美式看跌期权的闭合公式计算方法

The Closed Form solution for Pricing American Put Options
(2004 年 4 月)

王晓东[+]

本文提出了基础资产为无红利分配股票的美式看跌期权的第一个闭合计算公式。美式看跌期权赋予其持有人在期权存续期的任一时刻、以约定价格出售股票的权利但非义务。在过去的几十年中，特别是在 Black-Scholes 模型给出欧式期权的定价公式后，人们在美式期权的定价方面做了大量探索，提出了不少方法，但尚无闭合公式求法。本文提出了一个美式看跌期权提前行权的最优策略，即当且仅当一个美式看跌期权被提前行权时的收益大于其对应的欧式看跌期权的价值时，该美式看跌期权才会被提前行权。基于这一策略，本文提出了一系列紧密关联的定理并最终推出了一个闭合计算公式。另外，基于该闭合公式得出的结论，本文还指出了 Merton（1973）有关永久美式看跌期权(perpetual American put option)的模型是不妥的，明确指出永久美式看跌期权（股票无红利）的价格等于该期权的执行价格。

This paper proposes a closed form solution for pricing an American put option on a non-dividend paying stock. An American put option grants its holder rights, but not obligation to sell a stock in a fixed price at any time up until maturity. In the past decades, there is no closed form solution for pricing American options although many people made great efforts. In this paper, an optimally early exercise strategy of an American put option on a non-dividend paying stock is set up. That is, an American put option should be early-exercised when the maximum option premium of early exercise is no less than the value of its European counterpart; otherwise, it should not be early-exercised. Based on this strategy, a series of lemmas is proposed and a closed form formula is drawn. Also, this paper shows that Merton (1973)'s formula does not do a good job for pricing perpetual American put options and shows the price of a perpetual American put option on a non-dividend paying stock is equal to the strike price.

Keywords: American put option, Closed-form formula, Assets Pricing
关键词：美式看跌期权，闭合公式，资产定价
JEL Classification: G12

[+] 联系办法：电话: 13621390234   E-mail: brice231@sohu.com

1. 概述

1973 年，Black-Scholes 的欧式期权定价模型对全球金融市场、特别是衍生品市场做出了巨大贡献。在人们逐渐认识到这一模型的价值并加以运用以后，欧式期权的定价变得轻松起来。相对于美式期权，欧式期权是简单得多的金融衍生品。欧式期权赋予其持有人在未来某一时点（到期日）依约定价格（执行价格）买入或卖出某种基础资产的权利而非义务。

对于基础资产为无红利股票的欧式期权，Black-Scholes 模型给出如下著名的定价公式：

$$C_E(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \qquad (1.1)$$

$$P_E(S_0, K, r, T, \sigma) = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (1.2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (1.3)$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (1.4)$$

美式期权与欧式期权的最大区别在于，美式期权的持有人可以在期权存续期的任一时刻行权，这使得美式期权的定价较之欧式期权定价要复杂得多。在过去的几十年中，人们在这一领域做了大量的探索，提出了不少方案，但尚无闭合公式计算方法。

无红利股票的美式看涨期权在其到期日前不宜提前行权，否则期权持有人会蒙受损失。因此无红利股票的美式看涨期权的价值等于对应相同参数的欧式看涨期权的价值。即

$$C_A(S_0, K, r, T, \sigma) = C_E(S_0, K, r, T, \sigma) \qquad (1.5)$$

但是，对于美式看跌期权，无论股票有无红利，都有可能适于提前行权[1].

无红利股票的美式看跌期权的定价可以用下列最优化问题来描述：期权持有人将采取一个最优化的行权策略以获得最大收益。当提前行权时的最大收益大于对应的欧式期权价值时，持有人将提前行权；否则，持有人不会提前行权。无红利股票的美式看跌期权的价值等于最优化行权策略下期权持有人最大收益的期望值。

本文的结构安排为：第 2 部分给出了假设条件；第 3 部分通过提出一系列的定理并给予证明、最终提出了一个无红利股票的美式看跌期权的闭合计算公式；在第 4 部分中，根据该闭合计算公式推导出无红利股票的永久美式看跌期权的价值等于其执行价格，并指出 Merton 有关公式的不合理性；最后一部分对全文作了简要总结。

本文中的数学符号列示于附录。

2. 假设条件

在本文中，我们假定处于以下理想经济条件中：

(1) 无交易成本，不考虑税收因素；

(2) 经济处于风险中性状态（risk-neutral），这意味着所有资产的市场期望收益率等于无风险利率 r 。并且无风险利率 r 是已知和恒定不变的，以该利率借贷均是可能的；

(3) 基础资产为无红利股票，市场参与者可以“做空”(short-sell) 出售股票；

这里，“做空”出售股票意味着市场允许市场参与者借入股票并出售获得现金，然后购入同样股票

[1] 请参考 Robert L. McDONALD (2003): “Derivatives Markets”, *Pearson Education, Inc.* P284~286

并返还。请注意，由于股票无红利，“做空”者只需返还股票即可。因此，“做空”出售股票可以视同一种融资行为。

(4) 股票价格服从对数正态分布（Log normal）规律，或股票连续复合收益服从正态分布规律并与时间不相关。同时，股票价格无“跳跃”（jumps）。

$\ln(S_t / S_0)$ 服从以均值为 $(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t$ 和方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布：

$$\ln(S_t / S_0) \sim N[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t] \tag{2.1}$$

也可以用以下两种形式来描述股票价格：

$$\ln(S_t / S_0) = (r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}z \tag{2.2}$$

或

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}z} \tag{2.3}$$

其中 z 为标准正态分布变量, $z \sim N(0,1)$。

(5) 股票的连续复合收益的方差已知且恒定不变；.

