

# Introducción a optimización topológica

Juan Diego Murcia Porras jmurciap@unal.edu.co  
 Carlos Enrique Nosa Guzmán cnosa@unal.edu.co  
 Jaime Andres Zamora Avilez jzamora@unal.edu.co

## Resumen

En reporte de proyecto se revisa e implementa un código de optimización topológica para la minimización de la complianza en estructuras sometidas a cargas estáticas. Inspirado en el trabajo original de [Sigmund, 2001], aquí se adapta la versión simplificada de [Andreassen et al., 2011], utilizando Julia como lenguaje de programación. Se estudian los métodos de solución del problema de optimización Optimality Criteria, además del método de las asíntotas móviles (MMA). Se emplea una discretización del diseño mediante el método de elementos finitos (FEM) y un filtro de densidades para evitar dependencia del enmallado. Además se analiza el problema desde la optimización convexa. Finalmente se contemplan posibles direcciones para trabajo futuro.

*Palabras clave:* Optimización Topológica, Elementos Finitos, Optimización Estructural.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Mecánica Continua</b>	<b>4</b>
2.1. Tensores	4
2.1.1. Tensores de orden $n$	4
2.2. Cinemática del continuo	6
2.2.1. Descripción material y descripción espacial	6
2.2.2. Vector de desplazamiento	7
2.2.3. Deformación infinitesimal	7
2.2.4. Tensor de tensión infinitesimal	9
2.2.5. Notación de Voigt para el tensor de tensión infinitesimal	10
2.3. Esfuerzo	10
2.3.1. Vector de esfuerzo	10
2.3.2. Tensor de esfuerzo	11
2.3.3. Notación de Voigt para el tensor de esfuerzo	11
2.4. Sólidos elásticos	12
2.4.1. Propiedades mecánicas	12
2.4.2. Materiales linealmente elásticos	13
2.4.3. Notación de Voigt para el tensor de rigidez	14
2.5. Ecuaciones de equilibrio dinámicas	15
2.5.1. Forma débil de las ecuaciones de equilibrio elásticas (caso estático)	17
2.6. Algunas consideraciones para el caso bidimensional	19
2.6.1. Ley de Hooke para el caso bidimensional	20
2.6.2. Ecuaciones de equilibrio dinámicas para el caso bidimensional	20
<b>3. Método de los Elementos Finitos</b>	<b>22</b>
3.1. El método	22
3.1.1. Modelamiento	22
3.1.2. Simulación	22
3.1.3. Visualización	22
3.2. Fundamentos de FEM	23
3.2.1. Formas débiles y fuertes	23
3.2.2. Principio de Hamilton	23
3.2.3. Procedimiento del FEM	24
3.3. Filtrado	32
3.3.1. Filtrado de densidad	32
3.3.2. Filtrado de sensibilidad	33

<b>4. Optimización topológica</b>	<b>34</b>
4.1. Introducción de la función de densidad . . . . .	35
4.1.1. Estudio del problema discreto desde el punto de optimización convexa . . . . .	36
4.2. Métodos de solución . . . . .	37
4.2.1. Método de criterio de optimalidad (OC) . . . . .	37
4.2.2. Método de asíntotas móviles (MMA) . . . . .	38
<b>5. Implementación Algorítmica</b>	<b>42</b>
5.1. Problema de optimización topológica . . . . .	42
5.2. Filtrado . . . . .	43
5.3. Método de criterio de optimalidad: OC . . . . .	43
5.3.1. Propiedades del material (líneas 7-9) . . . . .	44
5.3.2. Preparación del análisis de elementos finitos (líneas 10-22) . . . . .	44
5.3.3. Definir cargas y soportes: mitad viga-MBB (líneas 23-28) . . . . .	45
5.3.4. Preparación de filtro (líneas 29-50) . . . . .	45
5.3.5. Inicialización de iteración (líneas 51-54) . . . . .	46
5.3.6. Comienzo de iteración (líneas 55-106) . . . . .	47
5.3.7. Graficar resultados (línea 107) . . . . .	49
5.4. Método MMA . . . . .	50
5.4.1. Elementos finitos . . . . .	50
5.4.2. Ejecución MMA . . . . .	50
<b>6. Conclusiones</b>	<b>53</b>

## 1. Introducción

La optimización topológica es un campo de gran importancia en ramas de ingeniería y física para distintas aplicaciones. Una de ellas es el diseño eficiente de estructuras. En medio de su importancia y popularidad como campo de estudio, surgen distintos esfuerzos que buscan poder simplificar algoritmos de optimización complejos. Uno de estos esfuerzos se evidencia en [Andreassen et al., 2011], el cual es el objeto de estudio de este proyecto de revisión. En este se presenta una optimización topológica para el problema de la minimización de la complianza (compliance) de estructuras estáticamente cargadas. Este a su vez es inspirado en el artículo [Sigmund, 2001], el cual presenta un código de 99 líneas en MatLab que resuelve el mismo problema. [Andreassen et al., 2011] se presenta como una mejora al primer artículo, en el cual la rutina de optimización, además tener más líneas, no implementa filtrado de densidades, lo cual hace la rutina de 88 líneas.

El problema que se quiere resolver se puede resumir brevemente como determinar la cantidad de material necesaria para diseñar óptimamente (con respecto a la cantidad de material usado) una estructura (por ejemplo un puente) sobre la cual actúan unas cargas o fuerzas externas. Para abordar la solución de este, se implementa una discretización del dominio del diseño con el método de los elementos finitos (FEM). En el artículo original se discute un poco al principio acerca de distintas estrategias de solución para este tipo de problemas de optimización topológica. El enfoque usado para la solución es una variación del método SIMP (por sus siglas en inglés Solid Isotropic Material with Penalization). En este método las propiedades del materiales se asumen constantes dentro de cada elemento usado para discretizar el dominio del diseño y las variables son las densidades relativas de cada elemento. Para garantizar la existencia de las soluciones, la técnica debe de ser combinada con algún tipo de restricción en el dominio, o algún tipo de filtro [Andreassen et al., 2011]. En este caso usamos una técnica de filtrado de densidades, además de que se estudia principalmente el método del criterio de optimalidad (OC).

Los artículos originales son presentados como una oportunidad para los principiantes para introducirse en el campo de la optimización topológica, y una de las invitaciones es a poder implementar modificaciones en alguna de las variables o en el planteamiento del problema. Para este proyecto, una de las modificaciones que hacemos es el lenguaje de programación. Implementamos la rutina de 88 líneas en Julia, el cual es un lenguaje que se ha venido postulando como una buena herramienta para computación numérica o científica [Bezanson et al., 2012], [Bezanson et al., 2018].

Otra de las variaciones con respecto a los artículos originales, es el estudio del problema de optimización, con el método de las asíntotas móviles (MMA), el cual es estudiado en la sección 4.2, así como también el análisis del problema de optimización como un problema de optimización convexa.

La implementación en Julia se puede ver en [GitHub](#). En este reporte de proyecto nos enfocaremos en primer lugar en tratar algunos preliminares teóricos como temas de mecánica continua, y el método de los elementos finitos para poder afrontar la formulación del problema, posteriormente se estudia el problema de optimización topológica desde el contexto de optimización topológica, así como también los métodos de solución comentados previamente. Finalmente se estudia la implementación algorítmica, culminando con las conclusiones se contempla la posibilidad de trabajo futuro.

## 2. Mecánica Continua

En la presente sección, se introducirá el tema de mecánica continua con el fin de comprender posteriormente las ecuaciones que corresponden a la optimización topológica. Es importante aclarar que la mecánica continua es un campo extenso del que hay numerosa bibliografía disponible. Se intentarán cubrir únicamente aquellas definiciones que se utilizarán más adelante. Los tensores de tensión y de esfuerzo se introducirán como tensores de orden 2 para facilitar su comprensión. Posteriormente, se definirá la notación de Voigt, que será de utilidad a la hora de realizar el método de elementos finitos. Esta sección toma, casi literalmente, las definiciones y comentarios dados en [W Michael et al., 2010], [G.R. and S. S., 2013] y la introducción de [Serrano, sf].

La materia está constituida de moléculas, que a su vez están compuestas por átomos y partículas. Por ende, la materia no es continua. Sin embargo, hay varios fenómenos, como la deflexión de una estructura bajo cargas, en los que ignorar este hecho es bastante útil. La teoría que busca describir las relaciones entre fenómenos a grande escala, ignorando la estructura de la materia a pequeña escala, se denomina *teoría continua*. La justificación de su uso es más de tipo experimental y filosófico. Al final, es suficiente decir que más de 200 años de experiencia son suficientes para justificar esta teoría en una gran variedad de situaciones. Ver [W Michael et al., 2010].

La *mecánica continua* estudia la respuesta de diversos materiales a distintas condiciones de carga. Las ecuaciones que constituyen esta teoría se dividen en dos: (1) las ecuaciones de campo, formuladas para un volumen diferencial de material en cada punto del dominio, y (2) la forma integral (o forma débil), formulada para un volumen finito de materia continua. Se introducirá la primera forma para un mayor entendimiento, recomendada generalmente para principiantes; posteriormente, se derivarán las ecuaciones en su forma “débil”, que son aquellas que se utilizarán en las siguientes secciones.

### 2.1. Tensores

Introduciremos los tensores como una generalización de las transformaciones lineales. Si  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una transformación lineal dada por  $a \mapsto \mathbf{T}a$ , diremos que  $\mathbf{T}$  es un *tensor de orden 2* o simplemente *tensor*. Si  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , entonces existen escalares  $T_{ij} := e_i \cdot \mathbf{T}e_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) de manera que

$$\mathbf{T}e_k = T_{1k}e_1 + T_{2k}e_2 + T_{3k}e_3, \text{ para } k = 1, 2, 3.$$

Los escalares  $T_{ij}$  son definidos como las componentes del tensor  $\mathbf{T}$ , y pueden ser dispuestos en una matriz como

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

a la cual se le denomina la matriz de  $\mathbf{T}$  con respecto a la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Las nociones de tensor identidad, tensor inverso, tensor transpuesto, y suma y multiplicación de tensores se definen de manera análoga a como se definen para una transformación lineal.

#### 2.1.1. Tensores de orden $n$

Suponga que  $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $\beta = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$  son dos bases ortonormales de  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que existe un tensor ortonormal  $Q$  de manera que  $Qe_k = \sum_{i=1}^3 Q_{ik}e_i = e'_k$  para  $k = 1, 2, 3$ . Por ende, si sabemos las componentes de  $\mathbf{T}$  respecto a la base  $\alpha$ , podemos derivar sus componentes respecto a la base  $\beta$  como

$$T'_{ij} = e'_i \cdot \mathbf{T}e'_j = Qe_i \cdot \mathbf{T}Qe_j = \sum_{m,n=1}^3 Q_{mi}T_{mn}Q_{nj},$$

o, en forma matricial,

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}].$$

Dado que  $\mathbf{Q}$  es ortonormal (y por ende  $[Q]$  también), podemos expresar

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}] [\mathbf{T}]' [\mathbf{Q}]^T.$$

<sup>1</sup>. representará en este documento el producto interno usual.

Es decir, un tensor está unívocamente determinado por sus componentes respecto a alguna base, y, decir por ejemplo *el tensor*  $T_{ij}$  es correcto, en el sentido de que se interprete como las componentes de tal tensor respecto a la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Esta noción de transformación entre bases nos permite generalizar el concepto de tensor a más dimensiones usando las reglas utilizadas para realizar un cambio de base. Restringiéndonos a bases ortonormales, definiremos las componentes de tensores de orden mayor por medio de sus reglas de transformación, recordando que las cantidades sin prima se refieren a las componentes respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  y las cantidades primadas se refieren a sus componentes respecto a otra base ortonormal  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , relacionadas mediante  $e'_k = Qe_k$  para  $k = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha \text{ tensor de orden cero (o escalar),} \\ a'_i &= \sum_{m=1}^3 Q_{mi} a_m \text{ tensor de orden uno (o vector),} \\ T'_{ij} &= \sum_{m,n=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \text{ tensor de orden dos (o tensor),} \\ S'_{ijk} &= \sum_{m,n,r=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} S_{ijk} \text{ tensor de orden tres,} \\ C'_{ijkl} &= \sum_{m,n,r,s=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{ijkl} \text{ tensor de orden cuatro,}\end{aligned}$$

y de manera análoga se puede describir un tensor de orden  $n$ . A partir de allí, se derivan ciertas reglas, cuyas ideas de demostración se pueden encontrar en [W Michael et al., 2010].

- *Regla de la suma.* Si  $T_{i_1 \dots i_n}$  y  $S_{i_1 \dots i_n}$  son componentes de tensores de orden  $n$ , entonces  $T_{i_1 \dots i_n} + S_{i_1 \dots i_n}$  son componentes de un tensor de orden  $n$ .
- *Regla de la multiplicación.* Sean  $T_{i_1 \dots i_n}$  las componentes de un tensor de orden  $n$  y  $S_{j_1 \dots j_m}$  las componentes de un tensor de orden  $m$ . Entonces,  $T_{i_1 \dots i_n} S_{j_1 \dots j_m}$  son las componentes de un tensor de orden  $m + n$ , donde todos los índices en la expresión son libres.

Además, demostraremos un caso especial de la *regla del cociente*, que nos será útil más adelante.

**Proposición.** Si  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  son componentes de tensores arbitrarios de orden 2,  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , y

$$\sigma_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 E_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (1)$$

para todas las coordenadas, luego  $E_{ijmn}$  es un tensor de orden cuatro.

**Solución.** Dado que  $\sigma$  y  $\varepsilon$  son tensores de orden 2, luego

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{r,s=1}^3 Q_{ir} Q_{js} \varepsilon'_{rs}$$

y

$$\sigma_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 Q_{im} Q_{jn} \sigma'_{mn}.$$

Reemplazando en (1), obtenemos que

$$\sum_{m,n=1}^3 Q_{im} Q_{jn} \sigma'_{mn} = \sum_{m,n,r,s=1}^3 C_{ijmn} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}.$$

Pero, como (1) es válida para cualesquiera coordenadas, luego

$$\sigma'_{mn} = \sum_{r,s=1}^3 E'_{mnr s} \varepsilon'_{rs},$$

y así,

$$\sum_{m,n,r,s=1}^3 C'_{mnrs} Q_{im} Q_{jn} \varepsilon'_{rs} = \sum_{m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por  $Q_{ik} Q_{jl}$ , sumando sobre  $i$  y  $j$ , y recordando que  $\sum_{i=1}^3 Q_{ik} Q_{im} = \delta_{km}$ , obtenemos que

$$\sum_{m,n,r,s=1}^3 E'_{mnrs} \delta_{km} \delta_{ln} \varepsilon'_{rs} = \sum_{i,j,m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs},$$

o, de otra forma,

$$\sum_{r,s=1}^3 E'_{klrs} \varepsilon'_{rs} = \sum_{i,j,m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}.$$

Es decir,

$$\sum_{r,s=1}^3 \left( E'_{klrs} - \sum_{i,j,m,n=1}^3 Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} E_{ijmn} \right) \varepsilon'_{rs} = 0.$$

Dado que esta ecuación debe ser cierta para cualquier tensor  $\varepsilon$ , concluimos que

$$E'_{klrs} = \sum_{i,j,m,n=1}^3 Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} E_{ijmn},$$

concluyendo así lo pedido. □

## 2.2. Cinemática del continuo

Para una partícula, el movimiento está descrito por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$ , donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Para el continuo, sin embargo, hay un número infinito de partículas. Por ello debemos agregar un nuevo argumento que identifique la partícula del cuerpo a la que nos referimos mediante su posición en un tiempo de referencia  $t_0$ . Es decir, si una partícula  $P$  está en la posición  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  en el tiempo  $t_0$ , su movimiento puede ser descrito mediante

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \text{con } \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0).$$

En general,  $\mathbf{x} : \Omega \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  describe el movimiento de un cuerpo, donde  $\Omega$  es el dominio que ocupa el cuerpo en el tiempo  $t_0$ . A la tripla  $(X_1, X_2, X_3)$  que ayuda a identificar la partícula a la que nos referimos se le denomina *coordenadas materiales*.

### 2.2.1. Descripción material y descripción espacial

Para definir cualquier campo escalar o vectorial  $\Theta$  sobre un cuerpo en movimiento (por ejemplo, un tensor de orden dos o la temperatura), se pueden usar dos enfoques.

1. Sobre las partículas, i.e., como función de las coordenadas materiales  $(X_1, X_2, X_3)$  y el tiempo como

$$\Theta = \Theta(X_1, X_2, X_3, t).$$

A esta descripción se le denomina *descripción material* del campo. Otros nombres para ella son *descripción de Lagrange* o *descripción de referencia*. Note que se describe el cambio del campo sobre cierta partícula a través del tiempo.

2. Observando cambios en lugares fijos, i.e., como función de las coordenadas espaciales  $(x_1, x_2, x_3)$  y el tiempo como

$$\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3, t).$$

A esta descripción se le denomina *descripción espacial* o *descripción lagrangiana*. Note que, bajo este enfoque, lo que es medido es el cambio del campo en puntos fijos, que pueden ser ocupados por distintas partículas a través del tiempo.

Suponiendo que la descripción del movimiento de un cuerpo es inyectiva, podemos obtener la descripción espacial de cierto campo a partir de su descripción material y viceversa, como se observa en el siguiente ejemplo, tomado de [W Michael et al., 2010].

**Ejemplo.** El movimiento de un cuerpo está dado por

$$x_1 = X_1 + ktX_2, \quad x_2 = (1 + kt)X_2, \quad x_3 = X_3.$$

Su temperatura está dada por la descripción espacial

$$\Theta = \alpha(x_1 + x_2).$$

Encuentre (a) la descripción material de la temperatura, y (b) exprese la velocidad y el ritmo de cambio en la temperatura para una partícula fija arbitraria usando ambas descripciones.

**Solución.** Para resolver (a), basta con reemplazar  $x_1$  y  $x_2$  según las ecuaciones de movimiento dadas. Así,

$$\Theta = \alpha(X_1 + ktX_2 + (1 + kt)X_2) = \alpha(X_1 + (1 + 2kt)X_2).$$

Para resolver (b), derivamos la descripción del movimiento respecto al tiempo para obtener

$$\mathbf{v}(X_1, X_2, X_3, t) = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = (kX_2, kX_2, 0).$$

Para obtener su descripción espacial, note que

$$X_2 = \frac{x_2}{1 + kt}. \quad (2)$$

Por ende,

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \left( \frac{kx_2}{1 + kt}, \frac{kx_2}{1 + kt}, 0 \right).$$

Para hallar el cambio en la temperatura para una partícula fija, derivamos la expresión obtenida en el literal (a) respecto al tiempo para obtener

$$\left( \frac{d\Theta}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = 2\alpha kX_2.$$

Para describir este cambio espacialmente, usamos de nuevo la ecuación (2) para obtener que

$$\left( \frac{d\Theta}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = \frac{2\alpha kx_2}{1 + kt}.$$

Nótese que, aunque la temperatura no varía con el tiempo en cada punto fijo  $(x_1, x_2, x_3)$  del espacio, cada partícula que pasa por  $(x_1, x_2, x_3)$  experimenta cambios en su temperatura a través del tiempo, como se evidencia en la anterior ecuación.  $\triangle$

### 2.2.2. Vector de desplazamiento

El *vector desplazamiento* para cierta partícula en el continuo (identificada mediante sus coordenadas materiales  $\mathbf{X}$ ) desde su punto de referencia  $P(t_0)$  a su posición actual  $P(t)$  está dada por el vector desde  $P(t_0)$  hacia  $P(t)$ , y es denotado por  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ . Esto es,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = (u_1, u_2, u_3) := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X},$$

como se muestra en la figura 1.

