Tarea 02 Modelos Matemáticos

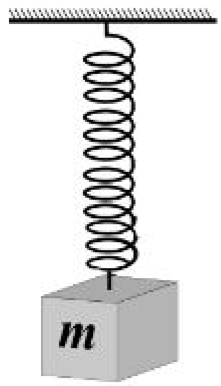
Juan Diego Murcia Porras - jmurciap@unal.edu.co

Brayan Alejandro Romero Castro - brromeroc@unal.edu.co

Carlos Enrique Nosa Guzman - cnosa@unal.edu.co

Ejercicio 1

Un cuerpo de masa m suspendido sobre un resorte sin peso, vibra libremente en dirección vertical (ver figura). Determinar la frecuencia de esta vibración, mediante análisis dimensional.



Solución:

Realicemos el análisis de las variables que pueden actuar en esta situación: Es claro que una de las variables es la masa del cuerpo m, otra variable que afecta, dado que el cuerpo se encuentra suspendido puede ser la gravedad (la cuál es una aceleración $[A] = \frac{L}{T^2}$), y otra variable que puede afectar, es la constante de elasticidad del resorte que la podemos ver en unidades por la ley de Hooke como $[k] = [F/x] = \frac{N}{L} = \frac{M}{T^2}$, como las unidades de frecuencia son $\frac{1}{T}$, tenemos la siguiente igualdad

$$T^{-1} = M^{\alpha_1}\left(\frac{ML}{T^2}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{M}{T^2}\right)^{\alpha_3}$$

De donde igualando exponentes, de Masa, Longitud y Tiempo nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{13} = 0\\
&-2\alpha_2 - 2\alpha_3 = -1\\
&\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

De esta manera llegamos a que $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = -1/2 \text{ y } \alpha_3 = 1/2$, es decir nos queda que la frecuencia de oscilación esta dada por:

$$f = Cm^{-1/2}k^{1/2} = C\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Notemos que C debe ser un número positivo, pues la frecuencia no puede ser negativa ya que es la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo de la masa. Para determinar la constante podríamos medir la frecuencia para diversos valores de k (para la masa fija m) y obtener el valor de C haciendo un promedio de estos valores, o podríamos deducir a partir de ley de hooke este valor.

La ley de hooke, nos dice que que la fuerza que siente la masa m esta dada por:

$$F = -k \cdot x$$

donde x es la posición desde el equilibrio (lugar donde la masa se queda en reposo), y k es la constante de elasticidad del resorte. Por la segunda ley de newton sabemos que $F = m \cdot a$, de donde reemplazando en la anterior ecuación nos queda:

$$a = \frac{-k \cdot x}{m}$$

Como la aceleración es la segunda derivada de la posición nos queda la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k \cdot x}{m}$$

o equivalentemente si llamamos $\omega = k/m$ (El cual es un número mayor a 0 puesto que la constante es positiva al igual que la masa), nos queda:

$$x'' + \omega x = 0$$

Si solucionamos esta ecuación diferencial, utilizando el polinomio característico $x^2 + \omega$, podemos hallar una solución a esta ecuación, la cual por las condiciones del problema es:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Donde A es la longitud máxima que alcanza el resorte partiendo desde el reposo, ahora note que como coseno es una función periódica de periodo 2π ,entonces podemos hallar el periodo resolviendo la ecuación.

$$\omega(t + T) - \omega t = 2\pi$$

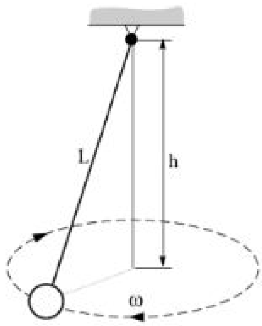
despejando$T$ vemos que el periodo estaría dado por $T = 2\pi/\omega$, como la frecuencia es la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo, entonces es la inversa del periodo, de esta forma hallamos que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De donde concluimos que la constante C que estábamos buscando esta dada por: $C = \frac{1}{2\pi}$.

Ejercicio 2

Un péndulo cónico cónico consiste en una pequeña esfera de masa m sostenida por un hilo, de peso despreciable y longitud L, que gira sin fricción, alrededor del eje vertical a una velocidad angular constante ω, como se ve en la figura. Con la ayuda del análisis dimensional, y los datos experimentales de la tabla, determine una ecuación general para el período T del péndulo.



Datos dados			Medición
L	g	h	T
1	9.81	0.1	0.634
1	9.81	0.2	0.897
1	9.81	0.3	1.099
1	9.81	0.4	1.269
1	9.81	0.5	1.419

Solución.

Analicemos primero las variables que hacen parte del problema. Ellas son:

- *Periodo del péndulo* $[T]$ (Variable dependiente): Denotado generalmente como T, se define como el tiempo que demora un péndulo en dar una oscilación completa. Tenemos que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, donde ω denota la velocidad angular del péndulo.
- *Aceleración de la gravedad* $[\frac{T}{S^2}]$: La denotaremos como g.
- *Longitud del péndulo $[L]$:* La denotaremos como l.
- *Altura del péndulo $[L]$:* La denotaremos como h.

Supondremos que

$$T = C g^{\alpha_1} h^{\alpha_2} l^{\alpha_3}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Realizando análisis dimensional, debemos tener que

$$[L^0 T^1] = [L^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} T^{-2\alpha_1}].$$

Debemos entonces resolver la ecuación lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuya solución viene dada por

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2} - \gamma_1,\ \alpha_3 = \gamma_1, \text{ donde } \gamma_1 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$T = C\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{l}{h}\right)^{\gamma_1} = C\sqrt{\frac{h}{g}}\,F\left(\frac{l}{h}\right).$$

Supongamos que la función F es de la primera forma (la del medio), y determinemos los valores de C y γ_1 utilizando el método de mínimos cuadrados. Tomando logaritmo a ambos lados de la igualdad, tenemos que

$$ln(T) = ln(C) + \frac{1}{2}(ln(h) - ln(g)) + \gamma_1(ln(l) - ln(h)).$$

Entonces,

$$ln(C) + \gamma_1(ln(l) - ln(h)) = ln(T) - \frac{1}{2}(ln(h) - ln(g)).$$

Usando los datos de la tabla, y tomando $\beta_1 = ln(C)$ y $\beta_2 = \gamma_1$, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln(1) - \ln(0.1) \\ 1 & \ln(1) - \ln(0.2) \\ 1 & \ln(1) - \ln(0.3) \\ 1 & \ln(1) - \ln(0.4) \\ 1 & \ln(1) - \ln(0.5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(0.634) - \frac{1}{2}\ln(0.1) + \frac{1}{2}\ln(9.81) \\ \ln(0.897) - \frac{1}{2}\ln(0.2) + \frac{1}{2}\ln(9.81) \\ \ln(1.099) - \frac{1}{2}\ln(0.3) + \frac{1}{2}\ln(9.81) \\ \ln(1.269) - \frac{1}{2}\ln(0.4) + \frac{1}{2}\ln(9.81) \\ \ln(1.419) - \frac{1}{2}\ln(0.5) + \frac{1}{2}\ln(9.81) \end{bmatrix}$$

Note que, en la segunda columna de la matriz a la izquierda, no es necesario poner $ln(1)$ en ninguna de las componentes (al ser este igual a 0). Resolviendo este sistema por mínimos cuadrados en Matlab, obtenemos que

```
A1=[ones(5,1) -log([0.1;0.2;0.3;0.4;0.5])];
y1=log([0.634; 0.897; 1.099; 1.269; 1.419])-1/2*log([0.1;0.2;0.3;0.4;0.5])
+1/2*log(9.81)*ones(5,1);
c1=A1\y1
```

```
c1 = 2×1
    1.8387
   -0.0006
```

```
Error_cuad=norm(y1-A1*c1)
```

```
Error_cuad = 1.4517e-04
```

```
C=exp(c1(1))
```

```
C = 6.2882
```

```
gamma1=c1(2)
```

