bajo un gradiente de presión.
- **Gradiente de presión:** El gradiente de presión es la variación de la presión en un fluido con respecto a una determinada distancia o dirección. Representa la tasa de cambio de la presión en el espacio y se expresa como un vector que indica tanto la magnitud como la dirección en la que la presión disminuye más rápidamente. En el contexto del flujo de fluidos, como el agua en medios porosos, el gradiente de presión es el principal impulsor del movimiento del fluido, ya que los fluidos tienden a desplazarse de regiones de alta presión hacia regiones de baja presión.

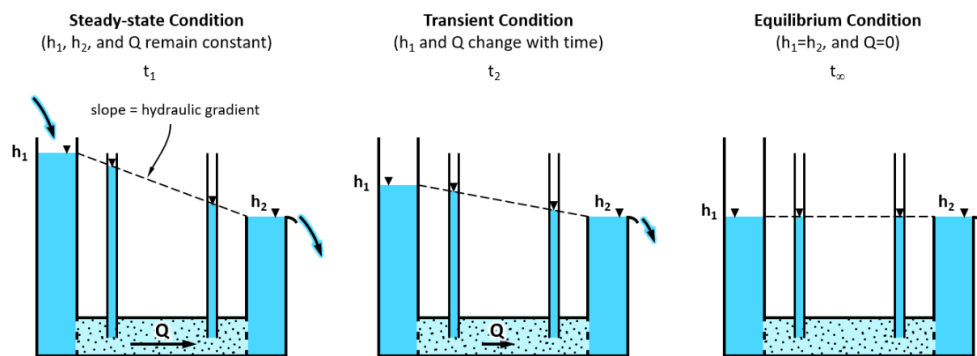


Figura 1: Representación del gradiente de presión en diferentes escenarios. Imagen tomada de [Bear].

- **Cabezal hidráulico (H):** El cabezal hidráulico es la cantidad de energía que tiene el fluido por cada unidad de peso. Es una forma útil de expresar la energía disponible en un sistema de flujo de fluidos porque permite comparar la energía en diferentes puntos del sistema independientemente de la cantidad de fluido.

$$\text{Cabezal hidráulico} = \frac{\text{Energía}}{\text{Peso}}.$$

Normalmente se denota por la letra h , sus unidades son $[L]$ y depende de la posición, velocidad, presión y viscosidad del fluido.

- **Cabezal hidráulico de presión (presión hídrica) (h):** La presión hídrica es una medida de la energía potencial del agua en un medio poroso. En medios saturados, es positiva y se debe principalmente a la presión ejercida por el agua sobre las paredes del medio. En medios no saturados, la presión es negativa debido a la presencia de fuerzas capilares, las cuales tiran del agua hacia las partículas sólidas.
- **Conductividad hidráulica ($K(h)$):** La conductividad hidráulica describe la capacidad del medio poroso para permitir el paso del agua bajo un gradiente de presión. En medios saturados, la conductividad es constante, pero en medios no saturados varía con la saturación del suelo, y por tanto, depende no linealmente de la presión hídrica h . Normalmente se representa con la letra K . Sus unidades son $[LT^{-1}]$.
- **Contenido de agua ($\theta(h)$):** Representa la fracción volumétrica de agua en el suelo. Este valor también varía con la presión hídrica, siendo mayor en condiciones saturadas y disminuyendo conforme el medio se desatura. En medios porosos no saturados, la relación entre el contenido de agua y la presión hídrica es altamente no lineal, lo que introduce complejidades adicionales al resolver la ecuación. El contenido volumétrico de agua θ se expresa como una proporción, que varía desde 0 (completamente seco) hasta el valor máximo correspondiente a la porosidad del material en saturación. Este contenido puede medirse en términos volumétricos o de masa. En ecuaciones,

$$\theta := \frac{V_{agua}}{V_{total}} = \frac{V_{agua}}{V_{agua} + V_{solidos} + V_{aire}}.$$

Existen modelos paramétrico para mostrar la dependencia de K y θ del cabezal hidráulico de presión h (también representado por Ψ). Entre los modelos más reconocido de la literatura se encuentran el modelo exponencial y el modelo de Van Genuchten Mualem. A pesar que el modelo de Van Genuchten Mualem es más certero en relación con los datos, en este trabajo se tomará el modelo exponencial por simplicidad de programación. En la figura 2 se muestran las observaciones experimentales de las funciones K y θ . Más información sobre esto se puede encontrar en [Bear] y [List].

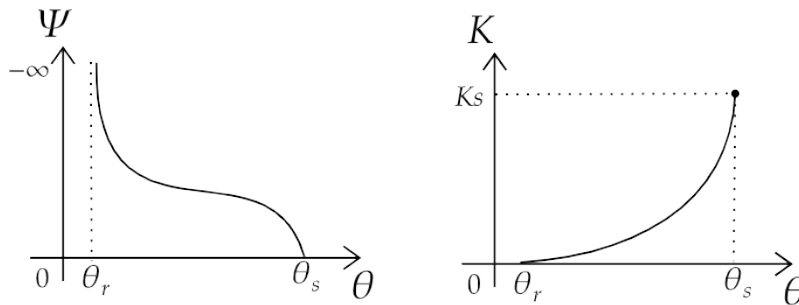


Figura 2: Modelo físico para las funciones K y θ dependientes del cabezal de presión $h (= \Psi)$. Realización propia.

- **Saturación:** Se define como la relación entre el volumen de agua en el medio poroso y el volumen total disponible para el agua. La saturación afecta tanto la conductividad hidráulica como el contenido de agua, jugando un papel crucial en la dinámica del flujo en medios no saturados.

Estos conceptos son esenciales para la formulación de la ecuación de Richards, ya que permiten describir tanto el movimiento del agua a través del medio poroso como la interacción entre las diferentes fases del sistema.

2.2. Ley de Darcy

La ley de Darcy es un principio fundamental en la mecánica de fluidos para describir el flujo a través de medios porosos. Establece que el flujo volumétrico de un fluido es proporcional al gradiente de presión y depende de las propiedades del medio. En el contexto de la ecuación de Richards, la ley de Darcy se adapta a medios no saturados, donde tanto la presión hídrica como la conductividad hidráulica varían con la saturación.

Matemáticamente, la ley de Darcy se expresa como:

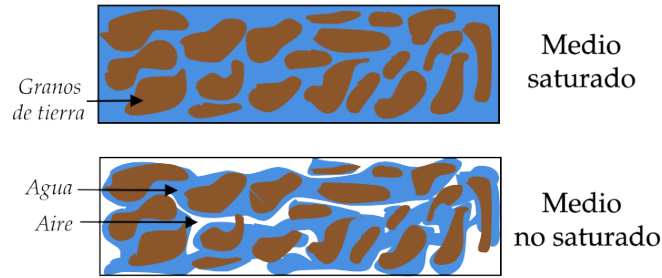


Figura 3: Representación de medios porosos. Realización propia.

$$\mathbf{q} = -K(H)\nabla H \quad (2)$$

donde \mathbf{q} es el flujo volumétrico (en m^3/s por unidad de área), $K(H)$ es la conductividad hidráulica del medio, que depende de la presión hídrica H , y ∇H es el gradiente de presión. Esta ley establece que el agua fluye desde zonas de mayor presión a zonas de menor presión, con una velocidad que depende de la resistencia que ofrezca el medio poroso, medida por la conductividad hidráulica.

En medios no saturados, la dependencia de la conductividad hidráulica respecto a la presión hídrica introduce una no linealidad en la ecuación, lo que complica su solución numérica. El comportamiento del flujo de agua en estos medios está influenciado tanto por la textura del suelo como por la distribución de la fase líquida dentro del mismo.

2.3. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es una expresión de la conservación de la masa en el sistema. En el caso del flujo de agua en un medio poroso, la ecuación de continuidad asegura que cualquier variación en el contenido de agua en el tiempo es el resultado de la diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de salida en una región dada.

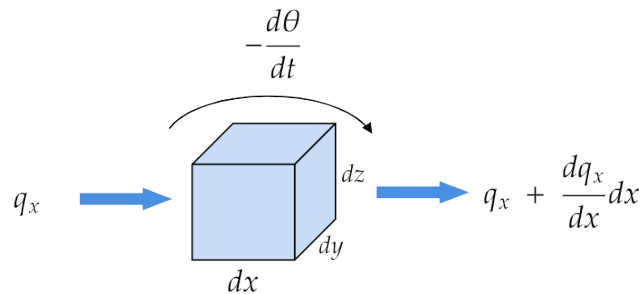


Figura 4: Representación de la ecuación de continuidad en mecánica continua. Realización propia.

