Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Álgebra Abstracta y Computacional
Fracciones Continuas y Sucesiones de Farey
(II-2021)

Douglas Leonardo Velasquez Rodriguez. dovelasquezr@unal.edu.co Matematicas
Beimar Jose Naranjo Morales. bnaranjom@unal.edu.co Matematicas
Carlos Enrique Nosa Guzman. cnosa@unal.edu.co Matematicas

Resumen

Las sucesiones de Farey están relacionadas con muchos conceptos de la teoría de números, y por su sencilla definición y propiedades, pueden resultar bastante útiles para estudiar algunos de estos conceptos.
El objetivo de este texto es presentar algunas de las propiedades de esta sucesión y aplicarlas en el estudio de varios problemas de la teoría de números, entre ellos:
-Solución de ecuaciones Diofánticas: observando la relación entre las sucesiones de Farey y el algoritmo de Euclides se puede deducir un metodo para obtener los coeficientes de la combinación lineal que da el algoritmo extendido de Euclides y por ende solucionar ecuaciones diofánticas.
-Aproximación racional de números reales: la estrecha relación de las fracciones continuas con algunas de las representaciones de las sucesiones de Farey permite desarrollar métodos sencillos para construir fracciones continuas, y a su vez ir obteniendo las convergentes de esta.

1. Conceptos y resultados básicos

1.1. Construyendo las sucesiones de Farey

Para facilitar algunas definiciones y proposiciones de esta sección asumiremos que dada una fracción $\frac{a}{b}$ el denominador siempre es positivo, es decir, $b > 0$.

Definición 1.1. *Una fracción $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es* ***irreducible*** *si $mcd(a, b) = 1$, de lo contrario la fracción es* ***reducible****.*

Definición 1.2 (Mediana)**.** *Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se define la* ***mediana*** *como la fracción $\frac{a+c}{b+d} \in \mathbb{Q}$.*

Antes de definir las sucesiones de Farey, probemos algunos resultados para tener un concepto bien definido

Proposición 1.1. *La mediana de dos fracciones diferentes se encuentra en el intervalo creado por las dos fracciones.*

Demostración. Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, suponga que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, esto significa que $ad < bc$ de lo que se deduce

- $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ dado que

$$\begin{aligned} ad &< bc \\ ab + ad &< ab + bc \\ a(b+d) &< b(a+c) \\ \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

- $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ puesto que

$$\begin{aligned} ad &< bc \\ cd + ad &< cd + bc \\ d(a+c) &< c(b+d) \\ \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \end{aligned}$$

■

Proposición 1.2. *Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ son fracciones tales que $det(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)) = \pm 1$ entonces,*

1. *$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones irreducibles*
2. *$det(\left(\begin{smallmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{smallmatrix}\right)) = \pm 1$ y $det(\left(\begin{smallmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{smallmatrix}\right)) = \pm 1$*
3. *$\frac{a+b}{c+d}$ es una fracción irreducible*
4. *Si $\frac{p}{q}$ es irreducible y $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ entonces $q > b$ y $q > d$.*

Demostración.

1. Dado que $ad - bc = \pm 1$ entonces $mcd(a, b) = mcd(c, d) = 1$, esto significa que son fracciones irreducibles.
2. Dado que
$$a(b+d) - b(a+c) = ab + ad - ab - bc = ad - bc = \pm 1$$
Similarmente se prueba la otra igualdad
3. Se deduce de los anteriores resultados.
4. Es consecuencia de la hipótesis $det(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)) = \pm 1$.

Al iniciar el siglo XIX, el geólogo John Farey descubrío la íntima relación que tiene la construcción de los números racionales en el intervalo $[0, 1]$ y la definición de *mediana* entre cualesquiera dos fracciones que cumplan una condición especial (que veremos más adelante) en este intervalo.

