



Prisfastsætning og hedging i Black-Scholes modellen

Clara E. Tørsløv (cnp777)

Bachelorprojekt 2020

Matematik-Økonomi

Vejleder: David Skovmand (intern) og Laurs Leth (ekstern)

Institut for Matematiske Fag, 5. Juni 2020

Abstract

In this paper we discuss the theory on the pricing of options in the Black-Scholes model in order to derive a formula for pricing a European call option. This formula is then used to derive the implied volatility. Based on portfolio theory the paper sets up a self-financing and delta neutral trading strategy, which consists of a risk-free asset, a risky asset and a European call option. In the case where the implied volatility differs from true volatility an opportunity for a non-zero premium occurs. This premium may be collected using a volatility trading strategy. The terminal profit-and-loss for this strategy is referred to as the Fundamental Theorem of Derivative Trading. The paper then goes on to analyse this theorem using both a simulation experiment and empirical data. Both of these approaches shows the benefits of hedging using implied volatility.

Indhold

1	Introduktion	1
1.1	Det finansielle marked	2
2	Teori	4
2.1	Geometric Brownian Motion	4
2.2	Prisfastsætning af optioner	10
2.2.1	Det risikoneutrale mål	11
2.2.2	Black Scholes ligningen	13
2.2.3	Monte Carlo metode	14
2.2.4	Europæisk call option	15
2.2.5	Implicit volatilitet	18
2.3	Porteføljeteori	18
2.3.1	Selvfinansierende portefølje	18
2.3.2	Δ -hedging	19
2.3.3	The Fundamental Theorem of Derivative Trading	22
2.3.4	Wilmots Hedge Experiment	25
3	Empirisk undersøgelse	28
3.1	Undersøgelse af sand kontra implicit volatilitet	29
3.2	Undersøgelse af option 14	33
4	Konklusion	35
5	Litteratur	36

1 Introduktion

Vi ønsker i dette projekt at undersøge, hvordan vi prisfastsætter og handler med optioner. Dette er inter-
essant, da optioner engang blev betragtet som så usikkert et gode, at det i perioder var ulovligt at handle
med dem (Duke Law Journal, 1978, [4]). Udarbejdelsen af Black-Scholes modellen (Black and Scholes,
1973, [2]) var startskud til, at restriktioner for handlen gradvist blev lempet, og i 2012 talte den samlede
nominelle værdi af derivatkontrakter hele 630 billioner US dollars.

Gennem denne opgave tager vi udgangspunkt i Black-Scholes modellen. Den består af et risikofrit aktiv, B, og et risikabelt aktiv, S, som antages at følge en Geometric Brownian Motion (GBM). I forbindelse
med simplificerende modelantagelser diskuterer vi, hvordan modellering af aktiekursen relaterer sig til
aktuelt daglig data fra S&P500 indekset¹. Først vil vi udarbejde tre forskellige tilgange til prisfastsætning
af optioner, hvorefter vi vil bruge disse tre tilgange på en Europæisk call option². Sammenhængen mellem
Black-Scholes optionsprisen og volatiliteten er bijektiv. Ved at invitere prisfunktionen lig markedsprisen
får man et udtryk for volatiliteten, kaldet implicit volatilitet, der afspejler markedets forventning til
prisbevægelser. Den implicitte volatilitet er ikke den samme som den sande volatilitet forbundet med
det risikable aktiv. Når disse to volatiliteter afviger fra hinanden, kan man udnytte dette til at opnå en
økonomisk gevinst.

Vi udarbejder herefter porteføljeteori til at kunne opsætte en strategi, der høster denne præmie. Denne
strategi koster ikke noget initialet og er neutral overfor ændringer i aktiekursen. Vi udleder The Funda-
mental Theorem of Derivative Trading (FTODT), der er et udtryk for den mulige risikopræmie, når den
implicitte volatilitet afviger fra den sande. Vi benytter FTODT til at sammenligne to hedging strategier,
én hvor man hedger med implicit volatilitet, og én hvor man hedger med en proxy for sand volatili-
tet. Vi tester de to strategier op imod hinanden ved at replikere simulationsstudiet 'Wilmots Hedge
Experiment'[7] og det empiriske studie fra artiklen "*The Fundamental Theorem of Derivative Trading -
Exposition, Extensions, and Experiments*" [6].

¹ S&P-indekset er et vægtet gennemsnit over de 500 største amerikanske børsnoterede virksomheder og bliver hyppigt
betragtet som en indikator på, hvordan det går i økonomien.

² En Europæisk call option giver indehaver ret men ikke pligt til at købe en aktie til en aftalt strikekurs, K, på et tidspunkt,
T.

1.1 Det finansielle marked

Det finansielle marked består af et risikabelt aktiv, S, og et risikofrit aktiv, B. Begge disse handles i kontinuert tid op til en fast tidshorisont, T. $(S_t)_{t \in [0, T]}$ betegner prisprocessen for det risikable aktiv, og $(B_t)_{t \in [0, T]}$ betegner prisprocessen for det risikofrie aktiv. Introducerer sandsynlighedsrummet, hvorpå disse prisprocesser er defineret, som $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}, P)$.³ \mathcal{F}_t^W er filtrationen genereret af en Weiner process $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ defineret ved $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s | 0 \leq s \leq t\}$ ⁴. $(W_t)_{t \geq 0}$ er en Weiner process, hvilket betyder at den opfylder følgende⁵

1. $W_0 = 0$
2. For vilkårlige $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$: $W_{t_4} - W_{t_3} \perp\!\!\!\perp W_{t_2} - W_{t_1}$
3. For $t > s$: $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
4. $t \mapsto W_t(\omega)$ er kontinuert

Gennem denne opgave får vi brug for nogle egenskaber ved Weiner processer. Disse er

$$\text{For } s < t : W_t - W_s \perp\!\!\!\perp W_s \quad (1)$$

$$W_t - W_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad (2)$$

Black-Scholes modellen

Dynamikken for det risikofrie aktiv gennem denne opgave er givet ved⁶

$$dB_t = rB_t dt \quad (3)$$

$$B_0 = 1 \quad (4)$$

Generelt forstår det risikofrie aktiv som et aktiv, hvor vi kender afkastet på forhånd. Det betyder, at hovedstolen med sikkerhed ikke falder i værdi, og aktivet ingen risiko har. Det ses også på dynamikken, da der kun indgår et deterministisk led og ingen stokastiske. Sikkerheden kommer fra en stor tillid til ustederen af aktivet, f.eks. penge på en bankkonto. Vi tolker netop det risikofrie aktiv som en pengekonto,

³hvor Ω indeholder alle mulige udfald på markedet, \mathcal{F} er den tilhørende σ -algebra, \mathbb{P} er det fysiske sandsynlighedsmål

⁴Denne filtrering forstår som den information, vi har omkring Weiner processen på et vilkårligt tidspunkt t og mængden $\{W_s | 0 \leq s \leq t\}$ skal forstås som den observerede sti fra tid 0 til tid t.

⁵Björk Definition 4.1

⁶I kontinuert tid er $B_t = e^{rt}$

der har kort rente, r .

Dynamikken for det risikable aktiv er givet under antagelse af, at processen $(S_t)_{t \in [0, T]}$ løser den stokaste differentialligning (SDE) givet ved nedenstående,

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

$$S_0 = s > 0$$

hvor $\mu(-, -)$ er driften og $\sigma(-, -)$ er volatiliteten, for (S_t) , som begge er deterministiske funktioner. I det generelle tilfælde er de muligvis afhængige af både tid, t , og det underliggende aktiv, S_t . Desuden gælder der at $\sigma(t, s) > 0, \forall (t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$, og at $\mu(-, -)$ og $\sigma(-, -)$ opfører sig tiltrækkeligt på et, så en løsning til ovenstående SDE eksisterer. Det risikable aktiv tolkes som en aktie, hvor det risikable aspekt kommer til udtryk i det stokastiske led i dynamikken. Vi vil gennem denne opgave, medmindre andet er specifieret, antage den simple Black-Scholes model, hvor μ og σ er konstanter. I den simple Black-Scholes model er dynamikken for det risikable aktiv altså givet ved

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{5}$$

$$S_0 = s > 0 \tag{6}$$

Vi laver følgende antagelser om handel på det finansielle marked

1. Der er ingen transaktionsomkostninger i markedet
2. Kontinuert handel er muligt
3. Aktører kan låne frit til den risikofrie rente
4. Der udbetales ingen dividender

Itos formel

Et resultat vi ofte bruger i matematisk finansiering, og også kommer til at bruge i denne opgave, er Ito's formel. Det er en identitet, man bruger til at bestemme dynamikken for en tidsafhængig funktion af en stokastisk process. Intuitivt kan man tænke på Itos formel som en andenordens Taylorudvikling. Vi vil primært benytte følgende version af Ito's formel i løbet af denne opgave⁷.

⁷Björk Theorem 4.10 og Proposition 4.11

Theorem 1 (Ito's formel). *Antag at processen X har en stokastisk differential ligning (SDE) givet ved:*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

hvor μ_t og σ_t er tilpassede processer. Lad f være en $C^{1,2}$ -funktion og definer processen Z ved $Z_t = f(t, X_t)$. Da har Z en stokastisk differentialligning givet ved

$$dZ_t = df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (7)$$

Hvor f_t er den afledte mht tid, f_x mht. rum, f_{xx} er den andenafledte mht rum og hvor der er benyttet følgende egenskaber

$$(dt)^2 = 0 \quad (8)$$

$$dt \cdot dW_t = 0 \quad (9)$$

$$(dW_t)^2 = dt \quad (10)$$

2 Teori

2.1 Geometric Brownian Motion

Når der skal træffes finansielle beslutninger, bruger man ofte simulerede prisstier for det finansielle aktiv til at lave forudsigelser om den fremtidige pris. Historiske data viser, at der på langt sigt er en positiv drift, men på kort sigt er der en stokastisk støj⁸. Denne dynamik modelleres ofte med den kontinuerte Geometric Brownian Motion (GBM). Det giver mening at benytte GBM som model for aktiekursen, da den er allesteds positiv med sandsynlighed 1. Den består af et proportionelt deterministisk led, som beskriver den positive drift f.eks. inflation eller renteudvikling i økonomien. Derudover består den af et normalfordelt stokastisk led, som beskriver støjen eller volatiliteten på kort sigt. Vi antager herfra, at aktiekursen er givet ved en Geometric Brownian Motion (GBM).

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (11)$$

hvor $S_0 = s > 0$ og μ og σ er konstanter. Det er klart at $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^S$, da S processen er en kontinuert transformation af Weiner processen.

⁸Se Figur 4

Betrægt processen, $(S_t)_{t \in [0, T]}$, med dynamik givet som i Black-Scholes modellen

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$S_0 = s$$

Vi undersøger nu dynamikken for $\log(S_t)$. Itos formel giver

$$\begin{aligned} d\log(S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) ((\mu S_t dt)^2 + (\sigma S_t dW_t)^2 + 2\mu S_t dt \sigma S_t dW_t) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Ved at integrere begge sider, og isolere S_t , får vi netop udtrykket for en Geometric Brownian Motion

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

Forventning

Vi ønsker at undersøge, hvordan aktiekursen teoretisk set opfører sig.

Bemærk først at

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = e^{\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Da eksponenten er en lineær transformation af Weiner processen, og $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ gælder der at

$$\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right)$$

Herfra følger det at S_t , for fast $t \in [0, T]$, er lognormalfordelt med samme parametre⁹

$$S_t = e^{\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \sim LN\left(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right) \quad (12)$$

Se Appendix A for momenterne og udledningen af disse.

⁹ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow e^X \sim LN(\mu, \sigma)$

Afkastrate

Ofte vil man som investorer være mere interesseret i afkastet over en periode, $\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$, end selve aktiekursen, S_t , da vi typisk gerne vil vide, hvordan vores investering har performet.

For $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, lad log-afkastet mellem tidspunkt t_i og t_{i-1} være givet ved¹⁰,

$$r_{t_i} := \log \left(\frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} + 1 \right) = \log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) \quad (13)$$

Vi kan nu undersøge logafkastet for en periode nærmere. Vi betragter ækvidistante tidsintervaller, $dt = t_i - t_{i-1}$.¹¹

$$\begin{aligned} r_{t_i} &= \log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) \\ &= \log \left(e^{(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}) - (\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i-1}) + \sigma W_{t_{i-1}})} \right) \\ &= \ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i} - \ln(S_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i-1}) - \sigma W_{t_{i-1}} \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_i - t_{i-1}) + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

Fra Weiner egenskaberne følger det, at logafkastene er uafhængige, da de lever på disjunkte intervaller, $0 < t_1 < \dots < t_n = T$,

$$r_{t_i} \perp\!\!\!\perp r_{t_{i+1}} \quad \forall t_i \in [0, T]$$

Det følger ligeledes, at de er identisk normalfordelte for fast $t \in [0, T]$, da vi betragter ækvidistante tidsintervaller, dt , og Weiner processen er normalfordelt, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,

$$r_t \sim \mathcal{N} \left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt \right) \quad (14)$$

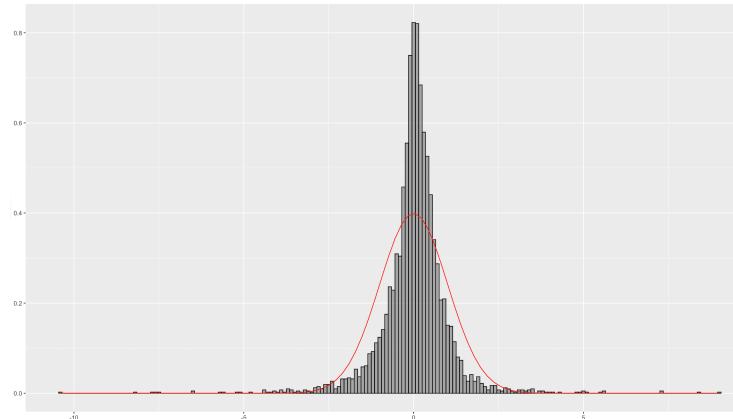
Modelkritik

Vi har undervejs lavet nogle simplificerende antagelser, der giver os en brugervenlig model. Det ville nu være interessant at undersøge, hvordan denne model relaterer sig til realiserede data. Vi benytter *S&P500* indekset og undersøger Ligning 14. Først er variablen standardiseret og dernæst sammenlignet med de

¹⁰For $R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$ gælder at $\log(R_t) \approx \log(R_t + 1)$ for $|R_t| \ll 1$

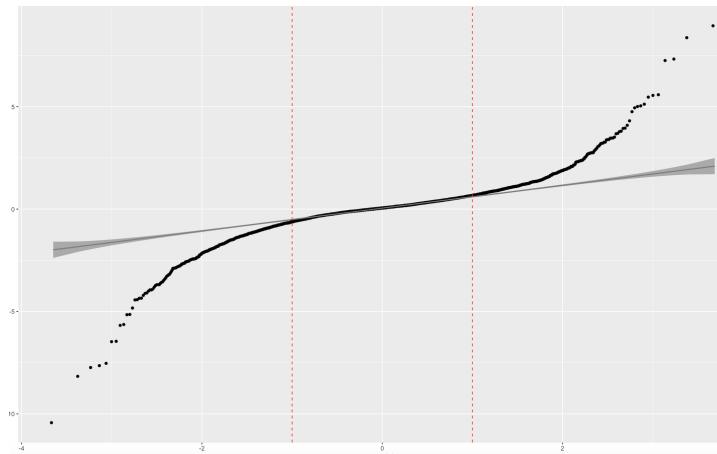
¹¹Intuitionen er at $T = 1$ f.eks. er et år og dt er en dag.

teoretiske normalfordelte kvantiler



Figur 1: Histogram af standardiserede daglige logafkast for S&P500 indekset sammenlignet med standard normalfordelingen (rød linje).