La forma general de la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \theta(H)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3)$$

donde $\theta(H)$ es el contenido de agua, que depende del cabezal hidráulico H , y \mathbf{q} es el flujo volumétrico descrito por la ley de Darcy. Esta ecuación describe cómo el contenido de agua varía en función del flujo neto de agua que entra o sale del volumen considerado.

Cuando se combina la ecuación de continuidad con la ley de Darcy, obtenemos una descripción completa del flujo de agua en medios porosos, considerando tanto la evolución temporal como espacial del contenido de agua y el cabezal hidráulico.

2.4. Deducción de la ecuación de Richards

Para deducir la ecuación de Richards, se comienza combinando la ley de Darcy con la ecuación de continuidad. Al sustituir la expresión para el flujo volumétrico \mathbf{q} obtenida de la ley de Darcy en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\frac{\partial \theta(H)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(H) \nabla H) \quad (4)$$

Esta es la forma general de la ecuación de Richards en su forma dependiente del tiempo. La no linealidad de esta ecuación proviene tanto de la dependencia del contenido de agua $\theta(H)$ como de la conductividad hidráulica $K(H)$ respecto a la presión hídrica H . Esto hace que la ecuación sea difícil de resolver numéricamente, ya que requiere métodos avanzados de linealización, como el método de Newton.

En situaciones donde el flujo es estacionario, es decir, cuando no hay cambios en el contenido de agua con respecto al tiempo, la ecuación de Richards se reduce a una ecuación elíptica:

$$0 = \nabla \cdot (K(H) \nabla H) \quad (5)$$

Este caso particular describe el estado de equilibrio del flujo de agua en medios porosos. En la mayoría de los problemas prácticos, sin embargo, el comportamiento transitorio (dependiente del tiempo) es de mayor interés, y la ecuación parabólica no lineal debe ser resuelta utilizando métodos numéricos.

En casos de conservación de masa se puede descomponer $H = h + z$ donde z representa la altura en contra de la gravedad que hace efecto sobre el fluido, por ende, se puede reescribir (4) como (1).

La ecuación de Richards es ampliamente utilizada en aplicaciones de hidrología, geotecnia y ciencias del suelo para modelar el movimiento del agua en el subsuelo. Su solución numérica, sin embargo, presenta desafíos significativos debido a su naturaleza no lineal y la complejidad de los coeficientes que varían espacial y temporalmente.

3. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (FEM) es una técnica numérica ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales, especialmente en problemas de ingeniería y física que involucran geometrías complejas, propiedades no homogéneas y condiciones de frontera no triviales. Su enfoque se basa en dividir el dominio continuo del problema en un conjunto de elementos finitos, sobre los cuales las ecuaciones se resuelven localmente utilizando funciones de aproximación (un método de colocación).

En el contexto de la ecuación de Richards, el FEM se aplica para discretizar espacialmente el dominio de flujo en un medio poroso, permitiendo manejar tanto la no linealidad de la ecuación como la heterogeneidad del medio. Cada elemento del dominio se describe mediante funciones de forma, que son usadas para aproximar tanto la presión hídrica como el flujo en el interior de los elementos. La formulación del FEM transforma el problema diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse mediante técnicas iterativas o directas, proporcionando una herramienta robusta para obtener soluciones numéricas precisas en una amplia gama de condiciones.

En esta sección se ejemplificará el método por medio de una ecuación diferencial ordinaria y por una ecuación diferencial parcial en dos dimensiones, ambas sin dependencia temporal.

3.1. Ejemplo: Ecuación diferencial ordinaria

Considere el problema de encontrar una función $u : \Omega = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

La solución a este problema es $u(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$ para $x \in [0, 1]$. Este análisis se enfoca en el método de los elementos finitos (FEM) para resolver esta ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera.

La formulación presentada anteriormente se conoce como *formulación fuerte*. El método de los elementos finitos sigue un procedimiento que incluye los siguientes pasos:

- La **formulación variacional** busca “debilitar” la formulación fuerte. Se considera un espacio de funciones V adecuado tal que todas las funciones se anulen en la frontera del dominio $\partial\Omega$. Al seleccionar $v(x) \in V$ y multiplicar ambos lados de la ecuación $-u''(x) = 1$ por $v(x)$, se integra por partes una vez al lado izquierdo de la ecuación. De esta manera, se llega a la formulación débil o variacional, que plantea encontrar u tal que para toda $v(x) \in V$ se cumpla:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'(x) v'(x) dx &= \int_{\Omega} v(x) dx \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

- La **partición del dominio** se realiza dividiendo Ω . Dado que Ω es un subconjunto de \mathbb{R} , se puede partir considerando $x_i := \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$, donde n es un número natural mayor a 1.
- La **representación de la solución** se asume como una combinación lineal de funciones base ϕ_ℓ con coeficientes desconocidos α_ℓ para $\ell = 0, 1, \dots, n$, es decir, $u(x) = \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \phi_\ell(x)$. Estas funciones base pueden ser lineales a trozos y deben cumplir $\phi_\ell(x_i) = \delta_{i\ell}$, donde $\delta_{i\ell}$ es la delta de Kronecker y x_i es el i -ésimo punto de la partición. La formulación variacional se reescribe como encontrar α_ℓ tal que, para todo $v(x) \in V$:

$$\sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \int_{\Omega} \phi'_\ell(x) v'(x) dx = \int_{\Omega} v(x) dx$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Para el caso en que se toman las funciones base como polinomios de grado uno a trozos, una representación para $n = 4$ se muestra en la siguiente figura:

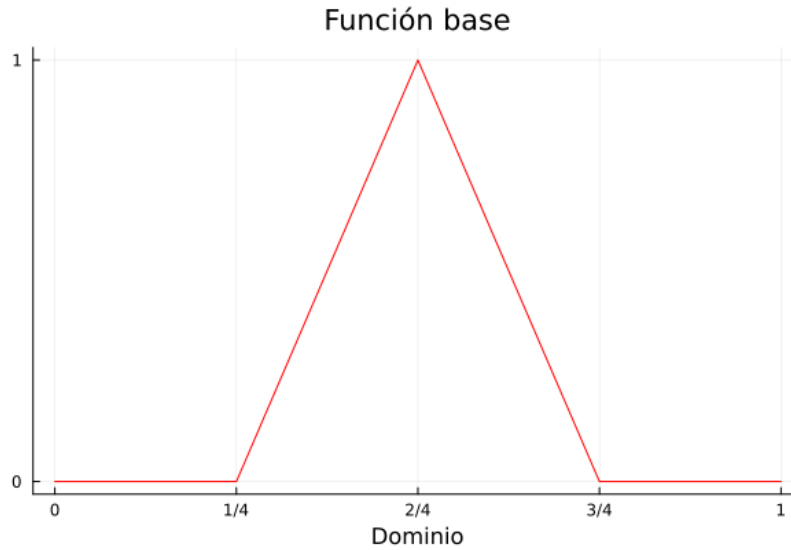


Figura 5: Funciones base tomadas como funciones lineales a trozos. Realización propia.

- La **formulación de Galerkin** establece que si V es el espacio lineal generado por las funciones ϕ_ℓ con $\ell = 1, \dots, n-1$ (considerando que se anulan en $\partial\Omega$), se busca encontrar α_ℓ tal que, si $u(x) := \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \phi_\ell(x)$, entonces para todo $i = 1, \dots, n-1$:

$$\sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \int_{\Omega} \phi'_\ell(x) \phi'_i(x) dx = \int_{\Omega} \phi_i(x) dx$$

Dado que $u(0) = u(1) = 0$, se obtiene que $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Por lo tanto, incorporando esta información sobre las condiciones del problema, la formulación de Galerkin se reescribe como:

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \alpha_\ell \int_{\Omega} \phi'_\ell(x) \phi'_i(x) dx = \int_{\Omega} \phi_i(x) dx$$

Definiendo la matriz A tal que $a_{ij} := \int_{\Omega} \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx$ y el vector b tal que $b_i := \int_{\Omega} \phi_i(x) dx$ para $i, j = 1, \dots, n-1$, el problema se reduce a hallar $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T$ del sistema lineal $A\alpha = b$. El significado de $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ cobra sentido cuando se representa gráficamente, dado que estos representan el valor de la solución numérica para cada punto de la partición del dominio, como lo ilustra la figura 6.

Un elemento finito se define como $K_i := (x_{i-1}, x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Los elementos finitos K_i son disyuntos dos a dos y, además, $\bigcup_{i=1}^n K_i = \Omega$.