Considere las siguientes definiciones

Definición 1.3. *El conjunto Γ_n de define para todo n natural mayor que cero como*

$$\Gamma_n := \left\{ \frac{a}{b} \in [0,1] : mcd(a,b) = 1 \wedge a \leq b \leq n \right\}$$

Definición 1.4. *Se definen los conjuntos Υ_n inductivamente para todo natural $n \geq 1$*

- $\Upsilon_1 := \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$
- $\Upsilon_n := \Upsilon_{n-1} \cup M_{n-1}$, *donde M_{n-1} es el conjunto*

$$M_{n-1} = \left\{ \frac{a+c}{b+d} : \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \Upsilon_{n-1} \wedge \left(\nexists\ \frac{e}{f} \in \Upsilon_{n-1} : \frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \right) \wedge b + d = n \right\}$$

es decir, M_{n-1} es el conjunto de todas las medianas de dos fracciones adyacentes[1] *en el conjunto Υ_{n-1}.*

Definición 1.5 (Sucesión de Farey)**.** *La **sucesión de Farey** corresponde a la sucesión $\{\Upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Para valores pequeños de n podemos ver que

$$\Upsilon_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} = \Gamma_1, \quad \Upsilon_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \Gamma_2, \quad \Upsilon_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\} = \Gamma_3, \quad \ldots$$

Esto nos motiva a demostrar el siguiente teorema

Teorema 1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ se tiene que $\Upsilon_n = \Gamma_n$.*

Demostración. Probemos este enunciado mostrando la doble contenencia

- $(\subseteq)$: Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sea $\frac{a}{b} \in \Upsilon_n$. Si $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ o $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ o bien, si $\frac{a}{b}$ es la mediana de otras fracciones del intervalo $[0,1]$ entonces $\frac{a}{b} \in [0,1]$ por la *proposición 1.1*. Ahora, por el tercer ítem de la *proposición 1.2* es fácil ver que todo elemento en el conjunto Υ_n es una fracción irreducible.

  Dados $\frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \Upsilon_{n-1}$ entonces por construcción de los conjuntos Υ se tiene que $c \leq d$ y $e \leq f$, así, para la fracción $\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f}$ se tiene que $a \leq b$ con $b = n$, luego, finalmente podemos afirmar que $\frac{a}{b} \in \Gamma_n$. O sea, $\Upsilon_n \subseteq \Gamma_n$.

- $(\supseteq)$: Sea $\frac{s}{t} \in \Gamma_n$. Suponga que $\frac{s}{t} \notin \Upsilon_n$, de esta forma, como $\Upsilon_n \subseteq \Gamma_n$ entonces sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \Upsilon_n$ las fracciones adyacentes más cercanas a $\frac{s}{t}$ tales que $\frac{a}{b} < \frac{s}{t} < \frac{c}{d}$; nótese que

[1] Adyacentes en el orden usual de los racionales.

$b+d \geq n+1$[2]. Por la *proposición 1.2* se tiene que $\frac{a+c}{b+d} \neq \frac{s}{t}$. Así

$$\frac{a}{b} < \frac{s}{t} < \frac{a+c}{b+d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{s}{t} < \frac{c}{d}$$

Teniendo en cuenta el segundo y cuarto ítem de la *proposición 1.2* se concluye que $t > b+d \geq n+1$ de esta forma $\frac{s}{t} \notin \Gamma_n$, lo cuál es absurdo.

■

Una vez terminada la demostración de éste teorema podemos afirmar con toda validez que dado cualquier número racional, podemos "alcanzarlo"por medio de las sucesiones de Farey.

Una de las representaciones de este hecho es mostrada en la figura de la derecha la cuál asimila la construcción de la sucesión $\{\Upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, en la parte superior de la figura comenzamos con las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ como el primer nivel, luego, por cada nivel vamos añadiendo las medianas de las fracciones que queden como adyacentes. Esta representación gráfica se relaciona con el *árbol de Stern-Brocot*, el cuál se presentará más adelante.