### 2.2.3. Deformación infinitesimal

Analizaremos cómo podemos describir la deformación de un cuerpo a través del tiempo mediante tensores. Considere un cuerpo que comienza con una configuración particular en un tiempo  $t_0$ , y cambia a otra configuración en un tiempo  $t$ . Una partícula  $P$  con coordenadas materiales  $\mathbf{X}$  llega a una posición

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (3)$$

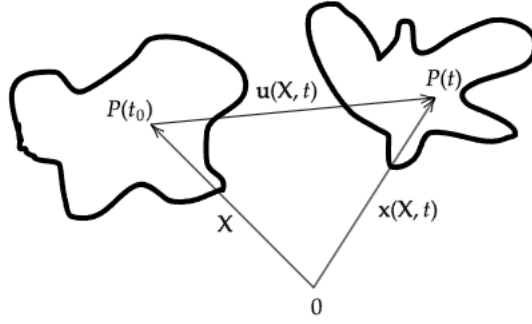


Figura 1: Descripción del vector de desplazamiento

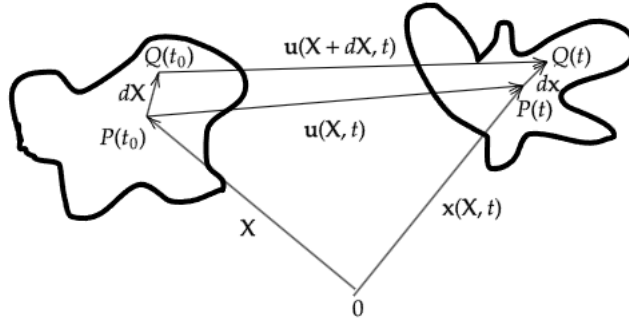


Figura 2: Deformación infinitesimal de un cuerpo

Una partícula  $Q$  cercana (hablando de manera diferencial) a  $P$  dada por  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  llega a una posición  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , que está relacionada con  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  (ver Figura 2) por

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (4)$$

Restando (3) de (4), obtenemos que

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (5)$$

Recordando que

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X},$$

obtenemos que

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{I}$  representa el tensor identidad, y  $\nabla \mathbf{u}$  es el tensor llamado *gradiente de desplazamiento*, cuya matriz asociada está dada por

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}.$$

Concluimos entonces que  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$  es llamado el *gradiente de deformación*. Para ver cómo varían las longitudes de los diferenciales  $d\mathbf{x}$  (que llamaremos  $ds$ ) y  $d\mathbf{X}$  (que llamaremos  $dS$ ), notamos que

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F})d\mathbf{X}, \quad (7)$$

esto es,  $ds^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  es llamado el *tensor de Cauchy-Green a la derecha*. Note que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}).$$

Así, podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\varepsilon^*,$$



donde

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T (\nabla u))$$

es llamado el *tensor de tensión de Lagrange*. Este tensor representa los cambios en la longitud de los diferenciales debidos al desplazamiento. Si consideramos que tanto el desplazamiento como sus derivadas parciales son pequeñas, luego el aporte de  $(\nabla u)^T (\nabla u)$  será despreciable y podemos aproximar

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{I} + 2\varepsilon, \quad (8)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) = \text{“parte simétrica de } \nabla u\text{”}$$

es llamado el *tensor de tensión infinitesimal*. Este tensor lo estaremos usando durante el resto del presente trabajo. Sus componentes serán dadas por

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}.$$

#### 2.2.4. Tensor de tensión infinitesimal

Considere el elemento diferencial de material  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario. Usando las ecuaciones (7) y (8), sabemos que

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (I + 2\varepsilon)d\mathbf{X} = dS^2(\mathbf{n} \cdot (I + 2\varepsilon)\mathbf{n}) = dS^2(1 + 2\mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n})$$

Por ende,

$$\frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} = \mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Para pequeñas deformaciones,  $ds^2 - dS^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx 2dS(ds - dS)$ . Por lo tanto,

$$\frac{ds - dS}{dS} \approx \mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Esto quiere decir que la elongación unitaria (i.e., aumento en la longitud por unidad original) en dirección  $\mathbf{n}$  es representada mediante  $\mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}$ . En particular tomando  $\mathbf{n} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , obtenemos que

- $\varepsilon_{11}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_1$ .
- $\varepsilon_{22}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_2$ .
- $\varepsilon_{33}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_3$ .

Estas componentes en la diagonal de  $\varepsilon$  son llamadas las tensiones normales de  $\varepsilon$ .

Ahora, considere dos elementos  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{n}$  y  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{m}$ , donde  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  son vectores unitarios perpendiculares entre ellos. Debido al desplazamiento,  $d\mathbf{X}^{(1)}$  pasa a ser  $d\mathbf{x}^{(1)}$ , con longitud  $ds_1$  y  $d\mathbf{X}^{(2)}$  pasa a ser  $d\mathbf{x}^{(2)}$ , con longitud  $ds_2$ . Denotemos el ángulo entre estos dos vectores por  $\theta$ . Entonces, se tiene que

$$ds_1 ds_2 \cos \theta = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} + 2d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \varepsilon d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + 2\mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n}) = 2dS_1 dS_2 \mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Así,

$$\mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n} = 2 \frac{ds_1}{dS_1} \frac{ds_2}{dS_2} \cos(\theta) \quad (9)$$

Si tomamos  $\gamma = \pi/2 - \theta$ , luego  $\gamma$  representa la disminución del ángulo entre  $d\mathbf{X}^{(1)}$  y  $d\mathbf{X}^{(2)}$  (conocida como *tensión de corte*) debido a la deformación. Dado que

$$\cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta) = \sin(\gamma),$$

para una pequeña deformación se tiene que

$$\sin(\gamma) \approx \gamma, \quad \frac{ds_1}{dS_1} \approx 1, \quad \frac{ds_2}{dS_2} \approx 1.$$

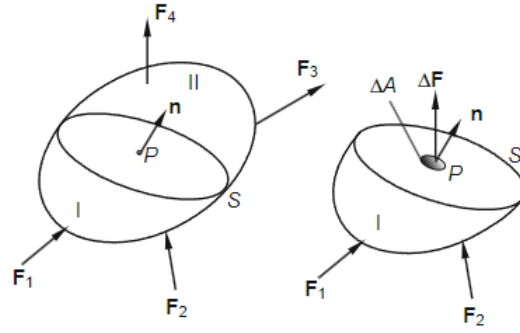


Figura 3: Vector de esfuerzo sobre un cuerpo arbitrario.  $S$  es un plano con vector normal  $\mathbf{n}$ , que divide al cuerpo en dos partes, denotadas por  $I$  y  $II$ . Imágen tomada de [W Michael et al., 2010].

Por ende, (9) pasa a ser

$$\mathbf{m} \cdot \varepsilon \mathbf{n} = 2\gamma.$$

Tomando  $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , concluimos que

- $2\varepsilon_{12}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_1$  y  $e_2$ .
- $2\varepsilon_{13}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_1$  y  $e_3$ .
- $2\varepsilon_{23}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_2$  y  $e_3$ .

Note que, al ser el tensor  $\varepsilon$  simétrico, él es diagonalizable con sus vectores propios ortogonales. Por ende, siempre existe una base ortonormal que permanece perpendicular después de cualquier deformación. Ver [W Michael et al., 2010].

### 2.2.5. Notación de Voigt para el tensor de tensión infinitesimal

Al ser el tensor  $\varepsilon$  simétrico, éste se puede representar mediante un vector de seis componentes independientes como

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}]^T.$$

## 2.3. Esfuerzo

Después de haber visto cómo describir el movimiento y deformación de un cuerpo, en esta sección veremos cómo se describen las fuerzas en un cuerpo idealizado como continuo.

### 2.3.1. Vector de esfuerzo

Considere un cuerpo como el que se visualiza en la Figura 3. Sea  $P$  un punto arbitrario del cuerpo, y  $S$  un plano con vector normal  $\mathbf{n}$  que divide al cuerpo en dos: la sección I y la sección II. Considerando la sección I como un cuerpo libre, habrá una fuerza resultante  $\Delta \mathbf{F}$  actuando sobre un pequeño trozo de área  $\Delta A$  contenida en  $S$  que encierra a  $P$ . Definimos el vector de esfuerzo en el punto  $P$  sobre el plano  $S$  (con vector normal  $\mathbf{n}$ ) como

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Nótese que, por la tercera ley de Newton, se debe cumplir que  $\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = -\mathbf{t}_{-\mathbf{n}}$ .

También podemos considerar el vector de esfuerzo definido sobre una superficie cualquiera  $S$  (no necesariamente un plano). Podemos tomar la fuerza  $\Delta \mathbf{F}$  que se ejerce sobre una porción  $\Delta S$  de la superficie que contiene a  $P$ , y definir el vector de esfuerzo en  $P$  sobre la superficie  $S$  como

$$\mathbf{t}_{\mathbf{S}} := \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}.$$

El *Principio de esfuerzo de Cauchy* enuncia que, para cualquier tiempo y espacio dados, el vector de esfuerzo es igual para todas las superficies que tengan el mismo plano tangente en  $P$  con la misma orientación. Ello implica que basta quedarnos con la primera definición.

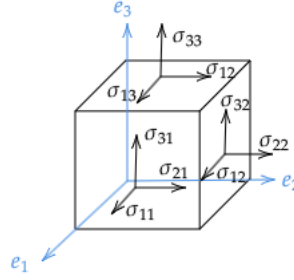


Figura 4: Descripción gráfica del tensor de esfuerzo sobre un cubo infinitesimal. Las coordenadas sobre cada cara del cubo infinitesimal son aquellas del vector de estrés definido para el vector normal correspondiente

### 2.3.2. Tensor de esfuerzo

Sea  $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación dada por

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \sigma \mathbf{n}$$

para todo vector normal  $\mathbf{n}$ , que se extiende a  $\mathbb{R}^3$  como  $\sigma \lambda \mathbf{n} = \lambda \sigma \mathbf{n}$ . En [W Michael et al., 2010] se demuestra que esta transformación es lineal, y por ende,  $\sigma$  es un tensor. A este tensor se le denomina el *tensor de esfuerzo* o *tensor de esfuerzo de Cauchy*. Las coordenadas de  $\sigma$  serán denotadas por

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} &= \sigma \mathbf{e}_1 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2} &= \sigma \mathbf{e}_2 = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3} &= \sigma \mathbf{e}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Una representación gráfica de tales valores está dada en la Figura 4. Nótese que la segunda componente del subíndice indica el plano sobre el cual se está tomando el vector de esfuerzo, mientras su primera componente indica la coordenada que se está tomando de tal vector. Las componentes de la forma  $\sigma_{ii}$  son llamadas esfuerzos normales, mientras que las componentes  $\sigma_{ij}$  con  $i \neq j$  son llamadas *esfuerzos tangenciales*, o *esfuerzos de corte*. El esfuerzo de corte resultante sobre el plano normal a  $\mathbf{e}_1$  se define como

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3,$$

y su magnitud es

$$|\boldsymbol{\tau}_1| = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2}.$$

Se definen de manera análoga las tensiones resultantes de corte y sus magnitudes para los planos definidos por  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

En [W Michael et al., 2010], se demuestra que  $\sigma$  es un tensor simétrico, tomando momentos de fuerza de alrededor de los ejes centrales del cubo mostrado en la Figura 4. Ello implica que  $\sigma$  es un tensor diagonalizable. Existe entonces una base ortonormal de autovectores de  $\sigma$ , para los que el esfuerzo ejercido sobre sus planos normales tiene únicamente componente normal. A tales planos se les denomina *planos principales*. Los valores de tales esfuerzos normales son llamados *esfuerzos principales*.

### 2.3.3. Notación de Voigt para el tensor de esfuerzo

Al ser el tensor  $\sigma$  simétrico, éste se puede representar mediante un vector de seis componentes independientes como

$$\hat{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T.$$

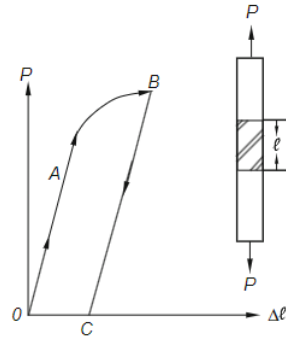


Figura 5: Gráfico común del cambio en la longitud de un cilindro de material  $\Delta\ell$  contra la presión ejercida axialmente  $P$ . Después de llegar al punto  $A$ , se producen deformaciones irreversibles en el material. Imágen tomada de [W Michael et al., 2010]

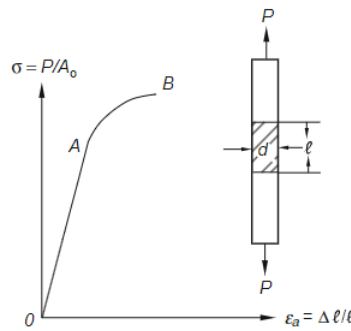


Figura 6: Variación del esfuerzo axial  $\sigma_a$  versus la tensión axial  $\varepsilon_a$  para un material. Imagen tomada de [W Michael et al., 2010].

## 2.4. Sólidos elásticos

Por experiencia, sabemos que la respuesta de un cuerpo a distintas cargas que se ejercen sobre él dependen del tipo de material del que esté constituido. Es más, a veces ésta depende de la intensidad de las fuerzas que se ejercen. Por ejemplo, si se aplican ciertas cargas moderadas sobre un sólido de acero, la deformación del cuerpo desaparecerá tan pronto se remuevan las cargas (el sólido se restaurará a su posición original). A este comportamiento se le conoce como *elasticidad*. No obstante, con cargas de mayor tamaño, puede que se presenten deformaciones o incluso fracturas irreversibles en el sólido. En la presente sección se introducirán los sólidos isotrópicos linealmente elásticos, que son aquellos con los que es más sencillo trabajar.

### 2.4.1. Propiedades mecánicas

Suponga que de un material se toma un cilindro delgado de área transversal  $A$  y longitud  $\ell$ , y que la barra se tensa por una carga aplicada axialmente  $P$  hacia afuera, produciendo un cambio en la longitud del cilindro  $\Delta\ell$ . Una gráfica común del comportamiento de  $\Delta\ell$  contra la carga aplicada  $P$  se muestra en la Figura 5.

En el segmento  $OA$ , la relación entre ambas es lineal, y una remoción de la carga revierte la deformación producida en el cilindro, i.e., el material exhibe *elasticidad*. No obstante, en  $AB$ , la relación deja de ser lineal, y la deformación deja de ser reversible, dejando una deformación  $OC$  después de la deformación de las cargas. Para el comportamiento elástico inicial sobre  $OA$ , podemos pensar en una constante que nos indique la pendiente de tal segmento. No obstante, con el fin de evitar dependencia sobre el tamaño del cilindro, se relacionan el esfuerzo axial  $\sigma = P/A_0$  (distinto al tensor de esfuerzo), donde  $A_0$  es el área transversal inicial, con la tensión axial  $\varepsilon_a = \Delta\ell/\ell$ , como se muestra en la Figura 6. En este caso, la pendiente del segmento  $OA$  será llamada el *Módulo de Young*  $M$  del material, definido por

$$M := \frac{\sigma}{\varepsilon_a}.$$

En el experimento que se acaba de mencionar, también se pueden los cambios laterales sobre el cilindro. Si inicialmente

el cilindro tiene un diámetro transversal  $d$ , para un material ideal la sección transversal permanecerá circular y más pequeña a mediada que aumenta la presión ejercida. Si llamamos  $\varepsilon_d$  a la tensión lateral (igual a  $\Delta d/d$ ), podemos encontrar que la razón  $\varepsilon_a/\varepsilon_d$  es constante si las tensiones son pequeñas. Llamamos a esta constante la *razón de Poisson*, y la denotaremos por  $\nu$ .

Hasta ahora, hemos realizado nuestro experimento tomando un cilindro arbitrario del material. Hay casos en los que tanto  $M$  como  $\nu$  varían dependiendo de la orientación de la muestra tomada respecto al material (como por ejemplo sucede con la madera). A estos materiales se les denomina *anisotrópicos*. Si, en cambio, la orientación de la muestra suficientemente pequeña alrededor de un punto no influye en el comportamiento del diagrama mostrado en la Figura 6, diremos que el material es *isotrópico*.

Otro aspecto que debemos considerar es que el comportamiento de estas estructuras puede variar según la vecindad que estemos tomando. En este caso, el material es llamado *inhomogéneo*. En caso de lo contrario, diremos que el material es homogéneo.

### 2.4.2. Materiales linealmente elásticos

Los experimentos formulados anteriormente nos permiten definir un material ideal, al que llamaremos un material *linealmente elástico*. Estos materiales serán aquellos que satisfacen la *Ley de Hooke*, la cual enuncia que las componentes de los tensores de tensión y de esfuerzo se relacionan de manera lineal para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  como

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 E_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

Por la proposición demostrada en el capítulo 2.1. del presente trabajo, podemos concluir que  $E_{ijkl}$  es un tensor de orden 4, el cual es conocido como el *tensor de rigidez*  $\mathbf{E}$ . Nótese que, si el material es homogéneo, las componentes de  $E_{ijkl}$  son independientes del punto donde se tomen.

Inicialmente, el tensor de rigidez tiene  $3^4 = 81$  componentes. No obstante, si asumimos que el material es isotrópico, veremos que podemos hallar sus componentes de manera muy sencilla. En efecto, que el material sea isotrópico implica que, independiente de la base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que se esté tomando, la relación entre la tensión y el esfuerzo no varía. Es decir, si  $E_{ijkl}$  son las componentes del tensor de rigidez respecto a cualquier base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , y  $E'_{ijkl}$  sus componentes respecto a cualquier otra base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  entonces se debe cumplir que

$$E_{ijkl} = E'_{ijkl}.$$

A este tipo de tensores se les denomina tensores *isotrópicos*. Por ejemplo, un tensor isotrópico de orden 2 es la identidad  $\mathbf{I}$ , con componentes  $\delta_{ij}$  (de hecho, es el único, salvo multiplicación por escalar). Es más, se puede demostrar (ver [W Michael et al., 2010]) que  $E_{ijkl}$  debe ser combinación lineal de los tensores  $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $\delta_{ik}\delta_{jl}$  y  $\delta_{il}\delta_{jk}$ , que son aquellos que se pueden formar como productos del tensor identidad. Es decir, existen constantes  $\alpha, \beta, \lambda$  tal que

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Reemplazando en la ecuación (10), obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) + (\alpha + \beta) \varepsilon_{ij}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deriva de la simetría de  $\varepsilon$ . Si llamamos  $2\mu := \alpha + \beta$ , entonces concluimos que

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (11)$$

A  $\lambda$  y a  $\mu$  se les conoce como constantes de Lamé, que tienen unidades iguales al tensor de esfuerzo de fuerza por unidad

de área. Juntando las ecuaciones (10) y (11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\
\sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\
\sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}.
\end{aligned}$$

Nótese que, a partir de las anteriores ecuaciones, podemos hallar las componentes de  $\varepsilon$  a partir de las de  $\sigma$  como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right) \right] =: \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (12)$$

donde

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right].$$

Las componentes  $C_{ijkl}$  constituyen un tensor  $\mathbf{C}$  de orden 4, al que denominaremos *tensor de compliancia*, también llamado *tensor de distensibilidad*.

Si el estado de esfuerzo es tal que solo una componente normal del mismo es no nula, diremos que se está sobre un estado de *esfuerzo uniaxial*. Resulta una buena aproximación asumir que, en el experimento descrito en la sección anterior sobre un cilindro, se está bajo este estado. Si asumimos que tal componente no nula está en la dirección  $e_1$ , entonces se cumple que  $\sigma_{ij} = 0$  para  $i \neq 1$  o  $j \neq 1$ , y  $\sigma_{11} \neq 0$ . Usando la ecuación (12), obtenemos que,

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu} \left[ 0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right] = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (14)$$

y

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

El cociente  $\sigma_{11}/\varepsilon_{11}$  es análogo al cociente  $\sigma/\varepsilon_a$  presentado en la sección anterior. Por ende, teniendo en cuenta la ecuación 13,

$$M = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Por otra parte, el cociente  $-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{33}/\varepsilon_{11}$  corresponde al cociente  $\varepsilon_d/\varepsilon_a$  descrito en la anterior sección, y así

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Invirtiendo las relaciones anteriormente encontradas, encontramos que

$$\lambda = \frac{vM}{(1+v)(1-2v)}, \quad \mu = \frac{M}{2(1+v)}. \quad (15)$$

Las ecuaciones 11 y 15 explican que se puede describir la relación entre la tensión y el esfuerzo ejercidos sobre un material linealmente elástico e isotrópico a partir de dos constantes independientes. Aunque se pueden definir más constantes físicas para estos materiales, bastará con contar con dos de ellas para describir la mecánica del material (Ver [W Michael et al., 2010]).

#### 2.4.3. Notación de Voigt para el tensor de rigidez

Al representar  $\sigma$  y  $\varepsilon$  como vectores, el tensor de rigidez se puede representar como una matriz  $\hat{\mathbf{E}}$ , que cumple

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{E}} \hat{\varepsilon},$$

$ij( \text{ o } kl)$	$I( \text{ o } J)$
11	1
22	2
33	3
23,32	4
13,31	5
12,21	6

Cuadro 1: Tabla de correspondencia entre las componentes del tensor de rigidez  $\mathbf{E}$  y la matriz  $\hat{\mathbf{E}}$  para sólidos.