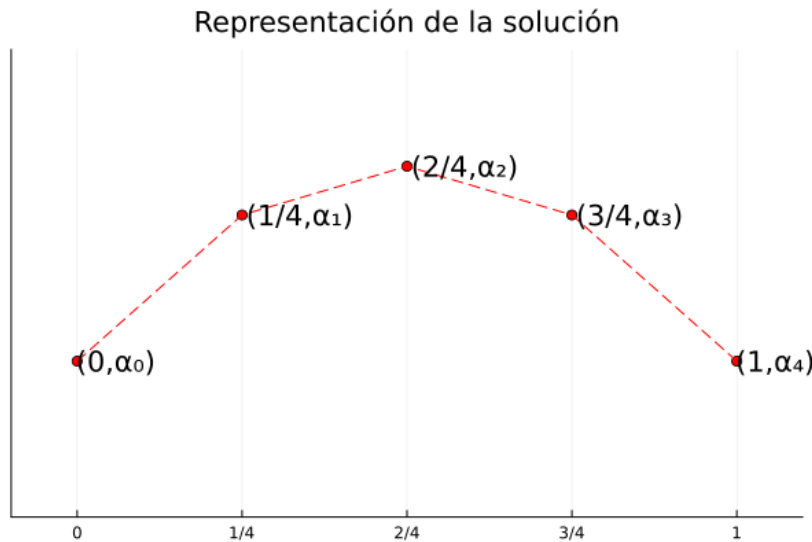


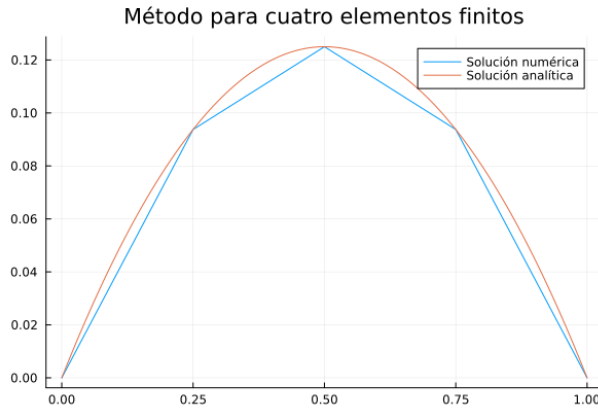
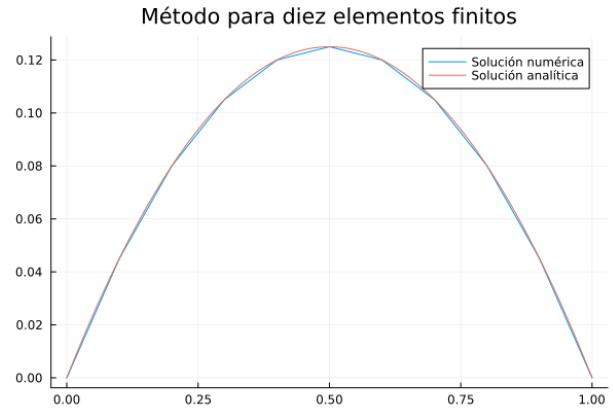
Figura 6: Representación gráfica de α en el FEM para $n = 4$. Realización propia.

Ahora, de manera informal se puede afirmar que $\int_{\Omega} = \sum_i \int_{K_i}$, es decir, que una integral sobre todo el dominio se puede considerar como una suma de integrales donde la suma recorre cada elemento finito; esto permite realizar de manera más sencilla el cálculo de las integrales sobre Ω . Es por eso, que la iteración se hace sobre el número de elementos finitos definidos.

El proceso iterativo está compuesto de las siguientes partes:

- **Definición del elemento.** Para cada elemento se define el punto de inicio y el punto de finalización, recordando que $K_i = (x_{i-1}, x_i) = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$. También se define h como el tamaño del elemento.
- **Pesos y puntos de cuadratura locales.** En este paso se transforman los pesos y puntos de evaluación de la cuadratura de Gauss para poder realizar la integración numérica sobre el elemento i -ésimo.
- **Funciones base locales.** Se evalúan las funciones base y sus derivadas en los puntos de evaluación de la integración numérica. Recordemos que, dado que nuestras funciones base son lineales a trozos, en cada elemento hay parte de dos funciones base, una recta creciente y una recta decreciente.
- **Grados de libertad.** Se construye el vector de grados de libertad. Este representa la información global de cada elemento y cómo esta se ubicará en las matrices A y b del sistema global.
- **Submatrices locales.** En esta sección se hace la integración numérica correspondiente a las entradas de A y de b , respectivamente.
- **Ensamblamiento de matrices globales.** Usando los grados de libertad para posicionar de manera correcta la información, se añade a las matrices A y b el aporte de información que hizo el elemento sobre el cuál se está evaluando las integrales.

El resultado del método se puede evidenciar en la siguientes figuras

Figura 7: Solución para $n = 4$. Realización propia.Figura 8: Solución para $n = 10$. Realización propia

Como se puede evidenciar, a medida que aumenta el número de elementos finitos en los que se divide el dominio la calidad de la solución mejora respecto a la solución analítica en términos de certeza. En esta explicación básica se hizo una revisión rápida del método de elementos finitos para una dimensión; consideraciones como linealidad en la ecuación diferencial, tipo de condiciones de contorno, tipo de funciones base, programación del método no fueron discutidas dado que iban más allá del propósito de este ejemplos. Se invita a consultar [Knabner].

3.2. Ejemplo: Ecuación diferencial parcial

El problema en el que se centra este ejemplo es el siguiente:

Sea $\Omega = [0, 1] \times [-1, 0]$. Se debe encontrar $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x, z)$ cumpla

$$-\nabla(\nabla u) = 1,$$

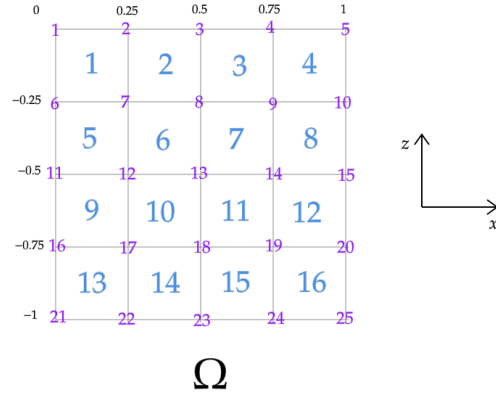
con la condición de Dirichlet $u = 0$ en $\partial\Omega$. Esto es la **formulación fuerte**. Este problema se resolverá usando el método de los elementos finitos.

Para debilitar la formulación fuerte del problema multipliquemos la EDP por una función de prueba v que se anula en $\partial\Omega$ e integremos por partes aprovechando las condiciones de frontera para así obtener la **formulación débil del problema**: Encontrar $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x, z)$ cumpla para toda v con $v|_{\partial\Omega} = 0$ que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v,$$

con la condición de Dirichlet $u = 0$ en $\partial\Omega$.

Para discretizar el dominio Ω se escogen por facilidad elementos cuadrados dado que todo el dominio es un cuadrado; la cantidad de estos elementos se toma a partir de las particiones por lado N (que se toma en la misma medida para ambos lados), por ende, la cantidad total de elementos es N^2 , y, a su vez, tomando cuatro grados de libertad para cada elemento que representa los vértices de cada cuadrado, el número total de grados de libertad del dominio es de $(N+1)^2$. La numeración de los elementos y de los grados de libertad se hace de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Para N un número natural mayor que cero, se define $h = \sqrt{2}N^{-1}$ como el diámetro de cada elemento K y T_h como el conjunto de elementos de la discretización. A continuación se muestra un ejemplo de $T_{\sqrt{2}N^{-1}}$ para $N = 4$.


 Figura 9: Ejemplo de discretización del dominio Ω del problema de referencia. Realización propia.

Se define el elemento base \bar{K} como el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ con los grados de libertad enumerados de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Junto a este elemento base también se definen las funciones base $\bar{\phi}_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ que son funciones bilineales en el espacio $Q_1(\bar{K})$ las cuáles tienen la propiedad de que $\bar{\phi}_i(P_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} simboliza el delta de Kronecker, como se muestra en la siguiente figura.