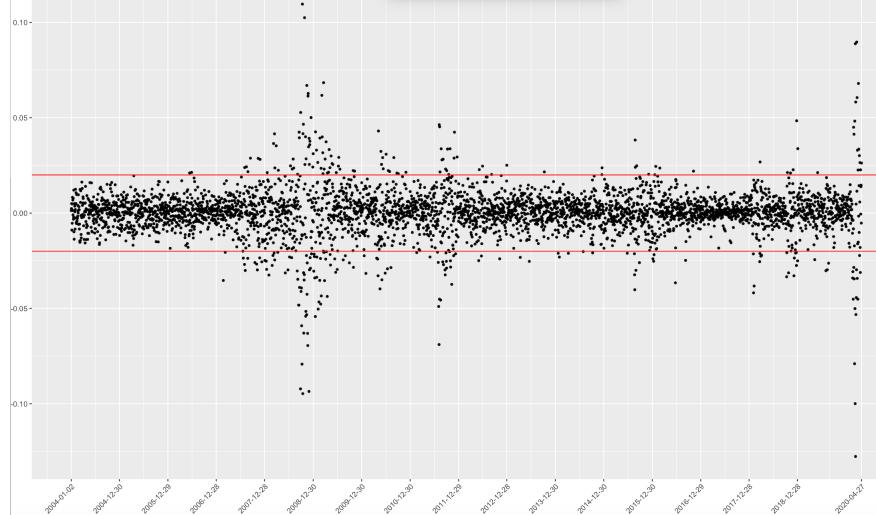
Tætheden i histogrammet er større omkring 0 end i normalfordelingen. Dette tyder på, at der er større sandsynlighed for at få et afkast på 0 i virkeligheden, end modellen fortæller os. Derudover observeres der flere udfald i halerne, hvor den teoretisk tæthed ellers burde være meget tæt på 0. Vi undersøger halerne med et QQ-plot.



Figur 2: QQ-plot af standardiserede daglige logafkast for S&P500 indekset sammenlignet med standard normalfordelingen. De røde linjer angiver, hvornår de empiriske værdier befinner sig udenfor et 95%-konfidensinterval.

Det ses her, at halerne i de standardiserede daglige prisændringer er tungere, end normalfordelingen fortæller os, de burde være. De empiriske værdier befinner sig udenfor et 95%-konfidensinterval efter de røde linjer. Dette betyder, at der af og til sker større udsving i aktiemarkedet end forventet ud fra modellen. Fra Ligning 14 bemærker vi yderligere, at variansen ikke er tidsafhængig og teoretisk set

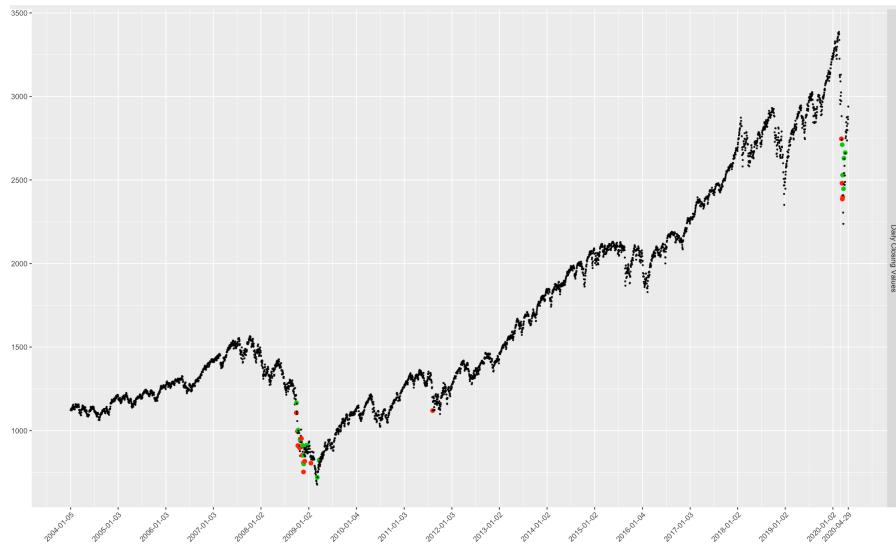
konstant.



Figur 3: Realiserede daglige logafkast for S&P500 indekset. De røde linjer angiver en årlig vol på 0.2.

Det ses, at spredningen ikke er konstant, men derimod konjunktur- og tidsafhængig. Det er dog værd at bemærke, at spredningen efterfølgende ser ud til at vende tilbage til det samme niveau. Generelt ser volatiliteten ud til at holde sig indenfor de røde linjer på langt sigt, og kan derfor godt sagt betragtes som konstant. Denne antagelse ser ud til at passe fint, hvis man ser bort fra de store konjunktur udsving heriblandt finanskrisen i 2008 og Coronakrisen i 2020.

Vi kigger nu nærmere på kontinuitetsantagelsen. Vi undersøger, hvornår $\left| \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \right| > 5\%.$ En så ekstrem ændring i dagsafkastet betragter vi som et spring.



Figur 4: Prisbevægelser for S&P500 indekset i perioden 2005/01/02-2020/04/29. Røde prikker svarer til et dagligt fald på over 5%. Grønne prikker svarer til en daglig stigning på over 5%.

Teoretisk set burde et så voldsomt afkast ske én gang hver 62. år, men som det ses på Figur 4, er det sket 31 gange i løbet af de seneste 12 år¹². Det aflæses, at der er sket 17 bemærkelsesværdige fald og 14 stigninger. Dette kunne antyde, at der er større tendens til store fald skyldet uforudseete konjunkturændringer. Som investor er der muligvis en masse penge at tage ved at acceptere kontinuitetsantagelsen. En måde hvormed man kan inkorporere disse spring, er med en jumpmodel, men dette er udenfor omfanget af denne opgave.

Konklusion

Når man opstiller en model, er der et tradeoff mellem, hvor virkelighedsnær den er, og hvor simpel den er at benytte. Baseret på ovenstående modelkontrol fandt vi, at GBM udviser Leptokurtosis, hvilket medfører, at man underestimerer de store udsving og overestimerer de små udsving i den daglige afkastrate¹³. Derudover så vi på Figur 3, at den kontinuerte GBM ikke kan fange de ekstreme uforudsigelige markedsændringer, der sker i forbindelse med en økonomisk krise. Det kan derfor overvejes om kontinuitet overhovedet er virkelighedsnært, da det er muligt, at der sker 'jumps' i aktiepriser. Alligevel ønsker vi kontinuerte modeller, da disse er nemmere at arbejde med.

¹²Årlig (Black-Scholes) volatilitet = 0.2 \Rightarrow daglig volatilitet = $\frac{0.2}{\sqrt{252}}$. Da er 5% = $\frac{0.2}{\sqrt{252}} \cdot 4$. Antal år der i gennemsnit går for at observere et dagligt afkast på $\pm 5\%$ er $1/(2 \cdot \mathbb{P}(r_t < -5\%))$, hvor $2 \cdot \mathbb{P}(r_t < -5\%) = \mathbb{P}(r_t < -5\%, r_t > 5\%)$. I R får vi $1/(2 \cdot pnorm(-\frac{0.2}{\sqrt{252}} \cdot 4, mean = 0, sd = \frac{0.2}{\sqrt{252}})) / 252 = 62.65$.

¹³"The condition of a probability density curve to have fatter tails and a higher peak at the mean than the normal distribution." - <https://financial-dictionary.thefreedictionary.com/Leptokurtosis>

2.2 Prisfastsætning af optioner

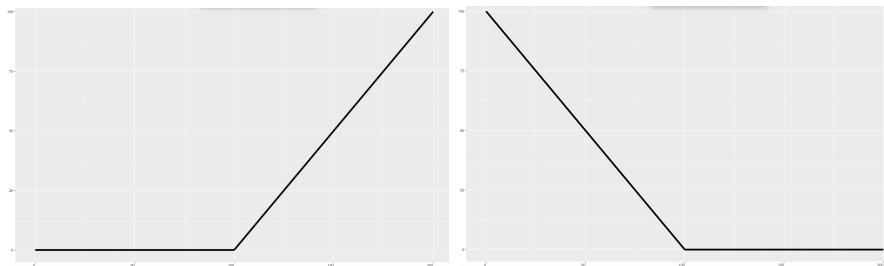
Det vi ønsker at prisfastsætte er optioner, som er en underkategori af derivater. Et derivat er et finansielt aktiv, som er konstrueret på basis af et underliggende aktiv.

Vi definerer et T-claim, \mathcal{X} , ved $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$, hvor Φ betegnes kontraktfunktionen og $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_T$. Dette skal forståes som en kontrakt, der udbetaler et beløb, \mathcal{X} , til indehaveren på udløbstidspunkt, T.

Et derivat, vi er specielt interesserede i, er en Europæisk call option. Denne giver køber ret, men ikke pligt, til at købe en aktie til strikekursen, K, på udløbstidspunkt, T. Modstykket er en Europæisk put option, der giver køber ret, men ikke pligt, til at sælge en aktie til strikekursen, K, på udløbstidspunkt, T. Vi vil i opgaven kun behandle Europæiske optioner og vil derfor blot henvise med forkortelsen 'call' og 'put'. For en call og put er kontraktfunktionerne givet ved

$$\begin{aligned}\Phi_C(S_T) &= (S_T - K)^+ \\ \Phi_P(S_T) &= (K - S_T)^+\end{aligned}$$

Dette er simple T-claims, da kontraktfunktionen kun afhænger af slutværdien af det underliggende aktiv. Som indehaver af call optionen modtager vi kun penge, hvis aktiekursen ender over strikekursen og omvendt for put. Dette ses på Figur 5.



Figur 5: Kontraktfunktioner for call (venstre) og put (højre). Her er $K = 100$ og S_T ud af x-aksen og payoff, \mathcal{X} , op af y-aksen. Knækket i kurverne sker hvor $S_T = 100$.

Vi vil nu udarbejde teorien til at kunne prisfastsætte optioner. Prisfastsættelsen sker i den simple Black-Scholes model. Vi vil gennemgå tre forskellige tilgange til denne prisfastsættelse.

1. Analytisk metode: $\pi(t, \mathcal{X}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\mathcal{X} | \mathcal{F}_t]$ (risikoneutral valuation).
2. Numerisk metode: $\pi(t, \mathcal{X}) = F(t, s)$ (Black-Scholes ligningen).
3. Monte Carlo metode: $\pi(t, \mathcal{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i$ (simulation).

2.2.1 Det risikoneutrale mål

Definer den diskonterede prisprocess $f(t, S_t, B_t) = \frac{S_t}{B_t}$. At denne er en martingal, er en nødvendig betingelse for, at modellen er arbitragefri¹⁴. Vi ønsker nu at undersøge, om dette er tilfældet.

$$\begin{aligned} d\frac{S_t}{B_t} &= f_t dt + f_s dS_t + f_b dB_t + \frac{1}{2}(f_{sb} dS_t dB_t + f_{bs} dB_t dS_t) \\ &= \frac{1}{B_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{S_t}{B_t^2} r B_t dt \\ &= \mu \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t - \frac{S_t}{B_t} r dt \\ &= (\mu - r) \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t \end{aligned}$$

Ved første lighedstegn er den multidimensionelle Ito's formel benyttet¹⁵. Ved andet lighedstegn er de kendte dynamikker indsat og egenskaberne fra Ito's formel er benyttet. Den diskonterede process er en martingal hvis $\mu = r$ ¹⁶. Dette er ikke realistisk empirisk. Altså kan den diskonterede process, $\frac{S_t}{B_t}$, ikke være en martingal under det fysiske sandsynlighedsmål, \mathbb{P} . Vi har derfor brug for et nyt mål.

Vi betragter nu et nyt mål \mathbb{Q} . Dette er en sandsynlighedsfordeling af forventede payoffs og benyttes til arbitragefri prisfastsætning. Definer det ækvivalente martingal mål, \mathbb{Q} , som i Björk Theorem 10.4 og Definition 10.11 for $t \in [0, T]$ og med numeraire B_t . Vi undersøger nu igen dynamikken for den diskonterede process, $\frac{S_t}{B_t}$, denne gang under \mathbb{Q} .

$$\begin{aligned} d\frac{S_t}{B_t} &= (\mu - r) \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t \\ &= (\mu - r) \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} (\varphi_t dt + dW_t^Q) \\ &= (\mu - r + \sigma \varphi_t) \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t^Q \end{aligned}$$

hvor W_t^Q er en Weiner proces under \mathbb{Q} -målet og $\varphi_t \in \mathcal{F}_t$. Ved første lighedstegn er \mathbb{P} -dynamikken indsat.