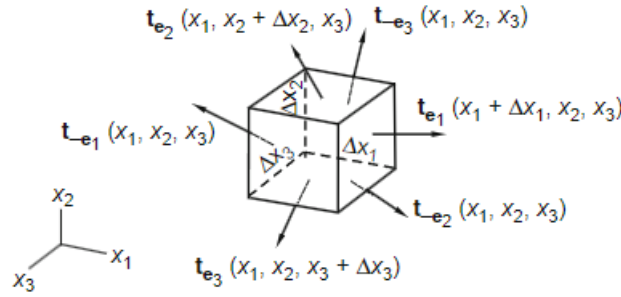


Figura 7: Cubo infinitesimal de material del que se deriva las ecuaciones dinámicas de equilibrio. Imagen tomada de [W Michael et al., 2010]

cuyas componentes vienen dadas por  $E_{IJ}$  definidas por la correspondencia definida en el Cuadro 1. Por ejemplo, bajo esta correspondencia, la componente  $E_{2312}$  de  $\mathbf{E}$  pasa a ser la componente  $E_{46}$  de  $\hat{\mathbf{E}}$ , ya que la pareja 23 está asociada a 4, y la pareja 12, a 6. Para materiales linealmente elásticos e isotrópicos,

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} \end{pmatrix},$$

donde  $E_{33} = 2\mu + \lambda$  y  $E_{12} = \lambda$ . De manera similar, y con la misma correspondencia del Cuadro 1, se puede representar el tensor de compliancia como una matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  que satisface

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Para materiales isotrópicos linealmente elásticos,

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{pmatrix},$$

donde  $C_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$  y  $C_{12} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$ .

## 2.5. Ecuaciones de equilibrio dinámicas

Considere un paralelepípedo de tamaño infinitesimal alrededor de un punto  $x_i$ , como el considerado en la Figura 23. Sean  $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \mathbf{e}_i$  las fuerzas que actúan sobre el cuerpo por unidad de masa,  $\rho$  la densidad del cuerpo en  $x_i$ , y  $\mathbf{a}$  la aceleración de la partícula que está en la posición  $x_i$ . Gracias a la segunda Ley de Newton, debe existir el equilibrio de fuerzas, i.e.,

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_2 \Delta x_3) + \{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_3) \\ & + \{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_2) + \rho \mathbf{B} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = (\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dado que  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = -\mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}$ ,

$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right] \Delta x_1.$$

Realizando un proceso análogo al anterior para  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}$  y  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}$ , y cancelando el elemento de volumen  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ , concluimos que la ecuación (23) pasa a ser

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right] + \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \right] \\ & + \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \right] + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (17)$$

Tomando  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , (17) pasa a ser

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}}{\partial x_3} + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a}. \quad (18)$$

Dado que  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} = \sigma e_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} e_j$  para  $i = 1, 2, 3$ , entonces, en cada dirección  $e_i$  se debe cumplir que

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} e_i + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} e_i + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} e_i + \rho \mathbf{B} e_i = \rho \mathbf{a} e_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

o, de otra forma,

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho B_i = \rho a_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19)$$

A partir de ahora, escribiremos  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{B}$  como la fuerza externa *distribuida* alrededor del cuerpo. En este caso, se escribe

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + f_i = \rho a_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Otra forma de escribir (20) es en su *forma invariante* como

$$\text{div } \sigma + \mathbf{f} = \rho \mathbf{a}, \quad (21)$$

donde  $\text{div } \sigma$  se refiere a la divergencia de un campo tensorial (ver [W Michael et al., 2010]). A estas ecuaciones se les denomina las *ecuaciones de movimiento de Cauchy*. En el presente trabajo, únicamente nos interesará el caso en el que el movimiento sea pequeño, es decir,  $x_i \approx X_i$ . Una de las consecuencias inmediatas de este hecho es que se puede tomar

$$\rho \mathbf{a} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}},$$

donde  $\rho_0$  es una constante (Ver [W Michael et al., 2010]). Nótese que, si el sólido se asume estático, el término de la aceleración se elimina, y por ende,

$$\text{div } \sigma = -\mathbf{f}. \quad (22)$$

**Ejemplo.** Para un sólido linealmente elástico e isotrópico, si asumimos, como ya se mencionó, que el movimiento es pequeño ( $X_i \approx x_i$ ), entonces podemos aproximar  $\varepsilon_{ij}$  como

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

y también, al ser linealmente elástico,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$



De esta manera,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right).$$

Por ende, una ecuación que debe satisfacer un cuerpo de este estilo debe ser

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

De manera similar, se debe cumplir que

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

y que

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

donde el laplaciano se toma de manera espacial. △

### 2.5.1. Forma débil de las ecuaciones de equilibrio elásticas (caso estático)

Algunas veces, es necesario trabajar con lo que regularmente se denomina la *forma débil* o *variacional* de las ecuaciones diferenciales presentadas anteriormente. A manera de introducción, considere el siguiente ejemplo, tomado de [Girotti, 2009].

**Ejemplo.** Dada una función  $f \in C^0([a, b])$ , encuentre una función  $u \in [a, b]$  que satisfaga

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Una *solución clásica* de este problema (también llamada *solución fuerte*) es una función  $u \in C^2([a, b])$  que se anula en los extremos y satisface  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ . Ahora bien, si multiplicamos la anterior ecuación diferencial por una función arbitraria  $\phi \in C([a, b])$  con  $\phi(a) = \phi(b) = 0$  e integramos sobre el intervalo  $[a, b]$ ,

$$-\int_a^b u''(x)\phi(x)dx + \int_a^b u(x)\phi(x)dx = \int_a^b f(x)\phi(x)dx.$$

Integrando por partes el primer término a la derecha de la igualdad, obtenemos (recuerde que tanto  $u$  como  $\phi$  se anulan en los extremos)

$$\int_a^b u'(x)\phi'(x) + \int_a^b u(x)\phi(x)dx = \int_a^b f(x)\phi(x)dx, \text{ para toda } \phi \in C^1([a, b]), \phi(a) = \phi(b) = 0.$$

Note que, para que  $u$  satisfaga a anterior ecuación, basta con que  $u \in C^1([a, b])$ . Es decir, se han relajado las condiciones sobre  $u$ . Diremos que una función  $u$  con  $u(a) = u(b) = 0$  es una *solución débil* del problema anterior si satisface la anterior ecuación. Es más, bastará con que  $u, u' \in L^1(a, b)$  para que  $u$  sea una solución débil de la ecuación anterior. No obstante, para lograr esto, tendríamos que extender los conceptos de derivada y evaluación en un conjunto de medida cero (puntos extremos) para una función en  $L^1(a, b)$ .

Introducir soluciones débiles de ecuaciones es una estrategia que se inspira en el lema fundamental del cálculo de variaciones, que presentamos a continuación.

**Lema.** Si  $\beta(x)$  es una función continua sobre un dominio cerrado  $\Omega$ , la integral

$$\int_{\Omega} \beta(x)v(x)dV$$

se anula para cualquier función  $v \in C^2(\Omega)$  y  $\beta$  se anula sobre el borde  $\partial\Omega$ , luego  $\beta(x) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ . La función  $v$  es llamada función de prueba, y generalmente se toma de manera que se anula en el borde de  $\Omega$ .

Como se enunció en el ejemplo anterior, la aparición de soluciones débiles requiere extender la definición de derivada y de extensión continua a los extremos de una función  $p$ -integrable. Esto motiva la definición de los *espacios de Sobolev*

$W^{k,p}(\Omega)$ , sobre los que se extienden estos conceptos. Un tipo específico de espacios de Sobolev son  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ , que son espacios de Hilbert. Sobre este tema no se profundizará, y el lector interesado puede consultar [Girotti, 2009] o [Gockenbach, 2006] para introducirse en el tema.

**Ejemplo.** Vimos que los sólidos linealmente elásticos y estáticos son gobernados por las ecuaciones

$$-\nabla \cdot \sigma_u = \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon_u, \quad (24)$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (25)$$

Suponga que tenemos un sólido de este estilo definido sobre un dominio  $\Omega$ , sobre el cuál actúan fuerzas globales  $f_V$ . Para resolver este tipo de problemas, generalmente se toman condiciones iniciales sobre la frontera de  $\Omega$ ; estas pueden ser condiciones de Dirichlet o de Neumann. Tomaremos estas condiciones de manera general como arbitrarias. Es decir, tomaremos una partición  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde

$$u(x) = g(x), \text{ para } x \in \Gamma_1$$

y

$$\sigma_u \cdot \eta = h(x) \text{ para } x \in \Gamma_2.$$

A  $h$  se le suele denominar la *tracción* sobre la superficie del cuerpo. Definimos ahora

$$U := \{v \in (H^1(\Omega))^2 : v = 0 \text{ en } \Gamma_1\}, \text{ con } (H^1(\Omega))^2 := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : v_1, v_2 \in H^1(\Omega)\}.$$

Si se realiza el producto punto de ambos costados de la igualdad (23) con  $v \in U$  arbitraria e integramos sobre  $\Omega$ , obtenemos que

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} f_V \cdot v \, dV \quad (26)$$

Analizaremos la integral de la izquierda. Para ello, primero notamos que

$$\nabla \cdot (\sigma_u v) = (\nabla \cdot \sigma_u^T) \cdot v + \sigma_u \cdot \nabla v^T. \quad (27)$$

En efecto, si

$$\sigma_u = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma_u v) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2 + \sigma_{13}v_3 \\ \sigma_{21}v_1 + \sigma_{22}v_2 + \sigma_{23}v_3 \\ \sigma_{31}v_1 + \sigma_{32}v_2 + \sigma_{33}v_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} \right) v_i + \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \cdot \sigma_u^T) \cdot v + \sigma_u \cdot \nabla v^T. \end{aligned}$$

Como  $\sigma_u$  es un tensor simétrico, entonces

$$\nabla \cdot \sigma_u^T = \nabla \cdot \sigma_u$$

y

$$\sigma_u \cdot \nabla v^T = \sigma_u^T \cdot \nabla v = \sigma_u \cdot \nabla v = \sigma_u \cdot \varepsilon_v$$

donde

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T).$$

Por lo tanto,

$$\nabla \cdot \sigma_u v = (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v + \sigma_u \cdot \varepsilon_v. \quad (28)$$

Integrando esta ecuación sobre  $\Omega$  y usando el Teorema de Green para la integral de la izquierda, se obtiene que

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma_u v) \cdot \eta \, dS = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV + \int_{\Omega} \sigma_u \cdot \varepsilon_v \, dV.$$

Por lo tanto, recordando que  $\sigma_u = \mathbf{E}\varepsilon_u$ ,

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV - \int_{\partial\Omega} (\sigma_u v) \cdot \eta \, dS. \quad (29)$$

Nótese que al tenerse  $v = 0$  sobre  $\Gamma_1$ , la última integral de la derecha se puede realizar únicamente sobre  $\Gamma_2$ . Adicionalmente, al ser  $\sigma_u$  simétrico,

$$(\sigma_u v) \cdot \eta = (\sigma_u \eta) \cdot v = h \cdot v, \text{ sobre } \Gamma_2.$$

Entonces, la ecuación (29) pasa a ser

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV - \int_{\Gamma_2} h \cdot v \, dS. \quad (30)$$

Por lo tanto, juntando (30) con (26), concluimos que

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV = \int_{\Omega} f_V \cdot v \, dV + \int_{\Gamma_2} h \cdot v \, dS, \text{ para todo } v \in U. \quad (31)$$

A esta se le denomina la *forma débil* o *forma variacional* de la ecuación de equilibrio para sólidos linealmente elásticos. Al término de la izquierda se le asocia con el trabajo  $l(u)$  ejercido por las fuerzas externas para un desplazamiento  $v$ . Si se define la forma bilineal

$$a_E(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV \quad (32)$$

y el trabajo ejercido por las fuerzas externas como una forma lineal

$$l(u) = \int_{\Omega} f_V \, dV \cdot u + \int_{\Gamma_2} h \cdot u \, dS, \quad (33)$$

entonces (31) toma la forma

$$a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in V.$$

## 2.6. Algunas consideraciones para el caso bidimensional

La mecánica continua suele ser estudiada en el caso 3-dimensional (3D), pero puede ser simplificada drásticamente si los problemas son tratados de manera 2-dimensional (2D). Para ello, es necesario asumir que las fuerzas externas y demás variables son independientes de una dirección (usualmente en dirección  $e_3$ ). Hay dos tipos de sólidos que se pueden representar de esta manera: los sólidos de esfuerzo plano, y los sólidos de tensión plana (*plane stress* y *plane strain* en inglés).

Los sólidos de esfuerzo plano son aquellos cuyo grosor en la dirección  $e_3$  es mucho menor que sus dimensiones en las direcciones  $e_1$  e  $e_2$ ; las fuerzas son aplicadas en el plano formado por  $e_1$  y  $e_2$ . Por ende, los esfuerzos en dirección  $e_3$  ( $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  y  $\sigma_{33}$ ) son todos nulos. En cambio, los sólidos de tensión plana son aquellos cuyo grosor en la dirección  $e_3$  es mucho mayor comparado con las direcciones  $e_1$  e  $e_2$  y tienen sección transversal uniforme; las fuerzas son aplicadas de manera uniforme respecto al eje en dirección  $e_3$  y el movimiento respecto a este eje está restringido. En este caso, las componentes de tensión  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  y  $\varepsilon_{33}$  son todas nulas. Una ilustración de ambos tipos de sólidos se puede encontrar en la Figura 8. Para los sólidos de esfuerzo plano, tanto  $\varepsilon_{13}$  como  $\varepsilon_{23}$  son cero; sin embargo,  $\varepsilon_{33}$  no es necesariamente nulo. De manera análoga, para los sólidos de tensión plana, tanto  $\sigma_{13}$  como  $\sigma_{23}$  son nulos, pero  $\sigma_{33}$  no necesariamente lo es. Para el caso linealmente elástico, es sencillo encontrar cada una de estas componentes a partir de las otras con la ecuaciones (10) y (12) (Ver [G.R. and S. S., 2013]).

Debido a lo anteriormente expuesto, podemos representar para este caso bidimensional la tensión y el esfuerzo como tensores simétricos

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

donde cada una de estas componentes se definen de manera análoga a como se expuso anteriormente. En notación de Voigt,

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T \text{ y } \hat{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T.$$

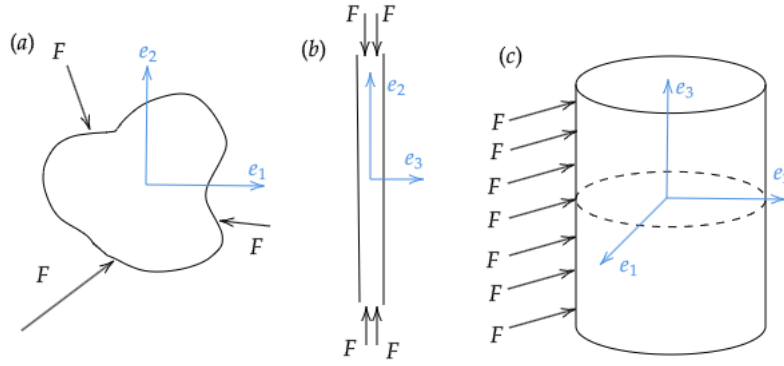


Figura 8: Las figuras (a) y (b) representan un sólido tensión plana proyectado de manera perpendicular a los ejes  $e_3$  y  $e_1$ , respectivamente. La figura (c) muestra un sólido de esfuerzo plano.

$ij$ ( o $kl$ )	$I$ ( o $J$ )
11	1
22	2
12,21	3

Cuadro 2: Tabla de correspondencia entre las componentes del tensor de rigidez  $\mathbf{E}$  y la matriz  $\hat{\mathbf{E}}$  para el caso bidimensional.

### 2.6.1. Ley de Hooke para el caso bidimensional

Para el caso bidimensional, la Ley de Hooke para sólidos linealmente elásticos se escribe

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (34)$$

donde  $\mathbf{E} = [E_{ij}]$  es un tensor de rigidez de orden 4. De manera similar, existe un tensor  $\mathbf{C} = [C_{ijkl}]$  de orden 4 (tensor de compliancia) de manera que

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 C_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (35)$$

Estos tensores se escriben en notación de Voigt como matrices  $\hat{\mathbf{E}}$  y  $\hat{\mathbf{C}}$  de orden 3, con sus índices en correspondencia según el Cuadro 2. Para los sólidos de esfuerzo plano,

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{M}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v)/2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Para los sólidos de tensión plana,

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{M(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Recuerde que  $M$  y  $v$  representan, respectivamente, el módulo de Young y la razón de Poisson del material.

### 2.6.2. Ecuaciones de equilibrio dinámicas para el caso bidimensional

Las ecuaciones dinámicas para el caso bidimensional se obtienen de eliminar los términos respectivos a  $e_3$  de la ecuación (20), obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 &= \rho a_1, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 &= \rho a_2. \end{aligned}$$

Otra forma de representar estas ecuaciones es como

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Para el caso estático,

$$\operatorname{div} \sigma = -\mathbf{f}.$$

La formulación débil de las ecuaciones realizada en la anterior sección se puede extender a cuando trabajamos con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

### 3. Método de los Elementos Finitos

En esta sección trataremos el método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés). Primero daremos una descripción general del método, y después nos detendremos en algunos detalles del paso a paso del método que nos permiten estudiar nuestro caso de optimización. Esta sección se basó principalmente en [G.R. and S. S., 2013], tomando incluso en algunas ocasiones partes textuales.

#### 3.1. El método

El método de los elementos finitos lo usamos para resolver problemas mecánicos gobernados por un conjunto de ecuaciones diferenciales, discretizando primero el dominio del problema en “elementos” pequeños, de los cuales se asume un perfil de desplazamiento sencillo obteniendo así ecuaciones de los elementos. Estas ecuaciones posteriormente se ensamblan para elementos adyacentes para formar el dominio del problema global. Estas ecuaciones globales pueden luego solucionarse para el campo de desplazamiento total.

Cuando hablamos de implementar computacionalmente el procedimiento descrito, podemos pensarlo segmentado en estas etapas:

##### 3.1.1. Modelamiento

El comportamiento de distintos fenómenos depende de factores como la geometría del sistema, u otros aspectos como los materiales o condiciones iniciales. Estas condiciones suelen ser complicadas de estudiar, por lo que resolver problemas de manera analítica puede ser complejo. Por lo cual, el uso de métodos numéricos como aquellos de discretización de dominios (FEM por ejemplo) son de los más comunes por ser prácticos y versátiles. El modelado computacional usando FEM, consiste, a grandes rasgos, de 4 pasos:

- Modelado de la geometría.
- Enmallado (discretización).
- Especificación de las propiedades del material.
- Especificación de condiciones de frontera o iniciales.

##### 3.1.2. Simulación

Basados en el enmallado generado, distintos conjuntos de ecuaciones del sistema pueden ser formulados, y para estos distintos conjuntos de ecuaciones pueden haber distintos enfoques. Algunos de estos son

- Enfoques basados en principios de energía como el principio de Hamilton, el principio de la energía potencial mínima, entre otras,
- el método del residuos ponderados, el cual se usa para muchos problemas físicos como problemas de transferencia de calor,
- otro método está basado en Series de Taylor, lo que lleva a la formación del método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés),

entre otros métodos. Cabe mencionar que la base de estos métodos es el método de los residuos. La escogencia apropiada de funciones de ensayo y error en el método de los residuos puede llevar a trabajar bajo alguno u otro de los enfoques anteriores.

Una vez formulado el modelo computacional, este se debe de dar como *input* a algún *solver* para resolver el problema discretizado. Este es el proceso más demandante computacionalmente. Para resolverlos se usan principalmente dos métodos: los métodos directos y los métodos iterativos. No obstante, los métodos iterativos son más comunes dado que el método directo es en general más costoso computacionalmente, mientras que los métodos iterativos se pueden implementar con métodos numéricos probados y eficientes.

##### 3.1.3. Visualización

Los datos obtenidos de la solución del sistema de ecuaciones usualmente son una gran cantidad y pueden ser usados para distintas visualizaciones. Esto se hace con paquetes de software que vienen usualmente integrados con las demás herramientas de modelado y solución.

### 3.2. Fundamentos de FEM

Anteriormente vimos la descripción a grandes rasgos del FEM. Este proceso aunque en principio puede sonar sencillo, surge la duda de cómo, o si se puede si quiera, asumir dicho perfil de desplazamiento sencillo, y si este satisface las ecuaciones del problema original. En el estudio que veremos a continuación, observaremos que esto se puede hacer siguiendo un principio y obtener una solución que satisface el sistema lo mejor posible bajo ciertas condiciones.