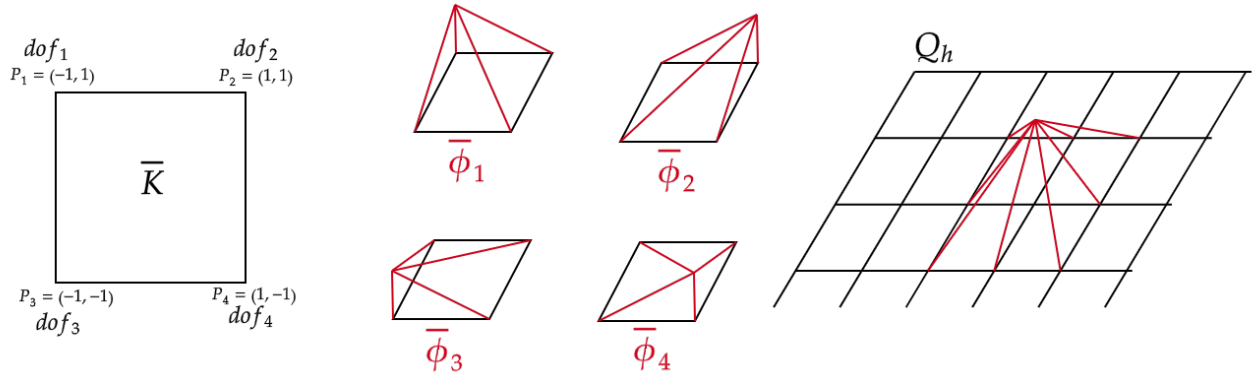


Figura 10: Elemento finito base, funciones base y conjunto de funciones sobre los elementos finitos. Realización propia.

Una tabla de las funciones base y sus respectivas derivadas parciales se muestra a continuación.

i	$\bar{\phi}_i$	$\partial_x \bar{\phi}_i$	$\partial_z \bar{\phi}_i$
1	$\frac{-1}{4}(1-x)(-1-z)$	$\frac{-1}{4}(-1-z)$	$\frac{-1}{4}(1-x)$
2	$\frac{1}{4}(-1-x)(-1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-x)$
3	$\frac{1}{4}(1-x)(1-z)$	$\frac{1}{4}(1-z)$	$\frac{1}{4}(1-x)$
4	$\frac{-1}{4}(-1-x)(1-z)$	$\frac{-1}{4}(1-z)$	$\frac{1}{4}(-1-x)$

Tabla 1: Información de las funciones base.

La creación del elemento base y las funciones base se realiza con el fin de realizar de manera simplificada las integrales que surgen de la forma de Galerkin de la ecuación en cuestión. Para esto, considere un elemento $K = [a, b] \times [c, d]$

arbitrario de la discretización. Es fácil notar que la transformación $T : K \rightarrow \bar{K}$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{2}{b-a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{d-c} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

es biyectiva y su inversa $T^{-1} : \bar{K} \rightarrow K$ es

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{b-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d-c}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}.$$

Dado que los elementos de T_h son cuadrados entonces $b - a = d - c = \frac{1}{N}$, por tanto,

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2N & 0 \\ 0 & 2N \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

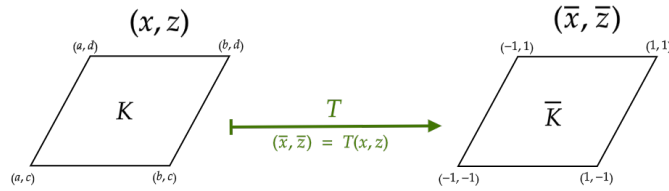


Figura 11: Transformación lineal entre elemento finito base y cualquier otro elemento finito. Realización propia.

Para la integración numérica se utiliza cuadratura de Gauss de tres puntos aplicada dos veces de la siguiente manera: Dada una función F definida sobre el dominio Ω , se tiene que,

$$\int_K F = \int_a^b \int_c^d F(x, z) dz dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(T^{-1}(\bar{x}, \bar{z})) |DT^{-1}| d\bar{z} d\bar{x} = \frac{1}{4N^2} \int_{\bar{K}} F \circ T^{-1},$$

por cuadratura numérica,

$$\int_K F = \frac{1}{4N^2} \int_{\bar{K}} F \circ T^{-1} \approx \frac{1}{4N^2} \sum_{i,j=1}^3 w_i (F \circ T^{-1})(\xi_i, \xi_j) w_j = \frac{1}{4N^2} \mathbf{w}^T (F \circ T^{-1})(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{w},$$

con los pesos de cuadratura $\mathbf{w}^T = [5/9, 0, 5/9]$ y los puntos de evaluación de la cuadratura

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} (-\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}) & (0, -\sqrt{3/5}) & (\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}) \\ (-\sqrt{3/5}, 0) & (0, 0) & (\sqrt{3/5}, 0) \\ (-\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) & (0, \sqrt{3/5}) & (\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) \end{bmatrix}.$$

La solución se presenta en las figuras a continuación.

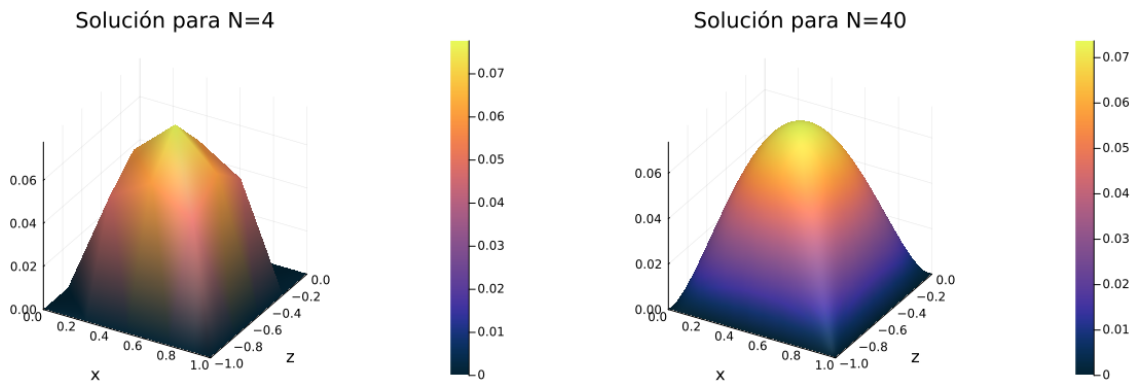


Figura 12: Solución para $N = 4$. Realización propia. Figura 13: Solución para $N = 40$. Realización propia

Nótese que a medida que el número de elementos finitos aumenta, la solución numérica parece cualitativamente más suave, asegurando (al menos cualitativamente) la convergencia del método a la solución real del problema en cuestión.

4. Linealización

La ecuación de Richards, debido a su naturaleza no lineal, presenta desafíos significativos para obtener soluciones numéricas precisas. La no linealidad surge de la relación compleja entre la presión del agua, el contenido de humedad y la conductividad hidráulica en un medio poroso. Para abordar este problema, es común utilizar técnicas de linealización, que permiten aproximar el comportamiento no lineal mediante un conjunto de ecuaciones lineales más manejables. Entre las técnicas más utilizadas para este propósito se encuentran el método de Newton y el método de Euler, que se discuten a continuación.

4.1. Método de Newton

El método de Newton (también conocido como método de Newton-Raphson) es una técnica iterativa utilizada para encontrar las raíces de una función no lineal. El método se basa en la idea de aproximar una función no lineal mediante su expansión lineal en torno a un punto cercano a la solución usando la expansión de Taylor. Dado que es complicado resolver ecuaciones no lineales de forma exacta, el método de Newton utiliza la derivada de la función para aproximarse progresivamente a la raíz deseada.

Dada una función continua y derivable $f(x)$, la fórmula iterativa del método de Newton se expresa como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donde:

- x_n es la aproximación actual de la raíz,
- $f'(x_n)$ es la derivada de la función en x_n ,
- x_{n+1} es la nueva aproximación calculada,
- x_0 se toma adecuadamente.

Geométricamente, el método de Newton puede interpretarse como la intersección de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto x_n con el eje X . Al seguir ajustando la tangente en cada paso, el método logra una aproximación cada vez más precisa de la raíz. Como ventajas de este método se tiene que converge rápidamente cuando se está cerca de la raíz y requiere pocas iteraciones si las condiciones iniciales son adecuadas. Por otra parte, algunas desventajas son que requiere calcular la derivada de la función en consideración y puede no converger si la aproximación inicial está lejos de la solución o si $f'(x_n) = 0$.

Ejemplo. Considere el problema de hallar alguna raíz de la función $f(x) = 4 - 5x^2 + x^4 = (x^2 - 2)(x^2 - 4)$. Para usar el método de Newton tomamos $x_0 = -0,3$ y hacemos la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{4 - 5x_n^2 + x_n^4}{-10x_n + 4x_n^3}$$

hasta el criterio de convergencia de que $|f|$ sea menor a una tolerancia fija. Para una tolerancia de seis cifras significativas el método necesitó solo seis iteraciones para acercarse lo suficiente a la raíz de $x = 1$ de la función f . La primera iteración del método de Newton se muestra en la figura 14, esta indica la función en color rojo, el punto de partida y la recta tangente a ese punto en color negro, y el nuevo punto de la iteración en color verde.