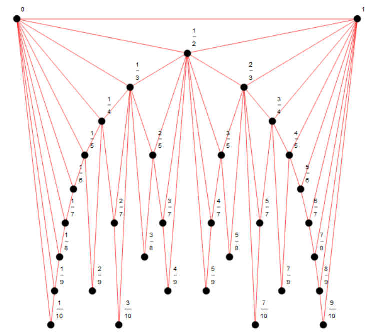

Figura 1: Racionales en $[0, 1]$.

Otra representación de la sucesiones de Farey es en forma de diagramas circulares, dadas dos fracciones adyacentes en el conjunto Υ_n, ubicamos estas dos fracciones en la recta real y conectamos estas dos fracciones por medio de un semicírculo, como lo muestra la figura .

Para ver que este diagrama se encuentra bien construido tenemos el resultado del siguiente teorema.

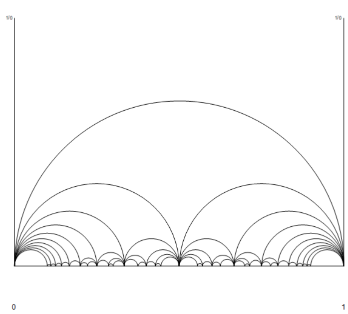

Figura 2: Diagramas circular de Υ_{10}.

Teorema 1.2. *En el diagrama círcular de Υ_n, dos vértices $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son unidos por un semicírculo si y sólo si $det\left(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm 1$.*

Demostración. Obsérvese que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones que cumplen que $det\left(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm 1$ entonces por la *proposición 1.2* se tiene que su mediana satisface $det\left(\left(\begin{smallmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm 1$ y $det\left(\left(\begin{smallmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm 1$. Como $\Upsilon_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ satisface que $det\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm 1$, por construcción de

[2]En principio dado que $b \leq n$ y $d \leq n$ entonces $1 \leq b+d \leq 2n$; si se tuviera que $b+d < n+1$ entonces existiría otro par de fracciones adyacentes más cercanas a $\frac{s}{t}$, tales fracciones podrían ser $\left\{\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right\}$ o $\left\{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right\}$.

las sucesiones de Farey se tiene que cualquier par de fracciones adyacentes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ satisface la igualdad $det(\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)) = \pm 1$.

1.2. Introducción a las fracciones continuas

Las fracciones continuas, seguramente conocidas por el lector, más allá de su definición formal son una manera de expresar un número en forma de fracción, cualidad que permite, entre otras cosas, probar ciertas propiedades como la racionalidad de un número, luego, uno se interesa por determinar fracciones continuas para números como e, ϕ[3] y π, y en general para cualquier número real, sin embargo, esta resulta ser una tarea, muchas veces, complicada. A continuación se muestra la fracción continua para e, aunque no se incluyan las demostraciones correspondientes, estas pueden ser vistas en [2].

Teorema 1.3 (Teorema de Euler-Lambert)**.** *Para todo entero $y \geq 1$, tenemos que*

$$\tanh\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{e^{1/y} - e^{-1/y}}{e^{1/y} + e^{-1/y}} = [0; y, 3y, 5y, 7y, \dots];$$

Note que si en particular $y = 2$,

$$\frac{e-1}{e+1} = [0; 2, 6, 10, 14, \dots]$$

Aprovechamos este hecho para mostrar que

Teorema 1.4 (Fracción continua para el número e)**.** *La fracción continua para e es de la forma $e = [a_0; a_1, a_2, \dots] = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$, es decir, $a_0 = 2$, $a_{3m-2} = a_{3m} = 1$ y $a_{3m-1} = 2m$ para $m \geq 1$.*

En especial, veremos en este informe que las fracciones continuas pueden ser vistas desde las sucesiones de Farey.

