CHƯƠNG I
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

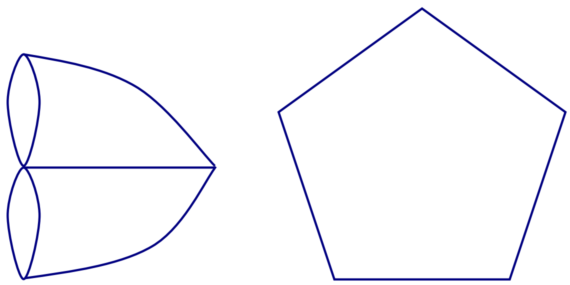
1. Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng

• *Định nghĩa 1.1.1*

Đồ thị vô hướng G = (V,E) gồm một tập V các *đỉnh* và tập E các *cạnh*.

Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh v, w (không kể thứ tự) như hình sau.

◊ *Ví dụ 1.1.1*. Hình 1.1.1.a là đồ thị 4 đỉnh và 7 cạnh. Hình 1.1.1.b là đồ thị 5 đỉnh và 5 cạnh.



(a) (b)

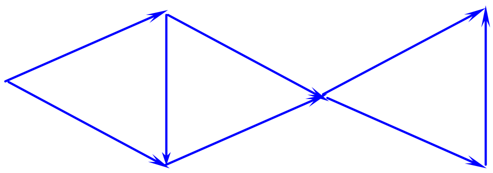
Hình 1.1.1

• *Định nghĩa 1.1.2.*

Đồ thị có hướng G = (V,E) gồm một tập V các *đỉnh* và tập E các *cạnh có hướng* gọi là *cung*.

Mỗi cung $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh (v, w) có thứ tự như hình sau.

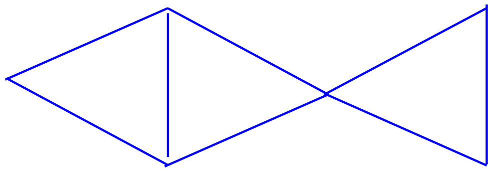
◊ *Ví dụ 1.1.2*. Hình 1.1.2 là đồ thị có hướng gồm 6 đỉnh và 8 cung.



Hình 1.1.2

Cho đồ thị có hướng G=(V, E). Nếu ta thay mỗi cung của G bằng một cạnh, thì đồ thị vô hướng nhận được gọi là *đồ thị lót* của đồ thị có hướng G.

◊ *Ví dụ 1.1.3*. Hình 1.1.3 là đồ thị lót của đồ thị có hướng cho ở Hình 1.1.2.



Hình 1.1.3

◊ *Ghi chú*. Đồ thị vô hướng có thể coi là đồ thị có hướng trong đó mỗi cạnh e=(v,w) tương ứng với hai cung (v,w) và (w,v).

Cho đồ thị (có hướng hoặc vô hướng) G = (V,E).

Nếu cạnh e liên kết đỉnh v, w thì ta nói cạnh e *liên thuộc* đỉnh v, w, các đỉnh v, w *liên thuộc* cạnh e, các đỉnh v, w là các *đỉnh biên* của cạnh e và đỉnh v *kề* đỉnh w.

Nếu chỉ có duy nhất một cạnh e liên kết với cặp đỉnh v, w , ta viết e=(v,w). Nếu e là cung thì v gọi là *đỉnh đầu* và w gọi là *đỉnh cuối* của cung e.

Nếu có nhiều cạnh liên kết với cùng một cặp đỉnh thì ta nói đó là các cạnh *song song*.

Cạnh có hai đỉnh liên kết trùng nhau gọi là *khuyên*.

Đỉnh không kề với đỉnh khác gọi là *đỉnh cô lập*.

Số đỉnh của đồ thị gọi là *bậc* của đồ thị, số cạnh hoặc số cung của đồ thị gọi là *cỡ* của đồ thị.

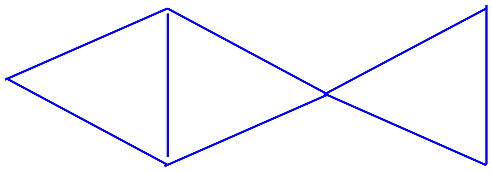
Đồ thị hữu hạn là đồ thị có bậc và cỡ hữu hạn.

Đồ thị đơn là đồ thị không có khuyên và không có cạnh song song.

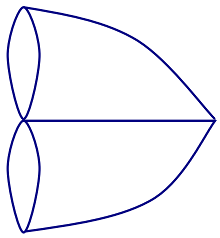
Đồ thị vô hướng đủ là đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau.

Đồ thị có hướng đủ là đồ thị có đồ thị lót đủ.