Ved andet lighedstegn er Girsanov benyttet¹⁷. Definer Likelihood processen, $(L_t)_{t \in [0, T]}$, ved

$$L_t = e^{\int_0^t \varphi_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds}$$

¹⁴Björk Theorem 10.14

¹⁵Björk Theorem 4.16

¹⁶Björk Lemma 4.9

¹⁷Björk Theorem 11.3

Girsanov antagelsen $\mathbb{E}[L_T] = 1$ sikrer, at L_T er Lebesgue-integrabel, og vi kan definere et nyt mål på \mathcal{F}_T ved $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$. Der gælder om dette mål, at

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \int_{\Omega} d\mathbb{Q} = \int_{\Omega} L_T d\mathbb{P} = \mathbb{E}[L_T] = 1 \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ er et sandsynlighedsmål} \quad (15)$$

$$\forall A \in \mathcal{F}_T : \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \quad (16)$$

Fra Girsanovs theorem fandt vi at

$$d\frac{S_t}{B_t} = (\mu - r + \sigma\varphi_t)\frac{S_t}{B_t} dt + \sigma\frac{S_t}{B_t} dW_t^Q$$

Ved at vælge Girsanov kernen, $\varphi_t = -\frac{\mu-r}{\sigma}$, får vi, at den diskonterede proces er en martingal under \mathbb{Q} ¹⁸. Da vi har antaget at r , μ og σ er konstanter, medfører det, at $\mathbb{E}[L_T] = 1$ og at \mathbb{Q} -målet er unikt, da Girsanov kernen er unik. Fra 'The First Fundamental Theorem of mathematical finance' følger det, at den simple Black-Scholes model er arbitragefri, da \mathbb{Q} -målet eksisterer. Endvidere følger det fra 'The Second Fundamental Theorem of mathematical finance', at den arbitragefri simple Black-Scholes model yderligere er komplet, da \mathbb{Q} -målet er unikt.

Intuitivt forstår \mathbb{Q} -målet som det risikoneutrale mål betydende, at det er justeret for en investors grad af risikoaversion. Dette er nyttigt, da det ellers er svært at sætte et specifikt tal på en investors risikoaversion. Ved at eliminere dette aspekt har vi mulighed for at prisfastsætte optioner.

GBM under \mathbb{Q}

Vi kan nu udlede \mathbb{Q} -dynamikken for aktiekursen for fast $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t (\varphi_t dt + dW_t^Q) \\ &= (\mu + \sigma\varphi_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \\ &= (\mu - \sigma\frac{\mu-r}{\sigma}) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \\ &= r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Når vi ønsker at prisfastsætte, benytter vi det risikoneutrale sandsynlighedsmål, \mathbb{Q} . Vi bemærker, at aktiekursen under \mathbb{Q} er givet som en GBM, hvor driften, μ , er skiftet ud med den korte rente, r . Da

¹⁸Björk Theorem 4.9

aktiekursen er en martingal under \mathbb{Q} , må det gælde, for $t \in [0, T]$, at

$$\frac{S_t}{B_t} = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] \Leftrightarrow S_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] \quad (17)$$

Lad \mathcal{X} være et simpelt T-claim med kontraktfunktion $\Phi(S_T) = \mathcal{X}$. Da må det ligeledes gælde at

$$\pi(t, \mathcal{X}) = \pi(t, \Phi(S_T)) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_T) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\mathcal{X} | \mathcal{F}_t] \quad (18)$$

Dette er den analytiske tilgang til prisfastsætning af optioner. Med den specifiserede \mathbb{Q} -dynamik vil vi nu angive og udlede Black-Scholes ligningen til prisfastsætning.

2.2.2 Black Scholes ligningen

Antag følgende¹⁹

- \mathcal{X} kan købes og sælges i markedet
- Markedet er arbitragefrit
- Prisprocessen er givet ved $\pi(t; \mathcal{X}) = F(t, S_t)$, hvor F er en glat funktion.

Theorem 2 (Black Scholes ligningen^a). *Antag en økonomisk model med to aktiver, der har dynamik givet ved*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P \quad (19)$$

$$dB_t = r B_t dt \quad (20)$$

Antag vi ønsker at prisfastsætte et simpelt T-claim, $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$. Da er den eneste prisfunktion, $\pi(t; \mathcal{X}) = F(t, S_t)$, der er i overensstemmelse med fravær af arbitrage, givet som den unikke løsning til følgende differentialligning (PDE) på domænet $[0, T] \times R_+$

$$F_t(t, s) + rsF_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}(t, s) - rF(t, s) = 0 \quad (21)$$

$$F(T, s) = \Phi(s) \quad (22)$$

^aBjörk Theorem 7.7

¹⁹Björk Assumption 7.2.2

Udledning af Black Scholes ligningen

Målet er at finde frem til, hvordan F skal se ud for at markedet, $(S_t, B_t, \pi(t; \mathcal{X}))$, er arbitragefrit.

Vi starter med at beregne prisdynamikken for det diskonterede derivat, $\frac{F(t, S_t)}{B_t}$, under \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} d\frac{F(t, S_t)}{B_t} &= \frac{F_t}{B_t} dt + \frac{F_S}{B_t} dS_t - \frac{F}{B_t^2} dB_t + \frac{1}{2} \frac{F_{SS}}{B_t} (dS_t)^2 \\ &= \frac{F_t}{B_t} dt + \frac{F_S}{B_t} (rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q) - \frac{F}{B_t^2} (rB_t dt) + \frac{1}{2} \frac{F_{SS}}{B_t} S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{B_t} \left(F_t + F_S r S_t - Fr + \frac{1}{2} F_{SS} S_t^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Ved første lighedstegn er den multidimensionale Itos formel brugt, og ved andet lighedstegn er \mathbb{Q} -dynamikken indsatt. Vi benytter dynamikken under det risikoneutrale mål, da formålet er prisfastsætning. Den diskonterede proces er en martingal hvis²⁰

$$F_t + F_S r S_t - Fr + \frac{1}{2} F_{SS} S_t^2 \sigma^2 = 0 \quad (23)$$

I en model uden arbitrage skal det yderligere gælde at $F(T, S_T) = \Phi(S_T)$. Med udgangspunkt i call'en står ejeren af optionen med muligheden for at købe aktien med værdi S_T til prisen K ved optionens udløb. Det betyder, at payoff fra optionen er $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. En nødvendig betingelse for fravær af arbitrage er da, at prisen på optionen ved udløb, $F(T, S_T)$, må være lig netop det payoff, $\Phi(S_T)$. Disse to ligninger skal gælde for alle faste $t \in [0, T]$ og alle positive værdier for aktiekursen, $s > 0$. Da er $F(t, s) : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ løsningen til den deterministiske differentialligning

$$F_t(t, s) + rsF_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}(t, s) - rF(t, s) = 0$$

Ved at benytte Black-Scholes ligningen fås den nummeriske løsning til prisfastsætningsproblemet.

2.2.3 Monte Carlo metode

Vi fandt, at man kunne løse prisfastsætningsproblemet analytisk ved blot at benytte en betinget forventning. Selvom dette lyder simpelt, er det ikke altid tilfældet. Det kunne f.eks. være, at kontraktfunktionen var kompliceret, eller at middelværdien ikke kunne beregnes. Her kan man i stedet benytte Monte Carlo simulation. Dette er både et nyttigt værktøj til at estimere forventingen af en stokastisk variabel eller til

²⁰Björk Theorem 4.9

at efterfølge teoretiske resultater.

Betræt et T-claim, $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$, i den simple Black-Scholes model. Risikoneutral valuation giver, at

$$\begin{aligned}\frac{\pi(t; \mathcal{X})}{B_t} &= e^{-rT} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_T) | \mathcal{F}_t] \Leftrightarrow \\ \pi(t; \mathcal{X}) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_T) | \mathcal{F}_t]\end{aligned}$$

Det er nu muligt at benytte Monte Carlo simulation til at estimere prisen på et givent tidspunkt $t < T$. Det foregår ved, at man simulerer n uafhængige udfald af den stokastiske variabel, S_1, \dots, S_n . Da vil denne følge være bestående af uafhængige og identisk fordelte variable, og man kan da benytte store tals lov til at bestemme Monte Carlo estimatoren, $\hat{\pi}$, for $n \rightarrow \infty$. N er antal simulationer og $i = 1, 2, \dots, N$

1. Simuler N uafhængige stier for $(S_s)_{t \leq s \leq T}$. For hver sti gemmes slutværdien, $S_{i,T}$.
2. For hver sti beregnes det realiserede payoff, $\theta_i = \Phi(S_{i,T})$
3. Til sidst beregnes det diskonterede gennemsnit,

$$\hat{\pi} = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_T) | \mathcal{F}_t] = \pi(t; \mathcal{X})$$

I forbindelse med Monte Carlo metoden kan der opstå en mindre afvigelse fra den sande værdi. Dette kan skyldes to ting, som man bør være opmærksom på. Der kan ske en diskretiseringsfejl, som opstår, når man evaluerer en kontinuert funktion i et diskret grid. Her vil man approximere funktionsværdien i et specifikt grid, men dette grid vil ikke kunne blive fint nok til at være en nøjagtig repræsentation af virkeligheden. Det andet er en sampling fejl. Denne opstår, når man tager en prøve fra en hel population. I Monte Carlo Simulation opstår dette ved den tilfældighed, der kommer fra at simulere ud fra en fordeling.

Ved at benytte Monte Carlo metode fås den simulerede løsning til prisfastsætningsproblemet.

2.2.4 Europæisk call option

Vi har nu udarbejdet teorien til at kunne prisfastsætte en call.

Fra den analytiske tilgang til prisfastsætningsproblemet, også kaldet risikoneutral valuation, følger

$$\pi(t, \mathcal{X}_C) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\Phi_C(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Lad $C(t, S_t)$ betegne prisen for call optionen til tid t . Ved at regne videre på den ovenstående middelværdi

udledes den teoretiske pris, hvilket er den nummeriske løsning, $\pi(t, \mathcal{X}_C) = C(t, s)$. Selve udledningen kan ses i Appendix A og resultatet kaldes Black-Scholes formlen.

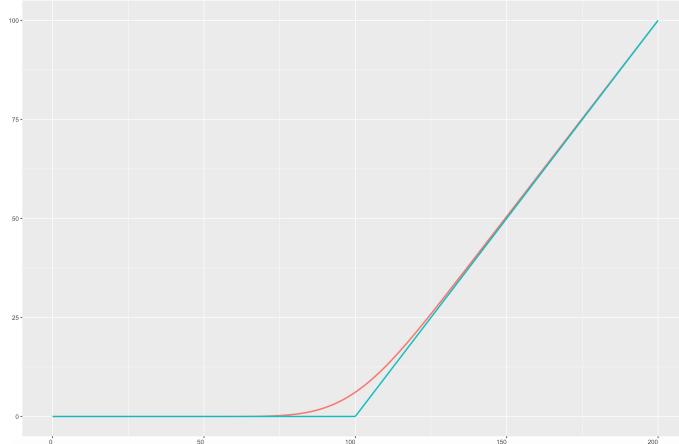
Proposition 1 (Black-Scholes formlen). *Prisen på en europæisk call option med strike, K , og udløbstid, T , er givet ved $\pi(t, \mathcal{X}_C) = C(t, S_t)$ hvor*

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1(t, S_t)) - e^{-r(T-t)} K \cdot N(d_2(t, S_t)) \quad (24)$$

N er CDF for en standard normalfordeling og

$$d_1(t, S_t) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (25)$$

$$d_2(t, S_t) = d_1(t, S_t) - \sigma\sqrt{T - t} \quad (26)$$



Figur 6: Kontraktfunktionen for EU call option (blå) vs. Black-Scholes prisfunktion (orange)

Vi benytter nu Monte Carlo simulation til at prisfastsætte et eksempel på en call option under følgende setup²¹,

$$T = 1 \quad t = \frac{1}{2} \quad K = 100 \quad S_0 = \begin{pmatrix} 90 & 100 & 110 \end{pmatrix}$$

²¹Se R-kode i Appendix C

Vi finder at

$$\begin{aligned}\pi_{90} \left(\frac{1}{2}; \Phi_C(S_T) \right) &= 2.29 \\ \pi_{100} \left(\frac{1}{2}; \Phi_C(S_T) \right) &= 6.85 \\ \pi_{110} \left(\frac{1}{2}; \Phi_C(S_T) \right) &= 14.11\end{aligned}$$

Vi bemærker, at prisen på optionen afspejler markedets forventing, om call optionen ender med at udbetale penge eller ej. Denne ændrer sig i forhold til prisen på det underliggende aktiv. Det er vigtigt både at vide, hvordan optionsprisen relaterer sig til de indgående parametre, men også hvor sensitiv optionsprisen er for ændringer i disse parametre. Det kan både være ændringer af parametre i modellen, såsom aktiekursændringer, eller følsomhed overfor fejlspecifikationer af de ingående parametrene, f.eks. volatiliteten.

The Greeks

The Greeks beskriver, hvor følsom prisen på derivater er overfor ændringer i de underliggende parametre.

Lad $\pi(t, s)$ være prisfunktionen på tidspunktet t for en option baseret på et enkelt underliggende aktiv med prisproces $(S_t)_{t \in [0, T]}$. Da fås følgende tabel²²

The Greek	Formel	Call
Δ_t	$\frac{\partial \pi(t, s)}{\partial s}$	$N(d_1)$
Γ_t	$\frac{\partial^2 \pi(t, s)}{\partial s^2}$	$\frac{\phi(d_1)}{s \sigma \sqrt{T-t}}$
\mathcal{V}_t	$\frac{\partial \pi(t, s)}{\partial \sigma}$	$s \phi(d_1) \sqrt{T-t}$

- Δ_t beskriver, hvor sensitiv prisen på en option er ift. ændringer i det underliggende aktiv på tids punkt t . Denne sammenhæng er positiv for en call option.
- Γ_t beskriver Δ_t 's ændringshastighed ift. kursændringer i det underliggende aktiv på tidspunkt t . Denne er positiv for call optionen.
- \mathcal{V}_t beskriver, hvor følsom optionsprisen er overfor ændringer i volatiliteten for det underliggende aktiv. Denne sammenhæng er positiv for call optionen.