(6) 市场参与者会利用市场出现的一切无风险套利机会，这意味着市场的无风险套利机会将迅速消失。或者说，市场是有效率的，不存在无风险套利机会。

3. 无红利股票的美式看跌期权的定价

首先，我们不加证明地给出以下两个定理，相关证明可以参考相关书籍。

定理 3.1[2]: 对于欧式期权来说，如果其它参数相同，则具有较高执行价格者，其价值也较高。即如果 $K_1 \geq K_2$，则有

[2] 请参考 Robert L. McDONALD (2003): “Derivatives Markets”, *Pearson Education, Inc.* P289

$$P_E(S_0, K_1, r, T, \sigma) \geq P_E(S_0, K_2, r, T, \sigma) \tag{3.1}$$

定理 3.2： 无红利股票的美式看跌期权的价格限制区间为

$$K - S_0 \leq P_A(S_0, K, r, T, \sigma) \leq C_A(S_0, K, r, T, \sigma) + (K - S_0) \leq K$$

由式 (1.5) 知上式也可表示为

$$K - S_0 \leq P_A(S_0, K, r, T, \sigma) \leq C_E(S_0, K, r, T, \sigma) + (K - S_0) \leq K \tag{3.2}$$

另外应满足

$$P_E(S_0, K, r, T, \sigma) \leq P_A(S_0, K, r, T, \sigma) \tag{3.3}$$

下面，我们开始用概率方法分步骤推导无红利股票的美式看跌期权的定价公式。

定理 3.3: 无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 的价值等于最优化行权策略下期权持有人最高收益的期望值，即

$$\begin{aligned} & P_A(S_0, K, r, T, \sigma) \\ & = E^Q\{\max[P_E(S_0, K, r, T, \sigma), Max\Pr emium(earlyexercise)]\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $Max\Pr emium(earlyexercise)$ 为在最优化行权策略下，该期权被提前行权时期权持有人的最大收益。

证明：根据美式期权的定义，持有人享有在期权存续期的任一时刻行权的权利而非义务。显然，如果该美式期权不被提前行权，它与对应的欧式期权无任何差别。因此，在最优化行权策略下，如果

该美式期权未被提前行权，则有

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma) = P_E(S_0,K,r,T,\sigma)$$

美式期权的持有人将会采取以下最优化策略以获取最大收益：

（1）当在到期日前的某一时刻被提前行权时的收益大于 $P_E(S_0,K,r,T,\sigma)$ 时，该美式期权利肯定会被提前行权，并且持有人会选择最佳时刻提前行权获得最大收益：

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma) = Max\,\Pr emium(earlyexercise) \tag{3.5}$$

（2）否则，该美式期权将不会被提前行权，其价值等于对应的欧式期权：

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma) = P_E(S_0,K,r,T,\sigma) \tag{3.6}$$

综合 (3.5) 和 (3.6)，有

$$\begin{aligned} &P_A(S_0,K,r,T,\sigma) \\ &= E^Q\{\max[P_E(S_0,K,r,T,\sigma), Max\,\Pr emium(earlyexercise)]\} \end{aligned}$$

□

在继续推导之前，我们不妨再思考一下美式看跌期权的经济学含义。当一个无红利股票的美式看跌期权的购买方与出售方达成期权要约时，出售方即赋予购买方这样一种权利而非义务：期权购买方可以在期权存续期的任一时点从期权出售方借入一只无红利股票，并以执行价格 K 卖给期权出售方获得现金 K。我们也可以说，期权购买方可以在期权存续期的任一时点向期权出售方借入现金 K。当然，如果行使了这一权利，期权购买方将有义务在期权存续期的任一时点，从期权出售方以当时的市场价格购入同样的一只无红利股票（回购）并返还给期权出售方。我们也可以说，期权购买方将有义务在期权存续期的任一时点按当时的股票市价返还期权出售方等值现金。

由于期权购买方有权决定是否行权及何时行权，或者说，期权购买方有权决定是否向期权出售方

“借款”及何时“借款”、何时“还款”，期权购买方将采取最优化的行权策略以获取最大利益，这将带来期权出售方的等值损失。事实上，我们千方百计要计算的期权价格就等于期权购买方可能获得最大收益的期望值、或期权出售方可能遭受的最大损失的期望值。

定理 3.4: 只要无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0,K,r,T,\sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，作为基础资产的无红利股票就应当在 0 时刻被以价格 K“做空”售出。

证明: 我们可以将无红利股票的美式看跌期权的行权分为两步：以执行价格 K“做空”出售一只无红利股票，然后在期权存续期任一时点，以市场价格购入同样的一只无红利股票。

先假定 $P_A(S_0,K,r,T,\sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，一只无红利股票在时刻 t $(0<t<T)$ 被以执行价格 K“做空”售出，则期权持有人收益的现值为：

(1) 如果在时刻 t 即以市场价格购入同样股票

$$\Pr emium(earlyexercise)$$

$$=[K-\mathrm{E}(S_t/S_t<K)]e^{-rt}\Pr o(S_t<K)^{3}=P_E(S_0,K,r,t,\sigma)$$

(2)如果在稍后时刻 ψ $(t<\psi\le T)$ 以市场价格购入同样股票

则在时刻 ψ $(t<\psi\le T)$，期权持有人将拥有 $Ke^{r(\psi-t)}$，这是因为期权持有人可以将现金 K 在 $t\sim\psi$ 时段存入无风险的银行账户。

$$\Pr emium(earlyexercise)$$

---

[3] $\Pr o(S_t<K)$：指 $S_t<K$ 的概率

$$=[Ke^{r(\psi-t)}-\mathrm{E}(S_{\psi}/S_{\psi}<Ke^{r(\psi-t)})]e^{-r\psi}\Pr o(S_{\psi}<Ke^{r(\psi-t)})$$

$$=P_E(S_0,Ke^{r(\psi-t)},r,\psi,\sigma)$$

但是，如果在最优化行权策略下，一只无红利股票在时刻 0 被以执行价格 K “做空”售出，则期权持有人收益的现值为

(1) 如果在时刻 t $(0<t<T)$ 以市场价格购入同样股票

则在时刻 t，期权持有人将拥有 Ke^{rt}，这是因为期权持有人可以在 $0\sim t$ 时段内将现金 K 存入无风险的银行账户

$$\Pr emium(earlyexercise)$$

$$=[Ke^{rt}-\mathrm{E}(S_t/S_t<Ke^{rt})]e^{-rt}\Pr o(S_t<Ke^{rt})$$

$$=P_E(S_0,Ke^{rt},r,t,\sigma)$$

(2) 如果在时刻 ψ $(t<\psi\le T)$ 以市场价格购入同样股票

则在时刻 ψ，期权持有人将拥有 $Ke^{r\psi}$，这是因为期权持有人可以在 $0\sim\psi$ 时段将现金 K 存入无风险的银行账户

$$\Pr emium(earlyexercise)$$

$$=[Ke^{r\psi}-\mathrm{E}(S_{\psi}/S_{\psi}<Ke^{r\psi})]e^{-r\psi}\Pr o(S_{\psi}<Ke^{r\psi})$$

$$=P_E(S_0,Ke^{r\psi},r,\psi,\sigma)$$

依据定理 **3.1**，显然有

$$P_E(S_0,Ke^{rt},r,t,\sigma)>P_E(S_0,K,r,t,\sigma)$$

$P_E(S_0, Ke^{r\psi}, r, \psi, \sigma) > P_E(S_0, Ke^{r(\psi - t)}, r, \psi, \sigma)$