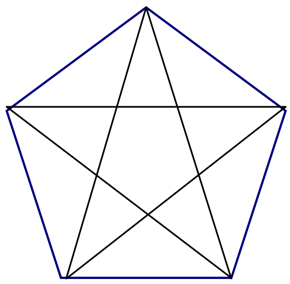
◊ *Ví dụ*. Đồ thị sau là đồ thị đơn, nhưng không phải đồ thị đủ.



Đồ thị sau là đồ thị không đủ và không phải đồ thị đơn.



Đồ thị sau là đồ thị đủ và đơn.



2. Bậc, nửa bậc vào, nửa bậc ra

Cho đồ thị G = (V, E).

• ***Định nghĩa 1.1.3***

Giả sử đỉnh $v \in V$ có p khuyên và q cạnh liên thuộc (không phải khuyên). Khi đó *bậc* của đỉnh v là $2p+q$ và ký hiệu là $deg_G(v)$ hoặc đơn giản $deg(v)$.

Số bậc đỉnh lớn nhất của G ký hiệu là $\Delta(G)$, số bậc đỉnh nhỏ nhất của G ký hiệu là $\delta(G)$.

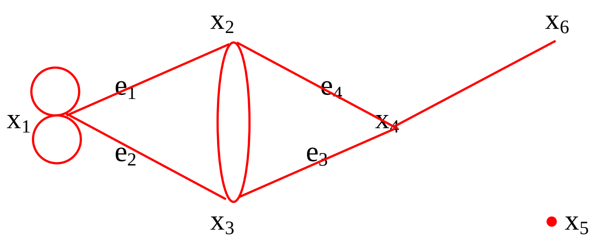
Từ định nghĩa suy ra *đỉnh cô lập* trong đồ thị đơn là đỉnh có bậc bằng 0.

Đỉnh có bậc bằng 1 gọi là *đỉnh treo*.

• ***Định nghĩa 1.1.4***

Cho G=(V,E) là đồ thị có hướng, $v \in V$. *Nửa bậc ra* của đỉnh v, ký hiệu là $deg_O(v)$, là số cung đi ra từ đỉnh v (v là đỉnh đầu), và *nửa bậc vào* của đỉnh $v \in V$, ký hiệu là $deg_I(v)$, là số cung đi tới đỉnh v (v là đỉnh cuối).

◊ *Ví dụ 1.1.4.* Cho đồ thị



Hình 1.1.4

Trong đồ thị này ta có

$\deg(x_1) = 6$; $\deg(x_2) = \deg(x_3) = 4$; $\deg(x_4) = 3$; $\deg(x_5) = 0$; $\deg(x_6) = 1$

$\Rightarrow \Delta(G) = 6, \delta(G) = 0$.

Đỉnh x_1 có hai khuyên liên thuộc.

Có hai cạnh song song liên thuộc đỉnh x_2 và x_3.

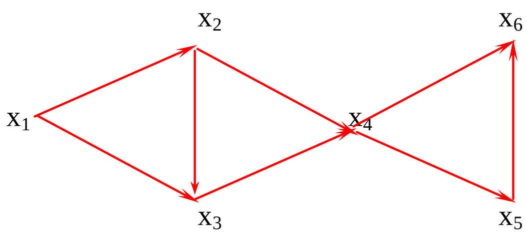
Đỉnh x_5 là đỉnh cô lập.

Đỉnh x_6 là đỉnh treo.

Đồ thị này không phải là đồ thị đơn, không phải là đồ thị đủ.

◊ *Ví dụ 1.1.5*

Xét đồ thị có hướng sau



Hình 1.1.5

Trong đồ thị có hướng này ta có

$\deg_I(x_1) = 0$;	$\deg_O(x_1) = 2$;	$\deg_I(x_2) = 1$;	$\deg_O(x_2) = 2$;
$\deg_I(x_3) = 2$;	$\deg_O(x_3) = 1$;	$\deg_I(x_4) = 2$;	$\deg_O(x_4) = 2$;
$\deg_I(x_5) = 1$;	$\deg_O(x_5) = 1$;	$\deg_I(x_6) = 2$;	$\deg_O(x_6) = 0$;

• **Định lý 1.1.1.** (*Bổ đề bắt tay - Hand Shaking Lemma*). Cho đồ thị G = (V,E). Khi đó

(i) Tổng bậc các đỉnh của đồ thị là số chẵn và

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2.card(\text{E})$$

(ii) Nếu G là đồ thị có hướng, thì

$$\sum_{v\in V}\deg_O(v) = \sum_{v\in V}\deg_I(v) = card(\text{E})$$

trong đó *card*(E) ký hiệu số phần tử của tập E.

Chứng minh

(i) Mỗi cạnh e = (u, v) ∈ E tham gia tính 1 bậc của đỉnh u và 1 bậc của đỉnh v. Từ đó suy ra công thức (i).

(ii) Mỗi cung e = (u, v) ∈ E tham gia tính 1 bậc ra của đỉnh u và 1 bậc vào của đỉnh v. Từ đó suy ra công thức (ii).