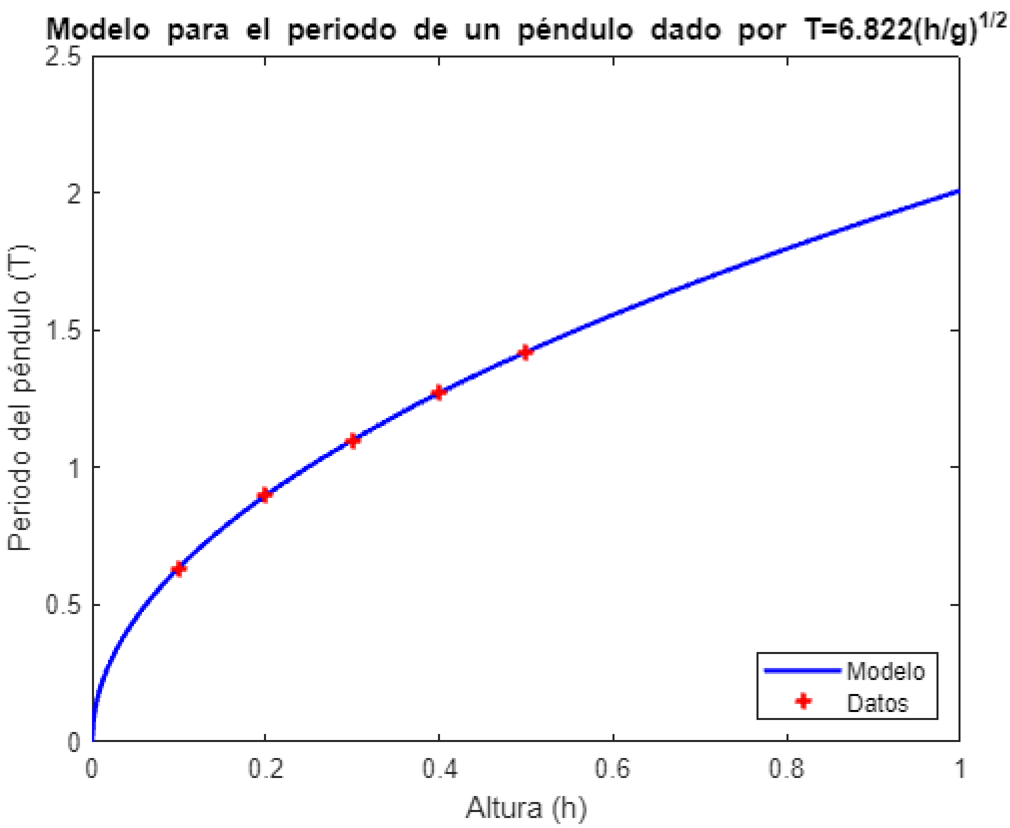
```
gamma1 = -5.8754e-04
```

Como el error cuadrático dio realmente muy bajo, y $\gamma_1 \approx 0$ para el modelo que acabamos de realizar, concluimos que

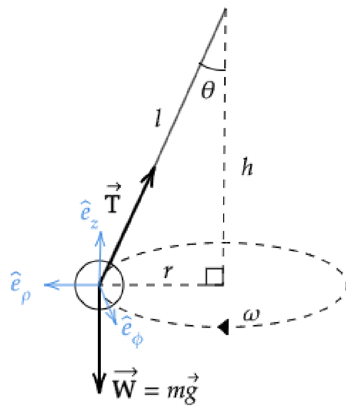
$$T = C\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{l}{h}\right)^{\gamma_1} = C\sqrt{\frac{h}{g}}, \text{ con } C \approx 6.2882$$

es un modelo bastante bueno para el problema propuesto. A continuación, se grafica el modelo encontrado como una función respecto a h contrastada con los datos recolectados.

```
x=linspace(0,1,500);
y=6.288*sqrt(x./9.81);
plot(x,y,"b-",[0.1;0.2;0.3;0.4;0.5],[0.634; 0.897; 1.099; 1.269;
1.419],"r+",'LineWidth',1.8)
box on
xlabel('Altura (h)')
ylabel('Periodo del péndulo (T)')
title('Modelo para el periodo de un péndulo dado por T=6.822(h/g)^{1/2}')
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','southeast');
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



Ahora, contrastemos este modelo con la teoría física de las Leyes de Newton. Para ello, considere el siguiente diagrama de fuerzas.



Usando las leyes de Newton para el sistema de referencia indicado en el diagrama, y usando que, en coordenadas polares, $a_\rho = \rho'' - \rho(\phi')^2$, obtenemos que

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{\mathbf{F}}_\rho : -T\ sen\theta = -mr\omega^2 \\ \sum \overrightarrow{\mathbf{F}}_z : T\ cos\theta - W = 0 \end{cases}.$$

Recordando que $cos\theta = \frac{h}{l}$, y que $W = mg$, obtenemos, despejando T de la segunda ecuación, que

$$T = \frac{mgl}{h}.$$

Por lo tanto, reemplazando en la primera ecuación, y usando que $sen\theta = \frac{r}{l}$,

$$-\frac{mgl}{h} sen\theta = -mr\omega^2$$

$$-\frac{mgr}{h} = -mr\omega^2$$

$$\frac{g}{h} = \omega^2$$

Es decir, $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, y, por ende,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \approx 6.283 \sqrt{\frac{h}{g}},$$

confirmando así la validez del modelo propuesto.

Ejercicio 3

Los artìculos en los supermercados típicamente vienen en varios tamaños y el costo por unidad es menor para los artículos grandes generalmente. A continuación, queremos presentar un modelo del costo de venta por unidad de peso del arroz Diana V. El modelo se piensa de la siguiente manera:

$$V = C_1(\text{producción}) + C_2(\text{empaque}) + C_3(\text{transporte})$$

en donde C_1, C_2 y C_3 son constantes a determinar usando datos tomados del mercado. Note que cada uno de los aspectos (producción, empaque y transporte) debe tener las mismas unidades de V las cuales son pesos colombianos por unidad de masa (expresadas simbólicamente como $\$ \cdot M^{-1}$).

En primer lugar, para la producción se consideran como relevantes las siguientes variables,

- Costo de insumos por área C_i con $[C_i] = \$ \cdot L^{-2}$.
- Producción por hectárea cosechada P_{ha} con $[P_{\text{ha}}] = M \cdot L^{-2}$.

Los datos para hallar C_i fueron tomados de estimaciones realizadas por Federación Nacional de Arroceros (Fedearroz) y en la siguiente tabla se pueden ver otros consumos que afectan la producción de arroz a nivel nacional .

RUBRO	2019	2020	2021
ASISTENCIA TÉCNICA	57.938	59.551	59.563
ARRIENDO	1.126.109	1.266.950	1.225.506
PREPARACIÓN Y SIEMBRA	1.071.615	1.204.994	1.164.169
RIEGO	574.682	604.397	585.640
FERTILIZACIÓN	1.228.390	1.338.203	1.478.365
PROTECCIÓN AL CULTIVO	1.088.700	1.168.316	1.141.458
RECOLECCIÓN Y TRANSPORTE	662.589	682.581	706.241
OTROS	526.075	624.169	552.814
TOTAL	6.336.098	6.949.161	6.913.756

Tabla 02: Tabla tomada de las investigaciones económicas hechas por Fedearroz en la cual se muestran los costos de producción de arroz por hectárea cosechada de arroz.

Cabe destacar que los costos que aparecen en la anterior tabla hacen referencia a la producción de arroz por medio del *sistema de riego* y que en este modelo se tomarán los datos correspondientes al año 2021 para la variable C_i.

```
%Costo de insumos por área (en pesos colombianos por metro cuadrado)
6913756 * (1/10000)
```

```
ans = 691.3756
```

Así, $C_i = 691.3756 \dfrac{\text{COP}}{m^2}$.

Por otra parte para hallar el valor de la variable P_{ha} se usan datos proporcionados por la ENAM (Encuesta Nacional de Arroz Mecanizado) realizada por el DANE para el primer semestre del año 2023.

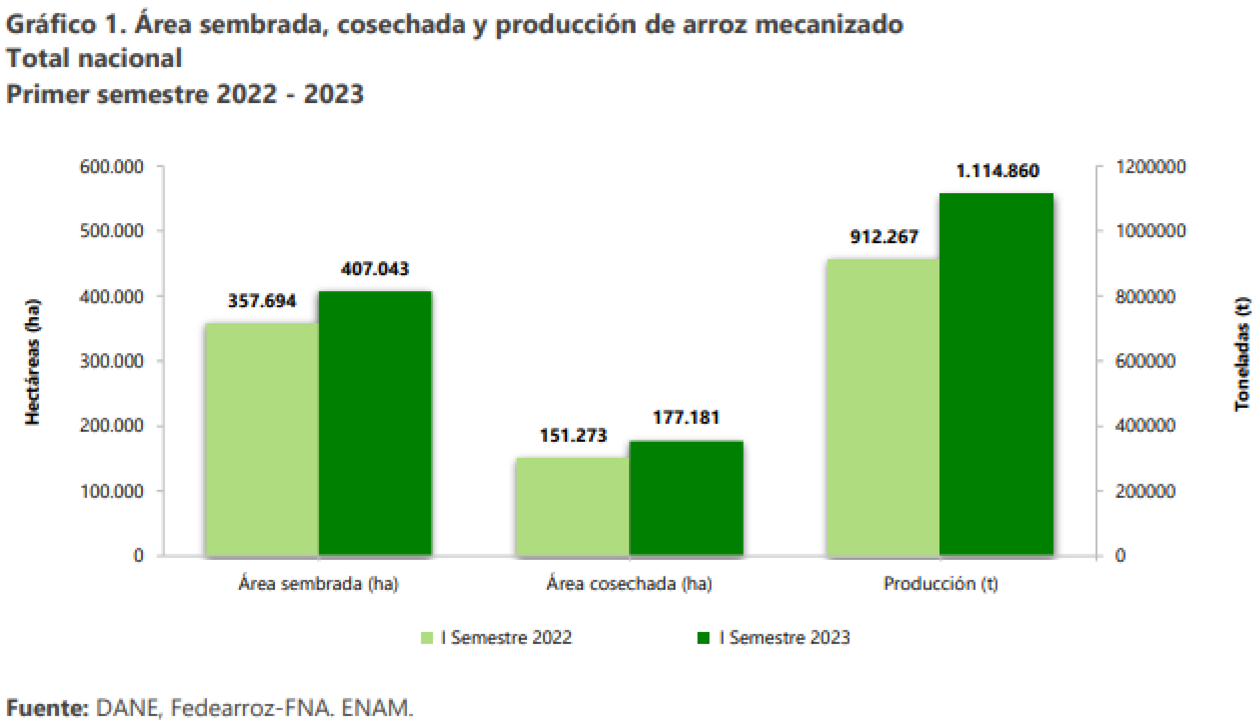


Figura 03: Grafico tomado de la ENAM realizada para el primer semestre del presente año.

El cálculo de producción en masa por hectárea cosechada P_{ha} se hace tomando los datos de producción en toneladas y luego dividiendo por la cantidad de hectáreas de área cosechada.