1.2.1. Teoría algebraica de las fracciones continuas

Para hacer un estudio más profundo de las fracciones continuas que lo presentado hasta ahora definiremos los *continuantes*[4] p_n y q_n como los polinomios $p_n = p_n(a_0; a_1, \dots, a_n)$, $q_n = q_n(a_0; a_1, \dots, a_n)$ donde las variables $(a_0; a_1, \dots, a_n)$ son los coeficientes parciales de una fracción continua finita, y tomando $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_n = a_0 p_{n-1}(a_1; a_2, \dots, a_n)$ y $q_n = p_{n-1}(a_1; a_2, \dots, a_n)$ vemos que por ejemplo $p_1 = a_0 a_1 + 1$ y $q_1 = a_1$. Y en búsqueda de

[3]Se verá en la próxima sección.

[4]Recuerde que una *convergente* p_n/q_n es el racional obtenido al desarrollar (simplificar) una fracción continua hasta el n-ésimo coeficiente, es decir, $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

una notación más conveniente, diremos que el cociente de polinomios es de la forma

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n]} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Sin embargo, una forma que más útil a la hora de abarcar el desarrollo de la teoría es definir p_n y q_n de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{n-1} \\ q'_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde la prima significa que el conjunto de variables se corrió un posición, esto es: $p'_{n-1} = p_{n-1}(a_1; a_2, \ldots, a_n)$ y $q'_{n-1} = q_{n-1}(a_1; a_2, \ldots, a_n)$. Note que si iteramos la matriz obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y es que gracias a esta observación podemos deducir el siguiente resultado

Lema 1.5. (Lema clave) *Para todo $n \geq 1$*

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. En el anterior desarrollo tome la primera expresión para el vector $(p_n, q_n)^\top$ y la segunda (reemplazando n por n-1) para $(p_{n-1}, q_{n-1})^\top$.
El nombre de este lema no es para menos, ya que es muy útil, junto con la representación matricial, para casi todas las demostraciones de a continuación. Más aún, ¡nos muestra propiedades interesantes!, note que si transponemos la matriz del lema clave, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analizando esta igualdad (cuando $n \geq 1$) en conjunto a la forma matricial que le dimos a las convergente p_n/q_n vemos fácilmente que $q_n/q_{n-1} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1]$ y $p_n/p_{n-1} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0]$. Si en vez de la transpuesta ahora calculamos el determinante de la matriz,

Teorema 1.6. *Para $n \geq 1$, la igualdad $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ se cumple.*

Luego si $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k|p_n$ y $k|q_n$, por lo anterior, $k|(-1)^n$, luego p_n y q_n son siempre ¡primos relativos! Ahora suponga que quiere saber el valor de la fracción continua finita $[\{1\}^n] = [1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n\ veces}]$, y por añadidura, ¿qué pasa cuando $n \to \infty$? para ello:

Lema 1.7. *Para todo $n \geq 1$ se tienen las igualdades $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ y $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.*

Demostración. Se sigue directamente de la primera igualdad en el lema clave.

Entonces si $a_n = 1$ para $n \geq 1$, se concluye que dicha fracción continua guarda relación con la sucesión de Fibonacci, y cuando $n \to \infty$, como $\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$, con el número áureo. Este resultado también permite concluir que si todos los coeficientes parciales de una fracción continua son enteros positivos entonces $0 < q_1 < \cdots < q_n < \cdots$, dado que $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $q_n > q_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Pero esta monotonicidad, ¿se tiene también para las convergentes?

Teorema 1.8. *Para $n \geq 1$, se tiene que $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$.*

Si tuviéramos que $n \geq 2$ dividiendo dicha igualdad por $-q_{n-2} q_n$ obtenemos

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}$$

Por tanto, si los coeficientes parciales son positivos (no necesariamente enteros), para los n pares la sucesión p_n/q_n es estrictamente creciente, mientras que para los n impares es estrictamente decreciente.
El siguiente teorema, debido a Legendre, nos proporciona un método para saber si una fracción (un racional) hace parte de las convergentes de un cierto número real.