• ***Hệ quả 1.1.2.*** Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng là số chẵn.

Chứng minh

Cho đồ thị G = (V,E). Ký hiệu V_1 là tập số đỉnh bậc lẻ, V_2 là tập số đỉnh bậc chẵn. Theo bổ đề ta có

$$2.\,card(E) = \sum_{v\in V}\deg(v) = \sum_{v\in V_1}\deg(v) + \sum_{v\in V_2}\deg(v)$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2.\,card(E) - \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

là số chẵn. Các số hạng *deg(v)* trong tổng $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ đều là số lẻ. Vì vậy để cho tổng $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là số chẵn thì số các số hạng đó phải là số chẵn, tức *card*(V_1) là số chẵn. Suy ra số đỉnh bậc lẻ trong V là số chẵn.

◊ *Ghi chú*: Bổ đề trên có tên bổ đề bắt tay từ bài toán thực tế sau:

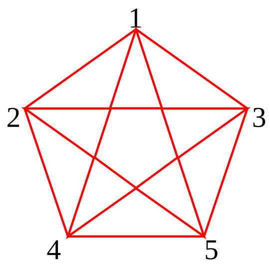
Trong một hội thảo, các đại biểu bắt tay nhau. Khi đó tổng số lần bắt tay của tất cả đại biểu bao giờ cũng là số chẵn.

• ***Định nghĩa 1.1.5***

Đồ thị $\boldsymbol{K_n}$ là đồ thị đơn, đủ *n* đỉnh (mỗi cặp đỉnh đều có duy nhất một cạnh liên kết).

◊ *Ví dụ 1.1.6*

Hình sau đây là đồ thị $\boldsymbol{K_5}$



Hình 1.1.6

• ***Mệnh đề 1.1.3.*** Mọi đỉnh của đồ thị K_n có bậc $n-1$ và K_n có $n(n-1)/2$ cạnh.

Chứng minh

Hướng dẫn : Sử dụng bổ đề bắt tay.

• ***Định nghĩa 1.1.6***

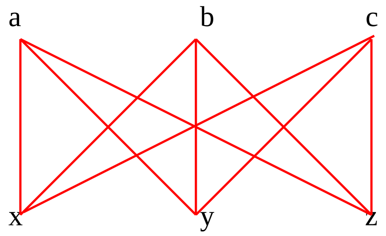
Đồ thị lưỡng phân G =(V,E) là đồ thị mà tập các đỉnh được phân làm 2 tập rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của nó liên kết với một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2, ký hiệu

$$G = (\{V_1, V_2\}, E)$$

Đồ thị $\boldsymbol{K_{m,n}}$ là đồ thị lưỡng phân ({V_1,V_2},E) với tập V_1 có *m* đỉnh và tập V_2 có *n* đỉnh và mỗi đỉnh của V_1 được nối với mỗi đỉnh của V_2 bằng một cạnh duy nhất.

◊ *Ví dụ 1.1.7*

Hình sau đây là đồ thị $\boldsymbol{K_{3,3}}$



Hình 1.1.7

• ***Mệnh đề 1.1.4.*** Cho đồ thị lưỡng phân đủ $\boldsymbol{K_{m,n}}$ = ({V_1,V_2},E) với tập V_1 có m đỉnh và tập V_2 có n đỉnh. Khi đó, mỗi đỉnh trong V_1 có bậc là n và mỗi đỉnh trong V_2 có bậc là m và $\boldsymbol{K_{m,n}}$ có $m.n$ cạnh.

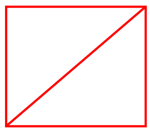
• ***Định nghĩa 1.1.7***

Cho đơn đồ thị G. *Vectơ bậc* $d(G)$ của đồ thị G là dãy các bậc của tất cả các đỉnh của G sắp xếp giảm dần.

Vectơ **v** gồm các số tự nhiên gọi là *vectơ đồ thị* nếu tồn tại đơn đồ thị có vectơ bậc là **v**.

◊ *Ghi chú*. Từ bổ đề bắt tay suy ra trong vectơ đồ thị số thành phần lẻ là số chẵn.

◊ *Ví dụ 1.1.8*. Vectơ [3, 3, 2, 2] là vectơ đồ thị vì nó là vectơ bậc của đồ thị sau



Hình 1.1.8

Ngược lại, vectơ [3,3,3,1] không phải vectơ đồ thị vì nếu tồn tại đồ thị G (4 đỉnh) có vectơ bậc là [3,3,3,1], thì sau khi loại đỉnh bậc 1 và cạnh liên thuộc nó ta nhận được đồ thị 3 đỉnh không đơn vì có đỉnh bậc 3, suy ra G cũng không đơn.

Vectơ [3,3,3,3,3] không phải vectơ đồ thị vì số thành phần lẻ là số lẻ.