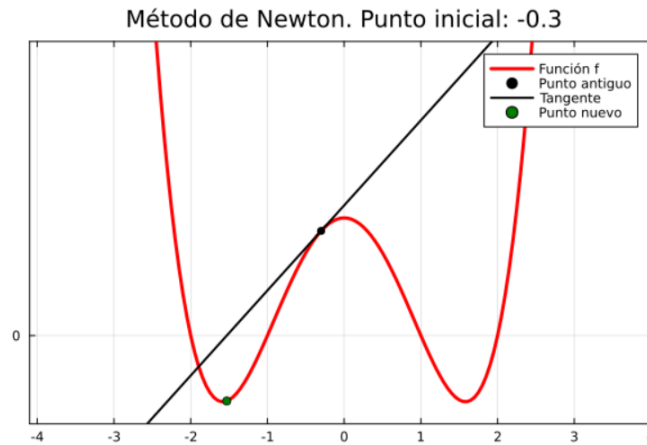


Figura 14: Primera iteración del método de Newton. Realización propia.

4.2. Método de Euler implícito

El método de Euler implícito es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma $y'(t) = f(t, y(t))$. A diferencia del método de Euler explícito, donde se evalúa la función en el punto actual, en el método implícito se evalúa en el siguiente paso.

Dada una EDO y una condición inicial $y(t_0) = y_0$, el método de Euler implícito se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}), \\ t_{n+1} &= t_n + h, \end{aligned}$$

donde:

- y_n es la aproximación de la solución en el tiempo t_n ,
- h es el tamaño del paso,
- $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ es la evaluación de la función en el siguiente paso temporal,
- y_{n+1} es la incógnita que debe resolverse en cada paso.

Una de las principales ventajas del método de Euler implícito es su estabilidad, lo que significa que puede manejar pasos de tiempo más grandes sin volverse inestable, a diferencia del método explícito. Esto lo hace ideal para problemas donde la solución puede variar rápidamente. El principal inconveniente del método es que requiere la resolución de un sistema no lineal en cada paso debido a la dependencia de y_{n+1} en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo. Para ejemplificar este método, considere el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}(t) = y'(t) = -ty(t), \quad y(-\sqrt{2}) = e^{-1}.$$

La solución explícita al anterior problema es $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$. En la siguiente figura se toma un tamaño de paso de $\Delta t = 0,5$ y se resuelve sobre $t \in [-\sqrt{2}, 56]$, usando el método de Newton para resolver cada ecuación no lineal que sale del método de Euler implícito.

Se evidencia una gran diferencia para el método implícito y explícito, dado que al resolver una ecuación no lineal se tiene una precisión más certera respecto a la solución real del problema.

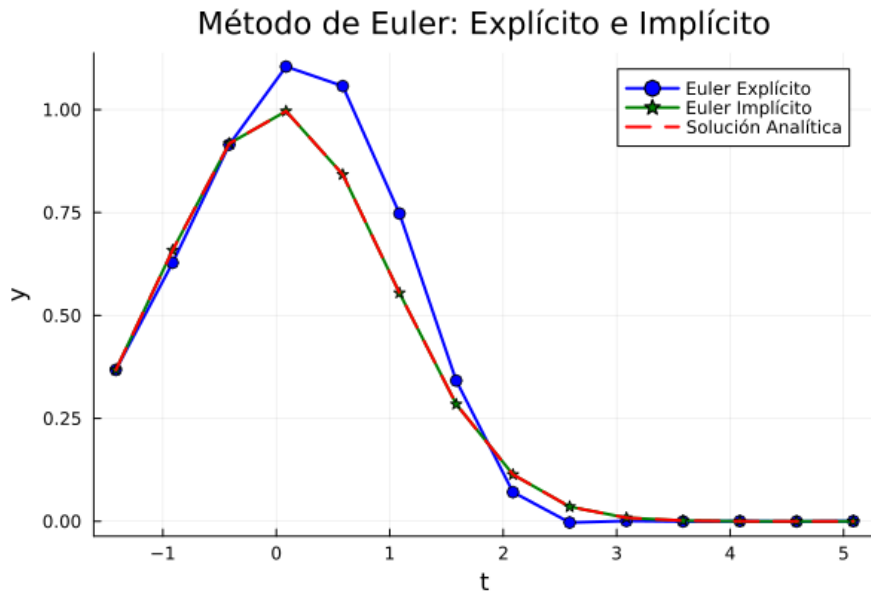


Figura 15: Método de Euler explícito e implícito comparados con la solución analítica del problema de valor inicial. Realización propia.

4.3. Método de Picard

El método de Picard es un método iterativo utilizado para resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada. Este método es un caso particular de un esquema más general de iteración, conocido como iteración de punto fijo, y se utiliza para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones del tipo:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

El método se basa en reformular la ecuación diferencial como una ecuación integral mediante el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf, lo que permite generar sucesivas aproximaciones de la solución a partir de una función inicial. La ecuación integral que se resuelve iterativamente es:

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

donde:

- $y_n(t)$ es la aproximación en la iteración n ,
- $f(s, y_n(s))$ es la función que define la ecuación diferencial evaluada en la iteración anterior,
- $y_0(t) := y_0$ es la función inicial de la iteración.

El método de Picard converge a la solución exacta de la ecuación diferencial bajo ciertas condiciones, principalmente si la función $f(t, y)$ es Lipschitz continua en la variable y .

Ejemplo. A modo de ejemplo, considere el mismo problema de la sección anterior:

$$\frac{dy}{dt}(t) = y'(t) = -ty(t), \quad y(-\sqrt{2}) = e^{-1}.$$

Para la iteración número quince del método de Picard, el resultado se muestra en la figura 16. Nótese que en la iteración número quince no se ha alcanzado aún la convergencia sobre $[-\sqrt{2}, 5]$, esto es, por que en cada iteración, se obtiene una aproximación en términos de polinomios de Taylor centrados alrededor del punto inicial, por tanto, la aproximación se va realizando cada vez mejor alrededor del punto inicial cuando se aumenta la iteración; esto también refleja la convergencia lenta del método.

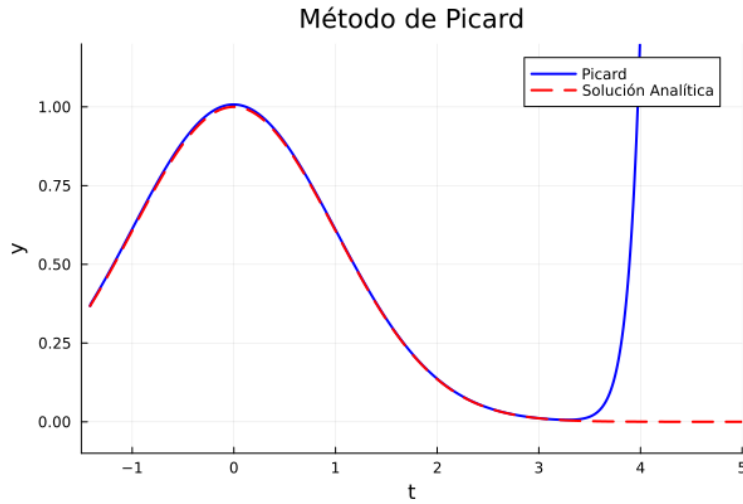


Figura 16: Método de Picard comparado con la solución analítica del problema de valor inicial. Realización propia.

5. Caso de estudio: Ecuación de Richards en una dimensión

En esta sección se resuelve numéricamente la ecuación de Richards en una dimensión espacial únicamente con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } h(z, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) \\ h(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 1, \text{ con } t \in [0, T] \\ h(z, 0) = g(z), \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

donde $\Omega = [0, 1]$ es el dominio espacial, $T = 1$ es el tiempo final, $K_S = 0,12$, $\theta_s = 0,42$, $\theta_r = 0,026$ y $\alpha = 2$ son parámetros del modelo. Las funciones $K(h)$ y $\theta(h)$ se pueden modelar de manera exponencial por:

$$K(h) = K(\theta(h)) = \begin{cases} 0, & \theta(h) \leq \theta_r \\ K_S \frac{(\theta(h) - \theta_r)^4}{(\theta_s - \theta_r)^4}, & \theta_r \leq \theta(h) \leq \theta_s \\ K_S, & \theta(h) \geq \theta_s \end{cases}$$

$$\theta(h) = \begin{cases} (\theta_s - \theta_r) \frac{1}{1 + \exp(-\alpha \cdot h - 2\alpha\theta_s)} + \theta_r, & h \leq 0 \\ \theta_s, & h \geq 0 \end{cases}$$

Finalmente, la condición inicial es $g(z) = z(-1 + z) + 1$.