Teorema 1.9 (Teorema de Legendre)**.** *Sean p y $q > 0$ enteros y primos relativos, si*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

entonces p/q es convergente de α.

Cerramos esta sección mostrando un método para encontrar fracciones continuas para ciertos números irracionales. En general, si se trata de un número racional, encontrar su fracción continua, que se puede probar existe y es única mediante el algoritmo de Euclides, es en términos computacionales, una tarea sencilla, el problema radica, para los números irracionales. Afortunadamente, existen algoritmos para los irracionales cuadráticos[5] que permiten encontrar la expresión deseada. Los algoritmos existentes para cada real corren en tiempo finito gracias, principalmente, a los siguientes dos resultados,

[5]Dichos irracionales son de la forma $(P + \sqrt{D})/Q$, con $P, Q, D \in \mathbb{Z}$ con $Q \neq 0$ y D libre de cuadrados.

Proposición 1.3. *La representación en fracción continua de*

- *un real es finita si y solo sí ese número es racional.*
- *un racional "simple" es generalmente corta.*
- *un racional es única siempre que no acabe en 1.*[6]

Teorema 1.10. *Una fracción continua es periódica infinita si y solo si representa a un número irracional cuadrático.*

Adicionalmente, el siguiente teorema puede resultar muy útil a la hora de probar la irracionalidad de un número,

Teorema 1.11. *El producto entre un entero (o su inverso multiplicativo) y una fracción continua infinita, es una fracción continua infinita.*

1.2.2. Algoritmo PQa

Este algoritmo ([3]), es elemental para muchos de los métodos que se usan para resolver las ecuaciones de Pell. Lo que permite, explícitamente, es encontrar la representación en fracción continua de un irracional cuadrático $(P + \sqrt{D})/Q$ y adicionalmente nos entrega las i-ésimas convergentes:

- Inicializamos ciertas variables,
  - $P_0 = P$, $Q_0 = Q$,
  - $A_{-2} = 0$, $A_{-1} = 1$,
  - $B_{-2} = 1$, $B_{-1} = 0$,
  - $G_{-2} = -P_0$, y $G_{-1} = Q_0$.
- Para $i \geq 0$ hacemos
  - $a_i = \left\lfloor (P_i + \sqrt{D})/Q_i \right\rfloor$,
  - $A_i = a_i A_{i-1} + A_{i-2}$,
  - $B_i = a_i B_{i-1} + B_{i-2}$,
  - $G_i = a_i G_{i-1} + G_{i-2}$
- y para $i \geq 1$

$$P_i = a_{i-1}Q_{i-1} - P_{i-1} \quad \text{y}$$
$$Q_i = (D - P_i^2)/Q_{i-1}$$

Para tener un conocimiento detallado de cuándo parar el algoritmo se recomienda ver Ref[3], pero ambiguamente podríamos detenerlo cuando los coeficientes parciales a_i se repitan, es decir, cuando se haya detectado el periodo. Aquí A_i y B_i son los i-ésimos continuantes y a_i los coeficientes parciales de la fracción continua correspondiente.

[6] De hecho se tiene que $[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1]$.

2. Algoritmos y aplicaciones

2.1. Descendiendo por el árbol de Stern-Brocot

2.1.1. Definición

El árbol de Stern-Brocot es un árbol cuyos vertices se corresponden uno a uno con los racionales positivos, que además aparecen en orden a medida que se recorre el arbol por cada una de sus ramas o mirando los vertices del mismo nivel de izquierda a derecha.
Para construir el árbol empezamos con las fracciones $0/1$ y $1/0$ (si bien esta última no representa ningún número, es útil pensar en ella como algo que representa el infinito) y para cada nuevo nivel en el árbol, agregamos la mediana de las fracciones que sean adyacentes en el nivel anterior.
De esta manera obtendremos un árbol que se parece al presentado en la siguiente imagen:
Las principales propiedades por las cuales este árbol es tan importante se mencionan a continuación:

