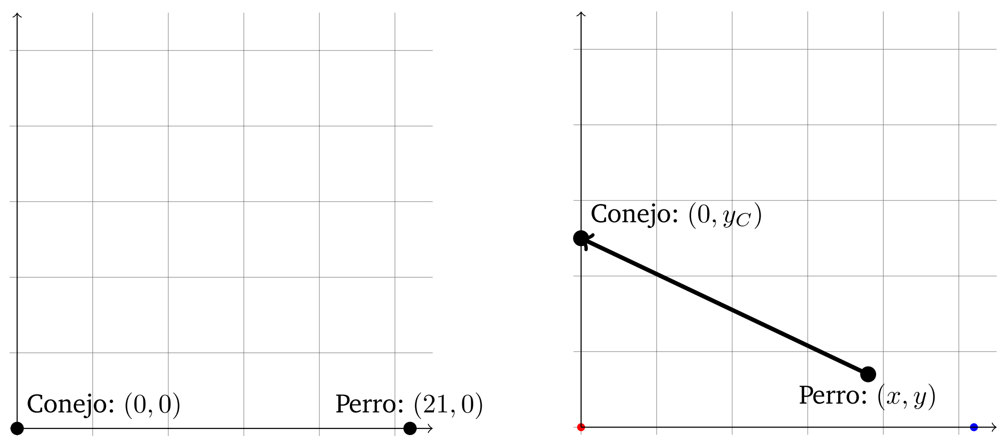
Trabajo Final.
Cálculo de ecuaciones diferenciales ordinarias

Profesor: Hernán Garzón Gutierrez

Carlos Nosa G. cnosa@unal.edu.co D.I.:1000835706

El perro y el conejo

Un perro ve a un conejo corriendo por campo abierto y corre a darle caza. Suponga que en un sistema rectangular de coordenadas o plano XY, en el instante inicial el conejo está en el origen y el perro en el punto $(21, 0)$. El conejo corre hacia arriba por el eje Y a una velocidad constante $a = 6$, mientras que el perro corre siempre directo tras él a una velocidad de $a + 2 = 8$, siguiendo una trayectoria que denotaremos como $y(x)$.



Posición inicial, $t = 0$. Posición en el tiempo t.

Figura 1: Posiciones en diferentes tiempos.

1. ¿Cuál es la ecuación diferencial que describe la trayectoria $y(x)$?
   Sabemos que el conejo corre en línea recta desde el origen hacia el eje Y positivo, donde su posición en el tiempo t es $(0, y_C)$ donde $y_C = a \cdot t$. Mientras que el conejo sigue esta trayectoria recta, el perro corre directo hacia al conejo, esto significa que en un momento t, la recta tangente a la trayectoria es un la recta que conecta la posición del perro $(x, y(x))$ y el punto donde se encuentra el conejo $(0, y_C)$, por lo tanto
   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - y_C}{x - 0} = \frac{y - y_C}{x} = \frac{y - at}{x} \tag{1}$$
   o bien,
   $$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = -at \tag{2}$$

Para dejar todo en términos de x y y obsérvese que la distancia que recorre el perro está dada por

$$s(x) = \int_x^{21} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\tau)\right)^2} \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

$$s(t) = (a+2)t \tag{4}$$

La igualdad en (3) se tiene puesto que la expresión del lado derecho de la ecuación representa la distancia que ha recorrido el perro desde el punto inicial $(21, 0)$, hasta un punto $(x, y(x))$. La segunda igualdad es válida ya que inicialmente conocemos que el perro va a una velocidad de $a+2$ hacia el conejo. Tomando a x como una función de t, deducimos que

$$\int_x^{21} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\tau)\right)^2} \mathrm{d}\tau = (a+2)t \tag{5}$$

Por propiedades de las integrales, despejando t de (5) queda

$$\frac{-1}{a+2} \int_{21}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\tau)\right)^2} \mathrm{d}\tau = t \tag{6}$$

Por último, reemplazamos lo obtenido en (6) en la ecuación (2) que resulta en la siguiente ecuación diferencial

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \frac{a}{a+2} \int_{21}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\tau)\right)^2} \mathrm{d}\tau \tag{7}$$

2. Resuelva esta ecuación diferencial.
   Para resolver la ecuación (7), derivemos[1] respecto a x:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{a+2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2}$$

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{a}{a+2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2}$$

Haciendo el reemplazo $w := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ resulta

$$x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{a+2}\sqrt{1+w^2} \tag{8}$$

Es sencillo notar que la ecuación (8) es de variables separables, por ende

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1+w^2}} &= \int \frac{a}{a+2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
ln(\sqrt{1+w^2} + w) &= \frac{a}{a+2} ln(x) + c_0 \\
arcsinh(w) &= \frac{a}{a+2} ln(x) + c_0 \\
w &= sinh\left(\frac{a}{a+2} ln(x) + c_0\right) \\
w &= \frac{e^{\frac{a}{a+2}ln(x)+c_0} + e^{-\frac{a}{a+2}ln(x)+c_0}}{2} \\
w &= \frac{e^{c_0}}{2}x^{\frac{a}{a+2}} + \frac{e^{-c_0}}{2}x^{-\frac{a}{a+2}}
\end{aligned}$$

[1]Dado que la trayectoria que recorre el perro es continua, la derivada del lado derecho de la ecuación (7) se justifica por el Teorema Fundamental del Cálculo.