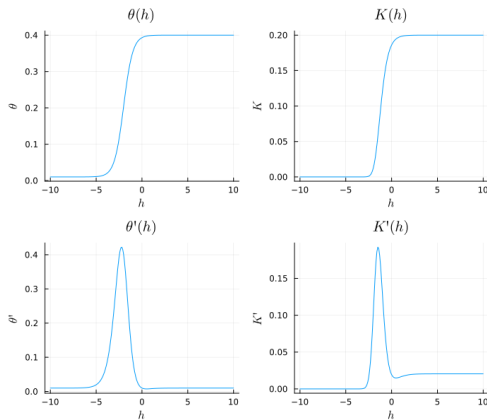


Figura 17: Modelos para K y θ . Realización propia.

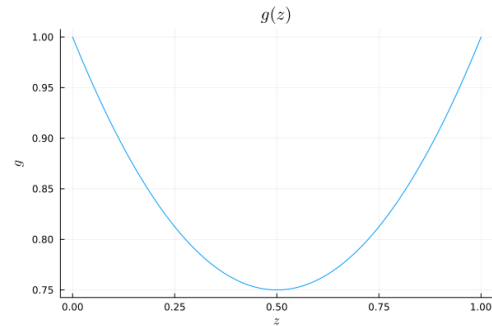


Figura 18: Condición inicial g . Realización propia.

Por otra parte, multiplicando por una función de prueba v tal que v se anula en $\partial\Omega$ e integrando por partes se obtiene

la *formulación variacional*:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } h(z, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que para toda } v \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \theta(h(z, t))}{\partial t} v(z) dz = - \int_{\Omega} K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ h(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 1, \text{ con } t \in [0, T] \\ h(z, 0) = g(z), \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

Esta formulación servirá como punto de partida para la discretización en tiempo y en espacio y se asumirá que una solución de (W) es una solución de (S).

5.1. Método de Newton

Para quitar la dependencia no lineal de la derivada temporal de $\theta(h)$ se aproximará esta función por medio de su polinomio de Taylor de grado uno: Considere M un número entero positivo y $t_i = \frac{i}{M}$ para $i = 0, 1, \dots, M$ como los puntos que particionan el dominio temporal, así, se aproxima

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(h(z, t_i)) \approx \frac{\theta(h(z, t_i)) - \theta(h(z, t_{i-1}))}{\frac{1}{M}},$$

para $i = 1, \dots, M$. Usando el método de Euler implícito la discretización temporal se ve de la siguiente manera: Dado $t_0 = 0$ y $h(z, t_0) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$ se construye la función $h(z, t_i)$ a partir de la función conocida $h(z, t_{i-1})$ de tal manera que cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)) v(z) dz &= \int_{\Omega} \theta(h(z, t_{i-1})) v(z) dz - \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)) \left(\frac{\partial h(z, t_i)}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz, \\ h(z, t_i)|_{\partial\Omega} &= 1. \end{aligned}$$

Nótese que la ecuación anterior no es lineal en la función desconocida $h(z, t_i)$ por ende, para cada avance en la discretización temporal se debe resolver una ecuación no lineal en la discretización espacial, por tanto, se va a usar el *método de Newton*.

Para cada $i = 1, \dots, m$, defina el operador F_i como

$$F_i(g) = \int_{\Omega} \theta(g(z)) v(z) dz - \int_{\Omega} \theta(h(z, t_{i-1})) v(z) dz + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(g(z)) \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz,$$

de esta manera es posible definir $h(z, t_i)$ como la función que satisface $F_i(h(\cdot, t_i)) = 0$; al operador F_i es al que se le aplicará el método de Newton.

Defina $\gamma(z) = h(z, t_i) - h(z, t_{i-1})$, por ende,

- $\theta(h(z, t_i)) \approx \theta(h(z, t_{i-1})) + \theta'(h(z, t_{i-1}))\gamma(z),$
- $K(h(z, t_i)) \approx K(h(z, t_{i-1})) + K'(h(z, t_{i-1}))\gamma(z),$
- $\frac{\partial h}{\partial z}(z, t_i) = \frac{\partial h}{\partial z}(z, t_{i-1}) + \frac{\partial \gamma}{\partial z}(z),$

así,

$$\begin{aligned} 0 &= F_i(h(z, t_i)) \\ &= \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)) v(z) dz - \int_{\Omega} \theta(h(z, t_{i-1})) v(z) dz + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)) \left(\frac{\partial h(z, t_i)}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ &\approx \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_{i-1})) \gamma(z) v(z) dz + \frac{1}{M} \int_{\Omega} (K(h(z, t_{i-1})) + K'(h(z, t_{i-1}))\gamma(z)) \left(\frac{\partial h(z, t_{i-1})}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}(z) + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ &\approx \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_{i-1})) \gamma(z) v(z) dz + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_{i-1})) \left(\frac{\partial h(z, t_{i-1})}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ &\quad + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_{i-1})) \frac{\partial \gamma}{\partial z}(z) \frac{dv(z)}{dz} dz + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(z, t_{i-1})) \left(\frac{\partial h(z, t_{i-1})}{\partial z} + 1 \right) \gamma(z) \frac{dv(z)}{dz} dz, \end{aligned}$$

asumiendo que $\gamma(z) \frac{\partial \gamma}{\partial z}(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial z}(z) \approx 0$ por representar una perturbación. Por tanto,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_{i-1})) \left(\frac{\partial h(z, t_{i-1})}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ & \approx \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_{i-1})) \gamma(z) v(z) dz \\ & + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_{i-1})) \frac{\partial \gamma_{(j-1)}(z)}{\partial z} \frac{dv(z)}{dz} dz \\ & + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(z, t_{i-1})) \left(\frac{\partial h(z, t_{i-1})}{\partial z} + 1 \right) \gamma(z) \frac{dv(z)}{dz} dz, \end{aligned}$$

nótese que la anterior ecuación es lineal en $\gamma(z)$ por ende es válido aplicar el método de los elementos finitos. Teniendo en cuenta lo anterior se puede resumir el método de Newton: Dado $i = 1, \dots, m$ fijo, la j -ésima iteración del método de Newton es

$$\begin{aligned} h(z, t_i)_{(0)} &= h(z, t_{i-1}), \\ h(z, t_i)_{(j)} &= h(z, t_i)_{(j-1)} + \gamma_{(j-1)}(z), \end{aligned}$$

donde $\gamma_{(j-1)}(z)$ satisface

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz \\ & = \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \gamma_{(j-1)}(z) v(z) dz \\ & + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \frac{\partial \gamma_{(j-1)}(z)}{\partial z} \frac{dv(z)}{dz} dz \\ & + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \gamma_{(j-1)}(z) \frac{dv(z)}{dz} dz, \end{aligned}$$

y $\gamma_{(j-1)}|_{\partial\Omega} = 0$.

Para aplicar el método de los elementos finitos, se hace la suposición de que

$$\gamma_{(j-1)}(z) = \sum_{w=0}^N \alpha_w \phi_w(z),$$

donde se ha discretizado el dominio temporal en N elementos. Para $u, w \in \{0, 1, \dots, N-1, N\}$ se define

- $d_u = -\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \phi'_u(z) dz,$
- $a_{uw} = \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \phi_w(z) \phi_u(z) dz,$
- $b_{uw} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \phi'_w(z) \phi'_u(z) dz,$
- $c_{uw} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \phi_w(z) \phi'_u(z) dz,$

dado que $\gamma_{(j-1)}|_{\partial\Omega} = 0$ entonces $\alpha_0 = \alpha_N = 0$. Bajo esta aproximación la ecuación integral sobre γ se transforma en

$$\sum_{w=1}^{N-1} (a_{uw} + b_{uw} + c_{uw}) \alpha_w = d_u,$$

para todo $u = 1, \dots, N-1$. La anterior ecuación corresponde a la forma lineal obtenida para cada iteración del método de Newton. El resultado se muestra parcialmente en la figura 19, la forma de la función h que aparece en la figura parece ser la forma estacionaria dado que después de este tiempo no presenta cambio alguno. Se invita a consultar el repositorio del proyecto donde se encuentra mejor representado el resultado del método de Newton. En este caso, el método de Newton logra exitosamente resolver la ecuación de Richards.