I den simple Black-Scholes model har vi antaget, at volatiliteten er konstant. Dette er ikke nødvendigvis en virkelighedsnær antagelse. En mulighed er i stedet at undersøge empirisk, hvordan markedet implicit har fastsat volatiliteten.

²²Jf. Björk Proposition 9.5

2.2.5 Implicit volatilitet

Implicit volatilitet findes ved at sætte den teoretiske Black-Scholes call pris lig den observerede call markedspris og isolere volatiliteten. Lad $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ være et timegrid, $\hat{C}_0, \dots, \hat{C}_{n-1}$ være observerede markedspriser på en call option med strike K , udløb T og lad $C(S_{t_j}, t, T, r, \sigma, K)$ være Black-Scholes prisfunktionen for en call option. Begge er afhængige af det samme underliggende aktiv og S_{t_j} betegner dagsprisen på dette. Lad σ_j være volatiliteten hørende til det underliggende aktiv på tidspunkt t_j og lad σ_j^i være den implicitte volatilitet på tidspunkt $t_j < T$. Ved at løse den følgende ligning mht σ_j^i bestemmes den implicitte volatilitet på tidspunkt $t_j < T$

$$C(S_{t_j}, t_j, T, r, \sigma_j^i, K) = \hat{C}_j$$

Det er vigtigt at bemærke, at den implicitte volatilitet ikke er den sande volatilitet, der er forbundet med støjen i det risikable aktiv. Den implicitte volatilitet måler markedets forventning til sandsynligheden for ændringer i optionsprisen. Hvis den implicitte volatilitet er høj, er det ensbetydende med, at markedet forventer store prissvingninger og vice versa. En højere implicit volatilitet hænger sammen med en højere markedspris på call optionen. Hvis den implicitte volatilitet overstiger den sande volatilitet ville vi intuitivt tænke, at en sådan option er overpriset, og der er arbitrage muligheder. Dette vil vi undersøge senere. Vi skal først have styr på noget porteføljeteori.

2.3 Porteføljeteori

2.3.1 Selvfinansierende portefølje

Vi starter med at definere nogle af de begreber, vi skal bruge. Vi vil benytte notationen

$$h = (h_t)_{t \in [0, T]} = (h_t^0, h_t^1)_{t \in [0, T]}$$

om en portefølje, hvor h_t^0 er status i det risikofrie aktiv, B_t , og h_t^1 er status i det risikable aktiv, S_t , til tidspunkt $t \in [0, T]$.

Theorem 3 (Definitioner). *Lad prisprocessen, $(S_t)_{t \in [0, T]}$, være givet.*

- En portefølje, h , er en \mathcal{F}_t^S -målelig proces $\{[h_t^0, h_t^1], t \in [0, T]\}$.
- Værdiprocessen, $(V_t^h)_{t \in [0, T]}$, for porteføljen, h , er givet ved: $V_t^h = h_t^0 \cdot B_t + h_t^1 S_t$
- Porteføljen, h , siges at være selvfinansierende hvis $dV_t^h = h_t^0 dB_t + h_t^1 dS_t$, $\forall t \in [0, T]$.
- Vi siger, at den selv-finansierende portefølje, h , hedger et T -claim, \mathcal{X} , hvis $V_T^h = \mathcal{X}$.

En selvfinansierende portefølje er defineret ved, at alle transaktioner er finansieret ved at sælge eller købe aktiver i porteføljen. Dette ses i ovenstående definition, da ingen penge trækkes ud eller tilføres porteføljen

efter initiation. Den fysiske \mathbb{P} -dynamik for den selvfinansierende portefølje er givet ved

$$\begin{aligned} dV_t^h &= h_t^0 dB_t + h_t^1 dS_t \\ &= h_t^0 r B_t dt + h_t^1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P) \end{aligned}$$

Ved at benytte Girsanov fås den risikoneutrale \mathbb{Q} -dynamik²³

$$\begin{aligned} dV_t^h &= h_t^0 r B_t dt + h_t^1 \left(\mu S_t dt + \sigma S_t \left(\frac{r - \mu}{\sigma} dt + dW_t^Q \right) \right) \\ &= h_t^0 r B_t dt + h_t^1 \mu S_t dt - h_t^1 \mu S_t dt + h_t^1 r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \\ &= r (h_t^0 B_t + h_t^1 S_t) dt + \sigma S_t dW_t^Q \\ &= r V_t^h dt + h_t^1 \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Vi har tidligere nævnt arbitrage, men nu hvor vi har definitionen på en selvfinansierende portefølje på plads, kan vi anføre en decideret definition²⁴.

Theorem 4 (Arbitrage). *Markedet indeholder arbitragemuligheder hvis der eksisterer en selvfinansierende portefølje hvorom der gælder*

$$V_0^h = 0 \tag{27}$$

$$\mathbf{P}(V_T^h \geq 0) = 1 \tag{28}$$

$$\mathbf{P}(V_T^h > 0) > 0 \tag{29}$$

2.3.2 Δ -hedging

En Δ -hedging portefølje har til formål at reducere risikoen forbundet med prisændringer i det underliggende aktiv. En portefølje siges at være delta neutral hvis $\frac{\partial V_t^h}{\partial s} = 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Altså er den delta neutrale portefølje uafhængig af ændringer i det underliggende aktiv.

Vi ønsker nu at konstruere en Δ -hedging strategi, hvor vi sælger en call option og ønsker at Δ -hedge denne position. Pengekontoen vælges således, at porteføljens nettoværdi er nul, dvs. strategien bliver selvfinansierende per konstruktion. Dynamikken for den diskonterede værdiproces af den beskrevne strategi

²³Björk Theorem 11.3

²⁴Björk Definition 7.5

er derfor givet ved

$$d(e^{-rt}(V_t^h - C(t, S_t))) = \underbrace{d(e^{-rt}V_t^h)}_{(1)} - \underbrace{d(e^{-rt}C(t, S_t))}_{(2)}$$

Vi bestemmer nu de to \mathbb{Q} -dynamikker. Vi undersøger \mathbb{Q} -dynamikken, da en nødvendig betingelse for fravær af arbitrage er, at den diskonterede værdiproces er en martingal under det risikoneutrale mål. Fra den multidimensionale Ito's formel følger²⁵

$$\begin{aligned} (1) &= -re^{-rt}dtV_t^h + e^{-rt}dV_t^h \\ &= -re^{-rt}dtV_t^h + e^{-rt}\left(rV_t^h dt + h_t^1 \sigma S_t dW_t^Q\right) \\ &= e^{-rt}h_t^1 \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Da dynamikken ikke indeholder et driftled, er den diskontede værdiproces en \mathbb{Q} -martingal²⁶.

Fra Ito's formel følger det yderligere at

$$\begin{aligned} (2) &= -re^{-rt}dt \cdot C(t, S_t) + e^{-rt}dC(t, S_t) \\ &= e^{-rt}\left(-rC(t, S_t)dt + C_t(t, S_t)dt + C_s(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t)(dS_t^2)\right) \\ &= e^{-rt}\left(-rC(t, S_t)dt + C_t(t, S_t)dt + C_s(t, S_t)rS_t dt + C_s(t, S_t)\sigma S_t dW_t^Q + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt\right) \end{aligned}$$

Ved sidste lighedstegn er \mathbb{Q} -dynamikken for S_t indsatt, da det er et prisfastsætningsproblem, vi behandler, altså en dynamik under det risikoneutrale mål. Hvis vi samler disse to udtryk, får vi

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}(V_t^h - C(t, S_t))) &= e^{-rt}\left(\left(-rC(t, S_t) + C_t(t, S_t) + C_s(t, S_t)rS_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2\right)dt\right. \\ &\quad \left.+ (C_s(t, S_t) - h_t^1)\sigma S_t dW_t^Q\right) \end{aligned}$$

Vi ønsker at vælge h_t^1 , så den selvfinansierende portefølje replikerer den call option, som vi ønsker at hedge. Det er muligt at vælge et sådant h_t^1 , da vi opererer i Black-Scholes modellen, som er komplet. Hedging porteføljen skal være uden risiko, da vi ønsker den delta neutral, så vi ønsker at vælge h_t^1 , så det

²⁵Björk Theorem 4.16

²⁶Björk Lemma 4.9

stokastiske, dW_t^Q , forsvinder, dvs²⁷

$$h_t^1 = C_s(t, S_t)$$

Eftersom vi valgte positionen i det risikofrie aktiv, så porteføljen er selvfinsansierende, finder vi at

$$\begin{aligned} 0 &= h_t^0 r B_t dt - C_t(t, S_t) dt - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t) dt \\ \Leftrightarrow h_t^0 &= \frac{C_t(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t) dt}{r B_t dt} \\ \Leftrightarrow h_t^0 &= \frac{C(t, S_t) - C_s(t, S_t) S_t}{B_t} \end{aligned}$$

Ved sidste lighedstegn er Black-Scholes formlen benyttet²⁸.

Vi kan nu formulere vores hedging strategi. Vi hedger i diskret tid da, at hedge i kontinuert tid ville betyde, at porteføljen skulle opdateres hvert milisekund, hvilket ikke er muligt. Derudover er der på det virkelige marked transaktionsomkostninger, der gør et kontinuert hedge dyrt. Hedging strategien er derfor følgende, i et timegrid $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ med $dt = \frac{1}{n}$,

1. $t_0 = 0$: Vi modtager $C(0, S_0)$ og køber $C_s(0, S_0)$ aktier. Hvis $C_s(0, S_0) \neq C(0, S_0)$ justeres positionen i banken så $V_0^h = 0$.
2. $t_i < T$: For hvert t_i bestemmes $h_{t_i}^1 = C_s(t_i, S_{t_i})$ og $h_{t_i}^0$ vælges så $V_{t_i}^h = 0$.
3. $t_n = T$: Den kummulerede hedging error for hele strategien beregnes som et performancemål for investeringen.

I kontinuert tid ville den kummulerede hedging error være lig 0, da porteføljen ville replikere call optionen perfekt, men da vi hedger i diskret tid, medfører dette en hedging error, der muligvis er forskellig fra 0²⁹. Den kummulerede hedging error er et performance mål for investeringen. Hvis fejlen er positiv, betyder det, at investeringen har tjent penge og vice versa.

Vi har nu udledt den porteføljeteori, vi skal bruge for at kunne tage næste skridt i vores undersøgelse af arbitrage muligheder.

Når den markedsbestemte implicitte volatilitet afviger fra den sande model volatilitet, kan dette fortolkes som forkert prisfastsættelse. Intuitivt ville vi tænke, at der her er en arbitrage mulighed. Volatilitets arbitrage er en strategi, der forsøger at drage fordel af forskellen mellem den sande volatilitet, forbundet

²⁷Bemærk: ved at vælge $h_t^1 = C_s(t, S_t)$ gælder der $\forall t \in [0, T]$ at $\frac{\partial(V_t^h - C(t, S_t))}{\partial s} = 0$

²⁸ $F_t(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 F_{ss}(t, S_t) - rF(t, S_t) + rF_s(t, S_t)S_t = 0 \Leftrightarrow F_t(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 F_{ss}(t, S_t) = rF(t, S_t) - rF_s(t, S_t)S_t$

²⁹Björk Proposition 9.7

med støjen i en aktie, og den implicitte volatilitet, forbundet med en call option på tilsvarende aktie. Denne strategi kan implementeres gennem en delta neutral portefølje bestående af en option, dens underliggende aktiv og bankbogen. Performance af denne portefølje, også kaldet Profit-and-Loss, kan beregnes med følgende eksplisitte formel.

2.3.3 The Fundamental Theorem of Derivative Trading

Theorem 5 (FTODT). *Betrægt en Europæisk call option, \mathcal{X}_C , på det underliggende aktiv, S_t , med dynamik $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^P$. Lad $C(t, S_t) \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ være prisprocessen for optionen med payoff $C(T, S_T) = \mathcal{X}_C$. Antag at vi sælger optionen på tid $t = 0$ for markedsprisen, $C(t, S_t, \sigma_t^i)$ og ønsker at Δ -hedge denne position. Lad σ_t^h være den valgte hedging volatilitet. Nutidsværdien af **Profit-and-Loss** ved at holde denne portefølje over tidsintervallet $[0, T]$ er givet ved*

$$P\&L_T = C(0, S_0, \sigma_0^i) - C(0, S_0, \sigma_0^h) + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} ((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t, \sigma_t^h) dt \quad (30)$$

Bevis for FTODT

Antag vi sælger en call option, og ønsker at Δ -hedge denne position. Porteføljen er givet ved:

$h_t = (B_t, C_s(t, S_t, \sigma_t^h), -1)$. Denne portefølje har værdi på tidspunkt $t \in (0, T)$ givet ved

$$V_t^h = B_t + C_s(t, S_t, \sigma_t^h) S_t - C(t, S_t, \sigma_t^i)$$

Pengekontoen vælges således, at porteføljens nettoværdi er nul:

$$V_t^h = 0 \Leftrightarrow B_t = C(t, S_t, \sigma_t^i) - C_s(t, S_t, \sigma_t^h) S_t \quad (31)$$

Dynamikken for værdiprocessen er givet ved³⁰

$$\begin{aligned} dV_t^h &= dB_t + C_s(t, S_t, \sigma_t^h) dS_t - dC(t, S_t, \sigma_t^i) \\ &= r B_t dt + C_s(t, S_t, \sigma_t^h) dS_t - dC(t, S_t, \sigma_t^i) \\ &= C_s(t, S_t, \sigma_t^h) (dS_t - r S_t dt) + C(t, S_t, \sigma_t^i) r dt - dC(t, S_t, \sigma_t^i) \end{aligned}$$

Ved første lighedstegn er det benyttet, at strategien er selvfinansierende per konstruktion. Ved andet lighedstegn er dynamikken for pengekontoen indsatt. Ved tredje lighedstegn er udtrykket fra Ligning 31 indsatt.