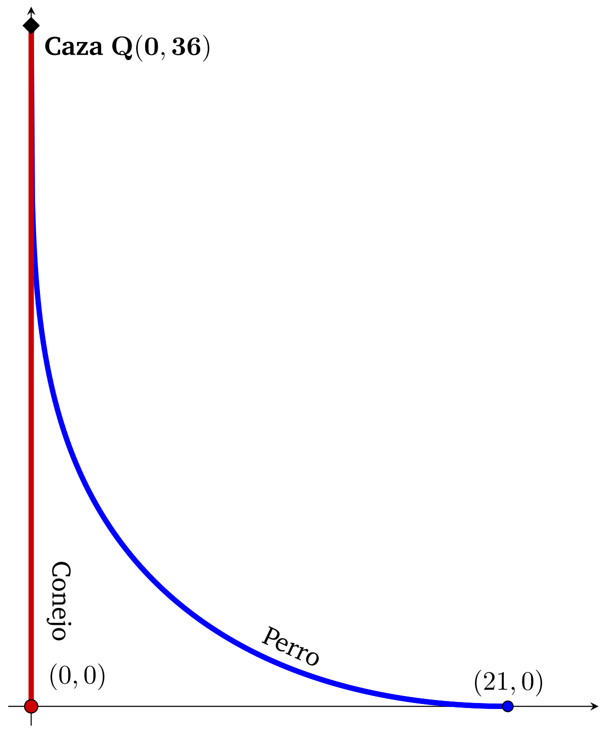


Figura 2: Trayectorias.

Teniendo en cuenta que $w = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, integramos la anterior expresión respecto a x, así,

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{dx} \\ &= \int w \, \mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{e^{c_0}}{2} x^{\frac{a}{a+2}} + \frac{e^{-c_0}}{2} x^{-\frac{a}{a+2}} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{c_0}}{2} \frac{x^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} - \frac{e^{-c_0}}{2} \frac{x^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1} + c_1 \end{aligned}$$

Concisamente,

$$y(x) = \frac{e^{c_0}}{2} \frac{x^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} - \frac{e^{-c_0}}{2} \frac{x^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1} + c_1 \tag{9}$$

Para hallar las constantes c_0 y c_1 surgidas del proceso de integración, observemos que

- Dado que en el tiempo $t = 0$ el conejo se encuentra en $(0,0)$ y el perro en $(21,0)$ entonces el perro comienza corriendo a lo largo del eje X, esto significa que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(21) = 0$. Además, por lo visto anteriormente sabemos que

  $$w = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = sinh\left(\frac{a}{a+2} ln(x) + c_0\right)$$

  por consiguiente,

  $$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(21) &= sinh\left(\frac{a}{a+2} ln(21) + c_0\right) \\ 0 &= \frac{a}{a+2} ln(21) + c_0 & & sinh(p) = 0 \text{ si y sólo si } p = 0 \\ c_0 &= -\frac{a}{a+2} ln(21) \end{aligned}$$

- En segundo lugar, dado que la posición inicial del perro es en el punto $(21, 0)$ entonces $y(21) = 0$; de la ecuación (9) se sigue que

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{e^{c_0}}{2}\frac{21^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} + \frac{e^{-c_0}}{2}\frac{21^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1} \\ &= -\frac{e^{-\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{21^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} + \frac{e^{\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{21^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(x) = \frac{e^{-\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{x^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} - \frac{e^{\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{x^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1} - \frac{e^{-\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{21^{\frac{a}{a+2}+1}}{\frac{a}{a+2}+1} + \frac{e^{\frac{a}{a+2}ln(21)}}{2}\frac{21^{-\frac{a}{a+2}+1}}{-\frac{a}{a+2}+1}$$

o bien,

$$y(x) = \frac{21^{-\frac{a}{a+2}}x^{\frac{a}{a+2}+1} - 21}{\frac{2a}{a+2}+2} - \frac{21^{\frac{a}{a+2}}x^{-\frac{a}{a+2}+1} - 21}{-\frac{2a}{a+2}+2} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que $a = 6$,

$$y(x) = \frac{21^{-0,75}x^{1,75} - 21}{3,5} - \frac{21^{0,75}x^{0,25} - 21}{0,5} \tag{11}$$

donde $x \in (0, 21]$.[2] Esta curva se puede visualizar en la Figura 2.

3. Halle el punto $Q(0, M)$ donde el perro da caza al conejo.
   Al tomar el límite de $y(x)$ cuando $x \longrightarrow 0^+$ obtenemos que $y(x) \approx 36{,}00$. Por ende,

   Para punto $Q(0, M)$ donde el perro da caza al conejo, $M \approx 36{,}00$.

[2] De la ecuación (1) podemos notar que la trayectoria descrita por la función y no se encuentra definida cuando $x = 0$.