```
%Producción por hectárea cosechada (en unidades del SI, kg/m^2)
(1114860/177181)*(1000/1)*(1/10000)
```

```
ans = 0.6292
```

Por lo tanto, $P_{\text{ha}} = 0.6292 \dfrac{\text{kg}}{m^2}$.

Ahora, para ajustar las anteriores dos variables a V usando análisis dimensional tenemos que

$$[V] = \left[C_i^a \cdot P_{\text{ha}}^b\right]$$

$$\$ \cdot M^{-1} = (\$ \cdot L^{-2})^a \cdot (M \cdot L^{-2})^b$$

$$\$^1 \cdot M^{-1} \cdot L^0 = \$^a \cdot M^b \cdot L^{-2a-2b}$$

$$a = 1, b = -1$$

El modelo respecto a la producción es $C_i^1 \cdot P_{\text{ha}}^{-1}$ escalado por una constante.

En segundo lugar para el empaque se consideran las siguiente variables,

- Área superficial del material por unidad de masa A_s con $[A_s] = L^2 \cdot M^{-1}$.
- Costo por área superficial del paquete V_e con $[V_e] = \$ \cdot L^{-2}$.

Si vemos ambas cantidades como funciones del gramaje del producto, tenemos que determinar por mínimos cuadrados cómo varían estas cantidades. Después de realizar experimentos y mediciones para el área superficial, obtenemos los siguientes datos:

- Para 0.5 kilogramos, se requieren $534.95cm^2$ de área de plástico.
- Para 1 kilogramo de arroz Diana, se requieren $791cm^2$ de plástico.
- Para 3 kilogramos de arroz Diana, se requieren $1441cm^2$ de plástico.

Adicionalmente, podemos suponer que, para 0 gramos de arroz Diana, se requieren $0cm^2$ de plástico. Planteemos varios modelos, y veamos cuál de ellos se acomoda mejor a lo que queremos expresar.

1er modelo: $A_s(x) = C \cdot x^{\alpha}$.

Para resolver el valor de la constantes C y α, usemos mínimos cuadrados. Resolvámoslo usando Matlab. Sacando logaritmo a ambos lados, tenemos que $ln(A) = ln(C) + \alpha ln(x)$. Así,

```
A=[ones(3,1) log([0.5;1;3])];
y=log([534.95;791;1441]);
x=A\y
```

```
x = 2×1
    6.6682
    0.5524
```

```
norm(A*x-y)
```

```
ans = 0.0063
```

```
C=exp(x(1))
```

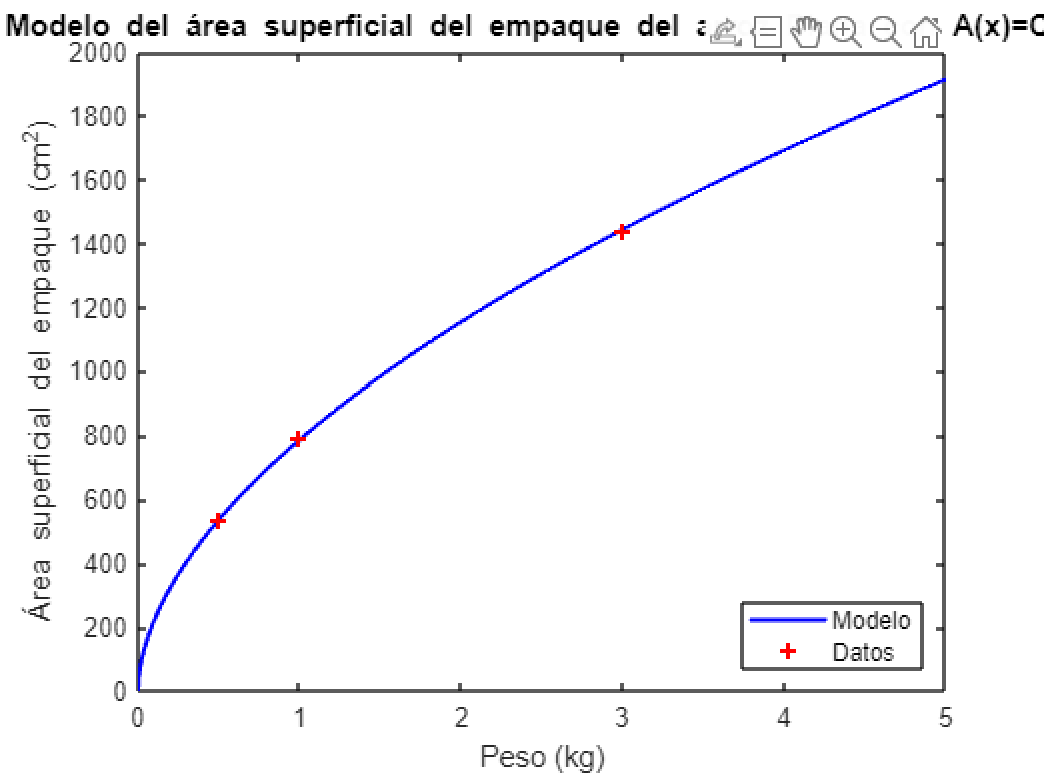
```
C = 786.9740
```

```
alpha=x(2)
```

```
alpha = 0.5524
```

```
x=linspace(0,5,1000);
y=786.9740*x.^(0.5524);
```

```
plot(x,y,"b-",[0.5,1,3],[534.95;791;1441],"r+",'LineWidth',1.5)
box on
ylabel('Área superficial del empaque (cm^2)')
xlabel('Peso (kg)')
title('Modelo del área superficial del empaque del arroz Diana con
A(x)=Cx^{\alpha}')
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','southeast');
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



2do modelo: $A_s(x) = C \cdot ln(x+1)$.

Para resolver C, volvemos a usar mínimos cuadrados. Obtenemos:

```
A=log([1.5;2;4]);
y=[534.95;791;1441];
x=A\y
```

```
x = 1.0764e+03
```

```
norm(A*x-y)
```

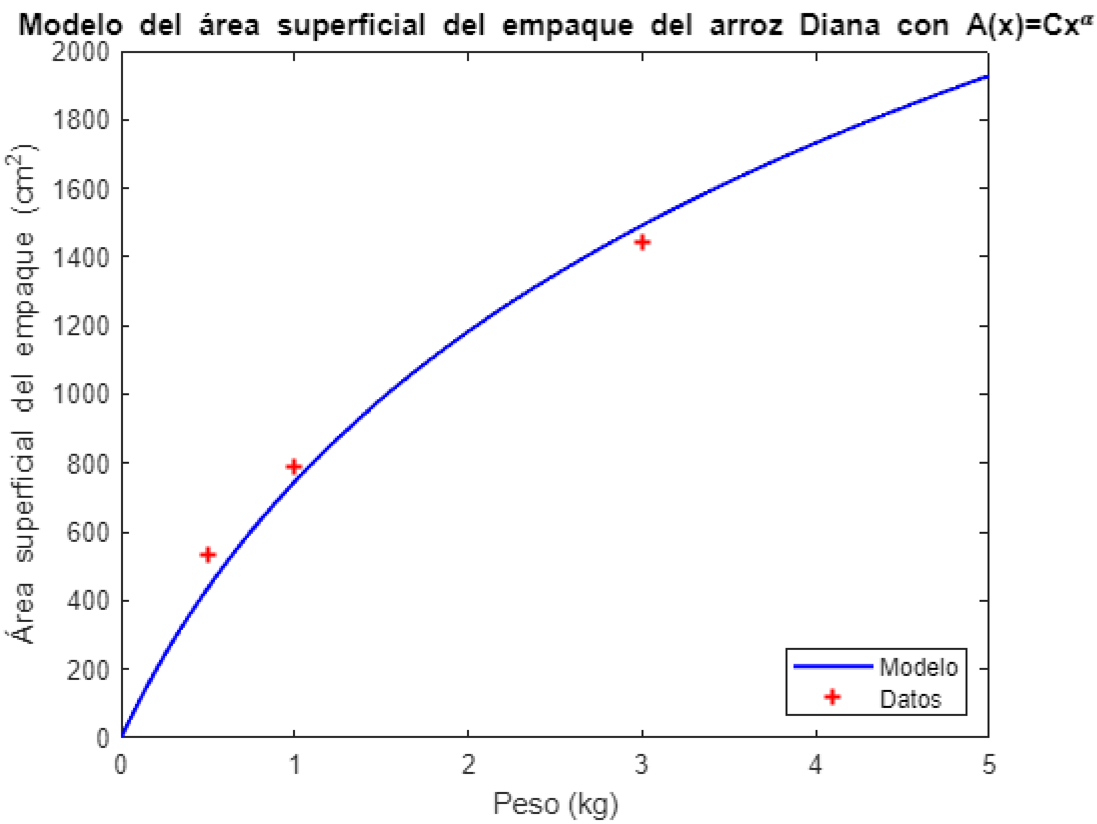
```
ans = 119.7563
```

```
C=x(1)
```

```
C = 1.0764e+03
```

```
x=linspace(0,5,1000);
```

```
y=1076.4*(log(x+1));
plot(x,y,"b-",[0.5,1,3],[534.95;791;1441],"r+",'LineWidth',1.5)
box on
ylabel('Área superficial del empaque (cm^2)')
xlabel('Peso (kg)')
title('Modelo del área superficial del empaque del arroz Diana con
A(x)=Cx^{\alpha}')
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','southeast');
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



Por lo tanto, el mejor modelo que se acomoda los datos es el primero. Podemos dar así una predicción para la cantidad de material que se utiliza en un paquete de $5kg$, y en un paquete de $10kg$. En ese caso,