Proposición 2.1. *En el árbol de Stern-Brocot:*

- *Cada número racional positivo aparece una única vez.*
- *Todos ellos aparecen en su forma irreducible.*

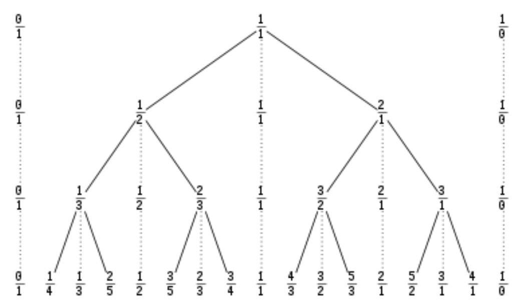

Figura 3: Arbol de Stern-Brocot

Estas propiedades junto con las propiedades de las sucesiones de Farey y las fracciones continuas proporcionan un método sencillo para calcular estas últimas junto con sus respectivas convergentes como veremos a continuación.

2.1.2. Algoritmo

Para comenzar, llevaremos la ruta que hace x al descender por el árbol en una lista que llamaremos L y procederemos de la siguiente manera:
Dado $x \in \mathbb{R}$, recordando que en el primer nivel del árbol están las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$, calculamos la mediana de estas fracciones, que en este caso es la fracción $\frac{1}{1}$ y la comparamos con x, de manera que si $x < \frac{1}{1}$ agregamos I a nuestra lista L (lo que esto quiere decir es que x se encuentra a la izquierda de $\frac{1}{1}$), o si $\frac{1}{1} < x$ agregamos D a la lista (esto quiere decir que x está a la derecha de $\frac{1}{1}$). En el caso $x = \frac{1}{1}$ habremos terminado.
En el primer caso repetimos el proceso con $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ y en el segundo caso con $\frac{1}{1}$ y $\frac{1}{0}$.
De manera mas general, si llegamos a $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$, calculamos $\frac{a+c}{b+d}$ y en caso de que $\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d}$ agregamos I a la lista y repetimos el proceso con las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+c}{b+d}$ o en el otro caso,

$\frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d}$, agregamos D a la lista y continuamos con las fracciones $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{c}{d}$. De nuevo, en caso de que $x = \frac{a+c}{b+d}$ habremos terminado.
Luego, usando la ruta de x en el arbol, que está codificada en la lista $L = \{D^{a_0}L^{a_1}D^{a_2}L^{a_3}\cdots\}$ podemos construir la fracción continua de x, ya que de los resultados trabajados en las secciones anteriores se puede deducir que $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$.
Con esto tambien podemos encontrar las convergentes de $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ ya que basta truncar la lista L en donde termine una secuencia de Is o Ds seguidas, descender por el árbol hasta donde indique, y la fracción donde nos detengamos será una convergente.

Ejemplo 2.1. *Encontremos la tercera convergente del número e.*

- *Como $\frac{1}{1} < e$ agregamos D a la lista y tenemos $L = \{D\}$*
- *Como $\frac{1}{1} < e$ agregamos D a la lista y tenemos $L = \{D\}$*
- *Como $\frac{2}{1} < e$ agregamos D a la lista y tenemos $L = \{D^2\}$*
- *Como $e < \frac{3}{1}$ agregamos I a la lista y tenemos $L = \{D^2I\}$*
- *Como $\frac{5}{2} < e$ agregamos D a la lista y tenemos $L = \{D^2ID\}$*
- *Como $\frac{8}{3} < e$ agregamos D a la lista y tenemos $L = \{D^2ID^2\}$*
- *Como $e < \frac{11}{4}$ agregamos I a la lista y tenemos $L = \{D^2ID^2I\}$*

Con esto nos aseguramos de tener las primeras tres secuencias de Is y Ds, y al truncar la lista a estas primeras tres secuencias, tenemos que la tercera convergente de e, que es la última mediana para la cual se agregó D a la lista, es $\frac{8}{3}$ y su representación en fracción continua es $[2; 1, 2]$.

