Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Álgebra Abstracta y Computacional
Fracciones Continuas y Sucesiones de Farey

Taller (II-2021)

Douglas Leonardo Velasquez Rodriguez. dovelasquezr@unal.edu.co Matematicas
Beimar Jose Naranjo Morales. bnaranjom@unal.edu.co Matematicas
Carlos Enrique Nosa Guzman. cnosa@unal.edu.co Matematicas

Los problemas que aparecen señalados con los símbolos 🕮 y ♜ deben ser resueltos en Mathematica. No olvide que debe justificar cada una de sus respuestas.

1. Encuentre la representación en fracción continua para $\sqrt{2022}$. Pista: tiene periodo 4.
2. Pruebe que $e^{1/n}$ es irracional para todo entero $n \geq 1$. Concluya que e es irracional.
3. (♜) Realice una función en *Mathematica*® llamada `ArbolFarey[n]` que muestre en pantalla la representación en forma del árbol de Stern-Brocot del conjunto Υ_n. Imprima `ArbolFarey[11]`.
   - ¿Cuántos elementos tiene por nivel el árbol de Stern-Brocot?
4. (🕮) Implemente en *Mathematica*® el algoritmo "Descenso por el árbol de Stern-Brocot" de manera que haga lo siguiente para un número n ingresado por el usuario:
   - Imprima la lista de las primeras n convergentes de la fracción continua
   - Imprima la fracción continua correspondiente a la última convergente en la lista.
5. (Otra visualización de la sucesiones de Farey)

   a) Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones en el intervalo $[0, 1]$. Considere el cuadrilátero formado por los vértices
   $$\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \quad \left(\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{0}{1}\right) \quad \left(\frac{c}{d}, \frac{0}{1}\right)$$
   ¿Cúal es el punto de corte de las diagonales del cuadrilátero?

   En base a este resultado, ¿cómo puede construir una representación de la sucesión de Farey?

   b) (🕮) Implemente un algoritmo en *Mathematica*® que construya las sucesiones de Farey teniendo en cuenta el ítem *a)*. Muestre la gráfica de Υ_{10}.

6. (Teorema de Dirichlet) Demuestre el siguiente teorema

   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qn}$.

   (Ayuda: Tome en Υ_n las fracciones adyacentes más cercanas a α)

7. Usando transformaciones fraccionarias lineales, encuentre el número al cuál converge la fracción $[\overline{1, 2, 3}]$. (Verifique su respuesta en *Mathematica*®)
   Solución. Tomando $T(z) = \frac{2z+7}{3z+10}$ se puede verificar que esta transformación se ajusta al periodo de la fracción en la *"triangle strip"* correspondiente y por tanto basta solucionar la ecuación $\frac{2z+7}{3z+10} = z$ para hallar el número que estamos buscando.
   Las soluciones de esta ecuación son $\frac{-4\pm\sqrt{37}}{3}$, y como se habia aclarado antes, la solución positiva es la correspondiente al número que estamos buscando, esto es, $z = \frac{-4+\sqrt{37}}{3}$.
   ▲

8. (Convergentes con sucesiones de Farey)

   a) Para los siguientes números construya las *convergentes* haciendo uso de las sucesiones de Farey y de la fracción continua del número

   - 24/67
   - e con 5 grados de aproximación
   - 719/1001

   b) (🕮) Cree una función en *Mathematica*® la cuál dé como resultado la sucesión de *convergentes* haciendo uso de las sucesiones de Farey y pruebe su función con los números del ítem *a)*. Compare con la función `Convergents[]`.

   c) Pruebe que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Upsilon_n = \mathbb{Q}$.

9. (**Bonus opcional**) (♜) Cree una función que muestre el camino en forma de zigzag de la sucesión de *convergentes* y, de nuevo, pruebe su función con los números del ítem *a)* del punto 8.

10. (🕮) (`Manipulate`) (Pinball path approximation) Construya un programa que muestre en pantalla la aproximación a un número cualquiera por medio de sus *convergentes* en el diagrama de la sucesión de Farey construido con semicírculos (Ayuda: Use el teorema de la página 15 de [1]). Verifique que las *convergentes* de un número r son alternativamente menores y mayores que r. Muestre la aproximación de la ruta de pinball del número de Euler con un 6 grados de aproximación.

. . . .

[1] Hatcher, A. (n.d.). The Farey Diagram. In Topology of Numbers (1st ed., Vol. 1, p. 44). Cornell University. https://pi.math.cornell.edu/˜hatcher/TN/TNch1.pdf

[2] Borwein, J., van der Poorten, A., Shallit, J., & Zudilin, W. (2014). Neverending fractions: An introduction to continued fractions. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511902659