Tuy nhiên, nếu vecto có số chiều lớn, thì ta không dễ dàng chứng minh nó là vecto đồ thị hay không phải vecto đồ thị. Xét vectơ v = [5, 4, 4, 3, 3, 3, 2]. Đây có phải là vecto đồ thị hay không ?

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu thuật toán giải quyết bài toán này. Định lý sau là cơ sở của thuật toán.

• ***Định lý 1.1.5* (Hakimi-Havel).** Cho $v = [d_1, d_2, ..., d_n]$, $n \geq 2$, là vectơ n số tự nhiên thoả

$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq 0$$

Cho v' là vectơ nhận được từ v bằng cách bỏ thành phần d_1, và trừ bớt 1 trong d_1 thành phần tiếp theo. Ký hiệu v_1 là vectơ v' trong đó các thành phần được sắp xếp giảm dần. Khi đó, v là vecto đồ thị khi và chỉ khi v_1 là vectơ đồ thị.

Chứng minh

(i) Giả sử v_1 là vectơ đồ thị. Khi đó tồn tại đồ thị G_1 bậc n−1 có vectơ bậc là v_1. Ta ký hiệu lại các đỉnh của G_1 là $x_2, x_3, ..., x_n$ sao cho $[d(x_2), d(x_3), ..., d(x_n)]$ = v'. Từ đồ thị G_1 ta xây dựng đồ thì G bằng cách thêm đỉnh x_1 vào G_1 và nối x_1 với d_1 đỉnh đầu tiên của dãy $x_2, x_3, ..., x_n$. Ta có $deg_G(x_1) = d_1$ và $deg_G(x_i) = deg(x_i) + 1 = d_i \ \forall i=2, ..., d_1$. Các đỉnh còn lại có bậc trùng với $k - (d_1 + 1)$ thành phần còn lại của v. Như vậy d(G) = v, và v là vectơ đồ thị.

(ii) Bây giờ ta giả sử v là vectơ đồ thị. Khi đó, tồn tại đồ thị với tập các đỉnh $V = [x_1, x_2, ..., x_n]$ sao cho $deg(x_i) = d_i \ \forall i=1,2, ...,n$. Trong các đồ thị như vậy ta chọn đồ thị G có tổng các bậc của các đỉnh kề x_1 là lớn nhất.

Ta chỉ ra rằng x_1 kề với d_1 đỉnh kế tiếp trong dãy $x_2, x_3, ..., x_n$.

Giả sử điều đó không đúng. Khi đó tồn tại j, k thoả

$$2 < j \le d_1 + 1 < k \ \ \& \ \ x_1 \text{ không kề } x_j \ \ \& \ \ x_1 \text{ kề } x_k$$

Nếu $d_j = d_k$, thì ta có thể hoán vị hai đỉnh x_j và x_k để cho x_1 kề x_j. Vì vậy giả thiết $d_j > d_k$.

Như vậy tổng các bậc của các đỉnh kề x_1 là $d_k + t$ với $t \ge 0$. Vì $d_j > d_k$, nên tồn tại đỉnh x_i kề x_j mà không kề x_k. Ta xây dựng đồ thị H từ đồ thị G bằng cách loại bỏ hai cạnh (x_i, x_j), (x_1, x_k) và thêm vào hai cạnh (x_i, x_k), (x_1, x_j). Đồ thị H cũng có vectơ bậc d(H) = v và tổng các bậc của các đỉnh kề x_1 là $d_j + t > d_k + t$. Điều này mâu thuẫn với việc chọn đồ thị G có tổng các bậc của các đỉnh kề x_1 là lớn nhất.

Bây giờ ta xây dựng đồ thị G' từ đồ thị G bằng cách loại đỉnh x_1 và các cạnh liên thuộc x_1. Hiển nhiên vectơ bậc d(G') = v_1, tức v_1 là vectơ đồ thị.

□

Sử dụng định lý Hakimi-Havel ta có thể đưa ra thuật toán kiểm tra xem một vectơ có phải là vectơ đồ thị không như sau.

• ***Thuật toán 1.1.1*** **(**Hakimi-Havel**)**. *Kiểm tra vectơ đồ thị*

◊ *Đầu vào* : Vectơ $v = [d_1, d_2, ..., d_n]$ gồm *n* số nguyên giảm dần.

◊ *Đầu ra* : Kết luận *v* là vectơ đồ thị hay *v* không là vectơ đồ thị.

◊ *Các bước* :

Bước 0. (*Khởi tạo*) Đặt $k := n$ và $u := v = [d_1, d_2, ..., d_k]$.

Bước 1. (*Kiểm tra đồ thị đơn*) Nếu *u* có thành phần lớn hơn (*k*–1) hoặc nhỏ hơn 0, thì sang bước 4. Ngược lại, sang bước 2.