#### 3.2.1. Formas débiles y fuertes

Com se introdujo en la anterior sección, un sistema de ecuaciones diferenciales puede estar en forma fuerte o débil. La diferencia entre estas dos es que la forma fuerte requiere continuidad fuerte en las variables del campo dependientes. Todas las funciones que definan estas variables deben de ser diferenciables hasta el orden en de la ecuación diferencial que exista en forma fuerte en el sistema de ecuaciones. El FEM puede ser usado para resolver ecuaciones en forma fuerte para obtener soluciones aproximadas. Sin embargo, el método usualmente funciona bien para problemas con condiciones de frontera o geometrías sencillas.

Una forma débil del sistema de ecuaciones usualmente se obtiene usando alguno de estos métodos:

- Principios de energía
- método de los residuos ponderados.

Los principios de energía es una forma del principio variacional que usualmente se ajusta a problemas de mecánica de sólidos y estructuras. El método de los residuos ponderados es una herramienta matemática más general aplicable a todo tipo de ecuaciones diferenciales. La forma débil usualmente es una forma integral la cual requiere continuidad débil en las variables del campo, lo cual permite producir un sistema de ecuaciones discretizadas que dan resultados mucho más precisos, especialmente para problemas de geometría compleja. A continuación presentamos el Principio de Hamilton, el cual se introduce para la formulación de problemas de mecánica de sólidos y estructuras. Este es simple y se puede usar para problemas dinámicos.

#### 3.2.2. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que *de todas las funciones admisibles de desplazamiento en el tiempo, la solución más acertada minimiza el funcional del Lagrangiano*. Un desplazamiento admisible debe satisfacer:

- las ecuaciones de compatibilidad,
- las condiciones cinemáticas de frontera, y
- las condiciones en el tiempo  $t_1$  y  $t_2$ .

La primera condición garantiza que los desplazamientos son continuos en el dominio del problema, ya que puede haber incompatibilidad en los bordes entre elementos. La segunda condición garantiza que las restricciones de desplazamiento se satisfagan, y la última condición pide que la historia de desplazamiento satisfaga las restricciones al principio y al final. Matemáticamente, el principio establece que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (38)$$

El funcional del Lagrangiano  $L$  se obtiene usando un conjunto de historias de tiempo de desplazamiento admisibles, el cual consiste de

$$L = T - \Pi + W_f, \quad (39)$$

donde  $T$  es la energía cinética,  $\Pi$  es la energía potencial, y  $W_f$  es el trabajo realizado por fuerzas externas. La energía cinética del dominio entero del problema se define en la forma integral

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV, \quad (40)$$

donde  $V$  representa el volumen completo del sólido, y  $\mathbf{U}$  es el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento. La energía de deformación en todo el dominio de sólidos elásticos y estructuras pueden ser expresadas como

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \mathbf{E} \varepsilon dV, \quad (41)$$

donde  $\varepsilon$  son las deformaciones obtenidas usando el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento. El trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento puede obtenerse por

$$W_f = \int_V U^T f_b dV + \int_{S_f} U^T f_s dS_f, \quad (42)$$

donde  $S_f$  representa la superficie del sólido sobre el cual las fuerzas superficiales son prescritas. El principio de Hamilton nos permite simplemente asumir cualquier conjunto de desplazamientos, siempre que satisfagan las tres condiciones admisibles. A continuación vemos cómo las ecuaciones del FEM pueden ser establecidas usando el principio de Hamilton y otras operaciones simples.

### 3.2.3. Procedimiento del FEM

El procedimiento estándar se puede resumir brevemente de la siguiente manera:

#### Discretización de dominio

El cuerpo sólido se divide en  $N_e$  elementos, y esto se conoce como engrillado (meshing en inglés), como se observa en la figura 9. El pre-procesador genera números únicos para todos los elementos y nodos para el sólido o la estructura de manera adecuada. Un elemento se conforma al conectar sus nodos en una manera consistente predefinida para crear la conectividad del elemento. Todos los elementos juntos forman el dominio del problema sin tener espacios o sobreposiciones. Es posible que el dominio consista de diferentes tipos de elementos con distintos tipos de nodos siempre que no haya espacios o sobreposiciones.

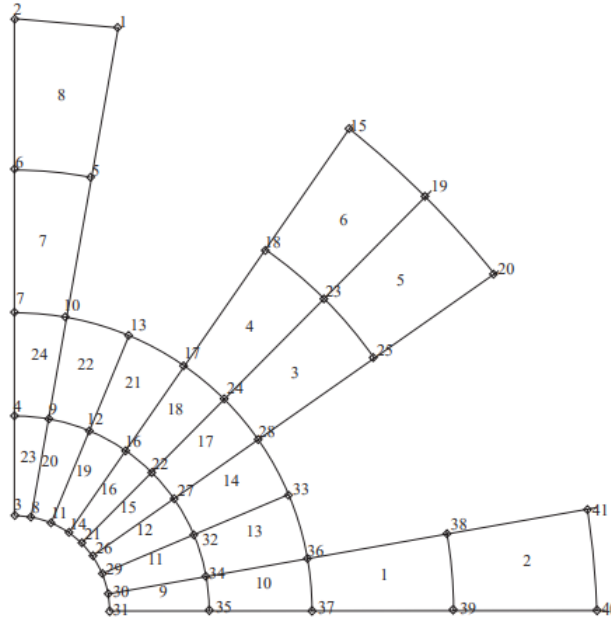


Figura 9: Ejemplo de enmallado de una estructura

Tenemos entonces que el enmallado usualmente no es uniforme. El propósito de la discretización del dominio es hacer más fácil la tarea de asumir el patrón del campo de desplazamiento.

#### Interpolación del desplazamiento

La formulación del FEM debe basarse en un sistema de coordenadas, el cual usualmente se define localmente para un elemento en referencia al sistema de coordenadas global que se define para la estructura entera. Basándonos en esto, el desplazamiento en un elemento se asume por interpolación polinómica usando los desplazamientos en los nodos como

$$U^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x, y, z) d_i = N(x, y, z) d_e, \quad (43)$$



donde el superíndice  $h$  es la aproximación,  $n_d$  es el número de nodos del elemento y  $d_i$  es el desplazamiento nodal en el nodo  $i$ -ésimo, el cual es la incógnita que se quiere computar. Por ejemplo, para sólidos en 3D, donde tenemos 3 grados de libertad, tenemos que  $d_i = (u_i, v_i, w_i)$ , en donde las componentes representan respectivamente el desplazamiento en las direcciones  $x, y$  y  $z$ . Tenga en cuenta que estos desplazamientos también pueden consistir de rotaciones en algunos tipos de estructuras. El vector  $d_e$  en la ecuación 43 es el vector de desplazamiento para el elemento completo y tiene la forma  $d_e = (d_1, d_2, \dots, d_{n_d})$ , donde cada  $d_i$  representa el desplazamiento en el nodo  $i$ , de tal manera que la cantidad total de grados de libertad son  $n_d \times n_f$ , donde  $n_f$  son la cantidad de grados de libertad en el nodo (número de coordenadas + rotaciones).

Además, en la ecuación (43),  $N$  es una matriz de funciones de forma para los nodos en el elemento, las cuales son predefinidas de tal manera que asuman las formas de las variaciones en los desplazamientos con respecto a las coordenadas. Tiene la forma general

$$N(x, y, z) = [N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \dots \quad N_{n_d}(x, y, z)],$$

donde  $N_i$  es una submatriz de funciones de forma para las componentes de desplazamiento, la cual estructura así:

$$\begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{in_f} \end{bmatrix},$$

donde  $N_{ik}$  es la función de forma del  $k$ -ésimo componente de desplazamiento en el  $i$ -ésimo nodo. Para sólidos 3D,  $n_f = 3$  y usualmente  $N_{i1} = N_{i2} = N_{i3} = N_i$ . Note que no es necesario usar la misma función de forma para todos los componentes de desplazamiento en un nodo. Por ejemplo, usualmente usamos diferentes funciones de forma para desplazamientos rotacionales y traslacionales. Este método de asumir los desplazamientos se llama el método del desplazamiento.

### Construcción de las funciones de forma

Dado un elemento con  $n_d$  nodos en  $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n_d\}$ . Deberíamos tener en principio  $n_d$  funciones de forma para cada componente de desplazamiento en un elemento. A continuación consideramos tan solo una componente de desplazamiento para la construcción de funciones de forma: en primer lugar, la componente de desplazamiento se aproxima como una combinación lineal de  $n_d$  funciones base  $p_i(x)$  linealmente independientes, esto es

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_d} p_i(x) \alpha_i = p^T(x) \alpha \quad (44)$$

en donde  $u^h$  es la aproximación de la componente del desplazamiento,  $p_i(x)$  es la función base de monomios en el espacio de coordenadas  $x$ , y  $\alpha_i$  es el coeficiente de monomio  $p_i(x)$ . El vector  $\alpha$  es definido como

$$\alpha^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_d}\}.$$

El término  $p_i(x)$  en ecuación 44 se construye con  $n_d$  términos de monomios 1-dimensionales; basado en el triángulo de Pascal como en la figura 10 para problemas bidimensionales, y en la pirámide de Pascal como en la figura 11 para problemas tridimensionales.

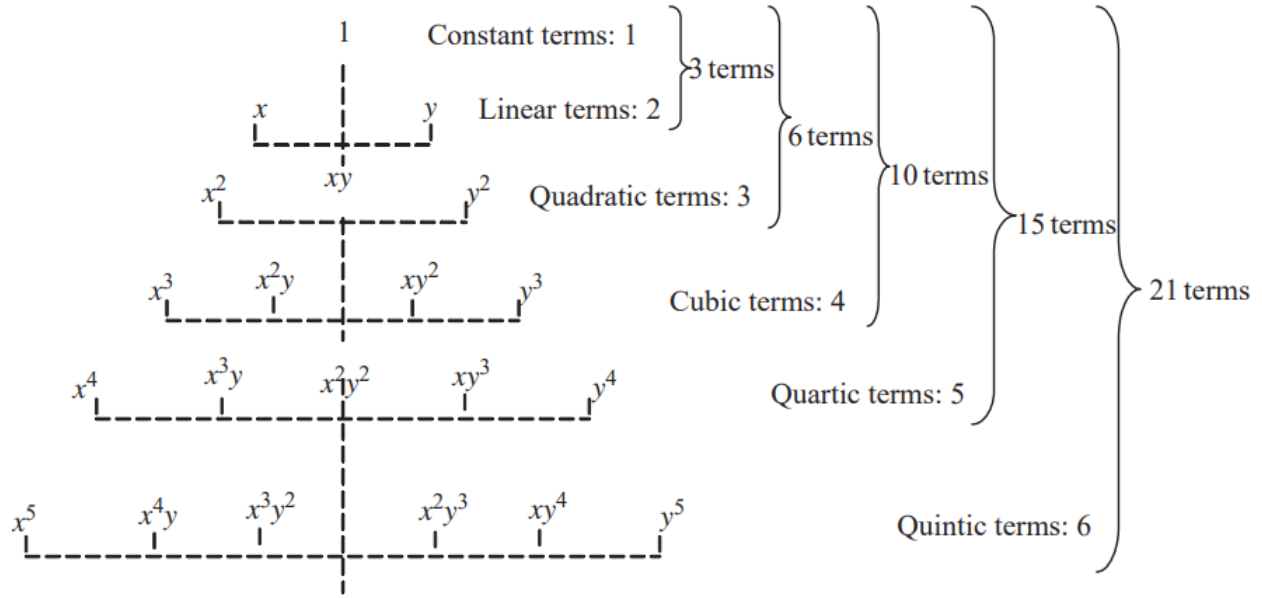


Figura 10: Triángulo de Pascal para monomios (caso bidimensional).

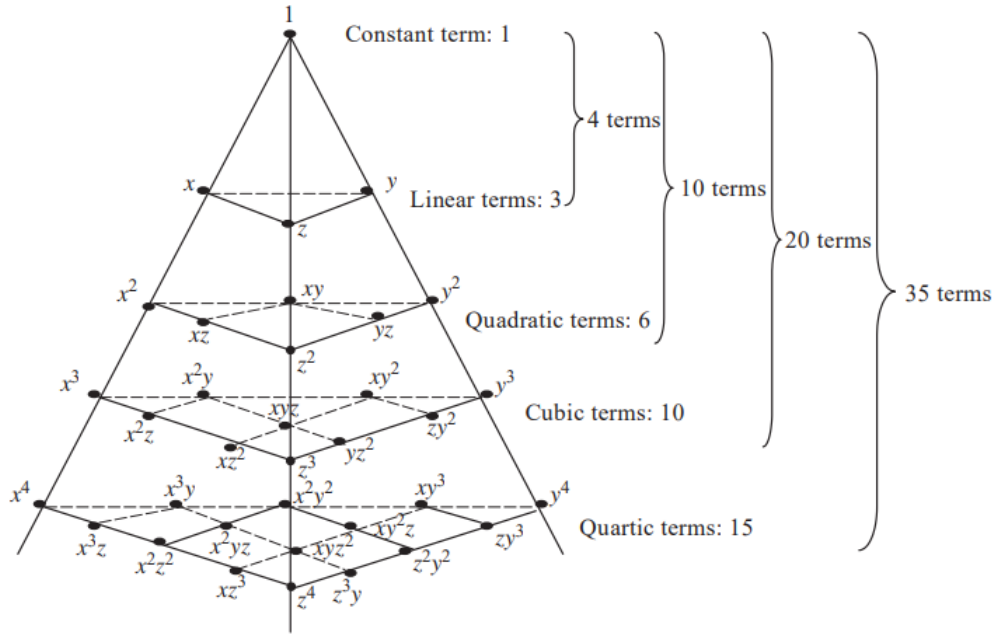


Figura 11: Pirámide de Pascal para monomios (caso tridimensional).

Una base de orden completo de  $p$  en el dominio 1-dimensional tiene la forma

$$p^T(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^p\},$$

en el caso bidimensional tiene la forma

$$p^T(x) = p^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^p, y^p\}$$

y que en el caso del dominio tridimensional puede ser escrito como

$$p^T(x) = p^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^p, y^p, z^p\}.$$

Como regla general, los  $n_d$  términos de  $p_i(x)$  usados en la base deberían ser seleccionados desde el término constante hasta ordenes más altos simétricamente del triángulo de Pascal mostrado en las figuras 11 o 10. Los coeficientes  $\alpha$  en la ecuación (44) pueden ser calculados forzando a que los desplazamientos calculados con la misma ecuación sean los desplazamientos nodales en los nodos  $n_d$  del elemento. En el nodo  $i$  tenemos

$$d_i = p^T(x_i)\alpha \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_d \quad (45)$$

donde  $d_i$  es el valor nodal de  $u^h$  en  $x = x_i$ . La ecuación anterior puede escribirse de la manera matricial

$$d_e = P\alpha \quad (46)$$

donde  $d_e$  es el vector que incluye los valores de las componentes del desplazamiento en todos los nodos  $n_d$  en el elemento:

$$d_e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d} \end{Bmatrix}$$

y  $P$  está dado por

$$P = \begin{bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \vdots \\ p^T(x_{n_d}) \end{bmatrix}$$

el cual se conoce como la matriz de momento. La forma expandida de  $P$  es

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_{n_d}(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_{n_d}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_{n_d}) & p_2(x_{n_d}) & \dots & p_{n_d}(x_{n_d}) \end{bmatrix}.$$

Usando la ecuación (46), y asumiendo que la inversa de la matriz de momentos  $P$  existe, podemos obtener

$$\alpha = P^{-1}d_e, \quad (47)$$

y al sustituir la anterior ecuación en la ecuación (44), obtenemos que

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x)d_i,$$

o de manera matricial

$$u^h(x) = N(x)d_e,$$

donde  $N(x)$  es una matriz de funciones de forma  $N_i(x)$  definida por

$$N(x) = p^T(x)P^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{p^T(x)P_1^{-1}}_{N_1(x)} & \underbrace{p^T(x)P_2^{-1}}_{N_2(x)} & \dots & \underbrace{p^T(x)P_{n_d}^{-1}}_{N_{n_d}(x)} \end{bmatrix},$$

donde  $P_i^{-1}$  es la  $i$ -ésima columna de la matriz  $P^{-1}$ , y

$$N_i(x) = p^T(x)P_i^{-1}.$$

Obteniendo la ecuación (47), hemos asumido la existencia de la inversa de  $P$ . Podría haber casos en los que esta inversa no existe, y la construcción de las funciones de forma fallará. La invertibilidad de esta matriz dependerá de las funciones base y la distribución nodal del elemento, por lo que las funciones base deben ser en primer lugar escogidas de un conjunto linealmente independiente de bases, y posteriormente las inclusión de los términos base debería estar basado en la distribución nodal en el elemento.

Note que las derivadas de las funciones de forma pueden obtenerse de manera fácil ya que todas las funciones involucradas son polinomios. La  $l$ -ésima derivada de las funciones de forma está dada por

$$N_i^{(l)}(x) = \left[ p^{(l)}(x) \right]^T P_i^{-1}.$$

Vale la pena comentar que existen maneras de calcular las funciones de forma que no siguen la forma estándar que se presenta arriba. La implementación de dichos métodos requiere el uso de propiedades que no estudiamos acá.

### Formulación de las ecuaciones en el sistema de coordenadas local

Una vez se han construido las funciones de forma, la ecuación de elementos finitos para un elemento puede formularse como lo hacemos a continuación. En este inciso haremos uso de propiedades de las funciones de forma que no probaremos aquí, pero que pueden ser consultadas en detalle en [G.R. and S. S., 2013].

En primer lugar, consideramos la interpolación de los nodos (ecuación 43) y la ecuación

$$\varepsilon = LU, \quad (48)$$

donde  $\varepsilon$  es el vector que contiene las relaciones de tensión-desplazamiento, es decir, el cambio en el desplazamiento por unidad de longitud, el cual se obtiene de la anterior manera ya que  $U$  es el vector de desplazamiento

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

y  $L$  es una matriz de operadores diferenciales dada por

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Si tomamos la interpolación de los nodos, y la ecuación (48), y las reemplazamos en la ecuación de la energía de tensión (Ecuación 41), obtenemos

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon^T \mathbf{E} \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} d_e^T B^T \mathbf{E} B d_e dV = \frac{1}{2} d_e^T \left( \int_{V_e} B^T \mathbf{E} B dV \right) d_e, \quad (50)$$

en donde el subíndice  $e$  hace referencia al elemento. Note que la integración del volumen sobre el dominio global se hace ahora sobre el elemento. Esto se puede ya que estamos asumiendo la condición de compatibilidad del Principio de Hamilton en la sección 3.2.2 sobre todas las aristas entre elementos. En la ecuación anterior,  $B$  se conoce como la matriz de tensión, denotada usualmente por

$$B = LN,$$

donde  $L$  es un operador diferencial y  $N$  es la matriz de funciones de forma. Para sólidos 3D, por ejemplo,  $L$  está dado por la ecuación (49). Al denotar

$$K_e = \int_{V_e} B^T \mathbf{E} B dV,$$

la cual es la matriz de rigidez  $K_e$ , la ecuación (50) se puede reescribir como

$$\Pi = \frac{1}{2} d_e^T K_e d_e. \quad (51)$$

Note que la matriz de rigidez es simétrica, pues

$$[K_e]^T = \int_{V_e} [B^T \mathbf{E} B]^T dV = \int_{V_e} B^T \mathbf{E}^T [B^T]^T dV = \int_{V_e} B^T \mathbf{E} B dV = K_e.$$

Note que en la anterior derivación, asumimos que  $E = E^T$ , es decir, la matriz de constantes del material es simétrica, lo cual es el caso para materiales isotrópicos [G.R. and S. S., 2013]. De nuevo al reemplazar la ecuación (43) en la ecuación (40), la energía cinética  $T$  se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{U}^T \dot{U} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho d_e^T N^T N d_e dV = \frac{1}{2} d_e^T \left( \int_{V_e} \rho N^T N dV \right) d_e. \quad (52)$$

Al denotar

$$m_e = \int_{V_e} \rho N^T N dV,$$

la cual se conoce como la matriz de masa del elemento, la ecuación (52) se puede reescribir como

$$T = \frac{1}{2} \dot{d}_e^T m_e \dot{d}_e. \quad (53)$$

De la definición de  $m_e$ , se evidencia claramente que esta también es simétrica. Finalmente, para obtener el trabajo ejercido por las fuerzas externas, se sustituye la ecuación (43) en la ecuación (42):

$$W_f = \int_{V_e} d_e^T N^T f_b dV + \int_{S_e} d_e^T N^T f_s dS = d_e^T \left( \int_{V_e} N^T f_b dV \right) d_e^T \left( \int_{S_e} N^T f_s dS \right), \quad (54)$$

donde la integración de superficie es llevada a cabo solo para elementos en la fuerza límite del dominio del problema. Al denotar

$$F_b = \int_{V_e} N^T f_b dV,$$

y

$$F_s = \int_{S_e} N^T f_s dS,$$

la ecuación (54) puede reescribirse como

$$W_f = d_e^T F_b + d_e^T F_s = d_e^T f_e. \quad (55)$$

$F_b$  y  $F_s$  son las fuerzas nodales que actúan sobre los nodos de los elementos, que son equivalentes a las fuerzas del cuerpo y fuerzas superficiales aplicadas al elemento en términos del trabajo hecho en un desplazamiento virtual. Estas dos fuerzas pueden entonces sumarse para formar el vector total de la fuerza nodal  $f_e$ :

$$f_e = F_b + F_s.$$

Sustituyendo las ecuaciones (51), (53) y (55) en el funcional Lagrangiano  $L$  (Ecuación 39), obtenemos

$$L = \frac{1}{2} \dot{d}_e^T m_e \dot{d}_e - \frac{1}{2} d_e^T k_e d_e + d_e^T f_e.$$