```
786.9740*5^(0.5524)
```

```
ans = 1.9146e+03
```

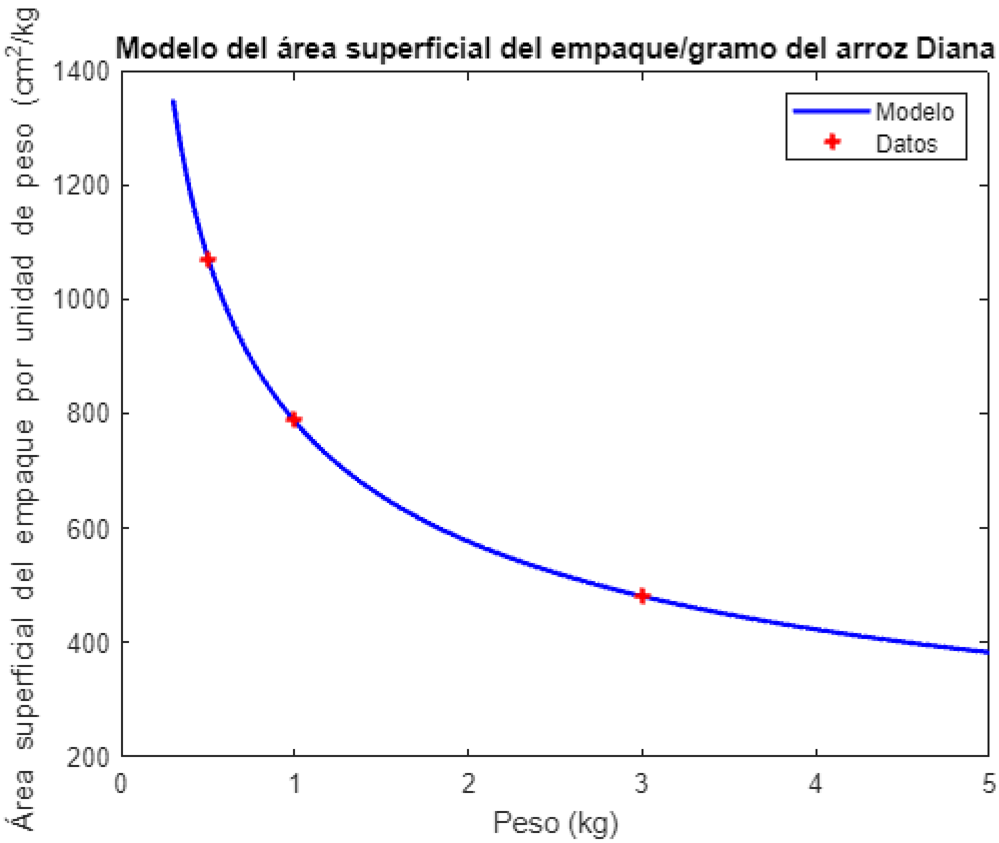
```
786.9740*10^(0.5524)
```

```
ans = 2.8078e+03
```

Para nuestro modelo, como se mencionó al inicio, será útil la cantidad de área de empaque que se utiliza por kilogramo. Así, dividimos el modelo obtenido entre la cantidad de kilogramos.

```
x=linspace(0.3,5,1000);
y=786.9740*x.^(0.5524)./x;
plot(x,y,"b-",[0.5,1,3],[534.95/0.5;791/1;1441/3],"r+",'LineWidth',1.8)
```

```
box on
ylabel('Área superficial del empaque por unidad de peso (cm^2/kg)')
xlabel('Peso (kg)')
title('Modelo del área superficial del empaque/gramo del arroz Diana')
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','northeast');
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



Estimamos ahora el área en cm^2 de empaque por kilogramo para los paquetes de $0.5kg, 1kg, 3kg, 5kg$ y $10kg$.

```
x=[0.5;1;3;5;10];
AporP=786.9740*x.^(0.5524)./x
```

```
AporP = 5×1
10^3 ×
    1.0733
    0.7870
    0.4813
    0.3829
    0.2808
```

Ahora, también es importante determinar el costo del empaque en función del peso, debido que experimentalmente se observó que, entre más peso contiene el paquete, más grueso es el plástico del paquete (tiene mayor calibre), y con $10kg$, no se usa plástico, sino lona. Para ello, se consultó con expertos y se obtuvo que:

- Para $500g$, arroz Diana utiliza un plástico de calibre 1.5
- Para $1000g$, arroz Diana utiliza un plástico de calibre 2.0
- Para $3000g$, arroz Diana utiliza un plástico de calibre 3.0

Construiremos una estimación del precio del plástico por cm^2, suponiendo que la relación entre éste y el calibre del plástico es lineal. Para construir tal estimación, tomaremos los datos de los precios de venta de plástico de Homecenter que se presentan aquí y aquí. Entre todas las posibles opciones de referencia, se seleccionaron éstas, debido a que son las únicas que presentan una opción de venta al por mayor (como, probablemente, arroz Diana siempre compre). En estas páginas se encontró que:

- Para un calibre de 3.5, el precio por cm^2 es de $\$0.177755$
- Para un calibre de 6.0, el precio por cm^2 es de $\$0.215805$

Realicemos un modelo lineal que indique el precio del plástico por cm^2 en función del calibre. Si es de la forma $ax+b$, entonces

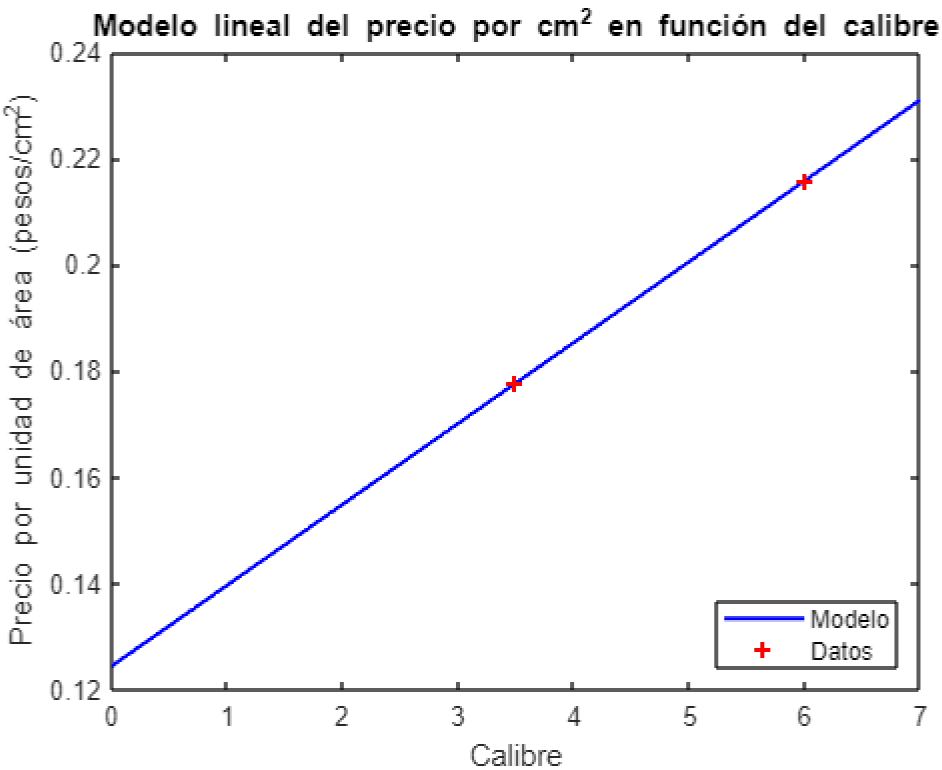
$$\begin{cases} a(3.5)+b=0.177755 \\ a(6)+b=0.215808 \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

```
z=[3.5 1; 6 1]\[0.177755; 0.215808]
```

```
z = 2×1
    0.0152
    0.1245
```

```
x=linspace(0,7, 1000);
y=z(1)*x+z(2);
plot(x,y,"b-",[3.5 ; 6],[0.177755 ;0.215808],"r+",'LineWidth',1.5)
box on
ylabel('Precio por unidad de área (pesos/cm^2)')
xlabel('Calibre')
title(['Modelo lineal del precio por cm^2 en función del calibre'])
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','southeast');
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



Así, si suponemos que el paquete de $5kg$ tiene un calibre de 4.0, entonces