Bước 2. (*Tiêu chuẩn vectơ đồ thị*) Nếu các thành phần của *u* đều là 0, thì sang bước 5. Ngược lại, sang bước 3.

Bước 3. (*bước lặp*) Cho *u*' là vectơ nhận được từ *u* bằng cách bỏ thành phần d_1, và trừ bớt 1 trong d_1 thành phần tiếp theo. Ký hiệu u_1 là vectơ *u*', trong đó các thành phần được sắp xếp giảm dần. Đặt $k := k-1$ và $u := u_1$. Quay lại bước 1.

Bước 4. Kết luận: *v* không phải là vectơ đồ thị. Kết thúc.

Bước 5. Kết luận: *v* là vectơ đồ thị. Kết thúc.

◊ *Ví dụ 1.1.9*. Kiểm tra vectơ $v = [5, 4, 4, 3, 3, 3, 2]$.

Bước 0: Đặt k := 7, u := [5, 4, 4, 3, 3, 3, 2].

Vòng lặp 1: k = 7, u = [5, 4, 4, 3, 3, 3, 2] ⇒ u' = [3, 3, 2, 2, 2, 2],

u_1 = [3, 3, 2, 2, 2, 2].

Vòng lặp 2: k = 6, u = [3, 3, 2, 2, 2, 2] ⇒ u' = [2, 1, 1, 2, 2],

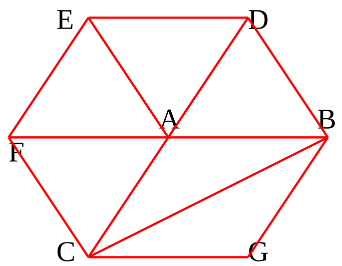
u_1 = [2, 2, 2, 1, 1].

Vòng lặp 3: k = 5, u = [2, 2, 2, 1, 1] ⇒ u' = [1, 1, 1, 1], u_1 = [1, 1, 1, 1].

Vòng lặp 4: k = 4, u = [1, 1, 1, 1] ⇒ u' = [0, 1, 1], u_1 = [1, 1, 0].

Vòng lặp 5: k = 3, u = [1, 1, 0] ⇒ u' = [0, 0], u_1 = [0, 0].

Kết luận *v* là vectơ đồ thị. Đồ thị sau có vectơ bậc là *v*.



Hình 1.1.9

3. Đường đi, chu trình, tính liên thông

• ***Định nghĩa 1.1.8.*** Cho đồ thị G=(V,E).

Dây μ từ đỉnh *v* đến đỉnh *w* là tập hợp các đỉnh và cạnh nối tiếp nhau bắt đầu từ đỉnh *v* và kết thúc tại đỉnh *w*. Số cạnh trên dây μ gọi là *độ dài* của dây μ.

Dây μ từ đỉnh *v* đến đỉnh *w* độ dài *k* được biểu diễn như sau

$$\mu = (v, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots , v_{k-1}, e_k, w)$$

trong đó v_i (i = 1, ..., k–1) là các đỉnh trên dây và e_i (i=1,...,k) là các cạnh trên dây liên thuộc đỉnh kề trước và sau nó. Các đỉnh và cạnh trên dây có thể lặp lại.

Đường đi từ đỉnh *v* đến đỉnh *w* là dây từ đỉnh v đến đỉnh w, trong đó các cạnh không lặp lại.

Đường đi sơ cấp là đường đi không đi qua một đỉnh quá 1 lần.

◊ *Ghi chú*. Trong đồ thị *n* đỉnh, đường đi sơ cấp giữa hai đỉnh khác nhau có nhiều nhất *n*–1 cạnh.

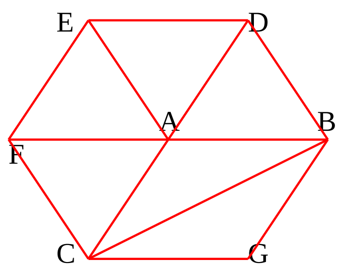
Vòng là dây có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Chu trình là đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Chu trình sơ cấp là chu trình không đi qua một đỉnh quá 1 lần.

◊ *Ghi chú*. Trong đồ thị *n* đỉnh, chu trình sơ cấp có nhiều nhất *n* cạnh.

◊ *Ví dụ*. Cho đồ thị sau



Ta có một số dây từ B đến E:

μ_1 = (B,G,C,A,F,C,A,E), μ_2 = (B,A,C,F,A,E),

μ_3 = (B,A,C,F,E), μ_4 = (B,A,E).

μ_1 không phải đường đi, vì có cạnh CA lặp lại. Độ dài của μ_1 là 7.

μ_2 là đường đi, nhưng không sơ cấp, vì có đỉnh A lặp lại. Độ dài của μ_2 là 5.

μ_3 và μ_4 là các đường đi sơ cấp.