因此，只要无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，无红利股票就应当在 0 时刻被以价格 K“做空”售出。 □

定理 3.5: 只要无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，则提前行权时期权持有人最大收益的期望值为

$$E[Max\,\mathrm{Pr}\,emium(earlyexercise)] = P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)\ N(-d_4) + (K - S_0)\ N(d_4) \qquad (3.7)$$

即最优化行权策略下提前行权的最大收益为 $P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)$ 或 $(K - S_0)$，概率分别为 $N(-d_4)$、$N(d_4)$。

其中

$$P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma) = KN(-d_4) - S_0 N(-d_3) \qquad (3.8)$$

$$d_3 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (3.9)$$

$$d_4 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (3.10)$$

证明: 根据定理 **3.4**, 只要无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，无红利股票就应当在 0 时刻被以价格 K“做空”售出。

则在时刻 $\varsigma\ (0 \le \varsigma \le T)$，期权持有人将拥有 $Ke^{r\varsigma}$，这是因为在 $0 \sim \varsigma$ 时段，期权持有人可以将现金 K 存入无风险的银行账户。

(1) 当 $S_{\varsigma} < Ke^{r\varsigma} \quad (0 \le \varsigma \le T)$

$\Pr emium(early exercise) =$

$[Ke^{r\varsigma} - \mathrm{E}(S_{\varsigma} / S_{\varsigma} < Ke^{r\varsigma})]e^{-r\varsigma} \Pr o(S_{\varsigma} < Ke^{r\varsigma}) = P_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)$

(2) 当 $S_{\varsigma} > Ke^{r\varsigma} \quad (0 \le \varsigma \le T)$

$\Pr emium(early exercise) =$

$[Ke^{r\varsigma} - \mathrm{E}(S_{\varsigma} / S_{\varsigma} > Ke^{r\varsigma})]e^{-r\varsigma} \Pr o(S_{\varsigma} > Ke^{r\varsigma}) = -C_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)$

可以证明 $\dfrac{\partial P_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)}{\partial \varsigma} > 0$ [4]，这表明 $P_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)$ 是 $\varsigma \quad (0 \le \varsigma \le T)$ 的单调递增函数，随 ς 的增加而增加。

由于 $C_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma) = P_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma) - (K - S_0)$

因此 $\dfrac{\partial[-C_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)]}{\partial \varsigma} < 0$，这表明 $-C_E(S_0, Ke^{r\varsigma}, r, \varsigma, \sigma)$ 是 $\varsigma \quad (0 \le \varsigma \le T)$ 的单调递减函数，随 ς 的增加而减小。

现在假定 T' 为期权存续期间 $[0,T]$ 中的一点，$0 < T' < T$，令 $T = n\Delta, T' = m\Delta$，$\Delta$ 为极短时间段，m 与 n 为正整数，且 $m < n$。

只要无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 在最优化行权策略下被提前行权，期权持有人将会采取以下最优化策略以获取最大收益：

[4] 请参考Xiaodong Wang (2004): “ A closed form formula for pricing American put options”, The Chinese Journal of Economic Theory, Volume 1, No.2, 2004, 360-374

当 $S_T < Ke^{rT}$ 时， $Max\Pr emium(earlyexercise) = P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)$

当 $S_T > Ke^{rT}$ 且 $S_{T-\Delta} < Ke^{r(T-\Delta)}$ 时，

$Max\Pr emium(earlyexercise) = P_E(S_0, Ke^{r(T-\Delta)}, r, T-\Delta, \sigma) - C_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma) \approx (K - S_0)$

当 $S_T > Ke^{rT}$ 、 $S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)}$ 且 $S_{T-2\Delta} < Ke^{r(T-2\Delta)}$ 时，

$Max\Pr emium(earlyexercise) = P_E(S_0, Ke^{r(T-2\Delta)}, r, T-2\Delta, \sigma) - C_E(S_0, Ke^{r(T-\Delta)}, r, T-\Delta, \sigma)$

$\approx (K - S_0)$

……

当 $S_T > Ke^{rT}$ 、 $S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)}$ 、 $S_{T-2\Delta} > Ke^{r(T-2\Delta)}$ ， ……且 $S_{T-m\Delta} < Ke^{r(T-m\Delta)}$ 时

$Max\Pr emium(earlyexercise)$

$= P_E(S_0, Ke^{r(T-m\Delta)}, r, T-m\Delta, \sigma) - C_E(S_0, Ke^{r[T-(m-1)\Delta]}, r, T-(m-1)\Delta, \sigma) \approx (K - S_0)$

……

当 $S_T > Ke^{rT}$ 、 $S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)}$ 、 $S_{T-2\Delta} > Ke^{r(T-2\Delta)}$ 、 …… $S_{T-m\Delta} > Ke^{r(T-m\Delta)}$ 、 ……且 $S_\Delta > Ke^{r\Delta}$ 时，

$Max\Pr emium(earlyexercise) = (K - S_0)$

因此，只要无红利股票的美式看跌期权在最优化行权策略下被提前行权，期权持有人获取的最大收益的期望值为：

$E[Max\Pr emium(earlyexercise)] =$

$P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)\Pr o(S_T < Ke^{rT})$

$+(K - S_0)\Pr o(S_T > Ke^{rT})\Pr o(S_{T-\Delta} < Ke^{r(T-\Delta)})$

$$+(K-S_0)\,\Pr o(S_T > Ke^{rT})\,\Pr o(S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)})\,\Pr o(S_{T-2\Delta} < Ke^{r(T-2\Delta)})$$

……

$$+(K-S_0)\,\Pr o(S_T > Ke^{rT})\,\Pr o(S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)})\ldots\ldots\Pr o(S_{T-m\Delta} < Ke^{r(T-m\Delta)})$$