Aplicando el principio de Hamilton (Ecuación 38), tenemos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{d}_e^T m_e \dot{d}_e - \frac{1}{2} d_e^T k_e d_e + d_e^T f_e \right) dt = 0. \quad (56)$$

Note que los operadores de variación y de integración son intercambiables, por lo tanto obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \dot{d}_e^T m_e \dot{d}_e - \delta d_e^T k_e d_e + \delta d_e^T f_e \right) dt = 0. \quad (57)$$

Para el detalle de cómo se deriva la ecuación 57 de la ecuación 56, se puede consultar [G.R. and S. S., 2013]. Además de lo anterior, en la ecuación 57, la variación y diferenciación respecto al tiempo también son intercambiables, esto es,

$$\delta \dot{d}_e^T = \delta \left( \frac{dd_e^T}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta d_e^T). \quad (58)$$

Por lo tanto, al sustituir la ecuación 58 en la 57, e integrando el primer término por partes, obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{d}_e^T m_e \dot{d}_e dt = \underbrace{\delta d_e^T m_e \dot{d}_e}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta d_e^T m_e \ddot{d}_e dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta d_e^T m_e \ddot{d}_e dt. \quad (59)$$

Note que al derivar la ecuación anterior, se usa el hecho de que  $\delta d_e = 0$  en  $t_1$  y  $t_2$ , lo cual hace que se cancele el primer término del lado derecho. Esto es porque la condición inicial en  $t_1$  y la condición final en  $t_2$  deben satisfacerse en cualquier  $d_e$ , y no se admiten variaciones en  $t_1$  y  $t_2$ . Sustituir la ecuación 59 en la ecuación 57 lleva a que

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta d_e^T (-m_e \ddot{d}_e - k d_e + f_e) dt = 0. \quad (60)$$

Para que la integración en (60) sea cero para un integrando arbitrario, el integrando debe anularse, esto es,

$$\delta d_e^T (-m_e \ddot{d}_e - k d_e + f_e) = 0. \quad (61)$$

Debido a la naturaleza arbitraria de la variación de los desplazamientos, la única garantía de que se satisfaga la ecuación (61) es

$$k_e d_e + m_e \ddot{d}_e = f_e. \quad (62)$$

La ecuación (62) es la ecuación de FEM para un elemento, mientras que  $k_e$  y  $m_e$  son las matrices de rigidez y masa para el elemento respectivamente, y  $f_e$  es el vector de fuerza de las fuerzas externas completas actuando sobre los nodos del elemento. Todas estas matrices y vectores de elementos pueden obtenerse simplemente al integrar las funciones de forma dadas del desplazamiento.

### Transformación de coordenadas

La ecuación en (62) se formula con base en el sistema de coordenadas locales definido en un elemento. En general, la estructura se divide en varios elementos con distintas orientaciones, como en la figura 12.

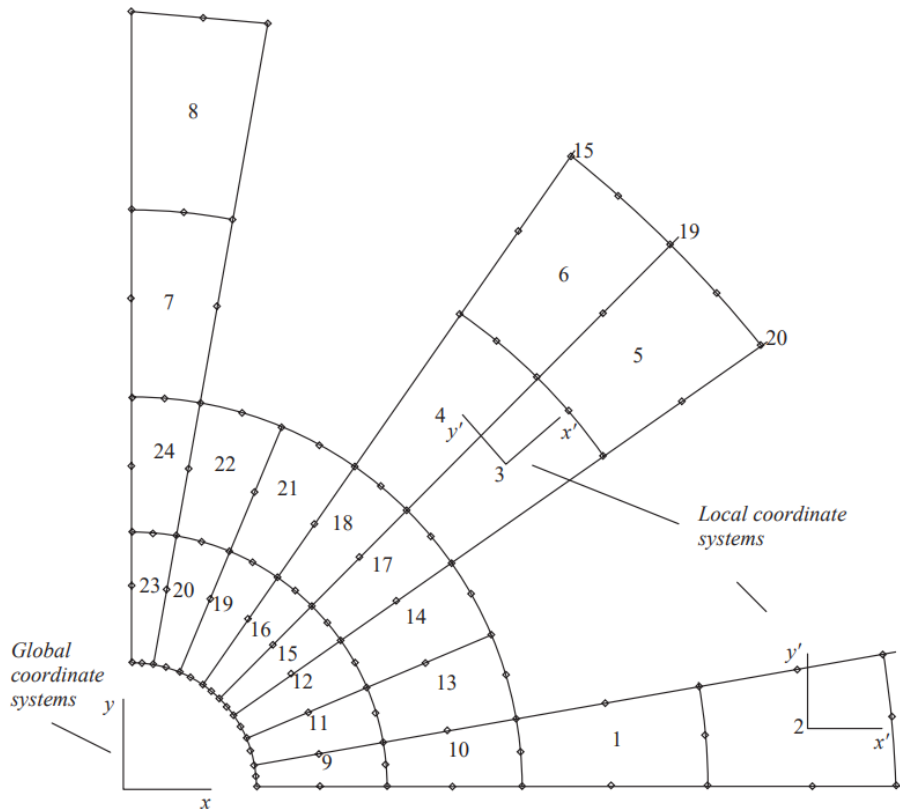


Figura 12: Sistemas globales y locales de coordenadas.

Para ensamblar todas las ecuaciones de los elementos con el fin de formar las ecuaciones globales del sistema, se debe realizar una transformación de coordenadas para cada elemento con el fin de formular su ecuación de elementos en referencia al sistema global de coordenadas, el cual se define para la estructura entera. La transformación de coordenadas da la relación entre el vector  $d_e$  del sistema de coordenadas locales, y el vector de desplazamiento  $D_e$  para el mismo elemento, pero basado en el sistema de coordenadas global es

$$d_e = T D_e. \quad (63)$$

$T$  es la matriz de transformación, la cual depende del tipo de elemento. Esta también puede aplicarse a los vectores de fuerza entre el sistema local y global:

$$f_e = T F_e, \quad (64)$$

en donde  $F_e$  es el vector de fuerza en el nodo  $i$  en el sistema de coordenadas global:

$$K_e D_e + M_e \ddot{D}_e = F_e,$$

donde

$$K_e = T^T k_e T, \quad (65)$$

$$M_e = T^T m_e T, \quad (66)$$

$$F_e = T^T f_e. \quad (67)$$

### Ensamblaje de la ecuación global de Elementos Finitos

Las ecuaciones de Elementos Finitos para todos los elementos de manera individual pueden juntarse para formar la ecuación de sistema global de Elementos Finitos:

$$K D + M \ddot{D} = F, \quad (68)$$

donde  $K$  y  $M$  son respectivamente las matrices globales de rigidez y masa.  $D$  es un vector de todos los desplazamientos en todos los nodos en el problema entero del dominio, y  $F$  es un vector de todos los vectores de fuerzas nodales equivalentes. El proceso de ensamblaje consiste simplemente de sumar las contribuciones de todos los elementos conectados a un nodo. Note que el proceso de ensamblaje de las matrices globales puede ser omitido al combinar el ensamblaje con la solución de la ecuación. Esto significa que el ensamblaje de un término en la matriz se realiza solo cuando el solver de la ecuación está operando sobre este término.

### Imposición de las restricciones de desplazamiento

La matriz de rigidez global  $K$  en la ecuación (68) usualmente no tiene rango completo, porque las restricciones del desplazamiento aún no han sido impuestas. Físicamente, un sólido o estructura sin restricciones es capaz de realizar movimiento rígido. Por lo tanto, si la estructura sólida está libre de soportes, la ecuación 68 da el comportamiento que incluye las dinámicas de cuerpo rígido, si es sujeto a fuerzas dinámicas. Si las fuerzas externas que se aplican son estáticas, los desplazamientos no pueden determinarse de manera única por la ecuación 68 para ningún vector de fuerzas. Para sólidos y estructuras con restricciones, estas pueden ser impuestas simplemente removiendo las filas y columnas correspondientes a los desplazamientos nodales restringidos. Después del tratamiento de restricciones, y si estas son suficientes, la matriz de rigidez  $K$  en la ecuación 68 va a tener rango completo, y va a ser definida positiva. Como ya vimos que era simétrica,  $K$  es simétrica definida-positiva.

### Solución de la ecuación global de Elementos Finitos

Al resolver la ecuación global de Elementos Finitos, se pueden obtener los desplazamientos en los nodos. Las tensiones y el estrés en cualquier elemento pueden ser obtenidas usando la ecuación (43) en (48) y en

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon, \quad (69)$$

la ley generalizada de Hooke para materiales anisotrópicos generales.

### 3.3. Filtrado

El problema de optimización topológica que se quiere resolver (Sección 4) carece, en su formulación continua, de existencia de soluciones [Bendsøe, 2003]. Esto se debe a que la introducción de más agujeros, sin cambiar el volumen estructural, en general incrementa la eficiencia de la estructura dada. En el límite de este proceso, se obtienen variaciones estructurales en la forma de microestructuras que tienen un mayor uso del material. Dichas microestructuras son típicamente no isotrópicas y no pueden representarse dentro de la descripción de diseño de solo material isotrópico. En este caso se dice que hay una falta de cerradura en el conjunto factible de diseños. En las implementaciones computacionales esto se ve reflejado como una inestabilidad numérica en la que un gran número de agujeros aparecen al emplearse un enmallado de elementos finitos. Esto es, al refinar el enmallado de los elementos finitos se produce una estructura interna de fina escala, como lo predice la teoría. Esto nos dice que la no-existencia de soluciones es un problema de las soluciones numéricas del problema de optimización. Esta dependencia se muestra en la figura 13.

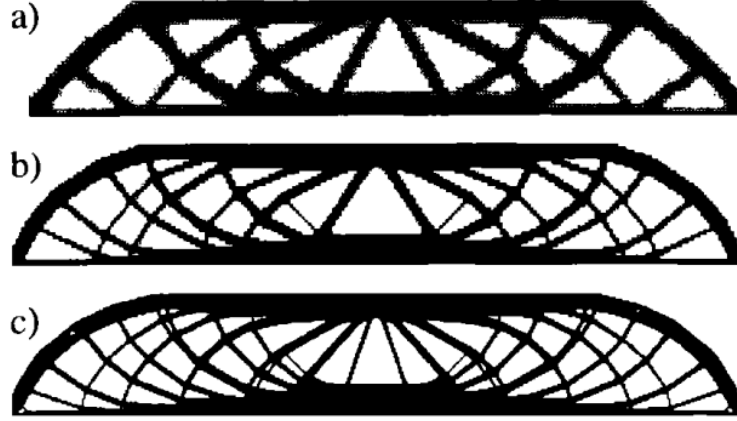


Figura 13: Dependencia de la topología óptima en el refinamiento del enmallado. En la figura se ve la solución para 2700, 4800, y 17200 elementos respectivamente.

Idealmente, el refinamiento debería resultar en un mejor modelamiento de elementos finitos de la misma estructura óptima, no en una más detallada y cualitativamente distinta. Se puede ver que existen maneras eficientes de lograr procedimientos independientes del enmallado para obtener buenas soluciones. El enfoque para lograr esto consiste en reducir el espacio de diseños admisibles al imponer alguna restricción global o local en la variación de la densidad, descartando así la posibilidad de que se formen estructuras de escala fina. Esta reducción se logra de distintas maneras como añadir restricciones al problema de optimización, reducir la cantidad de parámetros, o añadir filtros en la implementación de la optimización. Esta última será la que repasaremos en esta sección, ya que se usará en la implementación. Más precisamente, revisaremos dos tipos de filtrado:

#### 3.3.1. Filtrado de densidad

Algunas de las técnicas de restricción del dominio del problema imponen limitaciones explícitas en las distribuciones de densidad permitidas en el diseño óptimo, y como tal deben ser provistas de restricciones en la formulación de la optimización. Una alternativa a esto es limitar directamente las variaciones de las densidades que aparecen en el conjunto factible de tensor de rigidez  $E_{ad}$  al solo admitir densidades filtradas en la rigidez. Así, el método de Material sólido isotrópico con penalización se modifica al espacio de diseño reducido:

$$E_{ijkl}(x) = ((\rho * K)(x))^p E_{ijkl}^0, \quad \rho \in L^\infty(\Omega),$$

$$(\rho * K)(x) = \int_{\Omega} \rho(y) K(x - y) dy,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V; 0 < \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega,$$

donde  $K$  es un kernel de convolución, por ejemplo

$$K_r(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\|x\|}{r} & \text{si } \|x\| \leq r, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$



El radio de filtrado  $r$  es fijo en la formulación e implica la imposición de una escala de longitud fija en la distribución de la rigidez. Esto significa, en otras palabras, que la rigidez en un punto  $x$  depende de la densidad  $\rho(x)$  en todos los puntos de una vecindad de  $x$ . Esto implica un suavizado de los campos de rigidez de una manera similar a la del filtrado de una imagen. El suavizado y la escala fija implican que el método da existencia de soluciones y convergencia con el refinamiento del enmallado de elementos finitos.

### 3.3.2. Filtrado de sensibilidad

La experiencia computacional ha mostrado que el filtrado de la información de sensibilidad del problema de optimización es una manera altamente eficiente de asegurar la independencia del enmallado [Bourdin, 2001]. Esto significa modificar la sensibilidad de diseño de un elemento específico, basados en un promedio ponderado de la sensibilidad del elemento en un vecindario fijo. Tal filtro es meramente heurístico, pero produce resultados similares a los obtenidos al imponer una restricción local del gradiente, y no requiere añadir complejidad al problema de optimización ya que no requiere más restricciones en la formulación. El esquema funciona modificando la sensibilidad del elemento  $\frac{\partial f}{\partial \rho_k}$  como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_k} = -\frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i}, \quad (70)$$

donde  $N$  es el número total de elementos en el enmallado y el factor de convolución independiente del enmallado (factor de ponderación)  $\hat{H}_i$  se escribe como

$$\hat{H}_i = r_{min} - dist(k, i), \quad \{i \in N \mid dist(k, i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, \dots, N.$$

En esta expresión, el operador  $dist(k, i)$  se define como la distancia entre el centro del elemento  $k$  y el centro del elemento  $i$ . El operador de convolución  $\hat{H}_i$  es cero por fuera del área de filtrado. El operador de convolución para el elemento  $i$  se evidencia que decae linealmente con la distancia al elemento  $k$ . Vale la pena notar que (70) converge a la sensibilidad original cuando el radio del filtro  $r_{min}$  tiende a cero y todas las sensibilidades serán iguales cuando  $r_{min}$  tiende a infinito, resultando en una distribución homogénea de material. Este filtro es el que usaremos en la sección 5 en la implementación. La figura 14 muestra un ejemplo de diseños independientes del enmallado obtenidos por el filtro.

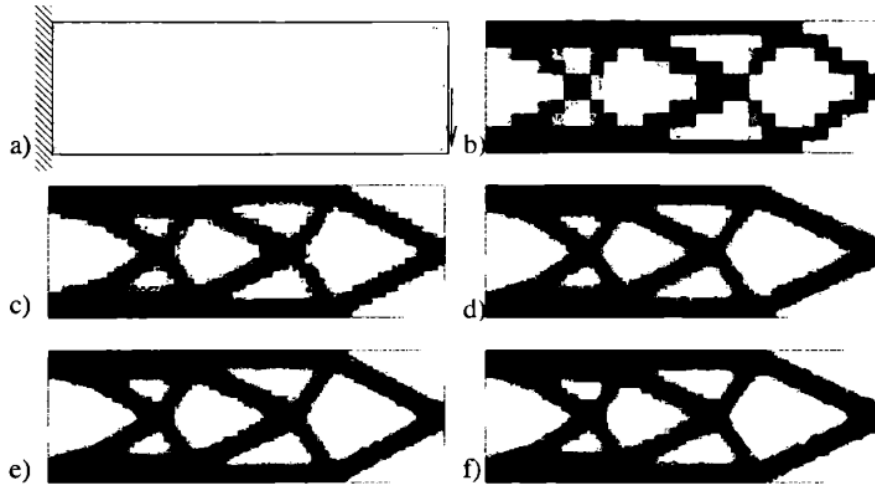


Figura 14: soluciones independientes del enmallado para el problema de la viga voladiza usando filtrado de sensibilidad para a) dominio del diseño y carga, b) 300, c) 600, d) 4800, e) 10800 y f) 19200, discretización de elementos. El radio del filtrado es el 8.2% de la altura del dominio del diseño.

## 4. Optimización topológica

La optimización estructural se encarga de estudiar la mejor forma en la que una estructura puede crearse para cumplir con ciertas funciones. Ejemplos de sus aplicaciones se encuentran en las industrias aeroespacial y automotriz. Existen varios tipos de optimización estructural, como se evidencia en la Figura 15.

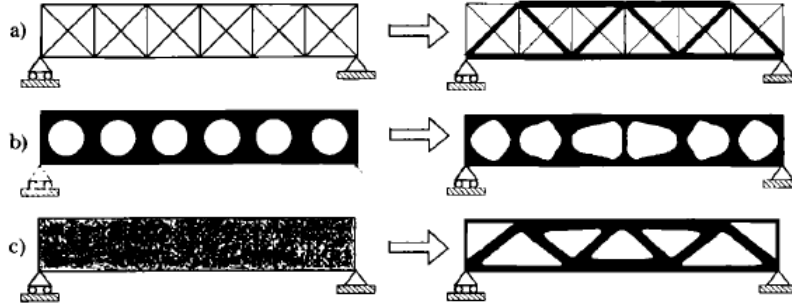


Figura 15: La optimización estructural se divide en 3: (a) optimización de tamaño (en este caso de vigas) , (b) optimización de forma y (c) optimización topológica. Imagen tomada de [Bendsøe, 2003]

En un problema de optimización de tamaño, la meta puede ser encontrar la distribución óptima del grosor de una placa linealmente elástica o las áreas óptimas de una estructura de vigas. Su principal característica es que el dominio del modelo y las variables de estado y de diseño<sup>2</sup> son conocidas *a priori* y son fijas durante el proceso de optimización. En la optimización de forma, el objetivo es encontrar la forma óptima de este dominio (variable de diseño). La optimización topológica, en cambio, involucra la optimización de variables como el número, lugar y forma de huecos en el dominio y su conectividad. Ver [Bendsøe, 2003].

En esta sección, se introducirá el tema de optimización topológica, basándose en el capítulo uno de [Bendsøe, 2003] y en la introducción de [Serrano, sf].

Los problemas de optimización topológica tienen formas variadas. En esta sección, nos enfocaremos en los problemas denominados de *compliance mínima* (*minimum compliance* en inglés) bajo restricciones simples. La compliance es una característica de los sólidos que mide la facilidad con la que este se puede deformar; entre menor es la compliance, más “resistente” es el sólido.

Considere un elemento mecánico considerado como un cuerpo ocupando un dominio  $\Omega_{mat}$ , que es parte de un dominio más grande  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Sobre el dominio  $\Omega$  se aplican ciertas fuerzas u otras condiciones de frontera. Nótese que, para un sólido linealmente elástico, podemos definir el problema de optimización topológica como escoger el tensor de rigidez óptimo  $\mathbf{E}$  sobre el dominio, que minimiza la compliance del sólido, que se representa matemáticamente igual al trabajo que realizan las fuerzas externas sobre el sólido. Recordemos que en la sección de mecánica continua se definió el trabajo ejercido por las fuerzas externas ( $f_V$  fuerzas globales y  $h$  la tracción aplicada sobre un conjunto  $\Gamma_2 \subseteq \Omega$ ) como

$$l(u) = \int_{\Omega} f_V \cdot u \, dV + \int_{\Gamma_2} h \cdot u \, dS,$$

la forma bilineal

$$a_E(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV$$

y la ecuación de equilibrio dinámica (en su forma variacional)

$$a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U.$$

Teniendo en cuenta esta notación, podemos definir el problema de compliance mínima (rigidez máxima) como

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U, \mathbf{E}} l(u) \\ & \text{s.t. } a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U \\ & \mathbf{E} \in E_{ad} \end{aligned} \tag{71}$$

<sup>2</sup>En un sistema dinámico, las variables de estado corresponden a aquellas que contienen información suficiente para determinar el comportamiento futuro del cuerpo en ausencia de fuerzas (e.g. la posición). Un ejemplo de variable de diseño es la posición de las vigas en la Figura 15 (a).