³⁰Det er intentionelt at vi ikke specificerer om dynamikken er under \mathbb{P} eller \mathbb{Q} .

Vi ønsker et simplere udtryk for dV_t^h . For at dette kan lykkes, skal vi først specificere nogle udtryk.

Vi benytter nu Ito's formel til at udlede prisdynamikken for call'en med en arbitrer hedging volatilitet, σ_t^h ,³¹

$$dC(t, S_t, \sigma_t^h) = C_t(t, S_t, \sigma_t^h)dt + C_s(t, S_t, \sigma_t^h)dS_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)\sigma_t^2 S_t^2 dt \quad (32)$$

Bemærk her at σ_t er den sande volatilitet, der stammer fra det underliggende aktiv, S_t .

Vi kan nu benytte Black-Scholes ligningen til at se³²

$$C_t(t, S_t, \sigma_t^h) = rC(t, S_t, \sigma_t^h) - rC_s(t, S_t, \sigma_t^h)S_t - \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)(\sigma_t^h)^2 S_t^2 \quad (33)$$

Bemærk at det nu er hedging volatiliteten, σ_t^h , der indgår i det sidste led. Dette er tilfældet, da det er denne volatilitet, som løser Black-Scholes PDE'en, og volatiliteten i dette udtryk er derfor nødt til at være netop hedging-volatiliteten. Ved at indsætte $C_t(t, S_t, \sigma_t^h)$ fra Ligning 33 i Ligning 32 får vi følgende

$$\begin{aligned} dC(t, S_t, \sigma_t^h) &= \left(rC(t, S_t, \sigma_t^h) - rC_s(t, S_t, \sigma_t^h)S_t - \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)(\sigma_t^h)^2 S_t^2 \right) dt \\ &\quad + C_s(t, S_t, \sigma_t^h)dS_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)\sigma_t^2 S_t^2 dt \\ \Leftrightarrow 0 &= -dC(t, S_t, \sigma_t^h) + \left(rC(t, S_t, \sigma_t^h) - rC_s(t, S_t, \sigma_t^h)S_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2(\sigma_t^2 - (\sigma_t^h)^2) \right) dt \\ &\quad + C_s(t, S_t, \sigma_t^h)dS_t \end{aligned}$$

Vi betragter nu igen dynamikken for porteføljeværdiprocessen. Vi trækker nu det netop udledte udtryk, med værdi 0, fra dV_t^h og ser³³

$$\begin{aligned} dV_t^h &= C_s(t, S_t, \sigma_t^h)dS_t - C_s(t, S_t, \sigma_t^h)rS_t dt + C(t, S_t, \sigma_t^i)rdt - dC(t, S_t, \sigma_t^i) + dC(t, S_t, \sigma_t^h) \\ &\quad - \left(rC(t, S_t, \sigma_t^h) - rC_s(t, S_t, \sigma_t^h)S_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2(\sigma_t^2 - (\sigma_t^h)^2) \right) dt - C_s(t, S_t, \sigma_t^h)dS_t \\ &= dC(t, S_t, \sigma_t^h) - dC(t, S_t, \sigma_t^i) - (C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))rdt + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2)dt \end{aligned}$$

Vi ønsker nu at reducere dette udtryk yderligere. Vi benytter følgende observation, hvor multidimensional

³¹Husk egenskaberne: $(dt)^2 = 0$, $dt \cdot dW_t = 0$ og $(dW_t)^2 = dt$

³²Black-Scholes ligningen siger: $0 = C_t(t, S_t, \sigma_t^h) - rC(t, S_t, \sigma_t^h) + rC_s(t, S_t, \sigma_t^h)S_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)(\sigma_t^h)^2 S_t^2$

³³Bemærk at da vi trækker udtrykket fra ændres fortegnene

Ito's formel er benyttet³⁴

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))) &= -re^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))dt + e^{-rt}dC(t, S_t, \sigma_t^h) + e^{-rt}dC(t, S_t, \sigma_t^i) \\ \Leftrightarrow e^{rt}d(e^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))) &= -r(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))dt + dC(t, S_t, \sigma_t^h) + dC(t, S_t, \sigma_t^i) \end{aligned}$$

Vi genkender højresiden fra porteføljedynamikken og erstatter denne med venstresiden, hvilket giver følgende reducerede udtryk

$$dV_t^h = e^{rt}d(e^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))) + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2)dt$$

Bemærk her at $dV_t^h \neq 0$. Dette er tilfældet da vi hedger med 'den forkerte' volatilitet, σ_t^h . Den samlede hedging error er de akkumulerede hedge errors over de disjunkte tidsintervaller. Vi integrerer og tilbagediskonterer dV_t^h ³⁵. Nutidsværdien af den samlede hedging error, der opnås ved at følge denne strategi over optionens levetid er da givet ved

$$\begin{aligned} P\&L_T &= \int_0^T e^{-rt}dV_t^h \\ &= \int_0^T e^{-rt} \left(e^{rt}d(e^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))) + \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2)dt \right) \\ &= \int_0^T d(e^{-rt}(C(t, S_t, \sigma_t^h) - C(t, S_t, \sigma_t^i))) + \int_0^T e^{-rt} \frac{1}{2}C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)S_t^2((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2) \\ &= \left[e^{-rT} \underbrace{(C(T, S_T, \sigma_T^h) - C(T, S_T, \sigma_T^i))}_{(S_T-K)^+ - (S_T-K)^+=0} - e^{-r0}(C(0, S_0, \sigma_0^h) - C(0, S_0, \sigma_0^i)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt}((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2)S_t^2C_{ss}(t, S_t, \sigma_t^h)dt \\ &= C(0, S_0, \sigma_0^i) - C(0, S_0, \sigma_0^h) + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt}((\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2)S_t^2\Gamma(t, S_t, \sigma_t^h)dt \end{aligned}$$

Ved andet lighedstegn er dV_t^h indsatt. Ved næstsidste lighedstegn er standard integral regneregler og Black Scholes terminal betingelse benyttet. Ved sidste lighedstegn fås 'the Fundamental Theorem of Derivative Trading' (FTODT), relateret til modellen opstillet i denne opgave.

³⁴Bemærk at de dobbeltafledte alle er lig 0 og derfor ikke indgår.

³⁵Læg mærke til at vi integrerer, da vi opererer i kontinuert tid. I diskret tid ville dette være en sum.

2.3.4 Wilmots Hedge Experiment

I FTODT vælger vi en vilkårlig hedging volatilitet, σ_t^h . Vi vil nu undersøge to valg af hedging volatiliteten med simulation ved at replikere simulationsstudiet fra Wilmot & Ahmad 2005 [7]. Det første interessante valg er at hedge med implicit volatilitet, σ_t^i . Det andet er at hedge med den sande volatilitet, σ_t ³⁶.

Vi antager i det følgende, at implicit volatilitet overstiger sand volatilitet i løbet af optionens levetid. Vi betragter altså en Europæisk call option, der er overpriset, og intuitivt ønsker vi derfor at sælge optionen i vores hedging portefølje. Vi hedger i et diskret timegrid, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Hedging med sand volatilitet

Vælg $\sigma_t^h = \sigma_t$. Da er $P\&L$ over perioden $[0, T]$ i kontinuert tid givet ved det deterministiske udtryk, jf. FTODT,

$$P\&L_T = C(0, S_0, \sigma_0^i) - C(0, S_0, \sigma_0) \quad (34)$$

Dette udtryk er positivt med sandsynlighed 1, da $\sigma_0^i > \sigma_0$, og vi er garanteret fortjeneste ved udløb. Ved optionshandel opdateres positionen dagligt. Ved at benytte samme fremgangsmetode som i beviset for FTODT, med $\sigma_t^h = \sigma_t$, fås dynamikken for hedging porteføljen. Vi benytter \mathbb{P} -dynamikken for S_t , da vi er interesseret i den fysiske udvikling af aktiekursen.

$$dV_t^h = (C_s(t, S_t, \sigma_t^i) - C_s(t, S_t, \sigma_t)) ((\mu - r)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^P) + \frac{1}{2}((\sigma_t^i)^2 - \sigma_t^2)S_t^2 \Gamma(t, S_t, \sigma_t^i) dt$$

Vi bemærker, at den deterministiske fortjeneste er opnået ved en randomiseret sti, på grund af dW_t -leddet. Den endelige fortjeneste bestemmes udelukkende af forholdet mellem sand og implicit volatilitet ved initialisering af porteføljen, men fra dag til dag kan vi risikere at miste, før vi vinder. Dette er ikke tilfredsstillende ud fra et risikostyringsperspektiv. Figur 7 illustrerer simuleringer af $P\&L$ på daglig basis. Der er simuleret 10 stier for en GBM med følgende parametre specificeret: $S_0 = 100$, $K = 100$, $\mu = 0.1$, $\sigma_t = 0.2$, $\sigma_t^i = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 1$ og med $N = 10.000$ rebalanceringer af porteføljen.

³⁶Dette er teoretisk under antagelse af, at man kan hedge med den rigtige sande volatilitet.



Figur 7: Daglige $P\&L$ for hedging porteføljer med sand volatilitet, $\sigma_t^h = \sigma_t$

Den deterministiske fortjeneste er givet ved $V_T^h = e^{rT}(C(0, S_0, \sigma_t^i) - C(0, S_0, \sigma_t)) = 3.98$, og det ses på plottet, at alle stier ender i omegnen af denne. Diskretisering af tid forklarer, hvorfor terminalværdien kun rammer approximativt. $P\&L$ stierne i Figur 7 viser store udsving i optionens levetid. Dette svarer til forekomster af store dag-til-dag tab i hedging porteføljen.

Hedging med implicit volatilitet

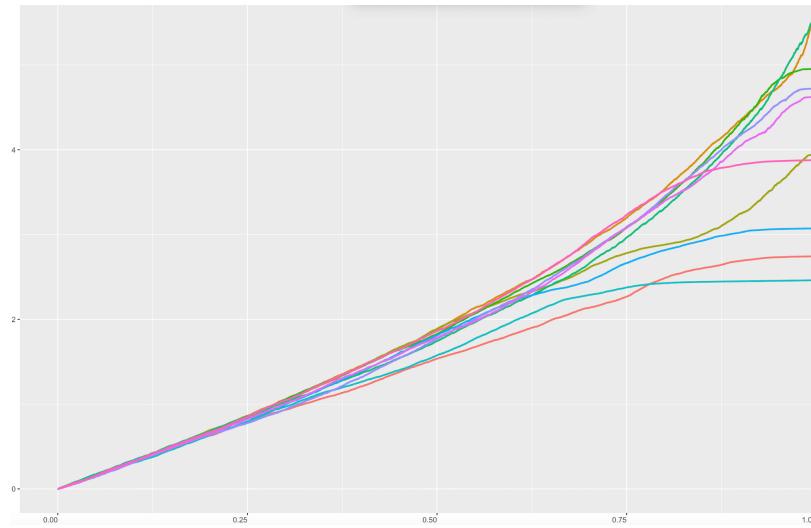
Vælg $\sigma_t^h = \sigma_t^i$. Da er $P\&L$ over perioden $[0, T]$ i kontinuert tid givet ved det stokastiske udtryk, jf. FTODT,

$$P\&L_T = \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} ((\sigma_t^i)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t, \sigma_t^i) dt \quad (35)$$

Denne hedging error er stiafhængig, og volatilitetsarbitrage er derfor muligt, hvis det gælder $\forall t \in [0, T]$ at $\sigma_t^i > \sigma_t$. Vi bemærker at terminalværdien for hedging porteføljen er stokastisk grundet $(S_t)_{t \in [0, T]}$. Den daglige fortjeneste kan nu ved at benytte samme fremgangsmåde som i beviset for FTODT, med $\sigma_t^h = \sigma_t^i$, udtrykkes ved

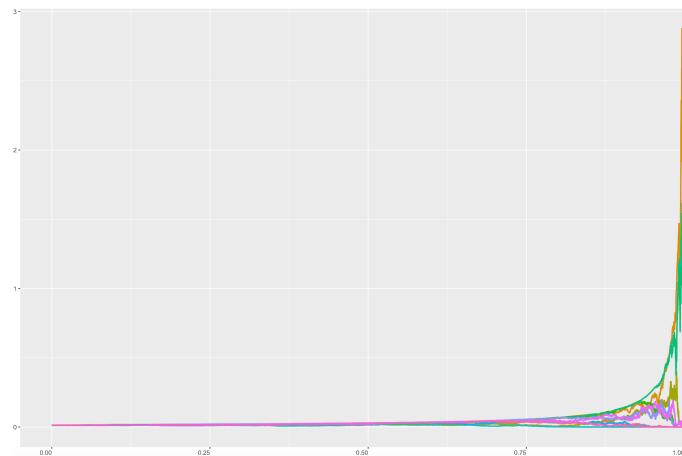
$$dV_t^h = \frac{1}{2} ((\sigma_t^i)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t, \sigma_t^i) dt$$

Her ser vi, at den stokastiske løsning er opnået ved en glat og deterministisk sti, da dW_t -leddet ikke indgår. Dette er langt mere tilfredsstillende ud fra et risikostyringsperspektiv. Figur 8 illustrerer simulationer af $P\&L$ på daglig basis. Der er simuleret 10 stier for en GBM med samme parametre som i Figur 7.



Figur 8: Daglige $P\&L$ for hedging porteføljer med implicit volatilitet, $\sigma_t^h = \sigma_t^i$

Det ses på Figur 8, at hedge med implicit volatilitet medfører en udglatning af $P\&L$ -stierne i modsætning til hedging med sand volatilitet. Det ses samtidig, at terminalværdien varierer for de enkelte stier. Terminalværdien afhænger bl.a. af call optionens gamma. Det ses på Figur 9, at gamma for den orange og grønne er høje hen mod udløb af optionen. Ligeledes ses det på Figur 8, at den orange og grønne simulation er dem, der ender med at have den højeste terminalværdi. Vi husker at gamma er den andenafledte af optionsprisen mht. det underliggende aktiv. Dette betyder, at når optionen er dybt in eller out-the-money, er gamma lille, og når optionen er nær eller at-the-money, er gamma størst. Den orange og grønne sti har begge aktiekurser, som er tæt på strikekursen.