……

$$+(K-S_0)\,\Pr o(S_T > Ke^{rT})\,\Pr o(S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)})\ldots\ldots\Pr o(S_{\Delta} > Ke^{r\Delta})$$

现在令 Δ 趋向于零，且 T'趋向于T，则有

$$\Pr o(S_T < Ke^{rT}) \approx \Pr o(S_{T-\Delta} < Ke^{r(T-\Delta)}) \approx \Pr o(S_{T-2\Delta} < Ke^{r(T-2\Delta)})\ldots\ldots$$

$$\approx \Pr o(S_{T-m\Delta} < Ke^{r(T-m\Delta)}) = N(-d_4) \tag{3.11}$$

$$\Pr o(S_T > Ke^{rT}) \approx \Pr o(S_{T-\Delta} > Ke^{r(T-\Delta)}) \approx \Pr o(S_{T-2\Delta} > Ke^{r(T-2\Delta)})\ldots\ldots$$

$$\approx \Pr o(S_{T-m\Delta} > Ke^{r(T-m\Delta)}) = N(d_4) \tag{3.12}$$

由于$N(d_4) < 1$，略去高阶项，得到

$$E[Max\Pr emium(earlyexercise)] =$$

$$P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)\ N(-d_4) + (K-S_0)\ N(-d_4)\,[N(d_4) + N(d_4)^2 + \ldots + N(d_4)^m]$$

$$= P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)\ N(-d_4) + (K-S_0)\ N(-d_4)\,\frac{N(d_4)[1-N(d_4)^{m-1}]}{1-N(d_4)}$$

$$= P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)\ N(-d_4) + (K-S_0)\ N(d_4)$$

上式也表明，最优化行权策略下提前行权的最大收益为$P_E(S_0, Ke^{rT}, r, T, \sigma)$或$(K-S_0)$，概率分别为$N(-d_4)$、$N(d_4)$。 □

定理 3.6: 无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 的价格为：

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma)=$$

$$P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)N(-d_4)+\max[(K-S_0),P_E(S_0,K,r,T,\sigma)]N(d_4) \tag{3.13}$$

其中

$$P_E(S_0,K,r,T,\sigma)=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1) \tag{3.14}$$

$$P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)=KN(-d_4)-S_0N(-d_3) \tag{3.15}$$

$$d_1=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_2=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.16}$$

$$d_3=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_4=\frac{\ln\frac{S_0}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.17}$$

证明: 根据定理 **3.3** 和定理 **3.5**，有

$$\begin{aligned}&P_A(S_0,K,r,T,\sigma)\\&=E^Q\{\max[P_E(S_0,K,r,T,\sigma),Max\Pr emium(earlyexercise)]\}\end{aligned}$$

其中 $Max\Pr emium(earlyexercise)$ 等于 $P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)$、概率为 $N(-d_4)$，或等于 $(K-S_0)$、概率为 $N(d_4)$。

由于 $P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)>P_E(S_0,K,r,T,\sigma)$

故有

$$\begin{aligned}&P_A(S_0,K,r,T,\sigma)\\&=E^Q\{P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma),\max[(K-S_0),P_E(S_0,K,r,T,\sigma)]\}\end{aligned}$$

$$=P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)N(-d_4)+\max[(K-S_0),P_E(S_0,K,r,T,\sigma)]N(d_4)$$ □

这就是无红利股票的美式看跌期权价格的闭合计算公式。利用它，在下节中我们将推导出无红利股票的永久美式看跌期权的价格。

4. 无红利股票的永久美式看跌期权

永久美式看跌期权（perpetual American put option）是一种特殊的美式看跌期权。它赋予其持有人在未来任一时刻以约定价格（执行价格）卖出基础资产的权利而非义务。由于这类期权的到期日为无穷远的未来，因此又称为“ 无到期期权 ”（expiration-less option）。

显然，无红利股票的永久美式看跌期权的价值至少应符合以下限制条件：

$$K - S_0 \le P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma) \le K \tag{4.1}$$

及

$$P_E(S_0, K, r, t, \sigma) \le P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma) \tag{4.2}$$

其中 $0 \le t \le \infty$

4.1 Merton（1973）公式

Merton 在 1973 年提出了一个永久美式期权的计算公式。 McDonald 和 Siegel (1986) 在永久美式看跌期权和永久美式看涨期权之间的关系方面做了一定的研究工作。

对于有红利股票的永久美式看跌期权，假定股票初始价格为 S_0，期权执行价格为 K，无风险利率为 r，期权到期日为 ∞，股票价格标准差为 σ，股票红利率为 δ，Merton给出了如下计算公式[5]：

$$P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma, \delta) = \frac{K}{1-h_2}\left(\frac{h_2 - 1}{h_2}\frac{S_0}{K}\right)^{h_2} \tag{4.3}$$

[5] 请参考 Robert L. McDONALD (2003), “Derivatives Markets”, *Pearson Education, Inc.* 392-393

其中

$$h_2=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma^2}-\sqrt{(\frac{r-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2})^2+\frac{2r}{\sigma^2}\partial} \tag{4.4}$$

如果股票无红利，即 $\delta=0$，上述公式变为：

$$P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=\frac{K}{1-h_2}(\frac{h_2-1}{h_2}\frac{S_0}{K})^{h_2} \tag{4.5}$$

其中

$$h_2=-\frac{2r}{\sigma^2} \tag{4.6}$$

公式 (4.5) 表明无红利股票的永久美式看跌期权的价格与 S_0，K，r 和 σ 相关。

然而，当我们利用公式 (4.5)计算不同参数下的期权价格后，发现它有许多不合理的地方。 图 **4.1.1-4.1.3** [6]显示了利用公式（4.5）分别计算在不同的股票初始价格、不同的无风险利率和不同的股票价格标准差条件下的无红利永久美式看跌期权价格。可以很明显地发现在某些情况下，计算得出的期权价格大于期权的执行价格，这与（4.1）相违背，显然是不合理的。

4.2 永久美式看跌期权的价格

其实，利用定理 **3.6**，可以方便地计算出无红利股票的永久美式看跌期权的价格。

定理 4.2.1: 无红利股票的永久美式看跌期权 $P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)$ 的价格等于其执行价格，即：

$$P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=K \tag{4.7}$$

[6] 本文中的所有图形均用 MATLAB绘制

证明: 永久美式看跌期权是一种特殊的美式看跌期权：

$$P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=P_A(S_0,K,r,T,\sigma)\ (T\to\infty)$$