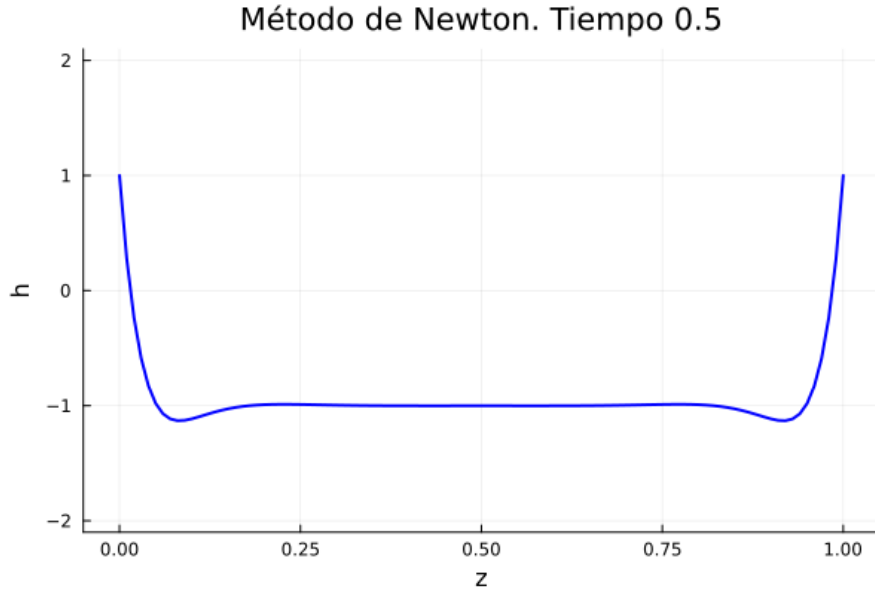


Figura 19: Resultado para el tiempo $t = 0,5$ del método de Newton aplicado a la ecuación de Richards en una dimensión. Realización propia.

5.2. Método de Picard

Para cada $i = 1, \dots, M$, la iteración j -ésima del método de Picard es: Dado $h(z, t_i)_{(0)} := h(z, t_{i-1})$ se debe hallar $h(z, t_i)_{(j)}$ de la siguiente ecuación

$$\int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(j)}) v(z) dz = \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(0)}) v(z) dz - \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz,$$

para manejar la no linealidad de $\theta(h(z, t_i)_{(j)})$ se realiza la aproximación

$$\theta(h(z, t_i)_{(j)}) \approx \theta(h(z, t_i)_{(j-1)}) + \theta'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \gamma_{(j-1)}(z),$$

donde $\gamma_{(j-1)}(z) = \theta(h(z, t_i)_{(j)}) - \theta(h(z, t_i)_{(j-1)})$, por tanto,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(j-1)}) v(z) dz + \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \gamma_{(j-1)}(z) v(z) dz \\ &= \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(0)}) v(z) dz - \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \frac{dv(z)}{dz} dz, \end{aligned}$$

en esta última ecuación solo se debe hallar $\gamma_{(j-1)}$ teniendo en cuenta que $\gamma_{(j-1)}|_{\partial\Omega} = 0$, usando el método de los elementos finitos.

Para aplicar el método de los elementos finitos, se supone que

$$\gamma_{(j-1)}(z) = \sum_{w=0}^N \alpha_w \phi_w(z),$$

donde se ha discretizado el dominio temporal en N elementos. Para $u, w \in \{0, 1, \dots, N-1, N\}$ se define

- $a_u = \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(j-1)}) \phi_u(z) dz,$
- $b_{uw} = \int_{\Omega} \theta'(h(z, t_i)_{(j-1)}) \phi_w(z) \phi_u(z) dz,$
- $c_u = \int_{\Omega} \theta(h(z, t_i)_{(0)}) \phi_u(z) dz,$
- $d_u = -\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(z, t_i)_{(j-1)}) \left(\frac{\partial h(z, t_i)_{(j-1)}}{\partial z} + 1 \right) \phi'_u(z) dz,$

dato que $\gamma_{(j-1)}|_{\partial\Omega} = 0$ entonces $\alpha_0 = \alpha_N = 0$. Bajo esta aproximación la ecuación integral sobre γ se transforma en $a_u + \sum_{w=1}^{N-1} (b_{uw})\alpha_w = c_u + d_u$ para todo $u = 1, \dots, N-1$.

Los resultados obtenidos para este método no son buenos dado que para el avance en el tiempo, la ‘solución’ dada por el método de Picard parece que no se estabiliza, presentando picos en la función.

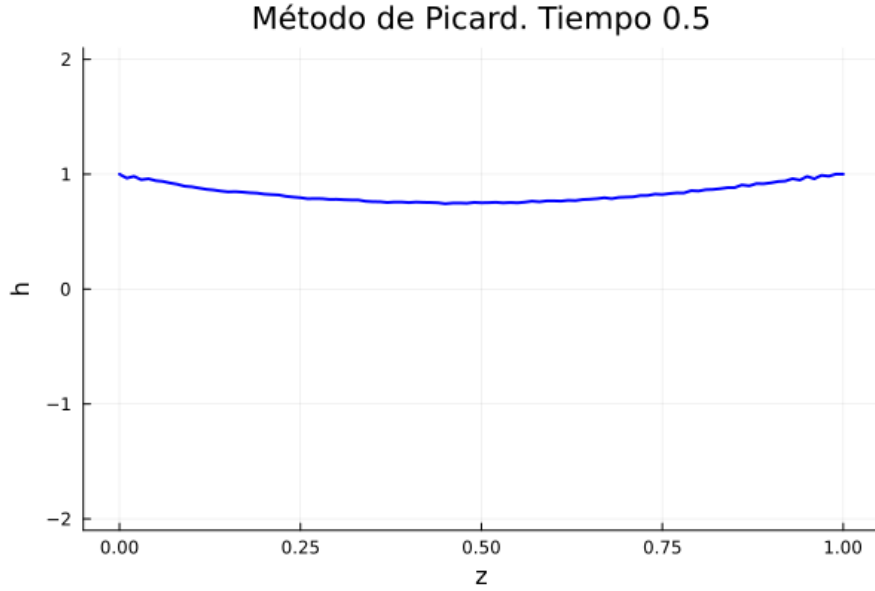


Figura 20: Resultado para el tiempo $t = 0,5$ del método de Picard aplicado a la ecuación de Richards en una dimensión. Realización propia.

6. Caso de estudio: Ecuación de Richards en dos dimensiones

De la misma manera como se procedió en una dimensión se hará para dos dimensiones. La *formulación fuerte* del problema es

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } h((x, z), t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (K(h) \nabla (h + z)) \\ h(\cdot, \cdot, t)|_{\partial\Omega} = 1, \text{ con } t \in [0, T] \\ h(x, z, 0) = g(x, z), \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

En este caso $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y la condición inicial es $g(x, z) = 1 - xz(x-1)(z-1)$.

Por otra parte, la *formulación variacional* de este problema es:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } h(x, z, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que para toda } v \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \theta(h(x, z, t))}{\partial t} v = - \int_{\Omega} K(h) \nabla (h + z) \nabla v \\ h(\cdot, \cdot, t)|_{\partial\Omega} = 1, \text{ con } t \in [0, T] \\ h(x, z, 0) = g(x, z), \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

Esta formulación servirá como punto de partida para la discretización en tiempo y en espacio y se asumirá que una solución de (W) es una solución de (S).

6.1. Método de Newton

Con el fin de prescindir de la dependencia no lineal de la derivada temporal de $\theta(h)$ se aproximará esta función por medio de su mejor representación lineal: Considere M un número entero positivo y $t_i = \frac{i}{M}$ para $i = 0, 1, \dots, M$ como los puntos que particionan el dominio temporal, así,

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(h(x, z, t_i)) \approx \frac{\theta(h(x, z, t_i)) - \theta(h(x, z, t_{i-1}))}{\frac{1}{M}},$$

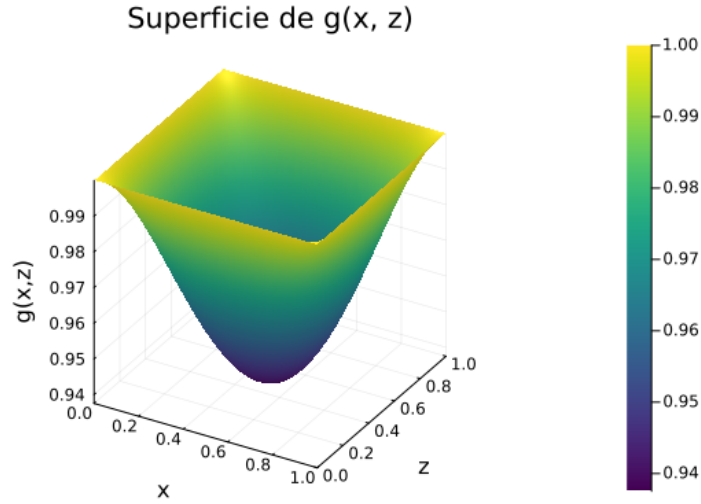


Figura 21: Condición inicial g para dos dimensiones. Realización propia.

para $i = 1, \dots, M$. Usando el método de Euler implícito, la discretización temporal se ve de la siguiente manera: Dado $t_0 = 0$ y $h(x, z, t_0) = g(x, z)$ para todo $(x, z) \in \Omega$ se construye la función $h(x, z, t_i)$ a partir de la función conocida $h(x, z, t_{i-1})$ de tal manera que cumpla lo siguiente:

$$\int_{\Omega} \theta(h(x, z, t_i))v = \int_{\Omega} \theta(h(x, z, t_{i-1}))v - \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_i)) \nabla (h + z) \nabla v, \\ h(x, z, t_i)|_{\partial\Omega} = 1.$$

Nótese que la ecuación anterior no es lineal en la función desconocida $h(x, z, t_i)$ por ende, para cada avance en la discretización temporal se debe resolver una ecuación no lineal en la discretización espacial, por tanto, se va a usar el *método de Newton*.