```
x=[1.5;2;3;4];
Preciopormcuad=10000*(z(1)*x+z(2))
```

```
Preciopormcuad = 4×1
10^3 ×
    1.4731
    1.5492
    1.7014
    1.8537
```

Así,

- Para un paquete de $0.5kg$ de arroz Diana, el precio por cm^2 es de $\$0.1473$.
- Para un paquete de $1kg$ de arroz Diana, el precio por cm^2 es de $\$0.1549$.
- Para un paquete de $3kg$ de arroz Diana, el precio por cm^2 es de $\$0.1701$.
- Para un paquete de $5kg$ de arroz Diana, el precio por cm^2 es de $\$0.1854$.

Para el precio por cm^2 para $10kg$ de arroz, se toma como referencia este sitio. Según el mismo, el precio por cm^2 de una lona de polipropileno es de $\$0.18975$. Además, hay que incluir el precio de la manija plástica, cuyo costo estimamos en $\$150$. Así, usando la estimación de área usada para empacar $10kg$ de arroz Diana, la manija implica un precio de $\$150/2807.8 = \$0.05342/cm^2$. Entonces,

- Para una lona (con manija) de $10kg$ de arroz Diana, el precio por cm^2 es de $\$0.18975 + \$0.05342 = \$0.24317$.

Resumimos las estimaciones obtenidas en la siguiente tabla.

Peso del paquete (kg)	**Área por unidad de masa (cm²/kg)**	**Precio por cm² (Pesos)**
$0.5kg$	$1073.3\ cm^2/kg$	$\$0.1473/cm^2$
$1kg$	$787\ cm^2/kg$	$\$0.1549/cm^2$
$3kg$	$481.3\ cm^2/kg$	$\$0.1701/cm^2$
$5kg$	$382.9\ cm^2/kg$	$\$0.1854/cm^2$
$10kg$	$280.8\ cm^2/kg$	$\$0.24317/cm^2$

Peso del paquete (kg)	**Área por unidad de masa (m²/kg)**	**Precio por m² (Pesos)**
$0.5kg$	$0.10733\ m^2/kg$	$\$1473/m^2$
$1kg$	$0.0787\ m^2/kg$	$\$1549/m^2$
$3kg$	$0.04813\ m^2/kg$	$\$1701/m^2$
$5kg$	$0.03829\ m^2/kg$	$\$1854/m^2$
$10kg$	$0.02808\ m^2/kg$	$\$2431.7/m^2$

Tabla 04: Resumen de estimaciones hechas para el área superficial del material por unidad de masa y el costo por unidad superficial del empaque.

Ahora, para ajustar las anteriores dos variables a V usando análisis dimensional tenemos que

$$[V] = \left[A_s^c \cdot V_e^d\right]$$

$$\$ \cdot M^{-1} = (L^2 \cdot M^{-1})^c \cdot (\$ \cdot L^{-2})^d$$

$$\$^1 \cdot M^{-1} \cdot L^0 = \$^d \cdot M^{-c} \cdot L^{2c-2d}$$

$$c = 1, d = 1$$

El modelo respecto al empaque es $A_s \cdot V_e$ escalado por una constante.

Finalmente, los costos de venta del arroz pueden ser afectados por el transporte, y para este aspecto consideramos las siguientes variables

- Precio de la gasolina por unidad de volumen G con $[G] = \$ \cdot L^{-3}$.
- Consumo de combustible por longitud recorrida R con $[R] = L^3 \cdot L^{-1}$.
- Masa transportada m con $[m] = M$.
- Distancia recorrida d de un camión, con $[d] = L$.

Para el precio de la gasolina tomamos los datos del promedio del precio de la gasolina en trece ciudades principales del país según un boletín del Ministerio de Energía, así, $G = 13964\ \frac{\mathrm{COP}}{\mathrm{gal}} = 3688891.808\ \frac{\mathrm{COP}}{m^3}$. Por otra parte para las otras dos variables, se hace uso de un blog informativo de la empresa Volvo que indica que un camión con carga de alrededor $23.500\mathrm{kg}$ consume $38l$ por cada $100\mathrm{km}$ de conducción; por ello para el modelo que $R = \frac{38}{100}\frac{l}{\mathrm{km}} = 3.8 \times 10^{-7}\frac{m^3}{m}$ y $m = 23500\,\mathrm{kg}$. Para estimar la longitud que debe recorrer un camión de arroz Diana, se estima la distancia entre Tolima y Bogotá (Fábrica de arroz Diana), debido que arroz Diana importa la mayoría de su materia prima desde el centro del país. Estimamos esta longitud en $200\,km = 200000\,m = 2 \times 10^5 m$.

Haciendo el análisis dimensional para las dimensiones que afectan el transporte se obtiene lo siguiente,

$$[V] = [G^f \cdot R^h \cdot m^i \cdot L^j]$$

$$\$ \cdot M^{-1} = (\$ \cdot L^{-3})^f \cdot (L^2)^h \cdot (M)^i \cdot (L)^j$$

$$\$^1 \cdot M^{-1} \cdot L^0 = \$^f \cdot M^i \cdot L^{-3f+2h+j}$$

$$f = 1, i = -1, 2h + j = 3,$$

Además, debemos tener en cuenta que, para que nuestro modelo tenga sentido, debemos poder hallar de alguna manera el costo que se genera por cada kilómetro recorrido por parte de un camión de arroz Diana. Ello se halla mediante GR. Por lo tanto, las potencias de G y R deben ser las mismas en el problema. Como la potencia de G resulta ser 1, la potencia de R debe ser 1; es decir, $h = 1$. Así, $j = 3 - 2h = 1$, y el modelo respecto al transporte es $G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d$ escalado por una constante

Finalmente, se tiene que el modelo es

$$V = C_1(\text{producción}) + C_2(\text{empaque}) + C_3(\text{transporte})$$

$$V = C_1\left(C_i \cdot P_{\mathrm{ha}}^{-1}\right) + C_2(A_s \cdot V_e) + C_3(G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d)$$

Para aplicar el método de los mínimos cuadrados se utiliza el hecho que $A_s = 0.0786974 \cdot \frac{x^{0.5524}}{x}\frac{m^2}{\mathrm{kg}}$ y, por facilidad (excluyendo el caso para $10kg$), supondremos que $V_e = 152 + 1245x$ en donde x representa la masa de arroz en kilogramos. Si nombramos $z = A_s \cdot V_e = \left(0.0786974 \cdot \frac{x^{0.5524}}{x}\right) \cdot (152 + 1245x)$ entonces el modelo de V es lineal en la variable z quedando de la forma $V = \alpha + \beta z$, en donde $\alpha = C_1\left(C_i \cdot P_{\mathrm{ha}}^{-1}\right) + C_3(G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d)$ y $\beta = C_2$ (Nota: La variables de producción y de transporte se pueden considerar como costos fijos respecto a la masa del producto de venta).

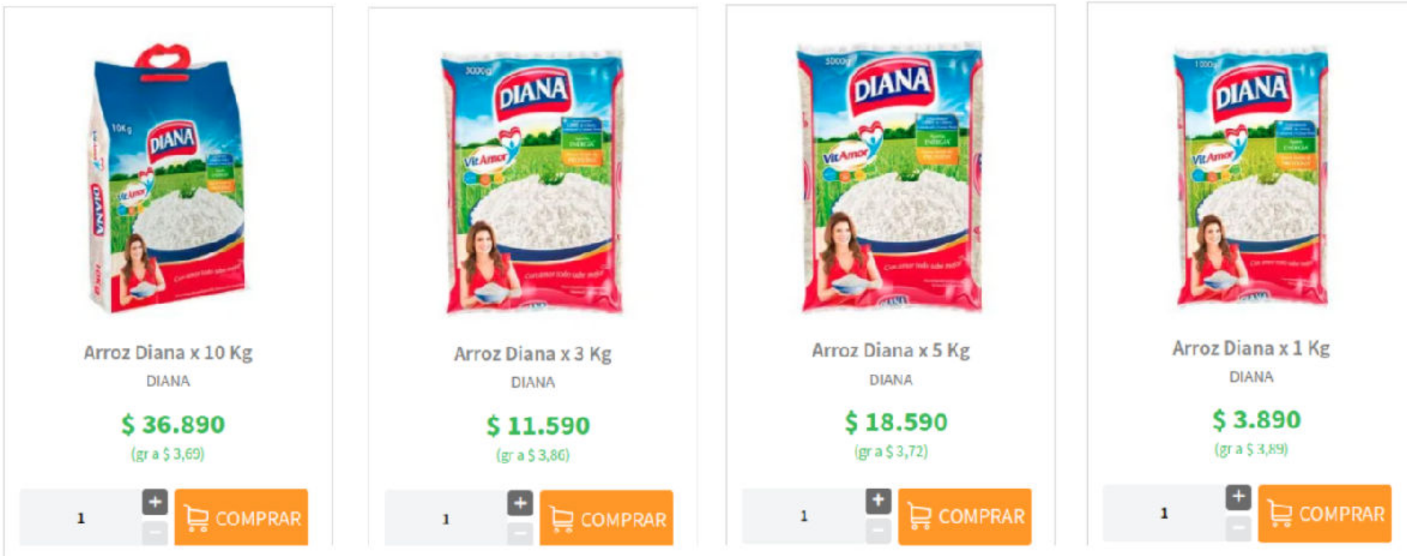


Imagen 05: Diferentes presentaciones de arroz Diana con sus respectivas dimensiones y precios.

Tomando los datos de la anterior imagen, se aplica el método de los mínimos cuadrados.