En este caso,  $U$  se tomará como el conjunto de desplazamientos admitidos, mientras que  $E_{ad}$  denota el conjunto de tensores de rigidez admisibles en nuestro problema. En el diseño topológico,  $E_{ad}$  podría ser, por ejemplo, los tensores que satisfacen las condiciones de un tensor de rigidez isotrópico sobre un dominio (desconocido)  $\Omega_{mat}$ , y son nulos en el resto del dominio, debiéndose cumplir también una restricción de recursos que tomaremos como  $\int_{\Omega_{mat}} 1 dV \leq V$ , donde  $V$  es el volumen máximo admitido.

Para resolver estos problemas de forma computacional, es natural pensar en discretizar este problema mediante el método de elementos finitos. Es importante notar que, en la ecuación (71), interesa minimizar el funcional  $l(u)$  teniendo en cuenta tanto  $\mathbf{E}$  como  $u$ . Si se utiliza el método de elementos finitos para discretizar el dominio como una malla para ambos campos, y se discretiza  $\mathbf{E}$  como constante en cada elemento, se puede escribir (71) como

$$\begin{aligned} \min_{u, E_e} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(E_u) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ E_e \in E_{ad}. \end{aligned} \quad (72)$$

Aquí,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores de desplazamiento y de cargas, respectivamente, y  $\mathbf{K}$  representa la matriz de rigidez global, que, como se vió, puede ser escrita como

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_e(E_e),$$

donde  $\mathbf{K}_e$  es la matriz de rigidez (global) en cada elemento.

Asumiendo la matriz de rigidez global invertible, nótese que el anterior problema se puede traducir a minimizar

$$l(u) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}.$$

Con el fin de diseñar la estructura topológica que minimiza el problema recién definido para materiales isotrópicos y linealmente elásticos, se puede pensar en determinar cuáles puntos del dominio deberían ser de material y cuáles de vacío (no material). Bajo este enfoque, este problema se reduce a encontrar el subconjunto  $\Omega_{mat}$  óptimo, donde se elige

$$\mathbf{E} = 1_{\Omega_{mat}} \mathbf{E}^0, \text{ donde } 1_{\Omega_{mat}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_{mat}, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_{mat}, \end{cases}$$

y

$$\int_{\Omega_{mat}} 1 dV \leq f \cdot V_0,$$

donde  $f$  representa una fracción de volumen prescrita. Nótese que tal expresión para el tensor de rigidez se toma con  $\mathbf{E}^0$  fijo, que representa las propiedades del material. Con este enfoque, el problema de optimización se convierte en discreto. Un enfoque usual (no el único) para resolver con mayor facilidad este problema es resolver un problema continuo análogo en el que se introduce una penalidad que obliga soluciones de tipo discreto, como se verá a continuación.

#### 4.1. Introducción de la función de densidad

El anterior problema se puede describir mejor si se introduce lo que se llamará la función de densidad  $\mathbf{x}$ , cuya idea es representar la ausencia o presencia de material. Inicialmente, se puede pensar en que, siguiendo el problema anterior,  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}$ . No obstante, con el objetivo de que en el problema discreto la matriz de rigidez global sea invertible, se toma  $\rho \in \{x_{min}, 1\}$ , siendo  $x_{min}$  un valor positivo muy cercano a cero. El principal problema de este método es que la búsqueda de tal óptimo requiere un costo computacional del orden  $2^{mn}$ , donde la malla del FEM es de tamaño  $m \times n$ .

Para sobrellevar esta dificultad, se tomará  $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ . El problema anterior se redefine de manera que el tensor de rigidez depende continuamente de la densidad del material, transformando así a  $\mathbf{x}$  en la variable de diseño. Bajo este

enfoque, el problema se redefiniría para el FEM como<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho} c(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}, \\
& \text{s.t. } \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{v}} = \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N x_e \leq f, \quad 0 < x_{\min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N. \\
& \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad x_e \in [x_{\min}, 1].
\end{aligned} \tag{73}$$

Si se desea resolver el problema para sólidos isotrópicos bajo este enfoque, se busca que un argumento óptimo del problema se aproxime a una solución discreta. Esto implica que los valores intermedios de la función de densidad sean penalizados. Una posibilidad que ha tomado bastante popularidad y se considera bastante eficiente es el modelo SIMP (por sus siglas en inglés *Solid Isotropic Material with Penalization*), definido como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x) &= x^{\rho} \mathbf{E}^0, \quad \rho > 1 \\
\int_{\Omega} x \, dV &\leq V, \quad 0 \leq x \leq 1
\end{aligned} \tag{74}$$

Se hace referencia a  $x$  como la densidad del material dada la expresión integral para expresar el volumen. Nótese que

$$\mathbf{E}(x) \Big|_{x=0} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(x) \Big|_{x=1} = \mathbf{E}^0.$$

Por ende, una solución en la que  $\mathbf{x}$  se aproxime a una función discreta con valores 0 y 1 tendría un sentido físico, y sería una aproximación considerable del problema planteado inicialmente. En el modelo SIMP, se escoge  $\rho > 1$  con el fin de que las densidades intermedias generen pequeños cambios en el tensor de rigidez con respecto al costo que estas generan en la restricción volumétrica. De esta forma, tomar densidades intermedias se considera poco favorable. En la práctica, con el fin de obtener densidades (casi) discretas, se suele tomar  $\rho \geq 3$ .

#### 4.1.1. Estudio del problema discreto desde el punto de optimización convexa

Es importante recordar que el problema de optimización puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}, \\
& \text{s.t. } \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N x_{\ell} \leq f \\
& 0 < \mathbf{x} \leq 1
\end{aligned}$$

Para probar o refutar la convexidad del problema obsérvese lo siguiente:

- **Lema.** La función  $X \in S_{++}^n \rightarrow w^T X^{-1} w \in \mathbb{R}$  es convexa para un vector  $w \in \mathbb{R}^n$  fijo.

**Demostración.** Considere  $Y \in S^n$  y defina la función  $g(t) = w^T (X + tY)^{-1} w$  donde  $t \in \text{dom}(g) = \{\tau \in [-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathbb{R} : X + \tau Y \in S_{++}^n\}$ . Derivando esta función una vez se obtiene lo siguiente:

$$g'(t) = w^T \frac{d}{dt} (X + tY)^{-1} w = -w^T (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} w,$$

derivando una segunda vez:

$$g''(t) = 2w^T (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} w.$$

Dado que  $X + tY$  es una matriz definida positiva entonces es fácil ver que si  $z := Y(X + tY)^{-1} w$  entonces  $g''(t) = z^T (X + tY)^{-1} z$  y por lo tanto  $g''(t) \geq 0$  para todo  $t \in \text{dom}(g)$ .

Como  $X \in S_{++}^n \rightarrow w^T X^{-1} w \in \mathbb{R}$  es una función convexa para cualquier línea que cruce su dominio entonces es globalmente convexa.

- Se tiene que  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^N x_{\ell}^{\rho} E_0 \mathbf{K}_{0,\ell}$  donde  $\rho$  representa la penalización y  $\mathbf{K}_{0,\ell}$  es la matriz con modulo de Young unitario que ubica los grados de libertad locales del elemento indexado con  $\ell$  en la matriz global de grados de libertad; cabe aclarar que tal matriz no depende de la densidad  $\mathbf{x}_{\ell}$ , solamente del índice del elemento  $\ell$ , además, que para todos los elementos, las matrices  $\mathbf{K}_{0,\ell}$  son semidefinidas positivas. Considere cuando la penalización  $\rho$  es igual a 1 y cuando  $\rho$  es mayor o igual a 2:

<sup>3</sup>Se tomará  $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)^T$  considerando el volumen de cada elemento como unitario.

- Si  $\rho = 1$  entonces  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^N x_{\ell} \mathbf{K}_{0,\ell}$ , por ende, esta función es afín y por lo tanto la función  $c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}$  es convexa usando el lema del ítem anterior.
- Cuando  $p \geq 2$  la función  $c$  no es convexa, y para probar esto es suficiente restringir la función a una recta que cruce el dominio de la función y probar que no es convexa, es decir, definir  $g(t) = c(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$  y demostrar que  $g$  no es convexa para  $\mathbf{x} \in \text{dom}(c)$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in \mathbb{R}$  adecuados de tal manera que  $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$  pertenezca al dominio de  $c$ . En las figuras 13 y 14 se evidencia la no convexidad cuando la penalización  $\rho = 2$  y  $\rho = 3$ , eligiendo  $\mathbf{x} = (0,5, 0,5, \dots, 0,5)^T$ ,  $\mathbf{y}$  un vector aleatorio con norma  $\|\mathbf{y}\|_1 \leq 0,1$  tomado en el complemento ortogonal de  $\langle \mathbf{1} \rangle = \langle (1, \dots, 1)^T \rangle$  y  $t$  en el intervalo  $[0, 1]$ ; lo anterior asegura que  $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$  esté en el dominio de  $c$  y a su vez que  $\frac{V(\mathbf{x}+t\mathbf{y})}{V_0} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N (x_{\ell} + ty_{\ell}) = 0,5$ .

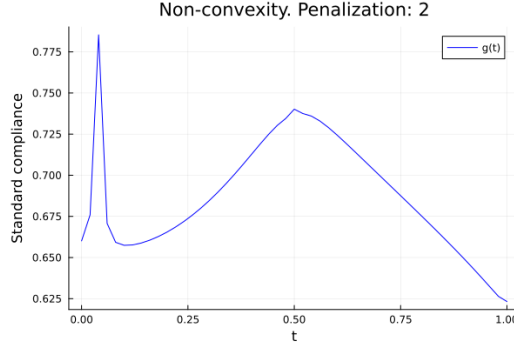


Figura 16: No convexidad de la función objetivo cuando  $\rho = 2$ .

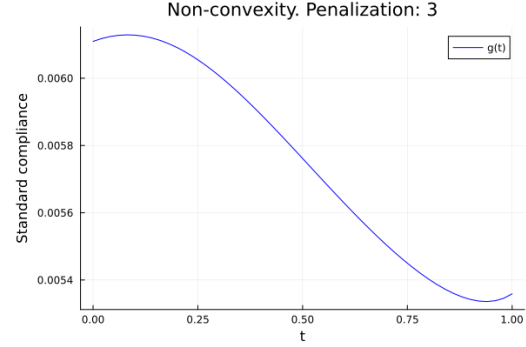


Figura 17: No convexidad de la función objetivo cuando  $\rho = 3$ .

- Una vez revisada la convexidad de la función objetivo  $c$ , las restricciones del problema de optimización corresponden a una restricción sobre el volumen,  $V(\mathbf{x})/V_0 = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N x_{\ell} \leq f$ , que es lineal y otra restricción que hace referencia al dominio de la función  $c$  y que limita a la variable de decisión a que cumpla la desigualdad  $0 < \mathbf{x} \leq 1$ , que también es lineal. Lo anterior implica que la convexidad del problema en conjunto solo depende de la convexidad de la función objetivo, por ende, esta propiedad se reduce al valor de la penalización  $\rho$ , que se comentó en los anteriores ítems.

## 4.2. Métodos de solución

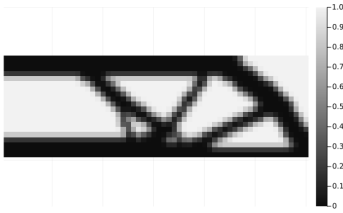


Figura 18: Resultados para  $60 \times 20$  elementos.

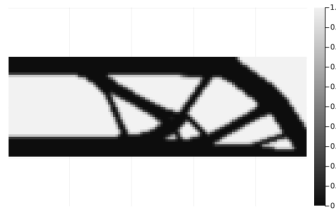


Figura 19: Resultados para  $120 \times 40$  elementos.

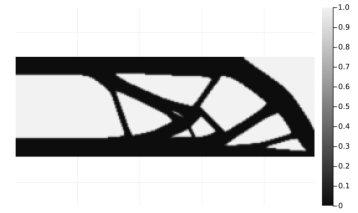


Figura 20: Resultados para  $240 \times 80$  elementos.

### 4.2.1. Método de criterio de optimalidad (OC)

El método de criterio de optimalidad (*Optimality Criteria: OC*) se basa en multiplicadores de Lagrange aplicado a optimización topológica. Para el problema discreto:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\ell=1}^N x_{\ell} \leq Nf \\
 & 0 < \mathbf{x} \leq 1.
 \end{aligned}$$

El lagrangiano puede ser escrito como:

$$L(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) + \lambda \left( \sum_{\ell=1}^N x_{\ell} - Nf \right)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange. Cuando se deriva  $L$  respecto a cada densidad por elemento  $x_e$  y se iguala a cero se encuentra el óptimo, es decir, cuando

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0 \quad \text{para} \quad e = 1, \dots, N,$$

también se debe satisfacer que  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{e=1}^N x_e - Nf = 0$ .  
Nótese que para todo  $e = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = \frac{\partial c}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial (\sum_{\ell=1}^N x_{\ell} - Nf)}{\partial x_e} = -\mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} + \lambda = 0,$$

dado que  $x_e > 0$  entonces  $\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0$  es equivalente a afirmar que

$$B_e := \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial (\sum_{\ell=1}^N x_{\ell} - Nf)}{\partial x_e}} = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda} = 1.$$

La idea de este método es considerar a  $B_e$  como un cambio relativo aplicado a cada densidad  $x_e$ , por lo tanto, se propone realizar un método iterativo en donde en cada paso se actualice  $x_e$  siendo reemplazado por  $x_e B_e^{\eta}$  con  $\eta$  un coeficiente de amortiguación numérica (generalmente  $\eta = 1/2$ ); esta sucesión de valores de densidades  $x_e$  se controla por un máximo cambio absoluto y también por las condiciones que se debe satisfacer con el dominio de la función objetivo, es decir,  $0 < x_e \leq 1$  para todo elemento  $e$ . Además de esto,  $\lambda$  se escoge de tal manera que se cumpla la condición de volumen  $\sum_{\ell=1}^N x_{\ell} - Nf \leq 0$ .

#### 4.2.2. Método de asíntotas móviles (MMA)

El método de las asíntotas móviles (MMA) es un método de optimización no lineal aplicado a optimización estructural. Fue publicado en 1987 por Krister Svanberg en [Svanberg, 1987]. En el artículo original se habla de que es un método especialmente diseñado para manejar problemas de optimización estructural con restricciones de desigualdad, donde el cálculo del gradiente es sencillo de realizar a pesar de que la evaluación en las funciones pueda ser costoso computacionalmente. En cada paso del proceso iterativo, se genera y resuelve un problema aproximado al problema original que tiene la propiedad de ser estrictamente convexo. La generación de estos problemas está controlada por las denominadas ‘asíntotas móviles’, que pueden tanto estabilizar como acelerar la convergencia del proceso [Felipe, 0 03]. De manera general, considere el problema (A): Encontrar  $\mathbf{x}^*$  que resuelva

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_0(\mathbf{x}), \\ \text{s.t.} \quad & f_1(\mathbf{x}) \leq \hat{f}_1 \\ & x_{min} \leq \mathbf{x} \leq x_{max}. \end{aligned}$$

El algoritmo de MMA consiste de los siguientes dos pasos:

- Definir los subproblemas  $(A_k)$  que aproximan al problema principal  $(A)$ .
- Dada la iteración  $k$ , los límites (o asíntotas) superior  $U_j^{(k)}$  e inferior  $L_j^{(k)}$  son escogidas de tal manera que  $L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)}$ . Por ejemplo,  $L_j^{(k)} = \max\{x_{min}, x_j^{(k)} - s_0\}$  y  $U_j^{(k)} = \min\{x_{max}, x_j^{(k)} + s_0\}$  y  $s_0$  un valor cercano a cero, con el fin de asegurar que tales límites no sobrepasen los valores extremos del problema.
- Para cada  $i = 0, 1$ ,  $f_i^{(k)}$  se define como

$$f_i^{(k)}(\mathbf{x}) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right),$$

donde

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \\ 0, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 0 \end{cases},$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases},$$

$$r_i^{(k)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right),$$

con todas las derivadas  $\partial f_i / \partial x_j$  evaluadas en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$ .

- Nótese que

$$\frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j)^2} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{(x_j - L_j^{(k)})^2}$$

por lo tanto, independientemente del signo de  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$ , se tiene que  $f^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)})$  y  $\frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})$ , es decir, el subproblema es una aproximación de primer orden en el punto  $\mathbf{x}^{(k)}$  al problema de partida.

- Además, para  $L_j^{(k)} < x_j < U_j^{(k)}$ , la segundas derivadas son

$$\frac{\partial^2 f_i^{(k)}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = \frac{2p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2q_{ij}^{(k)}}{(x_j - L_j^{(k)})^3},$$

$$\frac{\partial^2 f_i^{(k)}}{\partial x_j \partial x_m}(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } j \neq m.$$

Dado que  $p_{ij}^{(k)}$  y  $q_{ij}^{(k)}$  son siempre valores no negativos entonces  $\nabla^2 f_i^{(k)}$  es una matriz semidefinida positiva, por ende, la función  $f_i^{(k)}$  es una función convexa.

- El subproblema  $(A_k)$  se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f_0^{(k)}(\mathbf{x}) &= r_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \\ \text{s.t. } f_1^{(k)}(\mathbf{x}) &= r_1^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{1j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{1j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \leq \hat{f}_1 \\ \mathbf{L}^{(k)} &< \mathbf{x} < \mathbf{U}^{(k)}. \end{aligned}$$

Los subproblemas son convexos y además separables, es decir, las funciones  $f_i^{(k)}$  se pueden escribir como suma de funciones que dependen únicamente de una variable.

- Resolver los subproblemas.

- El subproblema  $(A_k)$  puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} r_0^{(k)} &+ \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{1j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{1j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) &\leq b^{(k)} := \hat{f}_1 - r_1^{(k)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(k)} &\leq \mathbf{x} \leq \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_j^{(k)}$  y  $\beta_j^{(k)}$  se toman como valores muy cercanos a  $L_j^{(k)}$  y a  $U_j^{(k)}$ , respectivamente<sup>4</sup>. Por lo tanto, para  $y \in \mathbb{R}$ , la función lagrangiana asociada al subproblema es

$$l^{(k)}(\mathbf{x}, y) = f_0^{(k)}(\mathbf{x}) + y f_1^{(k)}(\mathbf{x}) = r_0^{(k)} - y b^{(k)} + \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right),$$

definiendo  $l_j^{(k)}(\mathbf{x}, y) := \frac{p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}}$ , entonces,

$$l^{(k)}(\mathbf{x}, y) = r_0^{(k)} - y b^{(k)} + \sum_{j=1}^N l_j^{(k)}(\mathbf{x}, y).$$

- Para  $y \geq 0$ , la función dual de Lagrange es

$$W^{(k)}(y) = \inf_{\mathbf{x}} \{l^{(k)}(\mathbf{x}, y) | \alpha^{(k)} \leq \mathbf{x} \leq \beta^{(k)}\} = r_0^{(k)} - y b^{(k)} + \sum_{j=1}^N W_j^{(k)}(y),$$

donde  $W_j^{(k)}(y) = \inf_{x_j} \{l_j^{(k)}(x_j, y) | \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}\}$ . Derivando  $l_j^{(k)}(x_j, y)$  respecto a  $x_j$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j} &= \frac{p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j)^2} - \frac{q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)}}{(x_j - L_j^{(k)})^2}, \\ \frac{\partial^2 l_j^{(k)}}{\partial x_j^2} &= \frac{2(p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)})}{(U_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2(q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)})}{(x_j - L_j^{(k)})^3} \geq 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, se concluye que  $l_j^{(k)}$  como función de  $x_j$  es convexa. De esta manera se puede hallar el valor de  $x_j^{(k+1)}$  en términos de  $y$  teniendo en cuenta lo siguiente:

- Si  $\frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j}(\alpha_j, y) \geq 0$ , entonces  $x_j(y) = \alpha_j$ .
- Si  $\frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j}(\beta_j, y) \leq 0$ , entonces  $x_j(y) = \beta_j$ .
- Si  $\frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j}(\alpha_j, y) < 0$  y  $\frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j}(\beta_j, y) > 0$  entonces existe un punto  $x_j^{(k+1)}(y^*) \in (\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)})$  tal que  $\frac{\partial l_j^{(k)}}{\partial x_j}(x_j^{(k+1)}(y^*), y^*) = 0$ , despejando se obtiene que

$$x_j^{(k+1)}(y^*) = \frac{(p_{0j}^{(k)} + y^* p_{1j}^{(k)})^{1/2}}{(p_{0j}^{(k)} + y^* p_{1j}^{(k)})^{1/2} + (q_{0j}^{(k)} + y^* q_{1j}^{(k)})^{1/2}} L_j^{(k)} + \frac{(q_{0j}^{(k)} + y^* q_{1j}^{(k)})^{1/2}}{(p_{0j}^{(k)} + y^* p_{1j}^{(k)})^{1/2} + (q_{0j}^{(k)} + y^* q_{1j}^{(k)})^{1/2}} U_j^{(k)}.$$

- La función dual de Lagrange puede ser escrita como

$$\begin{aligned} W^{(k)}(y) &= r_0^{(k)} - y b^{(k)} + \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}(y)} + \frac{q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)}}{x_j^{(k)}(y) - L_j^{(k)}} \right) \\ &= r_0^{(k)} - y b^{(k)} + \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)} + q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)} + 2((p_{0j}^{(k)} + y p_{1j}^{(k)})(q_{0j}^{(k)} + y q_{1j}^{(k)}))^{1/2}}{U_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto el problema dual ( $D_k$ ) asociado al subproblema ( $A_k$ ) corresponde a

$$\begin{aligned} \max_y \quad & W^{(k)}(y), \\ \text{s.t.} \quad & y \geq 0. \end{aligned}$$

La función objetivo de este problema dual es cóncava dado que es el ínfimo de funciones afines en la variable  $y$ . La comprobación de esto se puede tener por el lema a continuación.