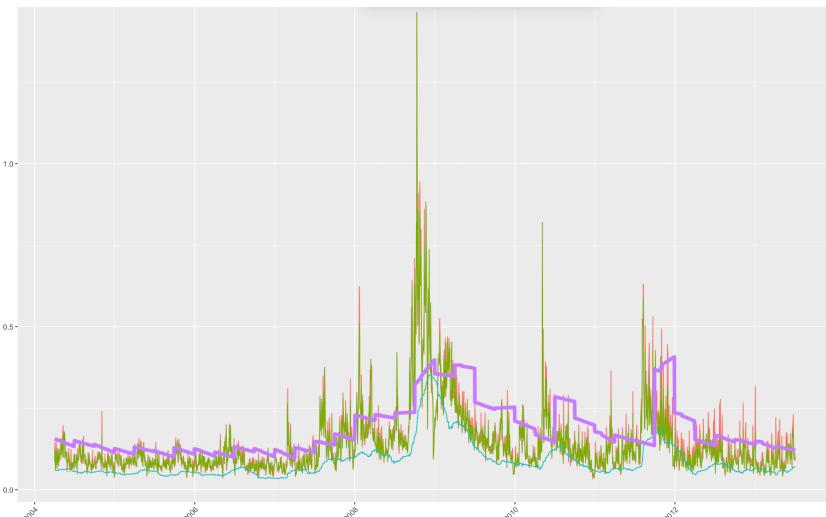
Figur 9: Plot af gamma funktionen for EU call optionen med implicit volatilitet, $\sigma_t = \sigma_t^i$

3 Empirisk undersøgelse

Det teoretiske grundlag er nu på plads, og vi er klar til at arbejde med realiseret data. Fokus i denne opgave har ligget på udarbejdelsen af teorien, hvilket i sig selv er meget interessant, men vi vil nu også dedikere plads til en empirisk undersøgelse.

Størstedelen af det empiriske arbejde lægges i at udføre eksperimentet fremlagt i Ellersgaard m.fl. [6]. Det er en undersøgelse inspireret af det netop udførte, Wilmot's Hedge Experiment og benytter empiriske resultater af Δ -hedging strategier. Vi vil, ligesom i artiklen, undersøge de akkumulerede $P\&L$ for et Δ -hedge af en 3 måneders EU call option på $S\&P500$ -indekset, der oprindeligt blev købt at-the-money. Vi undersøger 37 forskellige Δ -hedging porteføljer over ikke overlappende intervaller i perioden 01.04.2004 – 03.07.2013. I Appendix D findes en kort undersøgelse omkring brugen af højfrekvent data.

Vi benytter daglige data for $S\&P500$ indekset, som er frit tilgængeligt online³⁷. Derudover indeholder vores datasæt den daglige markedspris for hver option og den daglige implicite volatilitet. Vi benytter dertil data for forskellige volatilitetsmål for $S\&P500$ indekset. Tidsserier for den daglige varians er hentet fra nettet og er blevet omdannet til standardafvigelser og annualiseret³⁸. Derefter er hver tidsserie blevet tilføjet datasættet. Her er de to datasæt smeltet sammen med 'Dato' som ID variabel og R-pakken 'zoo' er benyttet til interpolation. De volatiliteter, vi vil behandle i denne opgave, er rk_th2, rv5, naiv og implicit volatilitet. Figur 10 viser disse. En nærmere beskrivelse af de enkelte volatilitetsmål fremgår, når de benyttes.



Figur 10: Plot af volatiliteter, rv5 (rød), rk_th2 (grøn), naiv volatilitet (turkis) og implicit volatilitet (lilla).

³⁷Daglige $S\&P500$ data findes på yahoo finance.

³⁸Varianseestimatorer er hentet fra OxfordMan

RK_th2

RK_th2 står for 'Realized Kernel Volatility (Tukey-Hanning₂)' og er en proxy for den sande volatilitet. Ifølge *Sheppard m.fl. (2012)* [3] kan markedsstøj medføre en korrelation i de observerede afkastrater, hvilket fører til et bias i Realized Volatility (RV) estimatet ved høje sampling frekvenser. Realized Kernel (RK) estimatoren er en udvidelse af RV estimatoren, og er netop designet til at fange effekten af denne korrelation³⁹. *Barndorff-Nielsen m.fl. (2008)* [5] sammenligner i deres studie 10 forskellige RK estimatorer og finder, at Tukey-Hanning₂ performer bedst. De sammenligner yderligere rk_th2 med en RV estimator (20-min) i et empirisk studie og finder, at rk_th2 er mere præcis.

Man kunne skrive et helt enkeltstående projekt omkring Realized Kernels. Fokus i denne opgave ligger ikke på estimatoren rk_th2, men nærmere hvordan denne indgår i en hedging strategi. Hvad der er vigtigt at vide er, at rk_th2 er en proxy for sand volatilitet og at den benytter højfrekvent data⁴⁰.

3.1 Undersøgelse af sand kontra implicit volatilitet

Vi undersøger nu den empiriske performance af en Δ -hedging strategi baseret på hhv. implicit og en proxy for sand volatilitet. Her er tidsserien, rk_th2, benyttet som proxy for den sande volatilitet. Vi benytter fremgangsmåden fremlagt i Ellersgaard m.fl. [6]. Denne tilgang har følgende design, hvor det er antaget, at der er 63 handelsdage ($t = 1, \dots, 63$). Strategien gentages for hver option, ($i = 1, \dots, 37$).

- For hver portefølje defineres værdien til tidspunkt t for den implicitte volatilitet, σ_t^i , en proxy for den sande volatilitet (rk_th2), σ_t , S&P500 indekset, S_t , rente, r_t , og call optionspris, C_t .
- For hver hedging volatilitet $x \in \{\sigma_t, \sigma_t^i\}$ definerer vi en strategi således: Hvis $\sigma_1^i > \sigma_1$ så går vi kort i call optionen ($\gamma = -1$) og, ellers går vi langt ($\gamma = 1$).
- Vi opsætter delta neutral og selvfinansierende portefølje med den valgte strategi:

$$\Pi_1 = B_1 - \gamma\Delta_1 S_1 + \gamma C_1 \text{ u.b. } \Pi_1 = 1.$$

- For $t = 1, \dots, 63$ gøres følgende:

Værdien af porteføljen for den forrige dag beregnes $\tilde{\Pi}_t = e^{r_{t-1}dt}B_{t-1} - \gamma\Delta_{t-1}S_t e^{q_{t-1}dt} + \gamma C_t$.

$P\&L$ over intervallet $[t-1, t]$ defineres ved $dP\&L_t = \tilde{\Pi}_t - \Pi_{t-1}$.

Porteføljen rebalanceres ved at vælge B_t , så den stadig er Δ -neutral, $B_t = \Pi_t + \gamma\Delta S_t - \gamma C_t$.

- På tid $t = 63$ beregnes terminal $P\&L$ og den kvadratiske variation $\frac{1}{63} \sum_{t=1}^{63} |dP\&L_t|^2$

³⁹En nærmere beskrivelse af RV estimatoren findes i Appendix D.

⁴⁰Hvis man er interesseret i hvordan Realized Kernels beregnes kan en kort beskrivelse findes på dette link: <https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/documentation/econometric-methods>

Resultater



Figur 11: Plot af kummuleret hedge error ($P\&L$ stier) for de 37 forskellige Δ -hedges, med hhv. rk_th2 (venstre) og implicit volatilitet (højre). De røde stier angiver, at vi er gået kort i call optionen, og de blå er, hvor vi er gået langt.

Figur 11 viser plot af de 37 $P\&L$ stier, og Figur 12 viser plot af det tilhørende Δ . Tabel 1 viser beskrivende statistikker for hhv. $P\&L$ og kvadratisk variation, og Tabel 2 viser statistiske test af forskellige hypoteser⁴¹. De nævnte figurer og tabeller kommenteres og analyseres i næste afsnit.

Tabel 1: Sammenfattende statistikker for forskellige hedging volatiliteter.

(a) Kvadratisk Variation

	Mean	Std.
Implicit	0.57	0.98
rk_th2	3.31	8.76

(b) Hedge Error ($P\&L$)

	Mean	Std.
Implicit	6.33	11.96
rk_th2	5.30	13.95

⁴¹Vi har benyttet en paired t-test til at teste middelværdihypoteserne og F-test til at teste hypoteser vedrørende standardafvigelsler.

H_0	H_A	p-værdi	Resultat
$\mu_{rkth2} = \mu_{implied}$ (Kvadratisk Variation)	$\mu_{rkth2} > \mu_{implied}$	$p = 0.027 < 0.05$	$\mu_{rkth2} > \mu_{implied}$
$\mu_{rkth2} = \mu_{implied}$ (Hedge Error - P&L)	$\mu_{rkth2} \neq \mu_{implied}$	$p = 0.45 > 0.05$	$\mu_{rkth2} = \mu_{implied}$
$sd_{rkth2} = sd_{implied}$ (Hedge Error - P&L)	$sd_{rkth2} \neq sd_{implied}$	$p = 0.35 > 0.05$	$sd_{rkth2} = sd_{implied}$
$\mu_{rkth2} = 0$ (Hedge Error - P&L)	$\mu_{rkth2} > 0$	$p = 0.01 < 0.05$	$\mu_{rkth2} > 0$
$\mu_{implied} = 0$ (Hedge Error - P&L)	$\mu_{implied} > 0$	$p = 0.001 < 0.05$	$\mu_{implied} > 0$

Tabel 2: Statistiske test af forskellige hypoteser, med hedging strategien fra Ellersgaard m.fl. (2015) [6]

Figur 12: Plot af Δ for $P\&L$ stier for hedging strategierne med hhv. implicit volatilitet (venstre) og rk_th2 (højre). Øverst er Δ for option 1-10, midten er Δ for option 11-20 og nederst er Δ for option 21-30.

Konklusion

Når vi skal vurdere, hvilken hedging strategi der har performet bedst, er der et tradeoff mellem fortjeneste og risiko. Det er både relevant at undersøge om den ene strategi fremfor den anden, hhv. tjener mere eller er forbundet med større risiko.

Fortjeneste

Selvom implicit volatilitet typisk overstiger sand volatilitet, ser vi på Figur 11, at dette ikke nødvendigvis leder til volatilitetsarbitrage, da der er flere stier, som ender med en negativ terminal $P\&L$. Selvom den samlede hedge error gentagne gange er negativ, ser vi på Tabel 2, at gennemsnitligt er den terminale

P&L signifikant positivt, både når vi hedger med *rk_th2* og implicit volatilitet. Dette leder til følgende tanke: Er dette resultat også økonomisk signifikant?

Vi ”køber” i principippet en portefølje, der ikke koster noget, så det er svært at vurdere et enkeltstående gennemsnitligt afkast. For at få et performance mål betragter vi afkastet på porteføljen relativt til call options kurserne. Med en grov gennemsnits beregning finder vi, at den annualiserede relative Sharpe Ratio er⁴²

$$SR_{implied} = \frac{\frac{4.633}{45.78} - 0.02}{\sqrt{\frac{4.11.96}{45.78}}} = 1.02 \quad SR_{rkth2} = \frac{\frac{4.5.30}{45.78} - 0.02}{\sqrt{\frac{4.13.95}{45.78}}} = 0.73 \quad (36)$$

En Sharpe Ratio omkring 1 viser os, at fortjenesten også er signifikant i økonomiske termer⁴³. Vi ser yderligere på Ligning 36, at den relative Sharpe Ratio for hedging strategien med implied volatilitet er betydeligt højere end den hvor hedging volatiliteten er lig *rk_th2*. Jo større en porteføljes Sharpe Ratio er, jo bedre er dens risikojusterede ydeevne.

Et andet aspekt er at undersøge Δ for de to forskellige strategier. Hvis Δ flukturerer meget, er det et udtryk for, at vi bliver nødt til at skifte position ofte for at bibebeholde en delta neutral position. Hvis vi ’kun’ rebalancerer én gang dagligt i en position, hvor delta flukturerer meget, vil *P&L* være mere usikker sammenlignet med en position hvor Δ ikke har ligeså ekstreme ændringer. Her ville det måske være tilstrækkeligt blot at rebalance en gang dagligt. I det virkelige marked er der transaktionsomkostninger, derfor ønsker man at rebalance så sjældent som muligt. Vi ser på Figur 12 at Δ for hedging strategien med implicit volatilitet har mindre udsving end den, hvor vi har hedget med *rk_th2*⁴⁴.

Risiko

Hvis vi kun betragter standardafvigelse af hedge error som risikomål, ser vi på Tabel 2, at de to hedging strategier har samme risiko. Hvis vi i stedet benytter kvadratisk variation som mål for risiko, ser vi på Tabel 2, at der er signifikant forskel på risikoen forbundet med de to strategier. Vi finder, at $\mu_{rkth2} > \mu_{implied}$, hvilket indikerer, at hedge med implicit volatilitet giver mindre udsving og dermed glattere *P&L* stier ift. at hedge med *rk_th2*. De store udsving er et udtryk for, at vi kan tabe meget på en dag-til-dag basis. Dermed går pointen fra Wilmots Hedge Experiment igen: at hedge med implicit volatilitet får risikomanageren til at sove bedre om natten.

Udover undersøgelsen mellem de to hedging strategier, $\sigma_t^h \in \{\sigma_t^i, \sigma_t\}$, er det værd at diskutere om, vi egentlig har lavet volatilitetsarbitrage. Vi har to strategier, som ikke koster noget, men som på et 5%

⁴²Hvor det er benyttet, at den gennemsnitlige call optionspris er 45.78 og gennemsnitsrente er 0.02

⁴³Vi er opmærksomme på at Sharpe Ratio er en relativ størrelse og konkluderer at en Sharpe Ratio omkring 1 er god på baggrund af den artikel vi har replikeret det empiriske studie fra (Ellersgaard (2015) [6])

⁴⁴Denne observation bakkes op med R-kode, hvor $sd(delta_rkth2) = 0.33$ og $sd(delta_implied) = 0.30$.

signifikansniveau udbetaler en præmie. Dog risikerer vi at tabe stort, før vi vinder. Det ville hertil være interessant at identificere de største hhv. tab og gevinster og undersøge, om der skete noget specielt i den periode. Det største tab sker for Option 18, hvor vi er gået kort i call'en, og Lehman krakket sker under options levetid⁴⁵. Det næststørste tab sker for Option 14.