Para cada $i = 1, \dots, m$, defina el operador F_i como

$$F_i(g) = \int_{\Omega} \theta(g(x, z))v - \int_{\Omega} \theta(h(x, z, t_{i-1}))v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(g(x, z)) \nabla (g + z) \nabla v,$$

de esta manera es posible definir $h(x, z, t_i)$ como la función que satisface $F_i(h(\cdot, \cdot, t_i)) = 0$; al operador F_i es al que le vamos a aplicar el método de Newton.

Defina $\gamma(x, z) = h(x, z, t_i) - h(x, z, t_{i-1})$, por ende

- $\theta(h(x, z, t_i)) \approx \theta(h(x, z, t_{i-1})) + \theta'(h(x, z, t_{i-1}))\gamma(x, z),$
- $K(h(x, z, t_i)) \approx K(h(x, z, t_{i-1})) + K'(h(x, z, t_{i-1}))\gamma(x, z),$
- $\nabla h(x, z, t_i) = \nabla h(x, z, t_{i-1}) + \nabla \gamma(x, z),$

así,

$$\begin{aligned} 0 &= F_i(h(x, z, t_i)) \\ &= \int_{\Omega} \theta(h(x, z, t_i))v - \int_{\Omega} \theta(h(x, z, t_{i-1}))v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_i)) \nabla (h + z) \nabla v \\ &\approx \int_{\Omega} \theta'(h(x, z, t_{i-1}))\gamma \cdot v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} (K(h(x, z, t_{i-1})) + K'(h(x, z, t_{i-1}))\gamma) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + \gamma + z) \nabla v \\ &\approx \int_{\Omega} \theta'(h(x, z, t_{i-1}))\gamma \cdot v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \nabla v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla \gamma \cdot \nabla v \\ &\quad + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \gamma \cdot \nabla v, \end{aligned}$$

asumiendo que $\gamma \nabla \gamma \approx 0$ por representar una perturbación.
Por lo que

$$-\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \nabla v \approx \int_{\Omega} \theta'(h(x, z, t_{i-1})) \gamma_{(j-1)} \cdot v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla \gamma_{(j-1)} \cdot \nabla v \\ + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \gamma_{(j-1)} \cdot \nabla v,$$

nótese que la anterior ecuación es lineal en γ por ende es válido aplicar el método de los elementos finitos. Teniendo en cuenta lo anterior se puede resumir el método de Newton: Dado $i = 1, \dots, m$ fijo, la j -ésima iteración del método de Newton es

$$h(x, z, t_i)_{(0)} = h(x, z, t_{i-1}), \\ h(x, z, t_i)_{(j)} = h(x, z, t_i)_{(j-1)} + \gamma_{(j-1)}(x, z),$$

donde $\gamma_{(j-1)}(z)$ satisface

$$-\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \nabla v = \int_{\Omega} \theta'(h(x, z, t_{i-1})) \gamma_{(j-1)} \cdot v + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_{i-1})) \nabla \gamma_{(j-1)} \cdot \nabla v \\ + \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(x, z, t_{i-1})) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \gamma_{(j-1)} \cdot \nabla v,$$

y $\gamma_{(j-1)}|_{\partial\Omega} = 0$. Para aplicar el método de los elementos finitos, se supone que

$$\gamma_{(j-1)}(z) = \sum_{w=0}^N \alpha_w \phi_w(z),$$

donde se ha discretizado el dominio temporal en N elementos. Para $u, w \in \{0, 1, \dots, N-1, N\}$ se define

- $d_u = -\frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_i)_{(j-1)}) \nabla (h(x, z, t_{i-1}) + z) \nabla \phi_u,$
- $a_{uw} = \int_{\Omega} \theta'(h(x, z, t_i)_{(j-1)}) \phi_w \phi_u,$
- $b_{uw} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} K(h(x, z, t_i)_{(j-1)}) \nabla \phi_w \nabla \phi_u,$
- $c_{uw} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} K'(h(x, z, t_i)_{(j-1)}) \nabla (h(x, z, t_i)_{(j-1)} + z) \phi_w \nabla \phi_u,$

así, el sistema lineal se toma sobre los índices u, w que pertenezcan al conjunto de índices de nodos del interior del dominio Ω .

En la figura 22 se muestra el resultado de ejecutar el método de Euler implícito junto con el método de Newton para $M = 10$ y $N = 100$. Como se puede evidenciar no existe cambio notable entre el dato inicial g y el resultado para h , no obstante, está ocurriendo un pequeño cambio en el valor de los puntos centrales del dominio Ω . Para este resultado falta hacer la validación de la certeza respecto a la solución real del problema (W).

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

El presente trabajo ha abordado el estudio de la ecuación de Richards, un modelo fundamental para el análisis del flujo de agua en medios porosos. Se ha puesto énfasis en el método de linealización, específicamente utilizando el método de Newton, junto con la discretización temporal mediante el método de Euler implícito, también en el método de Picard. Este enfoque ha permitido una comprensión más profunda de las dinámicas involucradas en el flujo de agua, específicamente en la solución de ecuaciones diferenciales altamente no lineales, así como la evaluación de las tasas de convergencia del método propuesto. Los resultados obtenidos muestran que la linealización es una herramienta efectiva para simplificar la complejidad de la ecuación de Richards, ofreciendo una base sólida para la resolución de problemas relacionados con la ecuación de Richards. A través de la formulación variacional y el método de los elementos finitos, se ha logrado transformar un problema no lineal en un sistema lineal manejable, lo que facilita su resolución numérica. Para trabajo futuro, se sugiere explorar aplicaciones del método de linealización en contextos más amplios, como en otro tipo de no linealidades en ecuaciones diferenciales parciales. Además, se puede considerar la integración de modelos de

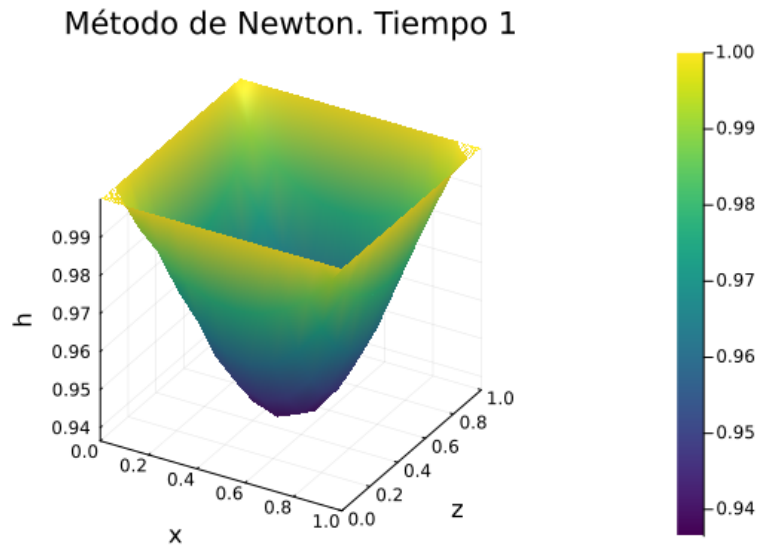


Figura 22: Resultado para el tiempo $t = 1$ del método de Newton aplicado a la ecuación de Richards en dos dimensiones. Realización propia.

comportamiento no lineal para capturar fenómenos más complejos, así como la optimización de los métodos numéricos empleados para mejorar la eficiencia y la precisión en la resolución de la ecuación de Richards. Asimismo, la inclusión de resultados experimentales podría complementar los resultados teóricos y proporcionar validación adicional a los modelos desarrollados.

8. Referencias

- Bear, J., & Bachmat, Y. (2012). Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Springer Science & Business Media.
- Knabner, P. and Angermann L., Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations, Springer Verlag, 2003.
- List, F., & Radu, F. A. (2015, julio 28). A study on iterative methods for solving Richards' equation. arXiv.Org. <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9566-3>