<sup>4</sup>Podría tomarse  $\alpha_j^{(k)} = 0,9L_j^{(k)} + 0,1x_j^{(k)}$ , por ejemplo.



**Lema.** Si se define la función  $h(y) = \inf_x \{a(x) + b(x)y\}$  con  $\text{dom}(h)$  convexo, entonces  $h$  es cóncava.

**Demostración.** Nótese lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{hypo}(h) &= \{(t, y) | h(y) \geq t\}, \\ &= \{(t, y) | \inf_x \{a(x) + b(x)y\} \geq t\}, \\ &= \bigcap_x \{(t, y) | a(x) + b(x)y \geq t\}, \end{aligned}$$

dado que  $\{(t, y) | a(x) + b(x)y \geq t\}$  es un conjunto convexo para cualquier  $x$  entonces  $\text{hypo}(h)$  es convexo, esto implica que  $h$  es una función cóncava.

Por ende, el problema  $(D_k)$  tiene un único valor máximo en todo su dominio.

- El problema dual  $(D_k)$  se puede resolver utilizando cualquier método de gradiente teniendo en cuenta que:

$$\frac{dW^{(k)}}{dy}(y) = -b^{(k)} + \sum_{j=1}^N \frac{p_{1j}^{(k)} + q_{1j}^{(k)} + ((p_{0j}^{(k)} + yp_{1j}^{(k)})(q_{0j}^{(k)} + yq_{1j}^{(k)}))^{-1/2} (p_{0j}^{(k)} q_{1j}^{(k)} + p_{1j}^{(k)} q_{0j}^{(k)} + 2yp_{1j}^{(k)} q_{1j}^{(k)})}{U_j^{(k)} - L_j^{(k)}}.$$

Una vez establecido el método de asíntotas móviles en términos generales, se procede a realizar la adecuación para el caso de optimización topológica:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) &:= c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}, \\ \text{s.t. } f_1(\mathbf{x}) &:= \sum_{\ell=1}^N x_\ell \leq \hat{f}_1 := Nf \\ x_{\min} - \epsilon &:= 0 < \mathbf{x} \leq 1 =: x_{\max}. \end{aligned}$$

Las derivadas de las funciones  $f_0$  y  $f_1$  respecto a  $x_j$  son

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\rho x_j^{\rho-1} E_0 \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{K}_{0,j} \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f} \leq 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 1 > 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, N$ . Cabe recordar que  $\mathbf{K}_{0,j}$  es una matriz semidefinida positiva que posiciona los grados de libertad locales del elemento  $j$  en la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ . Lo anterior implica que para todo  $j = 1, \dots, N$ :

$$p_{0j}^{(k)} = 0, \quad p_{1j}^{(k)} = (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad q_{0j}^{(k)} = -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad q_{1j}^{(k)} = 0,$$

por tanto:

$$\begin{aligned} f_0^{(k)}(\mathbf{x}) &= f_0(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \left( \frac{1}{x_j - L_j^{(k)}} - \frac{1}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right), \\ f_1^{(k)}(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \left( \frac{1}{U_j^{(k)} - x_j} - \frac{1}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} \right). \end{aligned}$$

Para el problema de dualidad que se resuelve en cada iteración cabe resaltar que se satisface la condición de Slater para el problema convexo  $(A_k)$  dado que si se toma  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{U}^{(k)} > \mathbf{x}^{(k)} > \mathbf{x} > \mathbf{L}^{(k)}$  entonces se puede concluir fácilmente que  $f_1^{(k)}(\mathbf{x}) < f_1(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \hat{f}_1$ , es decir  $f_1^{(k)}(\mathbf{x}) - \hat{f}_1 < 0$ , cumpliendo la condición de Slater. Esto implica que en cada iteración se tiene dualidad fuerte.

## 5. Implementación Algorítmica

En esta sección se explicará a profundidad el código utilizado para el problema *viga de Messerschmitt-Bölkow-Blohm* (MBB beam) en el artículo [Andreassen et al., 2011]. La implementación se hará en el lenguaje Julia y estará disponible en el [repositorio](#) asociado a este proyecto. El objetivo de esta sección es mostrar la discretización del problema y los retos computacionales que tiene su implementación.

### 5.1. Problema de optimización topológica

El problema de optimización implementado corresponde a media viga MBB dada a la simetría del problema, como lo muestra la figura a continuación.

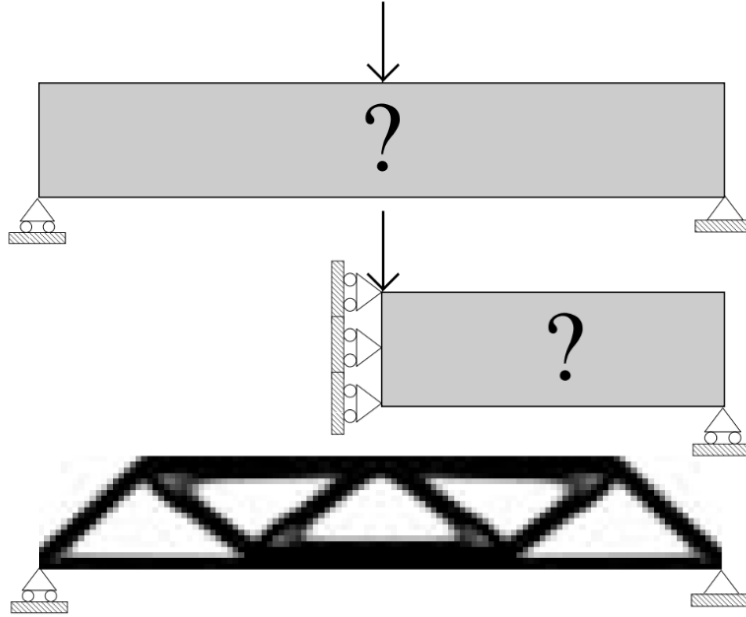


Figura 21: Visualización del dominio de diseño para el problema de optimización topológica. Imágen tomada de [Sigmund, 2001].

En la anterior figura se muestra de arriba a abajo el dominio completo del problema de optimización con la flecha indicando la influencia de las fuerzas externas y con los triángulos indicando los soportes fijos de la viga, en la segunda figura se muestra la fuerza externa sobre la mitad de la viga con las condiciones de frontera ligeramente cambiadas por un argumento de simetría, proponiendo nuevos nodos en el costado lateral de la mitad de la viga; por último, se muestra el resultado de la optimización topológica para el dominio completo y las condiciones de frontera.

El problema de optimización desde el punto de vista discreto queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } c(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$$

sujeito a  $V(\mathbf{x})/V_0 \leq f$ ,  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ , donde:

- $E_e(x_e) = E_{min} + x_e^p(E_0 - E_{min})$  es el módulo de Young.
- $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamiento global.
- $\mathbf{f}$  es el vector global de fuerzas externas.
- $\mathbf{x}$  es el vector de variables de diseño.
- $N$  es el número de elementos para discretizar el dominio.
- $V(\mathbf{x})$  y  $V_0$  son el volumen del material y el volumen dominio de diseño, respectivamente.
- $f$  es la fracción de volumen prescrita.

## 5.2. Filtrado

El filtrado sobre las densidades se hace con el fin de generar densidades uniformes y coherentes de un elemento con las densidades de sus elementos alrededor, como se explicó en la sección 3.

El filtro de sensibilidad modifica las sensibilidades  $\frac{\partial c}{\partial x_e}$  de la siguiente manera

$$\frac{\hat{\partial c}}{\partial x_e} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial c}{\partial x_i}$$

donde:

- $N_e$  es el conjunto de elementos  $i$  que están a una distancia  $\Delta(e, i)$  del elemento  $e$  menor a  $r_{min}$ .
- $\gamma$  es una constante que asegura la no división entre cero.

## 5.3. Método de criterio de optimalidad: OC

Como se habló en la sección 4, el método o proceso a seguir para buscar una densidad que cumpla la condición de optimalidad se explica a continuación.

Para cada elemento  $e$  la variable de diseño  $x_e$  es actualizada a  $x_e^{new}$  siguiendo el siguiente esquema:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(0, x_e - m) & \text{si } x_e B_e^\eta \leq \max(0, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{si } x_e B_e^\eta \geq \min(1, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $\eta = 1/2$  es un coeficiente de amortiguación numérico, y  $B_e$  es obtenido de la condición de optimalidad,

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}}$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange, este valor debe ser escogido de tal manera que la restricción de volumen debe satisfacerse; el valor apropiado se encuentra por medio del método de bisección. La sensibilidad de la función objetivo  $c$  y del volumen del material  $V$  respecto a la densidad del elemento  $x_e$  son dadas por:

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -\mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = -p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = -p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = 1$$

La última ecuación se deduce de que cada elemento tiene volumen unitario.

El código presentado a continuación está basado en [Andreassen et al., 2011], escrito originalmente en el lenguaje de programación Matlab; en este proyecto, el lenguaje de programación escogido fue Julia. Originalmente el código está escrito como una función llamada `top88`; en la implementación usada en este proyecto, en cambio, se propone separar en varios fragmentos de código para hacer más sencilla su legibilidad y comprensión.

Las siguientes variables corresponden a los parámetros acerca del número de elementos en la malla, la fracción de volumen de interés, el coeficiente de penalización en el modulo de Young y constantes que afectan el filtrado.

- **nelx**: Es un entero que representa el número de elementos finitos en la dirección  $x$ .
- **nely**: Es un entero que representa el número de elementos finitos en la dirección  $y$ .
- **volfrac**: Es un número flotante que indica el volumen fraccional deseado en la topología optimizada.
- **penal**: Es un número flotante que se utiliza en el cálculo de la penalización para suavizar la función objetivo.
- **rmin**: Es un número flotante que se utiliza como radio mínimo para el filtro.
- **ft**: Es un entero que indica el tipo de filtro utilizado en el proceso de optimización.

Estos parámetros se pasan a la función `top88` para controlar diversos aspectos del proceso de optimización topológica.

```

1 nelx = 60
2 nely = 20
3 volfrac = 0.5
4 penal = 3
5 rmin = 1.5
6 ft = 1

```

### 5.3.1. Propiedades del material (líneas 7-9)

- **E0**: Es el módulo de elasticidad del material en su estado no penalizado. Representa la rigidez del material en su forma original. Este parámetro afecta la rigidez estructural del diseño final.
- **Emin**: Es el módulo de elasticidad mínimo permitido para evitar que los elementos tengan una rigidez excesivamente baja. Es esencialmente un límite inferior en el módulo de elasticidad. Emin se utiliza para suavizar la función objetivo y evitar la aparición de elementos con una rigidez demasiado baja.
- **nu**: Es el coeficiente de Poisson, que representa la relación entre las deformaciones transversales y longitudinales de un material cuando se aplica una carga. Se utiliza en el cálculo del tensor de elasticidad para tener en cuenta el comportamiento del material bajo carga.

Estas constantes influyen en el comportamiento y la calidad del diseño obtenido mediante la optimización topológica.

```

7 E0 = 1
8 Emin = 1e-9
9 nu = 0.3

```

### 5.3.2. Preparación del análisis de elementos finitos (líneas 10-22)

- Matriz de elementos finitos:  $A_{11} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 & -3 \\ 3 & 12 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 12 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

- Matriz de elementos finitos:  $A_{12} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

- Matriz de elementos finitos:  $B_{11} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 9 \\ 3 & -4 & -9 & 4 \\ -2 & -9 & -4 & -3 \\ 9 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

- Matriz de elementos finitos:  $B_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -9 \\ -3 & 2 & 9 & -2 \\ 4 & 9 & 2 & 3 \\ -9 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Matriz de rigidez  $\mathbf{k}_0$  para un elemento con módulo de Young unitario:  $KE = \frac{1}{24(1-\nu^2)} \left( \frac{A_{11}}{A_{12}^T} \middle| \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) + \nu \left( \frac{B_{11}}{B_{12}^T} \middle| \frac{B_{12}}{B_{11}} \right)$
- **nodenrs**: Esta variable (matriz) se utiliza para asignar números de nodo a los nodos de la malla de elementos finitos. En este código, **nodenrs** se genera mediante la función **reshape** en la línea 17. La forma de 'nodenrs' será una matriz con  $(\text{nelx} + 1)$  filas y  $(\text{nely} + 1)$  columnas.
- **edofVec**: Esta variable (vector) representa el vector de grados de libertad (DOF) para cada elemento finito. Es una lista de los DOF asociados con cada nodo de cada elemento finito. La forma de **edofVec** será una matriz con  $\text{nelx} * \text{nely}$  filas y una columna. Los DOF se enumeran en este vector de manera que cada fila corresponde a un elemento finito y contiene los índices de los DOF asociados con ese elemento.

- **edofMat**: Esta variable es una matriz que indica cómo se ensamblan los grados de libertad (DOF) de los elementos finitos en la matriz global de rigidez. La forma de **edofMat** es una matriz con **nelx \* nely** filas y 8 columnas, donde cada fila corresponde a un elemento finito y cada columna contiene el índice de un DOF asociado con ese elemento. Las primeras cuatro columnas de **edofMat** representan los DOF de desplazamiento en  $x$  e  $y$  para los nodos superiores del elemento, y las últimas cuatro columnas representan los DOF de desplazamiento en  $x$  e  $y$  para los dos nodos inferiores del elemento.
- **iK**: Contiene las coordenadas de fila de los elementos no nulos en la matriz  $K$ . Estas coordenadas están relacionadas con los DOF de los nodos de los elementos finitos.
- **jK**: Contiene las coordenadas de columna de los elementos no nulos en la matriz  $K$ . Al igual que **iK**, estas coordenadas también están relacionadas con los DOF de los nodos de los elementos finitos.

Los vectores resultantes  $iK$  y  $jK$  están estructurados de manera que los índices  $iK(k)$  y  $jK(k)$  corresponden a la entrada  $(i, j)$ -ésima de la matriz de rigidez para el elemento  $e$ , donde  $k = i + 8(j - 1) + 64(e - 1)$ .

```

10 A11 = [12 3 -6 -3; 3 12 3 0; -6 3 12 -3; -3 0 -3 12]
11 A12 = [-6 -3 0 3; -3 -6 -3 -6; 0 -3 -6 3; 3 -6 3 -6]
12 B11 = [-4 3 -2 9; 3 -4 -9 4; -2 -9 -4 -3; 9 4 -3 -4]
13 B12 = [2 -3 4 -9; -3 2 9 -2; 4 9 2 3; -9 -2 3 2]
14
15 KE = 1/(1-nu^2)/24 * ([A11 A12; A12' A11] + nu * [B11 B12; B12' B11])
16
17 nodenrs = reshape(collect(1:(1+nelx)*(1+nely)), (1+nely, 1+nelx))
18 edofVec = reshape(2*nodenrs[1:end-1, 1:end-1] .+ 1, nelx*nely, 1)
19 edofMat = repeat(edofVec, 1, 8) .+ repeat([0 1 2*nely+2 2*nely+3 2*nely+0 2*nely+1 -2 -1], nelx*nely, 1)
20
21 iK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(8,1))), 64*nelx*nely, 1)
22 jK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(1,8))), 64*nelx*nely, 1);

```

### 5.3.3. Definir cargas y soportes: mitad viga-MBB (líneas 23-28)

- **F**: Este es un vector de tamaño  $2*(nely+1)*(nelx+1)$  que se inicializa como un vector de ceros y al nodo  $(1, 0)$  se le asigna el valor  $-1$ . Este vector representa las fuerzas aplicadas a los nodos del sistema.
- **U**: **U** se inicializa como un vector de ceros con una longitud igual al número total de grados de libertad en el sistema de elementos finitos. Cada elemento de **U** corresponde a un grado de libertad particular y representa el desplazamiento en esa dirección para el nodo asociado. Como el tamaño de **U** es de  $2*(nely+1)*(nelx+1)$ , el modelo tiene dos grados de libertad por nodo que representa los desplazamientos en  $x$  e  $y$ .
- **fixeddofs**: Índices de los grados de libertad de frontera.
- **alldofs**: Todos los índices de los grados de libertad.
- **freedofs**: Índices de los grados de libertad en el interior.

```

23 F = zeros(2*(nely+1)*(nelx+1), 1)
24 F[2,1] = -1
25 U = zeros(size(F))
26 fixeddofs = union(1:2*2*(nely+1), [2*(nelx+1)*(nely+1)])
27 alldofs = 1:2*(nely+1)*(nelx+1)
28 freedofs = setdiff(alldofs, fixeddofs);

```

### 5.3.4. Preparación de filtro (líneas 29-50)

- **iH**: Índices de las filas de la matriz  $H$ .
- **jH**: Índices de las columnas de la matriz  $H$ .

- **sH**: Valores de las entradas de la matriz **H** en la posición determinada por cada entrada de **iH** y **jH**. Los valores de este vector corresponden a valores de sensibilidad de los vecinos de cada elemento.
- **k**: Índice que modifica **iH**, **jH** y **sH**. El valor máximo de este índice depende del valor de **rmin**.
- **H**: Esta matriz se construye como un matriz esparsa usando **iH**, **jH** y **sH**; la dimensión de esta matriz es de  $(nelx*nely*(2*(ceil(rmin)-1)+1)^2)$ . La matriz **H** se utiliza para “promediar” la sensibilidad de la función objetivo en un vecindario de cada elemento. Esto ayuda a eliminar pequeñas estructuras irregulares y a obtener diseños con características más robustas y de mayor tamaño. Nótese que para cada elemento **e1**, habrá  $(2*(ceil(rmin)-1)+1)^2$  elementos vecinos.
- **Hs**: Este es un vector que contiene la suma por filas de la matriz **H**. Este vector se utiliza para normalizar cada fila de la matriz **H**. Tal normalización asegura que la suma de los pesos de cada elemento en la operación de filtrado sea igual a 1. La normalización con **Hs** evita sesgos en la operación de filtrado y asegura que la sensibilidad de cada elemento se vea afectada de manera uniforme por sus vecinos.

Los ciclos **for** anidados realizan lo siguiente:

Ciclo exterior (líneas 34-36):

- Recorre cada elemento **e1** en la malla.

Ciclo interior (líneas 37-45):

- Para cada elemento **e1**, recorre los elementos vecinos **e2** dentro del radio de filtro **rmin**.
- Se calcula la distancia entre **e1** y **e2**.
- Si la distancia está dentro del radio **rmin**, se calcula un valor de filtro **sH** basado en la distancia.
- Se añaden los índices de **e1** y **e2** a las matrices **iH** y **jH**, respectivamente.