```
x_datos = [1; 3; 5; 10];
%Datos de los precios por unidad de masa (COP/kg)
V_datos = [3890;11590;18590;36890]./x_datos;
%Datos en función de la masa
z_datos = [ones(4,1), (0.07869740.*x_datos.^0.5524)./x_datos.*(152+1245.*x_datos)] ;
%alpha y beta
MCV = z_datos\V_datos
```

```
MCV = 2×1
10^3 ×
   3.992928500152684
  -0.000906536412462
```

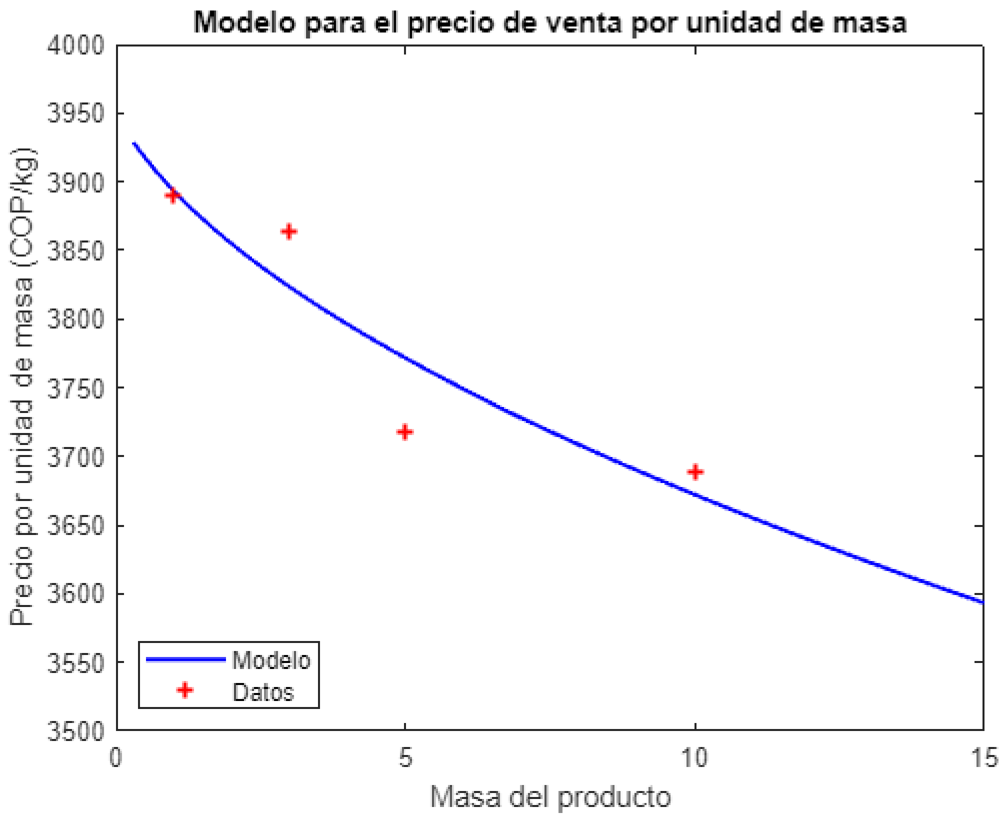
Por lo tanto, una vez calculados los parámetros α y β se tiene que

$$V = 3992.9 - 0.9z = 3992.9 - 0.9\left(0.0786974 \cdot \frac{x^{0.5524}}{x}\right) \cdot (152 + 1245x)$$

A continuación se muestra un gráfico que exhibe el ajuste del modelo a los datos.

```
xV=linspace(0.3,15, 1000);
yV=MCV(1)+MCV(2)*(0.07869740 * xV.^0.5524)./xV.*(152+1245.*xV);
plot(xV,yV,"b-",x_datos,V_datos,"r+",'LineWidth',1.5)
box on
ylabel('Precio por unidad de masa (COP/kg)')
xlabel('Masa del producto')
xlim([0 15])
ylim([3500 4000])
title('Modelo para el precio de venta por unidad de masa')
[a,b]=legend('Modelo','Datos','Location','southwest');
```

```
set(b(1),'Color','b')
set(b(2),'Color','r')
```



El error de este modelo es:

```
norm(V_datos-z_datos*MCV)
```

```
ans =
  69.014805273742454
```

Concluimos entonces que $C_2 = \beta = -0.9$. Además, hemos hallado una ecuación que satisfacen C_1 y C_3.

$$\alpha = C_1\left(C_i \cdot P_{\mathrm{ha}}^{-1}\right) + C_3(G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d) = 3992.9$$

Es decir, reemplazando los valores que se discutieron a lo largo de los anteriores párrafos,

$$C_1(691.3756 \cdot 0.6292^{-1}) + C_3(3688891.808 \ \cdot 0.38 \times 10^{-7} \cdot 23500^{-1} \cdot 200000) = 3992.9.$$

Por ende,

$$1098.82C_1 + 11.93C_3 = 3992.9$$

Para hallar otra ecuación que satisfacen estas constantes, y por consiguiente una aproximación de las mismas, es necesario estudiar otro producto, debido a que, como ya se enunció, el precio del transporte y producción del arroz Diana se asume constante con respecto al peso.

Para ello utillizaremos el cafe Sello Rojo de $0.5kg$ que tiene un costo de $17950\,COP$. Determinemos las constantes C_i, P_{ha}^{-1}, G, R, m^{-1}, d y $A_s \cdot V_e$, del modelo $V = C_1\left(C_i \cdot P_{\text{ha}}^{-1}\right) - 0.9(A_s \cdot V_e) + C_3(G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d)$.

Notemos que $C_i \cdot P_{\text{ha}}^{-1}$ tiene unidades, de pesos sobre masa, a partir de la información brindada aquí podemos determinar estas constantes, pues nos dicen que por hectarea se producen 145 arrobas de cafe, y cada arroba tiene un costo de producción de $65930COP$, que se distribuye de la siguiente manera:

Costos de producción de café en porcentaje

1. Recolección 53,7%
2. Fertilización 23,9%
3. Gastos administrativos 7,2%
4. Manejo de arvenses 6%
5. Beneficio 4,4%
6. Lotes en renovación 3%
7. Broca y fitosanitarios 1%
8. Gastos financieros 0,5%
9. Otras labores 0,2%

De esta manera podemos determinar cuanto cuesta producir un kg de cafe, lo cual se basa en hacer la siguiente cuenta.

```
%costo de producción del café por unidad de masa COP/kg
format long
65930/12.5
```

```
ans =
     5.274400000000000e+03
```

De esta manera el coste de producción del cafe por kg esta dado por: $C_i \cdot P_{\text{ha}}^{-1} = 5274.4\ \dfrac{COP}{kg}$. Ahora determinemos el costo del transporte por kilogramo, es decir, determinemos $G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d$, donde G representa la cantidad de gasolina por unidad de volumen, (la cual es identica a la del arroz, es decir, esta es $G = 13964\ \dfrac{\text{COP}}{\text{gal}} = 3688891.808\ \dfrac{\text{COP}}{m^3}$), R representa consumo de conbustible, por longitud recorrida (Como en el caso anterior esta es identica a la del arroz $R = \frac{38}{100}\frac{l}{\text{km}} = 0.00000038\,\frac{m^3}{m} = 3.8 \times 10^{-7}\frac{m^3}{m}$), m la masa estimada que trasporta cada camion ($m = 25000\ kg$), y d la distancia que tiene que recorrer el camión hasta la fábrica de sello rojo en Bogotá; dado que este procede de Tolima, Quindio y Medellin, hacemos un promedio de las distancias de estos lugares a Bogotá, la cual es: $\frac{416.4 + 200 + 201}{3} km = 272466.666m$, con lo anterior tendriamos que el costo de transporte por unidad de masa es:

```
%costo de trasporte del café por unidad de masa COP/kg

3688891.808*0.00000038*(1/25000)*272466
```

```
ans =
  15.277483449449628
```

Por ultimo determinemos $A_s \cdot V_e$ que equivale a determinar el precio del paquete por unidad de masa, para ello notamos que el producto viene en un empaque similar al de los jugos de caja los cuales estan hechos de 70% de cartón, un 25% de polietileno (plástico) y un 5% de aluminio, como se indica aqui, de esta manera tomando las medidas del empaque de manera experiemental vemos que es muy similar a un paralelepido de base $10 \times 8cm^2 = 0.008m^2$, y altura $19.5cm = 0.119m$, de donde su area superficial es:

```
%Area superficial del empaque m^2

2*0.119*0.08+2*0.08*0.1+2*0.119*0.1
```

```
ans =
   0.058840000000000
```

Ahora el precio del empaque (en su mayoria cartón) lo podemos encontrar aquí, y nos dice que 0.7 m^2 de este material cuestan $9890\,COP$, luego haciendo regla de 3 nos queda que el precio del paquete es $706.428\,COP$, de donde el precio del paquete por unidad de masa esta dada por $1412.857\ \frac{COP}{kg}$, reemplazando todos estos datos nos queda la siguiente ecuación:

$$35900 = 5274.4C_1 - 0.9(1412.857) + 15.277C_3$$

o equivalentemente

$$5274.4C_1 + 15.277C_3 = 37171.57$$

De esta manera nos queda el sistema de ecuaciones

$$1098.82C_1 + 11.93C_3 = 3992.9$$

$$5274.4C_1 + 15.277C_3 = 37171.57$$