Ta có các vòng sau:

η_1 = (A,B,C,G,B,C,A), η_2 = (A,B,C,G,B,D,A), η_3 = (A,B,C,A).

η_1 không phải chu trình, vì có cạnh BC lặp lại.

η_2 là chu trình, nhưng không sơ cấp, vì có đỉnh B lặp lại.

η_3 là chu trình sơ cấp.

Dây có hướng trong đồ thị có hướng là dãy các đỉnh và cung nối tiếp nhau $(e_1, e_2, ... , e_k)$ thoả mãn đỉnh cuối của cung e_i là đỉnh đầu của cung e_{i+1}, i=1, ..., k-1.

Đường đi có hướng trong đồ thị có hướng là dây có hướng, trong đó các cung không lặp lại.

Đường đi có hướng sơ cấp là đường đi có hướng không đi qua một đỉnh quá 1 lần.

Vòng có hướng là dây có hướng có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Chu trình có hướng là đường đi có hướng có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Chu trình có hướng sơ cấp là chu trình có hướng không đi qua một đỉnh quá 1 lần.

Đồ thị vô hướng gọi là *liên thông*, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều có đường đi nối chúng với nhau.

Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh*, nếu mọi cặp đỉnh (u,v) bao giờ cũng tồn tại đường đi có hướng từ u đến v và từ v đến u.

Đồ thị có hướng gọi là *bán liên thông*, nếu với mọi cặp đỉnh (u,v) bao giờ cũng tồn tại đường đi có hướng từ u đến v hoặc từ v đến u.

Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu*, nếu đồ thị lót (vô hướng) của nó liên thông.

◊ *Ghi chú*. Đồ thị *liên thông mạnh* ⇒ Đồ thị *bán liên thông* ⇒ Đồ thị *liên thông yếu*.

• ***Định lý 1.1.6***

(i) Trong đồ thị vô hướng mỗi dây từ đỉnh v đến w chứa đường đi sơ cấp từ v đến w.

(ii) Trong đồ thị có hướng mỗi dây có hướng từ đỉnh v đến w chứa đường đi có hướng sơ cấp từ v đến w.

Chứng minh

(i) Cho $\mu = (v, e_1, v_1, e_2, v_2, ... , v_{n-1}, e_n, w)$ là dây từ v đến w. Nếu $v_1, ..., v_{n-1}$ khác nhau thì μ là đường đi sơ cấp. Ngược lại tồn tại i, j, $0 < i < j < n$, thoả $v_i = v_j$. Ta loại các đỉnh $v_{i+1}, ..., v_j$ khỏi dây μ và nhận được dây từ v đến w có số cạnh ít hơn. Vì số cạnh hữu hạn, nên tiếp tục quá trình trên, đến lúc nào đó dây sẽ không có đỉnh lặp nữa, và ta nhận được đường đi sơ cấp từ v đến w.

(ii) Chứng minh tương tự như (i).

□

• ***Định lý 1.1.7.*** Đồ thị G lưỡng phân khi và chỉ khi G không chứa chu trình (sơ cấp) độ dài lẻ.

Chứng minh

Điều kiện cần: hiển nhiên.

Điều kiện đủ: Cho G=(V,E) là đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ. Không mất tính tổng quát ta giả thiết G liên thông (nếu không ta xét từng thành phần liên thông).

Ta xây dựng các tập con V_+ và $V\_$ của V như sau.

Chọn một đỉnh x_0 bất kỳ. Gán cho x_0 nhãn là dấu +.

Với mỗi đỉnh x đã gán nhãn, ta tìm các đỉnh chưa có nhãn kề x và gán cho các đỉnh này dấu ngược với dấu của x (tức là dấu - nếu x mang dấu +, dấu + nếu x mang dấu -). Lặp lại quá trình này cho đến khi xảy ra một trong các trường hợp sau.

(i) Tất cả các đỉnh được gán nhãn (không có hai đỉnh kề nhau cùng nhãn).

Trong trường hợp này ta ký hiệu V_+ là tập các đỉnh mang dấu +, $V\_$ là tập các đỉnh mang dấu -. V_+ và $V\_$ là phân hoạch của V và các đỉnh trong cùng một tập không kề nhau. Như vậy G là đồ thị lưỡng phân.

(ii) Xuất hiện hai đỉnh kề nhau cùng dấu.

Gọi a và b là hai đỉnh kề nhau cùng dấu. Tồn tại đường đi μ_1 từ x_0 đến a và μ_2 từ x_0 đến b. Ký hiệu x là điểm chung cuối cùng của μ_1 và μ_2. Theo cách gán nhãn, độ dài đường đi $\mu_1(x,a)$ từ x đến a và độ dài đường đi $\mu_2(x,b)$ từ x đến b cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Như vậy chu trình $[\mu_1(x,a),(a,b),\mu_2(b,x)]$ sẽ có độ dài lẻ, mâu thuẫn với giả thiết. □

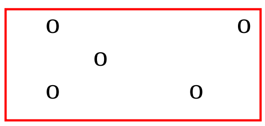
• ***Định nghĩa 1.1.9.*** *Trọng đồ* (có hướng) là đồ thị (có hướng) mà mỗi cạnh (cung) của nó được gán một số.