2.2. Encontrar los convergentes en el Diagrama de Farey

Las sucesiones de Farey ofrecen un camino sencillo para hallar los convergentes de una fracción continua. El siguiente resultado es la base teórica del algortimo.

Teorema 2.1. *Los convergentes para la fracción continua $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ son los vértices a lo largo del camino en zigzag los cuales consisten en una sucesión finita de elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Upsilon_n$ empezando en $\frac{1}{0}$ y terminando en $\frac{p}{q}$. El camino comienza en la arista $\frac{1}{0}\ \frac{a_0}{1}$, luego recorre a_1 triángulos, luego a_2, etc., finalmente termina en $\frac{p}{q}$.*[7][8]

Veamos con un ejemplo práctico como utilizar lo anterior

[7] Una prueba de éste teorema la puede encontrar en [1].
[8] Este resultado se puede extender fácilmente a los números irracionales, haciendo el algoritmo con una fracción continua finita del número en cuestión.

Ejemplo 2.2. *Sabemos que* $\frac{23}{32} = [0, 1, 2, 1, 1, 4]$, *creamos* 5 *triángulos de manera que formen una cinta y luego dividimos el primer triángulo en* 1, *el segundo en* 2 *y así, hasta dividir el quinto en* 4. *Empezando con las fracciones* $\frac{1}{0}$ *y* $\frac{0}{1}$ *vamos recorriendo las líneas teniendo en cuenta que cada vez que avanzamos en una línea, el vértice alcanzado tiene el valor de la mediana de los dos anteriores vértices. La siguiente figura muestra lo explicado anteriormente.*

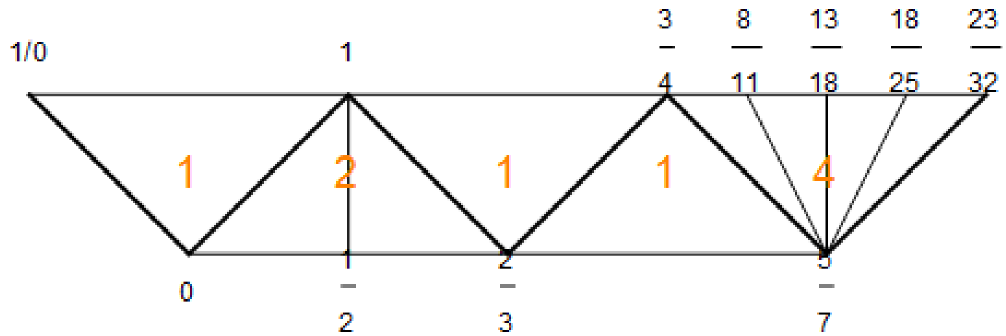

Figura 4: ¿Cómo encontrar las *convergentes* de $\frac{23}{32}$?

2.3. Transformaciones fraccionarias lineales

Las transformaciones fraccionarias lineales son herramientas útiles en el estudio de un tipo de fracciones continuas, aquellas cuyos coeficientes tienen un comportamiento periódico.

Definición 2.1. *Una transformacion fraccionaria lineal es una función de la forma* $T(\frac{x}{y}) = \frac{ax+by}{cx+dy}$.

Si hacemos $z = \frac{x}{y}$, T se puede reescribir así: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Su principal aplicación practica es permitir hallar el número al cual converge una fracción continua periódica o eventualmente periódica, aunque estudiando el método utilizado se puede deducir una propiedad muy importante de las fracciones continuas de este tipo:

Teorema 2.2. ***Teorema de Euler*** *Si una fracción continua es periódica o eventualmente periódica, el número al cual converge es solución de una ecuación cuadrática.*

Para ver por qué sucede esto, veamos primero algunas propiedades que tienen algunas transformaciones fraccionarias lineales especiales.