由定理 **3.6** 知

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma)=$$

$$P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)N(-d_4)+\max[(K-S_0),P_E(S_0,K,r,T,\sigma)]N(d_4)$$

$$d_4=\frac{\ln\frac{S_0}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}=\xrightarrow{T\to\infty}-\infty$$

$$d_3=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}=\xrightarrow{T\to\infty}\infty$$

$$\therefore N(d_4)\xrightarrow{T\to\infty}0,\ N(-d_4)\xrightarrow{T\to\infty}1,\ N(-d_3)\xrightarrow{T\to\infty}0$$

$$P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)=KN(-d_4)-S_0N(-d_3)=\xrightarrow{T\to\infty}K$$

$$P_A(S_0,K,r,T,\sigma)=P_E(S_0,Ke^{rT},r,T,\sigma)N(-d_4)$$

$$+\max[(K-S_0),P_E(S_0,K,r,T,\sigma)]N(d_4)=\xrightarrow{T\to\infty}K$$

故有 $P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=K$ □

利用定理 **3.6** 的公式 (3.13)，以期权到期日T为横轴，以期权价格为纵轴，图 **4.2.1-4.2.3** 显示了不同条件下无红利股票的美式看跌期权价格与到期日的关系。从中可以清晰地发现, 当T增加时，期权价格也增加，且当T足够大时，期权价格趋向于执行价格K。

从第 3 节中介绍的美式看跌期权的经济学含义，或许可以更好地理解无红利股票的永久美式看跌期权价格为什么等于其执行价格。

当$T \to \infty$时，$\mathrm{E}(S_T / S_T < Ke^{rT})$的现值将趋于零：

$$\mathrm{E}(S_T / S_T < Ke^{rT})e^{-rT} = S_0 e^{rT}\frac{N(-d_3)}{N(-d_4)}e^{-rT} = S_0\frac{N(-d_3)}{N(-d_4)} \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

而当$T \to \infty$时，$S_T < Ke^{rT}$的概率趋向于100%：

$$\Pr o(S_T < Ke^{rT}) = N(-d_4) \xrightarrow{T\to\infty} 100\%$$

如果美式看跌期权的出售方给予期权购买方在任意时刻向出售方借入现金 K、而在未来任意的一个无穷远时刻T归还 $\mathrm{E}(S_T / S_T < Ke^{rT})$ 的权利而非义务，期权出售方向期权购买方要求的补偿（期权价格）显然为K。

4.3 无风险套利机会

如果无红利股票的永久美式看跌期权的价格不等于执行价格，会出现什么情况呢？

定理 4.3.1: 无红利股票的永久美式看跌期权 $P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma)$ 的价格等于执行价格K。否则，将存在无风险套利机会。

证明: (1) 如果 $P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma) > K$

令 $P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma) = \widehat{K} > K$

采取以下步骤，套利者即可获得无风险利润：以$\widehat{K}$的价格出售这样一只永久美式看跌期权，并将所获现金$\widehat{K}$存入无风险银行账户。之后，无论期权购买方在任意时刻t行权，套利者均可获得如下现

值的无风险利润：

$$(\widehat{K}e^{rt}-K)e^{-rt}=\widehat{K}-Ke^{-rt} \tag{4.8}$$

(2) 如果 $P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)<K$

令 $P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=K'<K$

采取以下步骤，套利者即可获得无风险利润：以 K' 的价格购入一只这样的期权 $P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)$ ，请注意其成本为 K'。立即行权获得现金 K （“做空”出售一只无红利股票)，并将现金 K 存入无风险的银行账户。接下来，该套利者唯一需要做的就是坐等某一时刻 t_x 直至在该时刻 t_x 时的股票市场价格 S_{t_x} 小于 $(K-K')e^{rt_x}$ ，即

$$S_{t_x}<(K-K')e^{rt_x} \tag{4.9}$$

此时（即时刻 t_x ）套利者以价格 S_{t_x} 买入股票。由于期权到期日为无穷远的未来，而股票价格服从对数正态分布，套利者有确切的把握实现这一点。于是，套利者的无风险利润为：

$$\Pr ofit=K-K'-S_{t_x}e^{-rt_x}>0 \tag{4.10}$$

由于有效率的市场不会容忍无风险套利机会的存在，因而无红利股票的永久美式看跌期权的价格必然等于其执行价格：$P_{PA}(S_0,K,r,\infty,\sigma)=K$ □

这一结论告诉我们，时间可以“消蚀”一切差异。无红利股票的永久美式看跌期权的“无到期日”特征使得其价格仅与执行价格相关。

5. 结论

美式看跌期权赋予其持有人在期权存续期的任一时刻以约定价格（执行价格）卖出基础资产的权利而非义务，因而相对于欧式看跌期权而言，美式看跌期权的持有人有更多的权利或者“ 自由 ”，这就是为什么美式看跌期权的价格要高于其对应的欧式看跌期权的价格。

对于美式看跌期权的持有人来说，将会采取最优化的行权策略决定是否提前行权、何时行权和是否行权。只有当提前行权时的收益大于对应的欧式期权价值时，期权持有人才会提前行权并追求最大收益，否则期权持有人不会提前行权，而是获得对应的欧式期权的等值收益。因此，一个美式看跌期权的价值就等于在最优化行权策略下期权持有人最大收益的期望值。

无红利股票的永久美式看跌期权的价值等于执行价格，而与股票的初始价格、标准差和无风险利率无关。这一结论从美式看跌期权价格的闭合公式中可以轻易得出，也可以利用无风险套利原理得出。

另外，从定理 **3.6** 的公式 (3.13)，我们还可以得出以下结论：

(1) 保持其它参数不变，无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 的价格随无风险利率 r 的增加而减少，见图 **5.1**；保持其它参数不变，无红利股票的美式看跌期权 $P_A(S_0, K, r, T, \sigma)$ 的价格随期权到期日 T 或股票价格标准差 σ 增加而增加，见图 **5.2**。

(2)本文给出的无红利股票的美式看跌期权价格公式符合定理 **3.2** 中有关无红利股票的美式看跌期权价格的上、下限要求。

附录：数学符号

APO：美式看跌期权

$PAPO$：永久美式看跌期权

S_0： 当前股票价格 (时刻 0 时的股票价格)