Trọng đồ được biểu diễn bởi G=(V, E, w), trong đó V là tập các đỉnh, E là tập các cạnh (cung) và $w:E\rightarrow R$ là hàm số trên E, w(e) là trọng số của cạnh (cung) e với mọi $e\in E$.

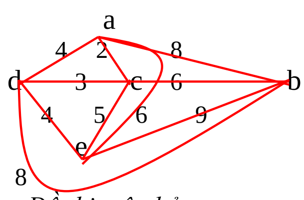
Trong trọng đồ *độ dài trọng số của đường đi μ* là tổng các trọng số của các cạnh (cung) trên đường đi đó.

◊ *Ví dụ 1.1.10*

Người ta cần khoan một số lỗ trên các tấm kim loại dưới sự kiểm soát của máy tính. Để giảm chi phí sản xuất và tiết kiệm thời gian, máy khoan phải khoan tất cả các lỗ trong thời gian ngắn nhất có thể được. Ta mô phỏng công việc bằng đồ thị.



Tấm kim loại cần khoan lỗ
(a)



Đồ thị mô phỏng
(b)

Hình 1.1.10

Trong hình trên, các đỉnh tương ứng với các lỗ khoan. Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi một cạnh. Mỗi cạnh có gán một số, chỉ thời gian máy di chuyển giữa hai lỗ. Con đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh duy nhất một lần và có chiều dài ngắn nhất là đường đi tối ưu mà máy khoan phải đi theo để tiết kiệm thời gian nhiều nhất.

• *Định nghĩa 1.1.10*

Cho đồ thị G=(V,E). Đồ thị G'= (V',E') gọi là *đồ thị con* của G nếu

$$V' \subset V \ \& \ E' \subset E$$

Nếu V' = V, thì G' gọi là *đồ thị con phủ* của G.

Nếu $F \subset E$, thì ký hiệu G–F là đồ thị con (V, E–F) của G gồm tập đỉnh V và tập cạnh (cung) E – F.

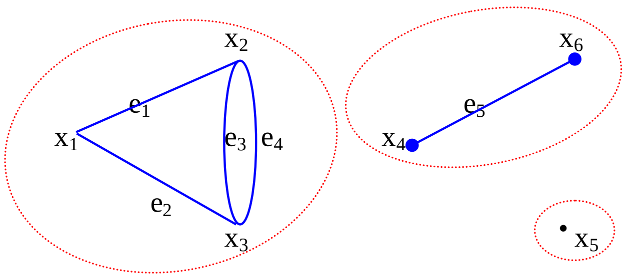
Nếu $U \subset V$, thì ký hiệu G–U là đồ thị con của G thu được từ G sau khi loại bỏ các đỉnh trong U và các cạnh liên thuộc chúng.

Cho $U \subset V$. Đồ thị con của G *sinh bởi* U, ký hiệu <U>, là đồ thị (U, E_U) với

$$E_U = \{e \in E \mid e \text{ liên thuộc đỉnh trong } U\}$$

Đồ thị con G'=(V',E') của đồ thị (có hướng) G=(V,E) gọi là *thành phần liên thông* (*mạnh*) của đồ thị G, nếu nó là đồ thị con liên thông (mạnh) tối đại của G, tức là không tồn tại đồ thị con liên thông (mạnh) G"=(V",E") ≠ G' của G thoả $V' \subset V''$, $E' \subset E''$.

◊ *Ví dụ 1.1.11*. Xét đồ thị G=(V,E).



Hình 1.1.11

Đồ thị $G_0 = (V_0,E_0)$, với $V_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ và $E_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là đồ thị con liên thông của đồ thị G, nhưng không phải thành phần liên thông của G.

Đồ thị $G_1 = (V_1,E_1) = <\{x_1, x_2, x_3\}>$, với $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ và $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là thành phần liên thông của G.

Đồ thị $G_2 = (V_2,E_2) = <\{x_4, x_6\}>$, với $V_2 = \{x_4, x_6\}$ và $E_2 = \{e_5\}$ là thành phần liên thông của G.

Đồ thị $G_3 = (\{x_5\}, \varnothing)$ là thành phần liên thông của G.

Đồ thị G có 3 thành phần liên thông.

◊ *Ghi chú:* Đồ thị liên thông khi và chỉ khi số thành phần liên thông của nó bằng 1.