3.2 Undersøgelse af option 14

Denne option er i perioden 3/7/2007 – 1/10/2007. Ved initiation er $\sigma_1^i > \sigma_1$, og vi er derfor gået kort i call'en. Denne option er interessant at betragte, da den realiserede volatilitet ved udløb er på 'den rigtige side' af implicit volatilitet, men vi taber stadig penge i begge hedging strategier. Lad os se nærmere på hvorfor. De figurer der henvises til i dette afsnit findes i Appendix B.

I Wilmots Hedge Experiment fandt vi, når vi hedger med implicit volatilitet, at den terminale *P&L* er stiafhængig og dermed er afhængig af at $\sigma_t^i > \sigma_t$ for alle $t < T$. Vi ser på Figur 13, at den realiserede volatilitet overstiger den implicitte i en betydelig del af optionens levetid. Vi fandt yderligere, at terminalværdien afhænger af call optionens gamma, hvilket er størst, når optionen er nær eller at-the-money. Option 14 sælges at-the-money. Det ses på Figur 16, at aktiekursen er meget nær strikekursen i starten og slutningen af optionens levetid, også i perioder hvor volatilitetsrelationen er negativ.

Når vi hedger med den sande volatilitet, fandt vi, at den terminale *P&L*, i en Black-Scholes verden er deterministisk. I virkeligheden hedger vi med en proxy for sand volatilitet, hvilket betyder, at dette forecast ikke nødvendigvis ender med at være lig den realiserede volatilitet. Når vi hedger med noget, der afviger fra den sande volatilitet, får vi, at de daglige hedge errors har en betydning for den terminale *P&L*. Vi er derfor afhængige af et meget nøjagtigt forecast, hvis vi gerne vil hedge med 'sand volatilitet'⁴⁶. Vi udledte FTODT på baggrund af en model, hvor volatiliteten er antaget at være konstant. En forklaring på at vi ikke får de resultater, vi forventer, kan skyldes, at volatilitet i den virkelige verden er stokastisk, og vi derfor ikke forecaster en korrekt sand volatilitet. At resultatet fra FTODT ikke slår ind kan ligeledes skyldes, at teorien er udarbejdet i kontinuert tid, men at vi i det empiriske studie hedger i diskret tid.

Vi kan yderligere undersøge, hvilken dag vi har oplevet det største tab⁴⁷. Ved at betragte Figur 14 ser vi, at det største daglige tab sker på dag 55. Ved at se nærmere på Figur 15 ser vi, at der netop mellem dag 54 og 55 sker det største spring i Δ 'et. Vi ser på Figur 16, at mellem dag 54 og 55 går aktiekursen fra i en længere periode at have været out-the-money til at være at-the-money⁴⁸. Vi er bekendte med,

⁴⁵Option 18 løber i perioden 2/7/2008 – 30/9/2008 og Lehman krakket sker 15/9/2008.

⁴⁶Jeg skriver sand volatilitet i gæseøjne, da vi ikke kan forecase den eksakte realiserede volatilitet, men blot kan hedge med en proxy for den sande volatilitet.

⁴⁷Vi undersøger det største daglige tab for hedging strategien med implicit volatilitet.

⁴⁸Aktiekursen på dag 55 er lig 1519.78, og strikekursen er lig 1519.43. Selvom aktiekursen er nogle øre over strikekursen, vælger vi alligevel at betragte optionen som at-the-money.

at en at-the-money call har et højere Δ end en out-the-money option, og dette forklarer muligvis den store stigning i Δ 'et. Yderligere har en at-the-money option et højere gamma. Det høje gamma falder sammen med, at volatilitetsrelationen er negativ. Dag 55 svarer til 19/9/2007. Hvis vi undersøger finansiel historie, finder vi, at der op til denne dato havde været uro på det finansielle marked, som førte til, at flere og flere kunder trak deres penge ud af den engelske bank Northern Rock. D. 18/9/2007 (dag 54) går den engelske regering ud og siger, at de vil støtte Northern Rock, og der er ingen grund til bekymring.

Når vi går kort i call optionen, er det ensbetydende med, at vi satser på, at den sande volatilitet holder sig lav og vice versa. I april-juni, altså månederne op til initiation af strategi 14, har det amerikanske FED sænket renten betydeligt og købt mere og mere giftig bankgæld. Dette kunne have været en indikation på, at markedet var ustabilt eller på vej ind i en ustabil periode. Hvis vi i stedet var gået langt i call optionen, havde vi opnået en fortjeneste, men det er selvfølgelig altid nemt at være bagklog. Vi oplever netop den største gevinst for Option 19, hvor vi er gået langt i call'en i en volatil periode⁴⁹.

⁴⁹Option 19 er i perioden 1/10/2008 – 30/12/2008 og er altså midt i finanskrisen.

4 Konklusion

I denne opgave har vi formuleret og sammenlignet to forskellige hedging strategier: en hvor vi hedger med implicit volatilitet, og en hvor vi hedger med en proxy for sand volatilitet. Vi har benyttet følgende værdier til at bestemme den optimale handelsstrategi

- Gennemsnit og standardafvigelse for terminalværdien af $P&L$.
- Den kvadratiske variation af porteføljen i løbet af optionens levetid.
- En vægtet annualiseret Sharpe Ratio.

Vi finder, at de to strategier, på et 5% signifikansniveau, genererer den samme profit, men at den kvadratiske variation forbundet med strategien, hvor vi hedger med implicit volatilitet, er lavere. Vi finder, at dette resultat også er økonomisk signifikant, da den relative sharpe ratio for hedging strategien med implicit volatilitet er højere. Disse resultater leder til konklusionen, at hedge med implicit volatilitet giver glattere $P&L$ stier og en bedre risikojusteret ydeevne.

Vi diskuterede yderligere, om der var mulighed for volatilitetsarbitrage. Her fandt vi, at begge strategier er selvfinansierende og medfører et positivt forventet afkast på et 5% signifikansniveau. Dette resultat er dog over en periode på 13 år, og vi så, at hedge errors for de to strategier nemt bliver negative. Den statistiske volatilitets arbitrage afhænger af, at vi er villige til og er i en position, hvor vi har mulighed for at acceptere nogle markante tab undervejs.

Vi undersøgte én periode med stort tab nærmere. Her fandt vi, at de daglige hedge errors påvirkede den terminale $P&L$ for begge hedging strategier. Teoretisk fandt vi, at den terminale $P&L$ var deterministisk og ikke stiafhængig, hvis vi hedger med sand volatilitet. Dette resultat gik ikke igen i det empiriske studie. Her diskuterede vi, at en mulig forklaring kunne være, at det er, fordi vi ikke hedger med den sande volatilitet, men en proxy for den sande volatilitet. Her konkluderede vi, at når vi hedger med noget, som afviger fra den realiserede (sande) volatilitet, bliver den terminale $P&L$ stiafhængig. En forklaring på at vi ikke estimerer den sande volatilitet korrekt er, at volatilitet i den virkelig verden har en stokastisk komponent. I en videre undersøgelse kunne man inkorporere stokastisk volatilitet i modellen og undersøge, om dette gør en signifikant forskel.

5 Litteratur

- [1] T. Björk. Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford Finance, third edition, 2009.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, pages 637–654, May-June 1973.
- [3] A. J. P. Lily Liu and K. Sheppard. Does anything beat 5-minute rv? a comparison of realized measures across multiple asset classes. Journal of Econometrics, pages 293–311, Juli 2015.
- [4] R. C. Lower. The regulation of commodity options. Duke Law Journal, pages 1095–1145, December 1978.
- [5] A. L. Ole E. Barndorff-Nielsen, Peter Reinhard Hansen and N. Shephard. Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise. Econometrica, nov 2008.
- [6] M. J. Simon Ellersgaard and R. Poulsen. The fundamental theorem of derivative trading - exposition, extensions, and experiments. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, feb 2015.
- [7] P. Wilmot and R. Ahmad. Which free lunch would you like today, sir?: Delta hedging, volatility arbitrage and optimal portfolios. Wilmott Magazine, pages 64–79, 2005.

Appendix A

Udledning af GBM momenter

Momenterne for GBM er givet ved

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t] &= S_0 e^{\mu t} \\ \mathbb{V}[S_t] &= S_0^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right) \\ Cov(X_t, X_s) &= S_0^2 e^{\mu(t+s)} \left(e^{\sigma^2 s} - 1 \right) \\ (0 < s < t) \quad \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s^S] &= S_s e^{\mu(t-s)} \neq S_s\end{aligned}$$

Udledning

Vi opstiller først nogle resultater, som vi ønsker at benytte.

$$\begin{aligned}(1) \quad X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[e^{tx}] &= e^{\frac{t^2}{2}} \\ (2) \quad Y = t(a + bZ) \sim \mathcal{N}(at, (bt)^2) \Rightarrow \mathbb{E}[e^Y] &= e^{\mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}\mathbb{V}[Y]}\end{aligned}$$

Vi ser, for fast $t > 0$ og hvor $Z \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right)$, at

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[e^Z] = e^{\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2}\mathbb{V}[Z]} = e^{\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t}$$

Ved at benytte samme fremgangsmetode finder vi covariansen og andenmomentet, og derigennem variansen, til at være

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[S_t] &= S_0^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right) \\ Cov(S_t, S_s) &= S_0^2 e^{\mu(t+s)} \left(e^{\sigma^2 s} - 1 \right)\end{aligned}$$

Hvis vi i stedet ser fremad mod S_t og altså stopper processen på et tidligere tidspunkt, $s < t$, ser vi, at

den forventede værdi til aktiekursen bliver

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s^S] &= \mathbb{E}[S_t \frac{S_s}{S_s} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[\frac{S_t}{S_s} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[e^{(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t) - (\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s)} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} e^{\sigma W_{t-s}} | \mathcal{F}_s^S] \\
&= S_s \mathbb{E}[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} e^{\sigma W_{t-s}}] \\
&= S_s e^{\mu(t-s)}
\end{aligned}$$

Udledning af Europæisk call optionspris

Lad

$$S_T = \frac{S_T}{S_t} S_t = S_t e^Z := S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot Y}$$

hvor $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ med tæthedsfunktion f_Y . Da er Z en lineær transformation af Y og

$$Z \sim \mathcal{N}\left((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \text{ med tæthedsfunktion } f_Z(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} f_Y\left(\frac{z - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right)$$

Lad $t \in [0, T]$ og $S_t > 0$ være fast. Da giver risikoneutral valuation at

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\Phi_C(S_t e^Z) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (S_t e^z - K)^+ f_Z(z) dz = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{S_t e^z - K, 0\} f_Z(z) dz$$

Vi ser at

$$S_t e^z - K > 0 \Leftrightarrow z > \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)$$

Dette giver

$$\begin{aligned} &= e^{-r(T-t)} \left(\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S_t})} 0 \cdot f_Z(z) dz + \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} (se^z - K) \cdot f_Z(z) dz \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \left(s \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} e^z \cdot f_Z(z) dz - K \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} f_Z(z) dz \right) \end{aligned}$$

Lad i det følgende $\alpha = (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$ og $\beta = \sigma\sqrt{T-t}$ for at lette notationen. Ved at indsætte tæthedsfunktionen ser vi

$$= e^{-r(T-t)} \left(S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} e^z \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z-\alpha}{\beta})^2} dz - K \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} f_Z(z) dz \right)$$

Læg $0 = \alpha + \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha - \frac{1}{2}\beta^2$ til og se, vha. kvadratsætningen, at

$$z - \frac{1}{2} \left(\frac{z-\alpha}{\beta} \right)^2 - \alpha - \frac{1}{2}\beta^2 + \alpha + \frac{1}{2}\beta^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{z-(\alpha+\beta^2)}{\beta} \right)^2 + \alpha + \frac{1}{2}\beta^2, \text{ hvilket giver}$$

$$= e^{-r(T-t)} \left(S_t \frac{1}{\beta} \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z-(\alpha+\beta^2)}{\beta} \right)^2 + \alpha + \frac{1}{2}\beta^2} dz - K \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} f_Z(z) dz \right)$$

Bemærk at $\alpha + \frac{1}{2}\beta^2 = r(T-t)$ og, få at

$$= S_t \frac{1}{\beta} \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z-(\alpha+\beta^2)}{\beta} \right)^2} dz - e^{-r(T-t)} K \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} f_Z(z) dz$$

Vi benytter nu følgende observation, hvor det er benyttet at standard normalfordelingen er symmetrisk⁵⁰

$$\begin{aligned}
 \int_{\ln(\frac{K}{S_t})}^{\infty} f_Z(z) dz &= \mathbb{Q} \left(z > \ln \left(\frac{K}{S_t} \right) \right) \\
 &= \mathbb{Q} \left((r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \cdot y > \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) \right) \\
 &= \mathbb{Q} \left(y > \frac{\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= \mathbb{Q} \left(y < -\frac{\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= \mathbb{Q} \left(y < \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)
 \end{aligned}$$