Finalmente, se construye **H** y **Hs** a partir de sus definiciones.

```

29 iH = ones(Int(nelx*nely*(2*(ceil(rmin)-1)+1)^2))
30 jH = ones(size(iH))
31 sH = zeros(size(iH))
32
33 k = 0
34 for i1 = 1:nelx
35     for j1 = 1:nely
36         e1 = (i1-1)*nely+j1
37         for i2 = max(i1-(ceil(rmin)-1),1):min(i1+(ceil(rmin)-1),nelx)
38             for j2 = max(j1-(ceil(rmin)-1),1):min(j1+(ceil(rmin)-1),nely)
39                 e2 = (i2-1)*nely+j2
40                 k += 1
41                 iH[k] = e1
42                 jH[k] = e2
43                 sH[k] = max(0,rmin-sqrt((i1-i2)^2+(j1-j2)^2))
44             end
45         end
46     end
47 end
48
49 H = sparse(iH, jH, sH)
50 Hs = sum(H, dims=2);

```

### 5.3.5. Inicialización de iteracion (líneas 51-54)

Las líneas 51 a 54 se encargan de inicializar las variables de diseño y densidad física.

- **x**: Se crea una matriz **x** con el valor **volfrac** (fracción de volumen) para cada elemento. Esto representa la densidad de diseño inicial.

- **xPhys**: Se crea una matriz **xPhys** con el mismo tamaño que **x**. Se utiliza para almacenar la densidad física que se utiliza en el análisis por elementos finitos (FEA).
- **loop**: Contador de iteraciones.
- **change**: Variable que controla la convergencia del algoritmo.

```

51 x = fill(volfrac, nely, nelx)
52 xPhys = copy(x)
53 loop = 0
54 change = 1

```

### 5.3.6. Comienzo de iteración (líneas 55-106)

- **Análisis de elementos finitos** (líneas 55-65)
  - **sK**: La matriz de rigidez elemental **KE** se escala por la densidad elemental **xPhys** para obtener **sK**. En este caso, esta variable se representa como un vector de tamaño  $64 \cdot \text{nelx} \cdot \text{nely}$ .
  - **K**: Se calcula la matriz de rigidez global **K** a partir de la densidad física actual **xPhys** y las propiedades del material.
  - **U**: Se aplica la fuerza **F** al sistema y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales para obtener los desplazamientos **U**. Cabe recordar la restricción  $KU = F$ .
- **Función objetivo y análisis de sensibilidad** (líneas 67-71)
  - **ce**: Se calcula la energía de deformación (compliance) **ce** a partir de los desplazamientos **U**.
  - **c**: Se calcula la función objetivo **c** como la suma de la energía de deformación **ce** y un término de penalización que regulariza la densidad.
  - **dc**: Se calcula la sensibilidad **dc** de la función objetivo con respecto a la densidad de diseño **x**.
  - **dv**: Esta variable representa la actualización de la densidad de diseño en cada iteración.
- **Modificación de sensibilidades** (líneas 73-79). Se aplica un filtro a la sensibilidad **dc** para eliminar las estructuras irregulares y promover características de tamaño mínimo. La elección del filtro depende del tipo de optimización que se desea realizar (por ejemplo, optimización de estructuras, optimización de fluidos).
- **Actualización de criterio óptimo de las variables de diseño y las densidades físicas** (líneas 81-102)
  - **11**: Variable auxiliar del método de bisección.
  - **12**: Variable auxiliar del método de bisección.
  - **move**: Tamaño de movimiento en cada una de las densidades de los elementos.
  - **xnew**: Se actualiza la densidad física **xPhys** para el siguiente análisis por elementos finitos (FEA). El cálculo se hace de la siguiente manera:

$$x_{new,i} = \begin{cases} x_i \sqrt{\frac{-dc_i}{dv_i l_{mid}}} & \text{si } \max(0, x_i - \text{move}) \leq x_i \sqrt{\frac{-dc_i}{dv_i l_{mid}}} \leq \min(x_i + \text{move}, 1) \end{cases}$$

La idea es que cada entrada de **xnew** este en  $[0, 1]$ , que el cambio respecto a cada entrada de **x** sea menor a **move** y que a su vez dependa de la sensibilidad de la función objetivo en esta instancia.

- **lmid**: Se utiliza un método de búsqueda de línea para encontrar un valor de paso **lmid** que garantice que la densidad de diseño actualizada satisfaga la restricción de volumen.
- **change**: Es la norma del máximo entre **xnew** y **x**, o sea,  $\text{change} = \|x_{new} - x\|_{\infty} = \max_{\ell} |x_{new,\ell} - x_{\ell}|$ .

Luego de aplicar el filtro se actualiza la densidad de diseño **x** utilizando la sensibilidad filtrada **dc** y el valor de paso **lmid**. Si el cambio es menor que un valor de tolerancia, el algoritmo converge y se detiene.

- **Imprimir resultados** (líneas 104-105). Se imprime información sobre la iteración actual, la función objetivo, el volumen y el cambio en la densidad. Finalmente, se visualiza la densidad de diseño actual.

```

55 sK = reshape(KE[:] * (Emin .+ xPhys[:]'.^penal .* (E0 - Emin)), 64*nelx*nely)
56 K = sparse(reshape(Int.(iK),64*nelx*nely), reshape(Int.(jK),64*nelx*nely),reshape(sK,64*nelx*nely));

57 # START ITERATION
58 while change > 0.01
59     loop += 1
60
61     # FE-ANALYSIS
62     sK = reshape(KE[:] * (Emin .+ xPhys[:]'.^penal .* (E0 - Emin)), 64*nelx*nely)
63     K = sparse(reshape(Int.(iK),64*nelx*nely), reshape(Int.(jK),64*nelx*nely), reshape(sK,64*nelx*nely))
64     K = (K + K') / 2
65     U[freedofs] .= K[freedofs, freedofs] \ F[freedofs]
66
67     # OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
68     ce = reshape(sum((U[edofMat] * KE) .* U[edofMat], dims=2), nely, nelx)
69     c = sum(sum((Emin .+ xPhys.^penal .* (E0 - Emin)) .* ce))
70     dc = -penal * (E0 - Emin) .* xPhys.^(penal - 1) .* ce
71     dv = ones(nely, nelx)
72
73     # FILTERING/MODIFICATION OF SENSITIVITIES
74     if ft == 1
75         dc[:] = H * (x[:] .* dc[:]) ./ Hs ./ max.(1e-3, x[:])
76     elseif ft == 2
77         dc[:] = H * (dc[:] ./ Hs)
78         dv[:] = H * (dv[:] ./ Hs)
79     end
80
81     # OPTIMALITY CRITERIA UPDATE OF DESIGN VARIABLES AND PHYSICAL DENSITIES
82     l1 = 0
83     l2 = 1e9
84     move = 0.2
85     xnew = 0
86     while (l2 - l1) / (l1 + l2) > 1e-3
87         lmid = 0.5 * (l2 + l1)
88         xnew = max.(0, max.(x .- move, min.(1, min.(x .+ move, x .* sqrt.(-dc ./ dv ./ lmid))))
89         if ft == 1
90             xPhys .= xnew
91         elseif ft == 2
92             xPhys[:] = (H * xnew[:]) ./ Hs
93         end
94         if sum(xPhys[:]) > volfrac * nelx * nely
95             l1 = lmid
96         else
97             l2 = lmid
98         end
99     end
100
101     change = maximum(abs.(xnew[:] .- x[:]))
102     x .= xnew
103
104     # PRINT RESULTS
105     println("Iteration: ", loop, " Obj: ", c, " Vol: ", mean(xPhys[:]), " ch: ", change)
106 end

```

Algunos de los resultados del anterior fragmento de código se muestran en la siguiente tabla:

Es notable que el algoritmo tiene como prioridad preservar la restricción sobre el volumen a lo largo de todas sus iteraciones. Además de esto, el código va disminuyendo correctamente el valor de la función objetivo a medida que



Iteración	Función objetivo	Volumen total	Cambio máximo de las densidades
1	1782.112	0.500	0.200
2	960.319	0.499	0.200
3	628.144	0.500	0.200
4	487.700	0.500	0.200
⋮	⋮	⋮	⋮
47	345.137	0.500	0.046
48	345.102	0.499	0.046
49	345.080	0.499	0.045
⋮	⋮	⋮	⋮
97	343.588	0.500	0.011
98	343.566	0.499	0.011
99	343.566	0.500	0.009

Cuadro 3: Algunos valores de la ejecución de la optimización topológica al problema de media viga MBB usando el método OC.

aumentan las iteraciones, el cambio máximo de las densidades de todos los elementos de la malla es tomado de tal manera que tenga una cota superior y se usa también como criterio de parada indicando la convergencia del algoritmo en la optimización topológica.

### 5.3.7. Graficar resultados (línea 107)

```
107 heatmap(1 .- xPhys[nely:-1:1, :], c=:grays, clim=(0, 1), aspect_ratio=:equal, axis=false)
```

El resultado obtenido para esta cantidad de elementos finitos, restringido a la mitad de volumen total y usando el método de filtrado, se obtiene lo siguiente



Figura 22: Resultado del algoritmo `top88` con una cuadrícula de  $60 \times 20$  elementos.

## 5.4. Método MMA

### 5.4.1. Elementos finitos

En el siguiente código se hace la declaración de variables que conciernen al método de elementos finitos aplicados al problema. La nomenclatura manejada en el código es exactamente igual a la implementación para el método de criterio de optimalidad.

```

1  nelx = 60
2  nely = 20
3  volfrac = 0.5
4  penal = 3
5  rmin = 1.5
6  ft = 1
7  # MATERIAL PROPERTIES
8  EO = 1
9  Emin = 1e-9
10 nu = 0.3
11 # PREPARE FINITE ELEMENT ANALYSIS
12 A11 = [12 3 -6 -3; 3 12 3 0; -6 3 12 -3; -3 0 -3 12]
13 A12 = [-6 -3 0 3; -3 -6 -3 -6; 0 -3 -6 3; 3 -6 3 -6]
14 B11 = [-4 3 -2 9; 3 -4 -9 4; -2 -9 -4 -3; 9 4 -3 -4]
15 B12 = [2 -3 4 -9; -3 2 9 -2; 4 9 2 3; -9 -2 3 2]
16
17 # 8x8 MATRIX
18 KE = 1/(1-nu^2)/24 * ([A11 A12; A12' A11] + nu * [B11 B12; B12' B11])
19
20 nodenrs = reshape(collect(1:(1+nelx)*(1+nely)), (1+nely, 1+nelx))
21 edofVec = reshape(2*nodenrs[1:end-1, 1:end-1] .+ 1, nelx*nely, 1)
22 edofMat = repeat(edofVec, 1, 8) .+ repeat([0 1 2*nely+2 2*nely+3 2*nely+0 2*nely+1 -2 -1],
23 nelx*nely, 1)
24
25 iK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(8,1))), 64*nelx*nely, 1)
26 jK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(1,8))), 64*nelx*nely, 1);
27 F = sparse(
28     [nelx / 2 * (nely + 1) + 2, 3 * nelx / 2 * (nely + 1) + 2],
29     [1, 1],
30     [-1, -1],
31     2 * (nely + 1) * (nelx + 1),
32     1
33 )
34 F = Matrix(F)
35 F[2,1] = -1
36
37 fixeddofs = union(1:2*2*(nely+1), [2*(nelx+1)*(nely+1)])
38 alldofs = 1:2*(nely+1)*(nelx+1)
39 freedofs = setdiff(alldofs, fixeddofs);

```

### 5.4.2. Ejecución MMA

En el siguiente código se realiza un proceso iterativo siguiendo la estructura definida para el método de asíntotas móviles. En primer lugar se define el máximo número de iteraciones, el máximo cambio en las componentes de las densidades. Luego de esto se procede con el ciclo de ejecución del método:

- Para el valor actual de las densidades  $x$  se redefine  $K$  y  $U$  dado que  $K$  es una matriz que depende del valor de  $x$  y  $U$  también depende de esta variable dado que se tiene la relación  $K(x)U = F$ . Esto se encuentra en las líneas 49 a 55 del código.
- Se definen los límites superiores e inferiores para las densidades agregándole o quitándole un valor fijo al valor

actual de las densidades, teniendo en cuenta que naturalmente las densidades toman un valor entre 0 y 1. Para evitar singularidades se toma  $10^{-3}$  en lugar de 0 como cota inferior de las densidades.

- Luego, se definen las variables necesarias para plantear el subproblema asociada a la iteración. Cabe recordar que algunas simplificaciones del problema se hicieron en secciones anteriores y ya se encuentran implícitas en el código. Esto se encuentra en las líneas 59 a 66 del código.
- Para resolver el subproblema planteado en cada iteración, se define la derivada de la función objetivo dual, denotada  $dW(y)$ , y se procede a hallar la raíz de esta función por medio del método de bisección. Es de importancia recordar que la función dual  $W$  es cóncava para todo  $y \geq 0$ , por lo tanto, basta hallar el punto que anula  $dW$  para encontrar su máximo.
- Se genera la actualización de las densidades  $x$  teniendo en cuenta que el nuevo valor de  $x$  es una combinación convexa de los valores de los límites inferiores y superiores definidos anteriormente, donde los coeficientes de tal combinación dependen del valor de  $y$  óptimo que maximiza la función objetivo dual. Esti se encuentra en la líneas 83 a 85 del código.
- Finalmente, se evalúa el valor de la función objetivo primal y se imprime el número de iteración, el valor de la función objetivo primal evaluada en el nuevo valor de las densidades, el promedio de las densidades y el cambio máximo que ocurre en las densidades. Si ese cambio es menor a una tolerancia fija (en este caso 0,01) entonces se detiene la iteración. Esto se encuentra en las líneas 82 a 90 del código.

```

40 max_iterations = 180 #MAXIMUM ITERATIONS
41 D = 0.2 #MAXIMUM CHANGE
42 N = nelx*nely #TOTAL NUMBER OF ELEMENTS
43 ## INITIAL VALUE OF x
44 x = fill(0.5, N)
45 for k in 1:max_iterations
46     #DEFINITION OF K AND U
47     sK = reshape(KE[:] * (reshape(x,nely, nelx)[:]' .^penal .* E0), 64*nelx*nely)
48     K = sparse(reshape(Int.(iK),64*nelx*nely), reshape(Int.(jK),64*nelx*nely),
49     reshape(sK,64*nelx*nely));
50     K = (K + K') / 2
51     U = zeros(size(F))
52     U[freedofs] .= K[freedofs, freedofs] \ F[freedofs]
53     #LOWER AND UPPER LIMITS
54     Low = map(x -> maximum([x .- D,1E-3]),x)
55     Upp = map(x -> minimum([x .+ D,1]),x)
56     #SUBPROBLEM DEFINITION
57     q0 = penal * (-(x-Low).^2) .* (x.^(penal-1)) .* [-U[edofMat[j, :]]' * E0 * KE * U[edofMat[j, :]]
58     for j in 1:N]
59     p1 = (Upp-x).^2
60     r0 = (F' * U)[1,1] - sum(q0 ./ (x-Low))
61     r1 = sum(x) - sum(Upp-x)
62     f1 = N * volfrac
63     b = f1 - r1
64     #DERIVATIVE FUNCTION OF DUAL OBJECTIVE FUNCTION
65     function dW(y)
66         aux = y^0.5 .* ((p1) ./ (q0)).^(0.5)
67         B = p1 .* (1 ./ aux)
68         return -2*b + sum( B ./ (Upp-Low))
69     end
70     #OPTIMUM Y
71     yo = bisection(dW,1E-8,20)
72     theta = (yo*p1).^0.5 ./ (( yo*p1).^0.5 + (q0).^0.5)
73     #MAXIMUM CHANGE OF DENSITY
74     change = maximum(abs.(x[:]) .- (theta .* Low + (1.-theta) .* Upp)[:]))
75     #NEW VALUES OF DENSITIES

```

```

76 global x = theta .* Low + (1.-theta) .* Upp
77 X = reshape(x, nely, nelx)
78 #PRIMAL OBJECTIVE FUNCTION
79 ce = reshape(sum((U[edofMat] * KE) .* U[edofMat], dims=2), nely, nelx)
80 c = sum(sum((Emin .+ X.^penal .* (EO - Emin)) .* ce))
81 #PRINT RESULTS
82 println("Iteration: ", k, " Obj: ", c, " Vol: ", mean(X[:]), " ch: ", change, "\n")
83 if change <= 0.01
84     break
85 end
86 end

```

Algunos de los resultados del anterior fragmento de código se muestran en la siguiente tabla:

Iteración	Función objetivo	Volumen total	Cambio máximo de las densidades
1	4834.805	0.445	0.192
2	1720.904	0.460	0.197
3	1066.615	0.455	0.156
4	923.505	0.459	0.118
5	721.091	0.451	0.122
⋮	⋮	⋮	⋮
71	390.715	0.480	0.093
72	389.635	0.481	0.086
73	388.625	0.482	0.101
⋮	⋮	⋮	⋮
145	377.539	0.498	0.014
146	377.538	0.498	0.011
147	377.537	0.498	0.008

Cuadro 4: Algunos valores de la ejecución de la optimización topológica al problema de media viga MBB usando el método MMA.

En este algoritmo se preserva la restricción sobre el volumen a lo largo de todas las iteraciones, el cambio máximo en las componentes de la densidad se toma como criterio de parada indicando convergencia; se puede evidenciar que a medida que se avanza en la iteración el valor de la función objetivo disminuye y además, toma valores similares a los que tomaba la función objetivo para el caso de OC.

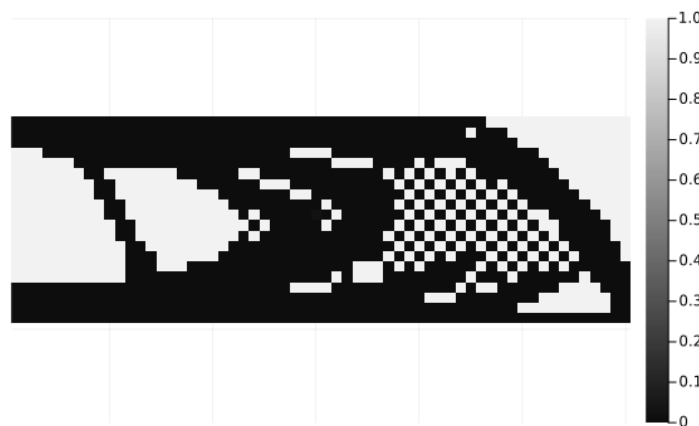


Figura 23: Resultado del algoritmo MMA con una cuadrícula de  $60 \times 20$  elementos.

## 6. Conclusiones

En este informe de proyecto se puede ver que, de los artículos originales, el uso de técnicas de programación que explotan lo mejor de MatLab como lenguaje de programación permite obtener una rutina eficiente para la solución de problemas complejos de optimización topológica, manteniendo la simpleza. Se evidenció además que esta dinámica se puede trasladar a Julia, ya que la implementación de este código en este lenguaje arrojó resultados aceptables. Se muestra que la inclusión del filtro de densidad refuerza la heurística de que esta técnica impone una independencia del enmallado, evitando patrones de tipo ajedrez en las soluciones encontradas.

Como alternativas de estudio a futuro, tenemos la posibilidad de estudiar la solución del problema de optimización en su formulación continua, además de estudiar otros problemas relacionados de optimización topológica, como su aplicación a otros problemas de física. Otra posible alternativa es comparar la viabilidad y eficiencia de los métodos estudiados, como lo son el de Optimality Criteria, o el Method of Moving Asymptotes.

## Referencias

- [Andreassen et al., 2011] Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B., and Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1):1–16.
- [Bendsøe, 2003] Bendsøe, M. P. (2003). *Topology optimization : theory, methods, and applications* / M.P. Bendsøe, O. Sigmund. Springer, 2nd ed. edition.
- [Bezanson et al., 2018] Bezanson, J., Chen, J., Chung, B., Karpinski, S., Shah, V. B., Vitek, J., and Zoubritzky, L. (2018). Julia: dynamism and performance reconciled by design. *Proc. ACM Program. Lang.*, 2(OOPSLA).
- [Bezanson et al., 2012] Bezanson, J., Karpinski, S., Shah, V. B., and Edelman, A. (2012). Julia: A fast dynamic language for technical computing.
- [Bourdin, 2001] Bourdin, B. (2001). Filters in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(9):2143–2158.
- [Felipe, 0 03] Felipe, O. V. A. (2023-10-03). On numerical solutions of topology optimization problems.
- [Girotti, 2009] Girotti, M. (2009). A variational formulation of pde's.
- [Gockenbach, 2006] Gockenbach, M. S. (2006). *Understanding and implementing the finite element method* / Mark S. Gockenbach. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [G.R. and S. S., 2013] G.R., L. and S. S., Q. (2013). *The Finite Element Method : A Practical Course.*, volume Second edition. Butterworth-Heinemann.
- [Serrano, sf] Serrano, S. (s.f.). Topology optimization for the elasticity problem.
- [Sigmund, 2001] Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2):120–127.
- [Svanberg, 1987] Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):359–373.
- [W Michael et al., 2010] W Michael, L., David, R., and Erhard, K. (2010). *Introduction to Continuum Mechanics.*, volume 4th ed. Butterworth-Heinemann.