K： 期权执行价格（敲定价格）

T： 期权到期日

t： 未来某一时点

S_T： 时刻 T 时的股票价格

r： 无风险利率（无风险的连续复合收益）

σ:股票价格的标准差

$N(x)$： 标准正态分布变量小于 x 的累积概率

$P_E(S_0,K,r,T,\sigma)$： 无红利股票初始价格为 S_0，执行价格为 K，无风险利率为 r，到期日为 T，股票价格标准差为 σ 的欧式看跌期权的价格

$C_E(S_0,K,r,T,\sigma)$:无红利股票初始价格为 S_0，执行价格为 K，无风险利率为 r，到期日为 T，股票价格标准差为 σ 的欧式看涨期权的价格

$P_A(S_0,K,r,T,\sigma)$:无红利股票初始价格为 S_0，执行价格为 K，无风险利率为 r，到期日为 T，股票价格标准差为 σ 的美式看跌期权的价格

$C_A(S_0,K,r,T,\sigma)$:无红利股票初始价格为 S_0，执行价格为 K，无风险利率为 r，到期日为 T，股票价格标准差为 σ 的美式看涨期权的价格

$P_{PA}(S_0, K, r, \infty, \sigma)$:无红利股票初始价格为 S_0，执行价格为 K，无风险利率为 r，到期日为 ∞，股票价格标准差为 σ 的永久美式看跌期权的价格

参考书目

[1] Jamil Baz, and George Chacko (2004): “ Financial Derivatives, *Pricing*, *Applications, and Mathematics*”, *Cambridge University Press*, 48-65

[2] John G. Hull (2003): “ Options, Futures, and Other Derivatives” (Fifth edition), *Pearson Education International*, 254-256

[3] Robert L. McDONALD (2003): “ Derivatives Markets”, *Pearson Education, Inc.* 12,286,300,577-584

[4] YUH-DAUH LYUU (2002): “Financial Engineering and Computation, Principles, Mathematics, Algorithms”, *Cambridge University Press*, 84-91

[5] Black, and Scholes (1973): “ The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*

[6] Xiaodong Wang (2004): “ A closed form formula for pricing American put options”, *The Chinese Journal of Economic Theory, Volume 1, No.2, 2004*, 360-374

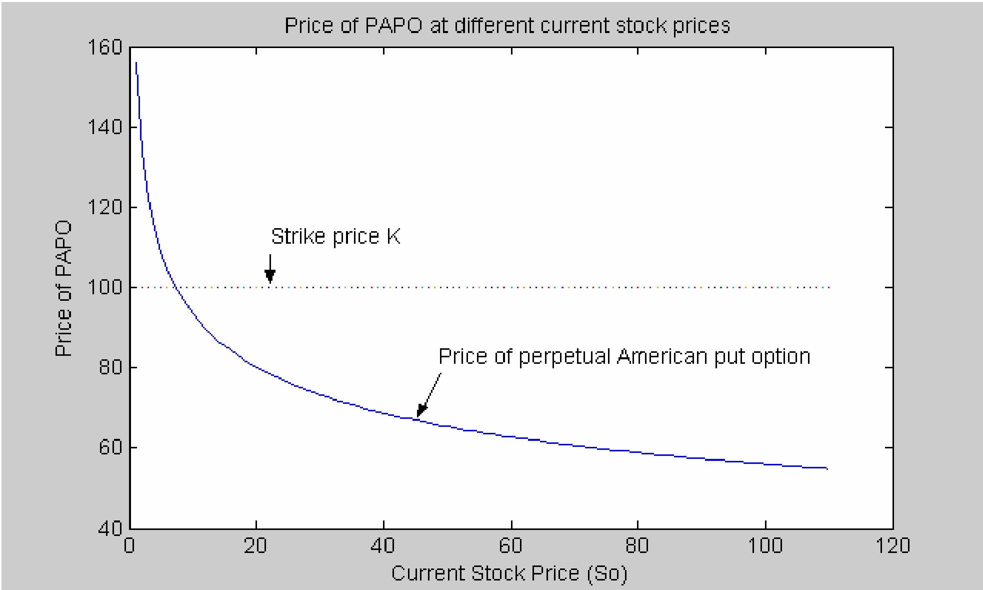

图 4.1.1. 依公式 (4.5)不同 S_0 时的 PAPO 价格
($K = 100, r = 0.04, \sigma = 0.6$)

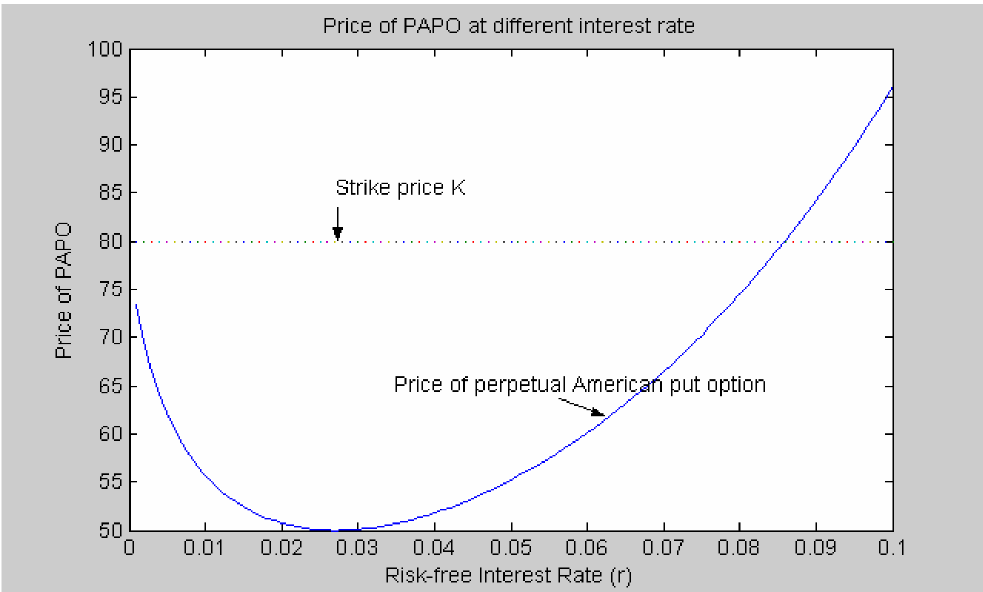

图 4.1.2. 依公式 (4.5)不同 r 时的 PAPO 价格
($S_0 = 30, K = 80, \sigma = 0.3$)