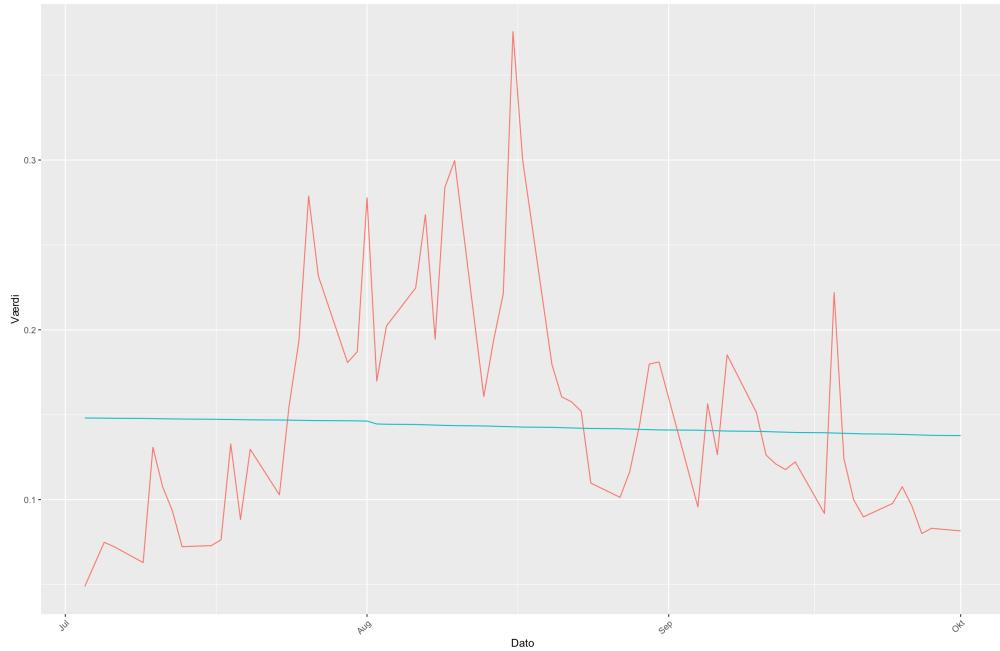
Hvor $N(\cdot)$ er CDF for en standard normalfordeling. Ved at benytte dette på begge integraler får vi Black-Scholes formlen.

$$C(t, S_t) = S_t N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$

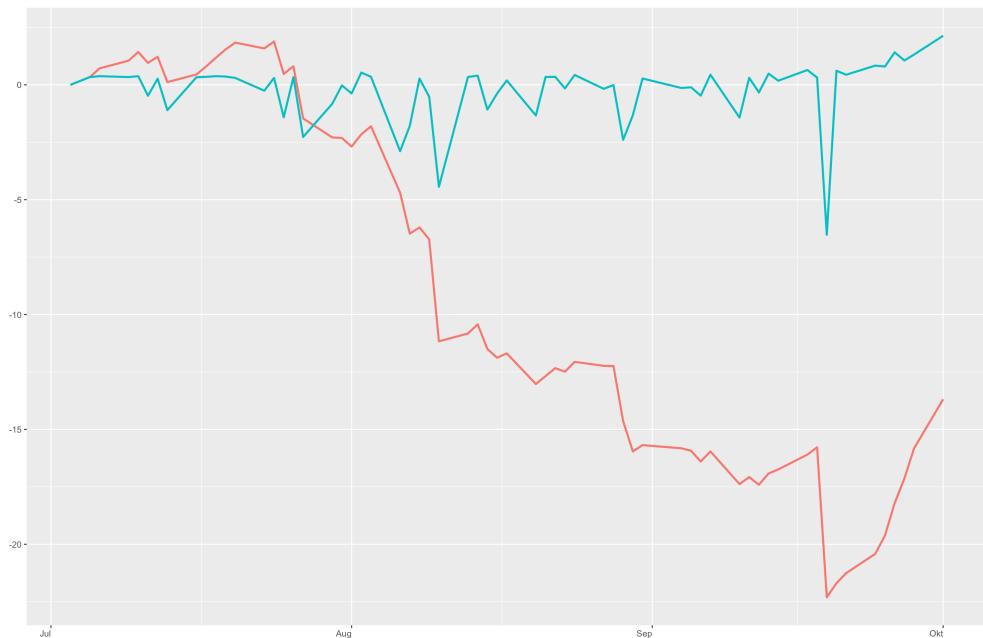
⁵⁰ $\mathbb{Q}(Y > x) = \mathbb{Q}(Y < -x)$

Appendix B

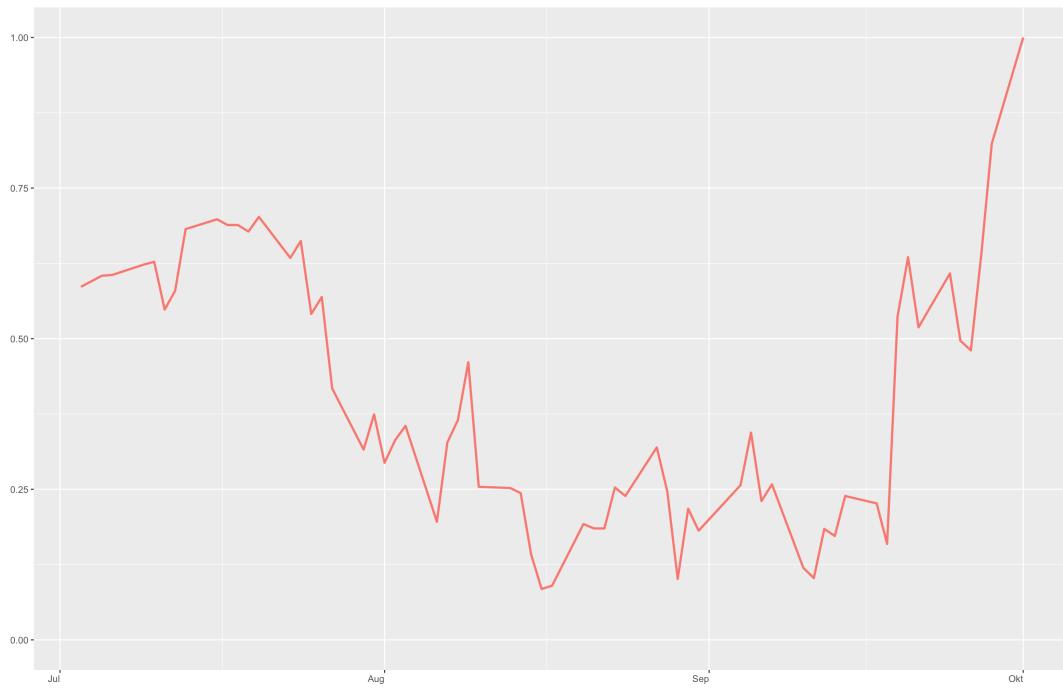
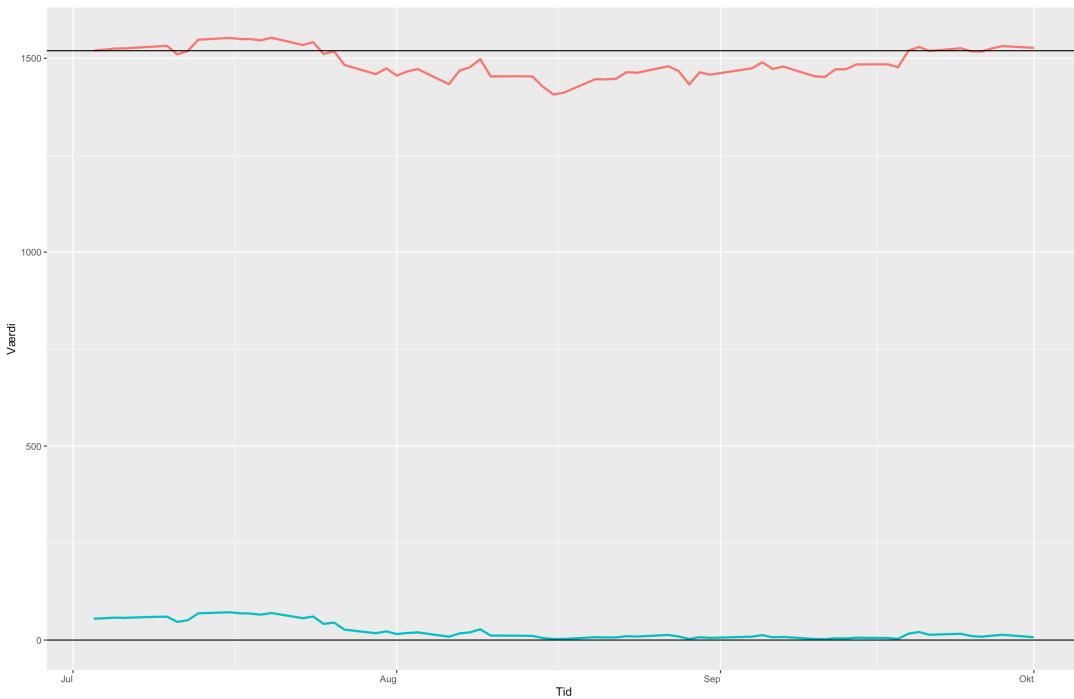
Resultater fra undersøgelse af option 14



Figur 13: Plot af implicit volatilitet (blå) og rk_th2 (rød) under option 14's levetid.



Figur 14: Plot af daglig hedge error (blå) og kummuleret hedge error (rød) for porteføljen hvor vi er gået kort i option 14 og hedget med implicit volatilitet.

Figur 15: Plot af Δ hørende til option 14.

Figur 16: Plot af call optionspris 14 og aktiekurs i samme periode.

Appendix C

Den R-kode vi har benyttet findes på følgende github link: <https://github.com/cnp777/Bachelor-2020/>

Appendix D

Undersøgelse af sand volatilitet proxy

Vi ønsker her at lave en kort empirisk undersøgelse vedrørende valget af proxy for den sande volatilitet, og om det kan betale sig at benytte dyrt højfrekvent data. Vi sammenligner de to proxy'er for sand volatilitet: RV5 og Naive. Vi beskriver først de to nærmere og udfører derefter det empiriske studie.

RV5

RV5 står for 'Realized Volatility (5-minute)', og er en proxy for den sande volatilitet. Den beregnes som kvadratroden af summen af kvadrede logafkast. De 5 minutter henviser til at RV beregnes på 5 minutters intervaller, altså at aktieprisen samples hvert 5. minut. Lad $r_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, da er

$$\text{Realized Variance} = \sum_{t=1}^N r_t^2$$

$$\text{Realized Volatility (RV)} = \sqrt{\text{Realized Variance}}$$

Dette giver den daglige volatilitet. Ved at gange med $\sqrt{252}$ fås årlige volatiliteter. Vi annualiserer standardafvigelerne for at kunne sammenligne dem.

Det er værd at notere sammenhængen mellem RV og et mål, vi kender godt: standardafvigelse. Da er⁵¹

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t^2}$$

Forskellen mellem RV og standardafvigelsen er faktoren $\frac{1}{N}$. Intuitionen er, at RV er realiseret volatilitet for hele dagen, hvor faktoren, $\frac{1}{N}$, gør 'Standard Deviation' til et vægtet gennemsnit, dvs realiseret volatilitet for 5 minutter. Hvis vi ganger 'Standard Deviation' med \sqrt{N} , får vi den realiserede volatilitet for hele dagen, hvilket netop er RV.

⁵¹Vi har her benyttet at middelværdien af logafkastene ca. er lig 0. Vi så i afsnittet omkring GBM (Figur 3) at de daglige logafkast lå omkring 0 og her betragter vi logafkast på endnu mindre intervaller (5 min).

Naive

Den naive estimator er ligeledes en proxy for den sande volatilitet. Den er interessant, da den modsat RV5 ikke kræver højfrekvent data. Den findes ved at beregne standardafvigelsen af de daglige logafkast over de seneste 3 måneder, og derefter annualisere. Dette gøres hver dag over et rullende vindue, alle med en længde på 63 handelsdage. Da er den daglige volatilitet givet ved⁵²

$$\text{Naive} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N r_t^2}$$

Vi genkender udtrykket fra RV5. Hvad der adskiller RV5 og Naive er samplingfrekvensen. Den Naive estimator benytter gratis daglig data, hvor RV5 benytter højfrekvent data, som koster penge. Det ses på Figur 10, at det naive vol mål har svært ved at fange de større udsving i volatiliteten, der opstår ved f.eks. finanskriser. Dette er tilfældet, da det naive volatilitetsmål opdateres langsommere sammenlignet med RV5.

Vi ønsker nu at lave en empirisk undersøgelse mellem de to estimatorer for sand volatiliteter: rv5 og naive. Det er interessant at teste disse to op imod hinanden, da det netop kun er brugen af højfrekvent data, der adskiller dem. For at teste dette udfører vi et hedge-eksperiment med næsten samme design som tidligere. Den eneste forskel er, at vi altid går kort i call optionen, og at vi vælger mellem hedging volatiliteterne $x \in \{rv5, naive\}$. Tabel 3 viser beskrivende statistikker for hhv. $P\&L$ og kvadratisk variation og Tabel 4 viser statistiske test af forskellige hypoteser.

Tabel 3: Sammenfattende statistikker for forskellige hedging volatiliteter: rk_th2 og naive.

(a) Kvadratisk Variation		(b) Hedge Error ($P\&L$)			
	Mean	Sd.	Mean	Std.	Max
rv5	3.51	9.58	5.01	13.71	33.10
naive	2.73	2.28	6.90	17.13	-38.315
					-61.5380

H_0	H_A	p-værdi	Resultat
$\mu_{rv5} = \mu_{naive}$ (Hedge Error - $P\&L$)	$\mu_{rv5} \neq \mu_{naive}$	$p = 0.6016 > 0.05$	$\mu_{rv5} = \mu_{naive}$
$sd_{rv5} = sd_{naive}$ (Hedge Error - $P\&L$)	$sd_{rv5} \neq sd_{naive}$	$p = 0.1861 > 0.05$	$sd_{rv5} = sd_{naive}$
$\mu_{rv5} = \mu_{naive}$ (Kvadratisk Variation)	$\mu_{rv5} \neq \mu_{naive}$	$p = 0.6332 > 0.05$	$\mu_{rv5} = \mu_{naive}$

Tabel 4: Statistiske test af forskellige hypoteser, med hedging strategien 'always short'.

⁵²Vi har ganget med $\frac{N}{N-1}$ for at få en central estimator (Bessel's correction).

Vi finder at de to hedging volatiliteter leder til den samme fortjeneste (*P&L*), jf. Tabel 4. Dertil ser vi, at der på et 5%-signifikans niveau, er den samme risiko forbundet med de to strategier. Det er dog værd at bemærke fra Tabel 3b, at hhv. den største fortjeneste og det mindste tab begge tilfalder strategien, hvor rv5 er benyttet. Dette kunne antyde, at vi måske ville se anderledes resultater, hvis vi havde mere data.