```
A=[1098.82, 11.93; 5274.4, 15.277], b=[3992.9; 37171.57];
```

```
A = 2×2
10^3 ×
   1.098820000000000   0.011930000000000
   5.274400000000000   0.015277000000000
```

```
A\b
```

```
ans = 2×1
10^2 ×
   0.082896150469117
  -4.288260524599757
```

De esta manera, hemos hallado las constantes C_1, C_3, reemplazando en la ecuación general del modelo nos queda lo siguiente:

$$V = 8.28\left(C_i \cdot P_{\text{ha}}^{-1}\right) - 0.9(A_s \cdot V_e) - 428.82(G \cdot R \cdot m^{-1} \cdot d)$$

El valor de las constantes se podrían determinar de mejor manera si se tuvieran en cuenta otros productos con otras presentaciones. Si se dispuesiera de estos datos, se podría realizar mínimos cuadrados, no solo para hallar de mejor manera C_1 y C_3, sino también mejorar la aproximación de C_2 (para la que solo se usaron los datos del arroz Diana en el proceso de hallarla). Nuestro modelo tienen muchas simplificaciones y suposiciones inmersas, como que los procesos de industrialización de los productos aumentan el costo de un producto de la misma forma, sin importar el producto, o que considera el precio de los peajes dentro del transporte como "parte de la constante". Quedan muchas opciones para su mejora, y el alcance del mismo se limita a productos en los que no haya un gran impacto económico del proceso de industrialización en el costo del producto.

Comparemos los resultados de nuestro modelo con el precio por kilogramo de un paquete de $1kg$ de frijol bola roja. Para ello, tengamos en cuenta que:

- Según el documento "*Determinación de costos de producción con la implementación de una hectárea de frijol-lima (Phaseolus vulgaris) en la unidad productiva la Palmera vereda Santa Bárbara Municipio de Timaná- Huila.(Rojas Rojas M.N, Rojas Rojas S.L.)*", la producción de frijol bola roja requiere una inversión de $C_i = \$2753665\ COP/ha$, y se produce un promedio de $P_{ha} = 0.60\ ton/ha = 600\ kg/ha$.
- Suponiendo que el frijol, como en el documento, viene desde Timaná, Huila, la distancia que recorren los camiones que transportan este frijol es $d = 478km = 478000m$. El resto de constantes G, R y m, se toman como en el anterior problema. Es decir, $G = 3688891.808\ \frac{\text{COP}}{m^3}$, $R = 3.8 \times 10^{-7}\frac{m^3}{m}$, y $m = 25000\ kg$.
- Para el empaquetado del frijol, se asume que el mismo es empaquetado en bolsas de polipropileno. Por lo tanto, dado que la densidad del frijol es cercana a la del arroz, por simplificación, usaremos el

modelo que ya vimos para el arroz en el empaquetado del frijol (referencia para $1kg$). En este caso, para el paquete de un kilogramo, tomaremos el área de paquete por kilogramo como $0.0787\ m^2/kg$, y el costo del paquete como $1549\ COP/m^2$. Calculemos las constantes de nuestro modelo.

```
format long
A=2753665/600
```

```
A =
     4.589441666666667e+03
```

```
B=0.0787*1549
```

```
B =
     1.219063000000000e+02
```

```
C=3688891.808*3.8*10^(-7)*478000/25000
```

```
C =
  26.802012320204796
```

Entonces, según nuestro modelo

$$V = 8.28(4589.44) - 0.9(121.90) - 428.82(26.802)$$

```
8.28*4589.44-0.9*121.90-428.82*26.802
```

```
ans =
     2.639761956000000e+04
```

Nuestro modelo predice que el precio de un paquete de $1kg$ de frijol bola roja debe ser de $\$26398\ COP$. Tomando en cuenta que el precio de este frijol oscila realmente entre $\$16000\ COP$ y $\$21000\ COP$, el modelo no pudo predecir correctamente lo pedido. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el paquete de frijol Diana de $1kg$ cuesta $\$21000\ COP$. Por lo tanto, el error en realidad no se aleja mucho del precio real del frijol Diana. Ello puede deberse a que la principal fuente de entrenamiento de nuestro modelo fue un producto de esta empresa (el arroz). Insistimos en que es necesaria una mayor cantidad de datos de entrenamiento (con distintos productos), para que aumente la efectividad del modelo. Sin embargo, ya se han expuesto las limitaciones del mismo en los anteriores párrafos.

Ejercicio 4

En este ejercicio se mostrará la relación entre el radio de explosión, la energía liberada, el tiempo transcurrido desde la explosión y la densidad del medio en que ocurre la explosión. En primer lugar, por medio de análisis dimensional, hallemos la relación entre estas magnitudes, teniendo en cuenta que:

- Radio de la onda de choque $[R] = L$.
- Energía liberada $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$.
- Tiempo transcurrido $[t] = T$.
- Densidad del aire $[\rho] = M \cdot L^{-3}$.

Se supone la relación $R = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$ (K es una constante adimensional), de esta forma

$$L = (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^a \cdot (T)^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c$$

$$L^1 \cdot M^0 \cdot T^0 = L^{2a-3c} \cdot M^{a+c} \cdot T^{-2a+b}$$

Se construye la matriz para resolver el sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

con L para la primera fila, M para la segunda fila, T para la tercera fila, E para la primera columa, t para la segunda columna, ρ para la tercera columna y R para la última columna. Resolvemos este sistema,

```
A4 = [2 0 -3; 1 0 1; -2 1 0];
b4 = [1; 0; 0];
x4 = A4\b4;
x4
```

```
x4 = 3×1
    0.2000
    0.4000
   -0.2000
```

Por lo tanto, $(a, b, c) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ y de esta forma obtenemos el modelo

$$R = K \cdot E^{\frac{1}{5}} \cdot t^{\frac{2}{5}} \cdot \rho^{\frac{-1}{5}}.$$

Se conoce que G. I. Taylor demostró que si $E = 1J$ y $\rho = 1\frac{\text{kg}}{m^3}$ entonces $R = t^{2/5}\ \frac{m}{s^{2/5}}$, esto implica que la constante K en la ecuación hallada por análsis dimensional es igual a 1. Se concluye que

$$R = E^{\frac{1}{5}} \cdot t^{\frac{2}{5}} \cdot \rho^{\frac{-1}{5}}.$$

Considerando la relación entre las magnitudes R, E, t y ρ se realiza la estimación de la energía liberada por una explosión nuclear mediante cuatro fotos tomadas en distintos instantes de tiempo.

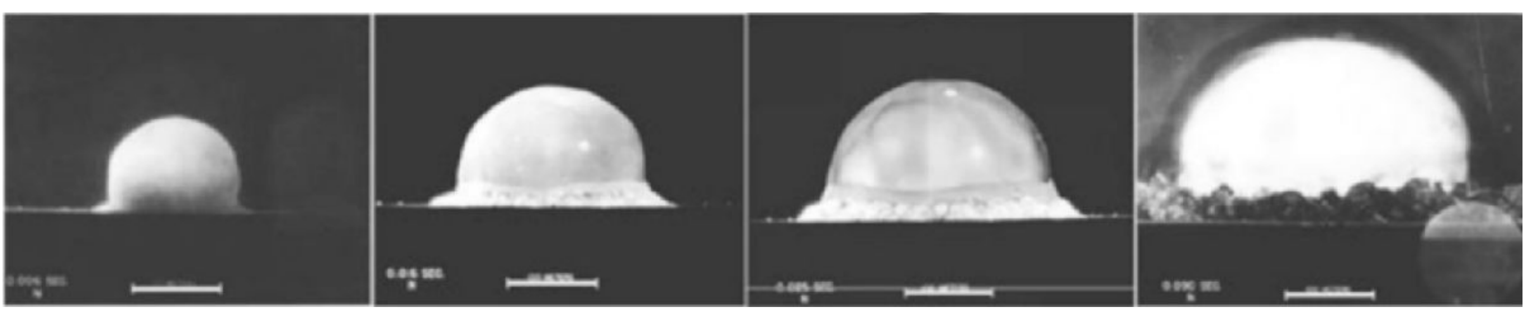


Figura 1: Onda de choque producto de una explosión nuclear en 6 ms, 16 ms, 25 ms, y 90 ms. El ancho de la barra

blanca en cada figura es de 100 m.

Para cada una de las fotos se toman datos manualmente de los puntos sobre el borde de la onda de choque y se ajusta un modelo de la forma $\mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Ay}^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{Cy} = 10000$ donde A, B y C son paramétros a determinar (Nota: La elección de la constante 10000 se realizó dado que los datos tomados son de orden 10^2 y en la matriz se convierten en datos de orden de $10^4 = 10000$. Esto ayuda a que los parámetros calculados por el método de los mínimos cuadrados estén en un rango en el que no se pierdan muchas cifras significativas).