Definición 2.2. *Decimos que* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *es una transformación de Farey si sus coeficientes cumplen que* $det((\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix})) = \pm 1$.

Proposición 2.2. *Si* $T(z)$ *es una transformación de Farey, y* $\frac{p}{q}$ *y* $\frac{p'}{q'}$ *son terminos consecutivos en alguna sucesion de Farey, entonces* $T(\frac{p}{q})$ *y* $T(\frac{p'}{q'})$ *tambien son terminos consecutivos en alguna sucesión de Farey.*

Para nuestro propósito, considerando la representación de *"triangle strip"* de las sucesiones de Farey, podemos interpretar esta propiedad como que cada transformación de Farey, hace una traslación o un efecto de reflexión y desplazamiento"sobre el diagrama, de esta manera, para las fracciones periódicas es posible hallar una transformación que se ajuste a la periodicidad y permita calcular el número al que converge usando la siguiente propiedad.

Proposición 2.3. *Sea z un número cuya fracción continua sea periódica, z_n su n-ésima convergente y T la transformación que se ajusta a su periodo, entonces $T(z) = T(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} T(z_n) = z$.*

Así, dada una fracción periódica, lo que tenemos que hacer es hallar la T que nos sirva y luego resolver la ecuación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$.

Ejemplo 2.3. *Hallar el número al cuál le corresponde la fracción continua* $[\overline{2,3,1,4}]$.

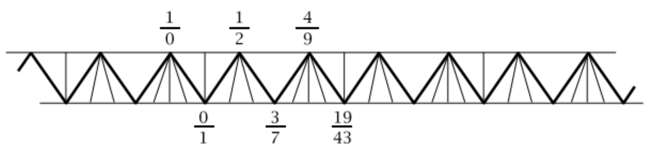

Figura 5: *"Triangle strip"* correspondiente a $[\overline{2,3,1,4}]$

Una primera candidata a considerar es $T(z) = \frac{4z+19}{9z+43}$ la cual en efecto es la transformación que se ajusta al periodo de la fracción ya que $T(\frac{1}{0}) = \frac{4}{9}$ y $T(\frac{0}{1}) = \frac{19}{43}$.
Ahora basta resolver la ecuación $\frac{4z+19}{9z+43} = z$ y las soluciones de esta son $z = \frac{-13\pm 7\sqrt{5}}{6}$. La solución positiva que corresponde a recorrer la "triangle strip" hacia la derecha es el número que buscamos, mientras que la solución negativa es la que corresponde a recorrer la "triangle strip" hacia la izquierda.

2.4. Solución general de una ecuación lineal diofántica

Una minúscula aplicación que tienen las sucesiones de Farey y las fracciones continuas es ayudar a encontrar la solución general de una ecuación diofántica lineal. Empecemos con un resultado que será útil en esta sección.

Proposición 2.4. *Suponga que $mcd(a,b) = 1$. Si una solución de $ay - bx = n$ es $(x,y) = (c,d)$, entonces la solución general es $(x,y) = (c+ka, d+kb)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.*

Es suficiente encontrar una solución para $ax - by = 1$ pues para la ecuación $ax - by = n$ solo basta por multiplicar las soluciones encontradas por n.
Como la sucesión $\{\Upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ alcanza cualquier número racional entonces alcanza la fracción $\frac{a}{b}$ (suponiendo que $a < b$), así, existe $\frac{c}{d}$ tal que $det((\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix})) = \pm 1$ esto por el *teorema 1.2.* Para encontrar tal fracción puede usar el algoritmo descrito en la *sección 2.2.*

3. Referencias

[1] Hatcher, A. (n.d.). The Farey Diagram. In Topology of Numbers (1st ed., Vol. 1, p. 44). Cornell University. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/TN/TNch1.pdf

[2] Borwein, J., van der Poorten, A., Shallit, J., & Zudilin, W. (2014). Neverending fractions: An introduction to continued fractions. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511902659

[3] Robertson P. John,(2004). Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$.