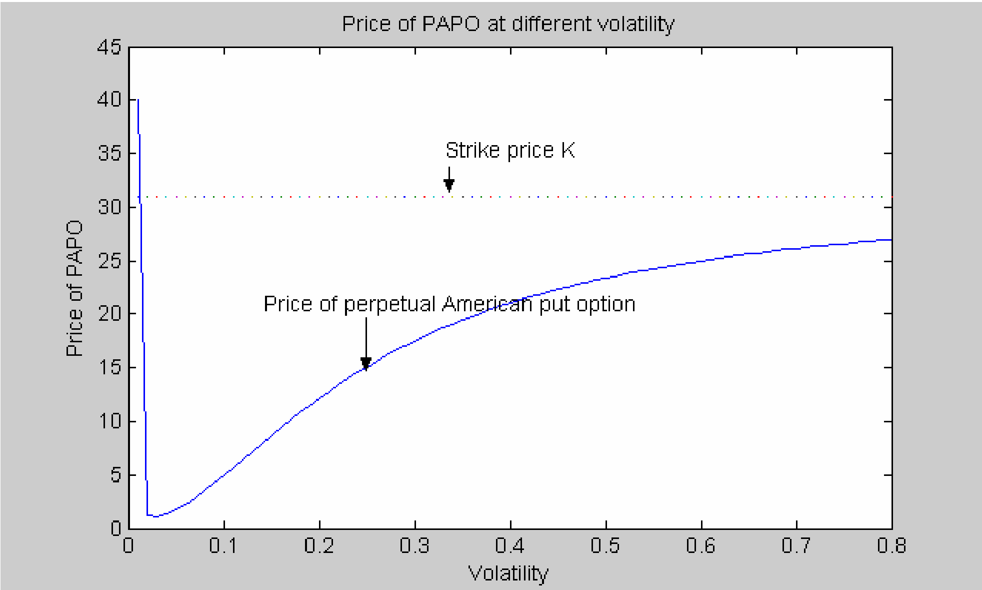

图 4.1.3. 依公式 (4.5)不同 σ 时的 PAPO 价格

$(S_0 = 30, K = 31, r = 0.01)$

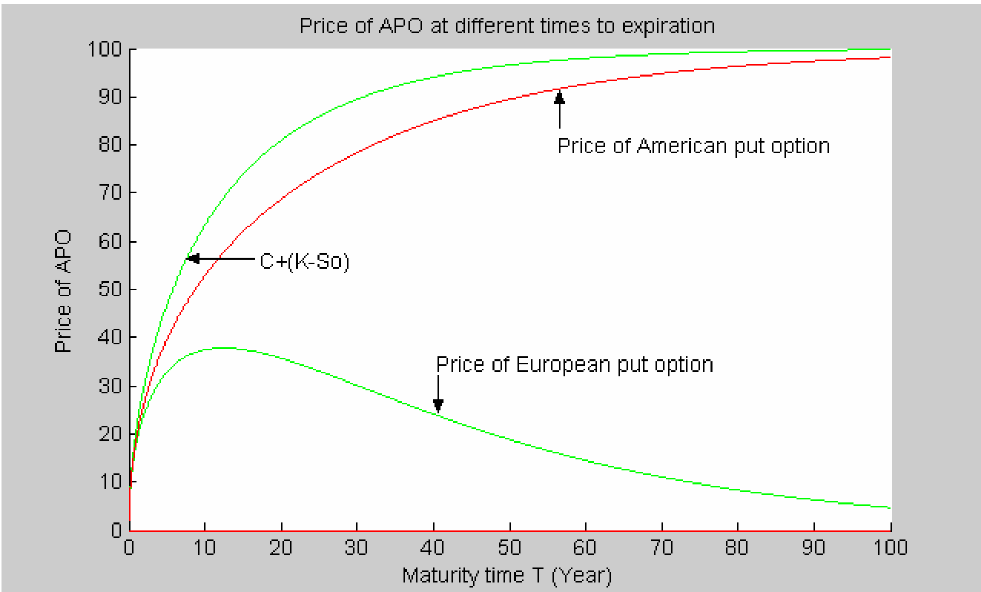

图 4.2.1. 依公式(3.13) 不同 T 时的 PAPO 价格

$(S_0 = 100, K = 100, r = 0.03, \sigma = 0.5)$

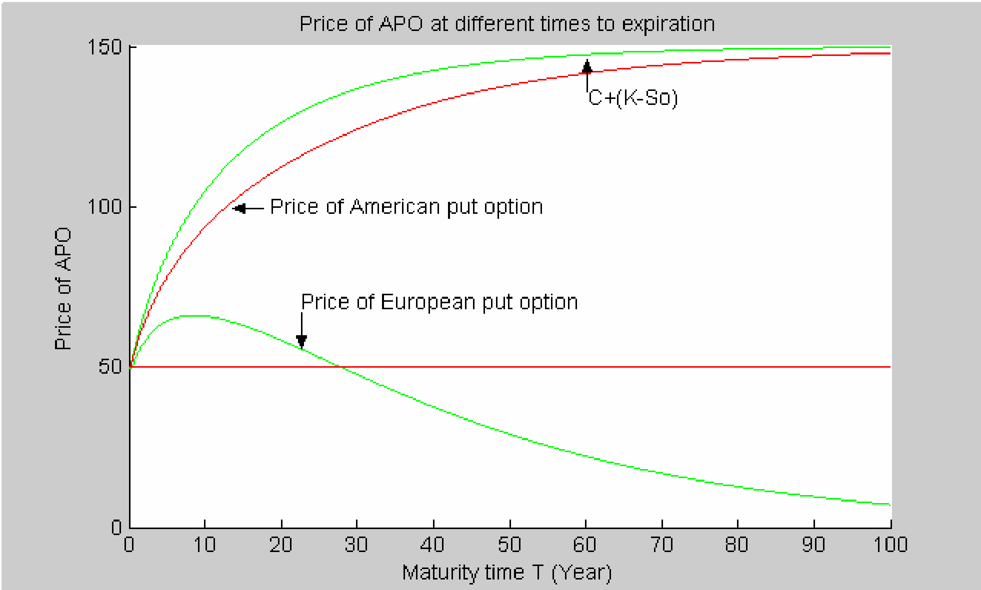

图 4.2.2. 依公式(3.13) 不同T时的 PAPO 价格

($S_0=100, K=150, r=0.03, \sigma=0.5$)