```
%Foto a los 6 microsegundos de la explosión
imshow('6ms.png');
[x6ms,y6ms] = ginput(20);
%Elección de la escala para datos (barra blanca equivale a 100m)
imshow('6ms.png');
E6ms = ginput(2);
```

```
%Foto a los 16 microsegundos de la explosión
imshow('16ms.png')
[x16ms,y16ms] = ginput(20);
%Elección de la escala para datos (barra blanca equivale a 100m)
imshow('16ms.png')
E16ms = ginput(2);
```

```
%Foto a los 25 microsegundos de la explosión
imshow('25ms.png')
[x25ms,y25ms] = ginput(20);
%Elección de la escala para datos (barra blanca equivale a 100m)
imshow('25ms.png')
E25ms = ginput(2);
```

```
%Foto a los 90 microsegundos de la explosión
imshow('90ms.png')
[x90ms,y90ms] = ginput(20);
%Elección de la escala para datos (barra blanca equivale a 100m)
imshow('90ms.png')
E90ms = ginput(2);
```

A continuación se ajusta el modelo por el método de mínimos cuadrados.

```
% Fotografía después de 6ms de la explosión
A6ms = [(x6ms.*x6ms+y6ms.*y6ms) x6ms y6ms];
s6ms = mldivide(A6ms, 10000*ones(20,1));
```

```
% Fotografía después de 16ms de la explosión
A16ms = [(x16ms.*x16ms+y16ms.*y16ms) x16ms y16ms];
s16ms = mldivide(A16ms, 10000*ones(20,1));

% Fotografía después de 25ms de la explosión
A25ms = [(x25ms.*x25ms+y25ms.*y25ms) x25ms y25ms];
s25ms = mldivide(A25ms, 10000*ones(20,1));

% Fotografía después de 90ms de la explosión
A90ms = [(x90ms.*x90ms+y90ms.*y90ms) x90ms y90ms];
s90ms = mldivide(A90ms, 10000*ones(20,1));
```

Ahora es posible hallar el radio considerando que

$$A(x^2+y^2)+\mathrm{Bx}+\mathrm{Cy}=10000 \quad \text{(Modelo propuesto)}$$

$$x^2+y^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}y=\frac{10000}{A}$$

$$x^2+y^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}y+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C^2}{4A^2}=\frac{10000}{A}+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C^2}{4A^2}$$

$$\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{A}\right)^2=\frac{10000}{A}+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C^2}{4A^2}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{10000}{A}+\frac{B^2+C^2}{4A^2}}$$

Una vez calculado el radio en términos de los parámetros encontrados por el método de mínimos cuadrados se procede a halla su magnitud equivalente en metros teniendo en cuenta que en cada imagen la barra blanca ubicada en la parte inferior equivale a 100 metros. Por ejemplo, para la captura a los 6ms el cálculo se haría de la siguiente manera (usando regla de tres):

$$\frac{100\, r_{6\mathrm{ms}}}{E_{6\mathrm{ms}}(2,1)-E_{6\mathrm{ms}}(1,1)}$$ donde $E_{6\mathrm{ms}}$ fueron datos tomados anteriormente.

En el siguiente código se encuentra el computo de cada uno de los radios escalados a metros.

```
r6ms = 100*sqrt(10000/s6ms(1) + (s6ms(2)^2 + s6ms(3)^2)/(2*s6ms(1))^2)/(E6ms(2,1)-
E6ms(1,1))
```

```
r6ms = 73.5409
```

```
r16ms = 100*sqrt(10000/s16ms(1) + (s16ms(2)^2 + s16ms(3)^2)/(2*s16ms(1))^2)/
(E16ms(2,1)-E16ms(1,1))
```

```
r16ms = 104.1193
```

```
r25ms = 100*sqrt(10000/s25ms(1) + (s25ms(2)^2 + s25ms(3)^2)/(2*s25ms(1))^2)/
(E25ms(2,1)-E25ms(1,1))
```

```
r25ms = 127.5943
```

```
r90ms = 100*sqrt(10000/s90ms(1) + (s90ms(2)^2 + s90ms(3)^2)/(2*s90ms(1))^2)/
(E90ms(2,1)-E90ms(1,1))
```

```
r90ms = 165.1071
```

Conociendo el radio de la onda de choque en cada instante de tiempo es posible hallar la energía liberada en la explosión por medio de la fórmula hallada anteriormente:

$$R = E^{\frac{1}{5}} \cdot t^{\frac{2}{5}} \cdot \rho^{\frac{-1}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad E = R^5 \cdot t^{-2} \cdot \rho \,.$$

La siguiente tabla resume toda la información (toda magnitud tiene unidades del sistema internacional).

```
Tiempo = [0.006; 0.016; 0.025; 0.090];
Radio = [r6ms; r16ms; r25ms; r90ms];
Densidad = [1; 1; 1; 1];
Energia = Radio.^5 .* Tiempo.^(-2) .* Densidad ;
table(Tiempo, Radio, Densidad,Energia)
```

ans = 4×4 table

	Tiempo	Radio	Densidad	Energia
1	0.0060	73.5409	1	5.9751e+13
2	0.0160	104.1193	1	4.7799e+13
3	0.0250	127.5943	1	5.4110e+13
4	0.0900	165.1071	1	1.5148e+13

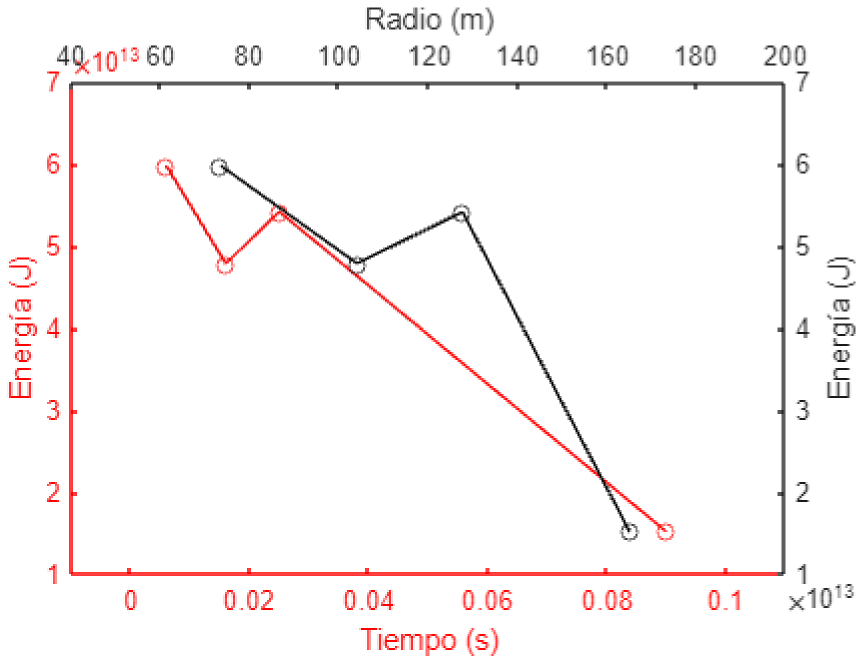
Finalmente, se grafica la energía contra el tiempo y la energía contra el radio de expansión.

```
hold on
t = tiledlayout(1,1);
ax1 = axes(t);
plot(ax1,Tiempo,Energia,'o-r')
ax1.XColor = 'r';
ax1.YColor = 'r';
xlim(ax1,[-0.01 0.11])
ylim(ax1,[1E13 7*1E13])
xlabel(ax1,'Tiempo (s)')
ylabel(ax1,'Energía (J)')

ax2 = axes(t);
plot(ax2,Radio,Energia,'o-k')
ax2.XAxisLocation = 'top';
ax2.YAxisLocation = 'right';
ax2.Color = 'none';
ax1.Box = 'off';
ax2.Box = 'off';
xlim(ax2,[40 200])
```

```
ylim(ax2,[1E13 7*1E13])
xlabel(ax2,'Radio (m)')
ylabel(ax2,'Energía (J)')

hold off
```



Finalmente, se presenta una aplicación en la astronomía. Una supernova es una estrella en explosión que libera una gran cantidad de energía que se manifiesta por un aumento notable en la intensidad de brillo. Por ejemplo, la supernova Tycho actualmente tiene un radio de 33.2 años luz, una energía aproximada de $10^{44}\ J$ y una densidad de $\rho = 2 \times 10^{-21}\ \mathrm{kg}/m^3$. Con estos datos y con la fórmula de Taylor-Sedov es posible estimar la fecha en que la estrella explotó. De la fórmula de Taylor-Sedov es posible deducir que

$$R = E^{\frac{1}{5}} \cdot t^{\frac{2}{5}} \cdot \rho^{\frac{-1}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad t = R^{\frac{5}{2}} \cdot E^{\frac{-1}{2}} \cdot \rho^{\frac{1}{2}},$$

luego, los datos son reemplazados en unidades del SI,

```
t_Tycho_seg = (33.2 * 9.461*1E15)^(5/2) * (1E44)^(-1/2) * (2*1E-21)^(1/2)
```

```
t_Tycho_seg = 2.4729e+11
```

```
t_Tycho_siglo = t_Tycho_seg / (60*60*24*365*100)
```

```
t_Tycho_siglo = 78.4145
```

Por lo tanto, la explosión que ahora es la supernova Tycho ocurrió hace 78 siglos, 41 años y 165 días aproximadamente.