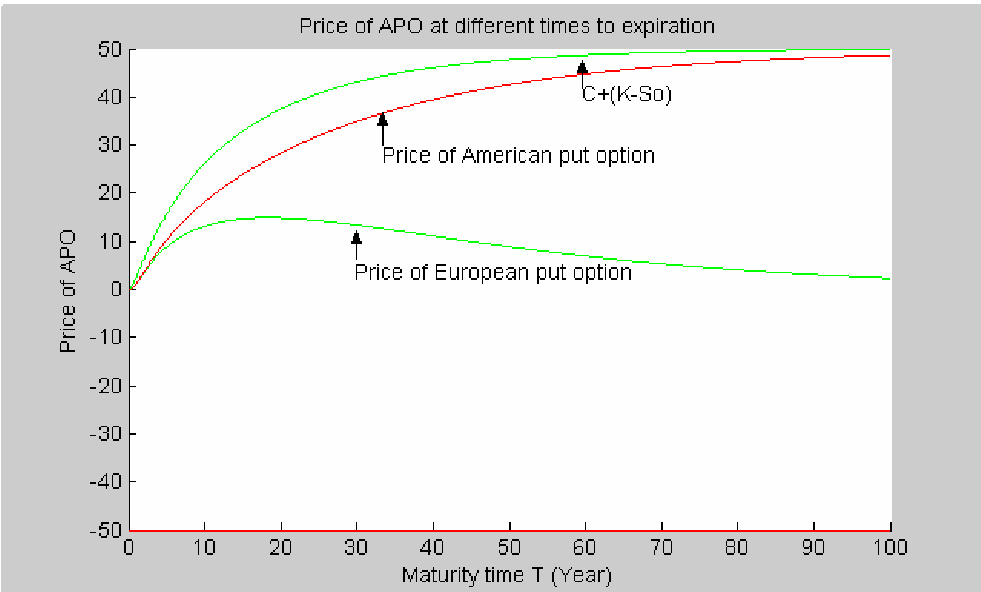

图 4.2.3. 依公式(3.13) 不同T时的 PAPO 价格

($S_0=100, K=50, r=0.03, \sigma=0.5$)

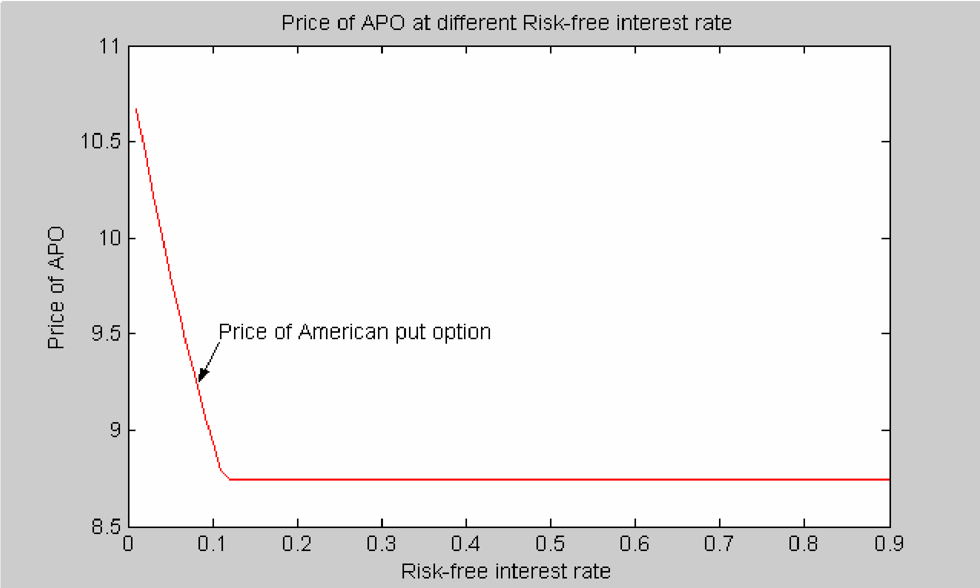

图 5.1. 依公式(3.13) 不同 r 时的 PAPO 价格
($S_0 = 100, K = 105, T = 1, \sigma = 0.2$)

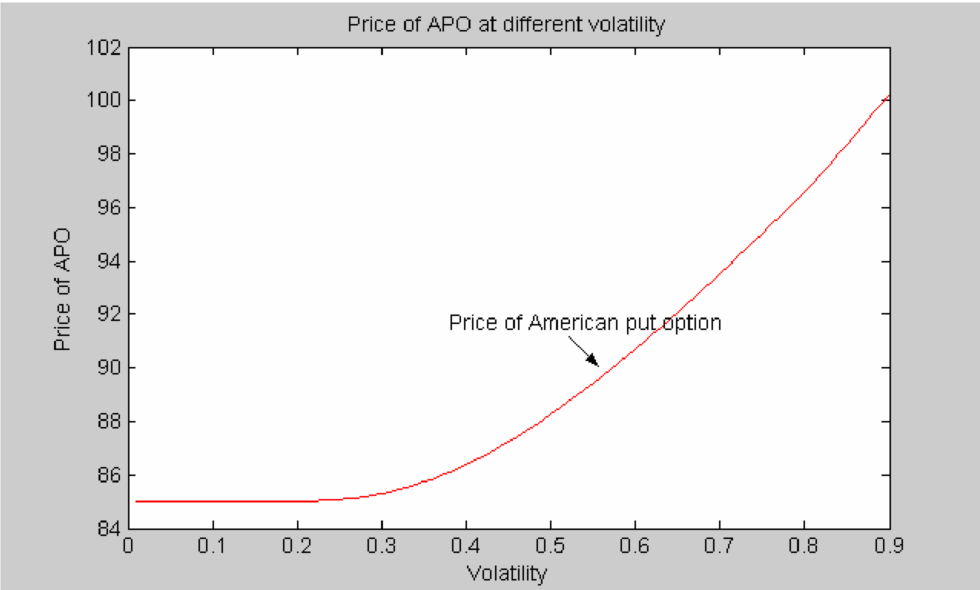

图 5.2. 依公式(3.13) 不同 σ 时的 PAPO 价格
($S_0 = 100, K = 185, T = 1, r = 0.09$)