• ***Định lý 1.1.8.*** Cho đồ thị đơn G=(V,E) với *n* đỉnh, và *k* thành phần liên thông. Khi đó số cạnh *m* của đồ thị thoả bất đẳng thức

$$n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Chứng minh

(i) Bất đẳng thức $n - k \le m$ chứng minh bằng quy nạp theo m.

Nếu m = 0, tức G là đồ thị hoàn toàn không liên thông, bất đẳng thức đúng vì n = k.

Giả sử G có m cạnh, m ≥ 1. Gọi G'=(V',E') là đồ thị thu được từ G bằng cách bỏ bớt 1 cạnh. Ký hiệu n', k' và m' là số đỉnh, số thành phần liên thông và số cạnh của G'. Khi đó có 2 khả năng:

- Trường hợp 1: n' = n , k' = k và m' = m – 1

Theo giả thiết qui nạp

$$n - k = n' - k' \le m' \le m$$

- Trường hợp 2: n' = n , k' = k + 1 và m' = m – 1

$$n - k = n' - k' + 1 \le m' + 1 = m$$

(ii) Ta chứng minh bất đẳng thức

$$m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \qquad (*)$$

quy nạp theo k.

- Bước cơ cở: k=1. Khi đó $m \le \frac{n.(n-1)}{2}$ vì đồ thị đơn n đỉnh nhiều cạnh nhất là K_n.
- Bước quy nạp: Giả sử bất đẳng thức (*) đúng với mọi đồ thị có số thành phần liên thông nhỏ hơn k.

  Cho G=(V,E) là đồ thị có k thành phần liên thông:

$$G_i=(V_i,E_j) \text{ có } n_i \text{ đỉnh và } m_i \text{ cạnh}, \forall\ i=1,...,k$$

Hiển nhiên là

$$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$$

và

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k = m \qquad (1)$$

Đặt $h = n_1 + n_2$ và gọi G' là đồ thị có n'=n–1 đỉnh gồm k–1 thành phần liên thông

$$K_{h-1}, G_3, ..., G_k$$

(K_{h-1} là đơn đồ thị đủ có h–1 đỉnh).

Theo giả thiết quy nạp, số cạnh m' của G' thoả

$$m' \le \frac{[n'-(k-1)].[n'-(k-1)+1]}{2} \Leftrightarrow m' \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \qquad (2)$$

Tiếp theo ta có

$$m_1 + m_2 \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \le \frac{h(h-1)}{2} \qquad (3)$$

(bất đẳng thức cuối cùng tương đương $(n_1-1)(n_2-1) \ge 0$).

Bây giờ từ (1),(2) và (3) ta suy ra

$$m \le m' \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

□

• ***Hệ quả 1.1.9.*** Mọi đơn đồ thị n đỉnh với số cạnh lớn hơn $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ là liên thông.

• ***Định nghĩa 1.1.11***

Cho đồ thị liên thông G = (V, E).

Tập cạnh F ⊂ E gọi là *tập tách cạnh* của đồ thị liên thông G, nếu G–F không liên thông. Hơn nữa, nếu F là tập tách cạnh cực tiểu (tức không tồn tại F' ⊂ F, F' ≠ F, F' là tập tách cạnh), thì F gọi là *tập cắt cạnh*. Nếu tập cắt cạnh chỉ có 1 cạnh, thì cạnh đó gọi là *cầu*.

Đại lượng

$$\lambda(G) = \min\{\, card(F) \mid F \text{ là tập tách cạnh của } G\}$$

gọi là *số liên thông cạnh* của G.

Đồ thị G gọi là *k cạnh liên thông*, nếu mọi tập tách cạnh có ít nhất k cạnh.

◊ *Ghi chú*. Từ định nghĩa ta có

$$\lambda(G) \ge k \;\; \forall k, \text{ G là k cạnh liên thông}$$

và

$$\lambda(G) = \max\{k \mid \text{G là k cạnh liên thông}\}$$

• ***Định nghĩa 1.1.12***

Tập đỉnh U ⊂ V gọi là *tập tách đỉnh* của đồ thị liên thông G, nếu G–U không liên thông. Hơn nữa, nếu U là tập tách đỉnh cực tiểu (tức không tồn tại U' ⊂ U, U' ≠ U, U' là tập tách đỉnh), thì U gọi là *tập cắt đỉnh*. Nếu tập tách đỉnh chỉ có 1 đỉnh, thì đỉnh đó gọi là *đỉnh tách*.

Đại lượng

$$\kappa(G) = \min\{\, card(U) \mid U \text{ là tập tách đỉnh của } G\}$$

gọi là *số liên thông đỉnh* của G.

Đồ thị G gọi là *k-liên thông*, nếu mọi tập tách đỉnh có ít nhất k đỉnh.

◊ *Ghi chú*. Từ định nghĩa ta có

$$\kappa(G) \ge k \;\; \forall k, \text{ G là k-liên thông}$$

và

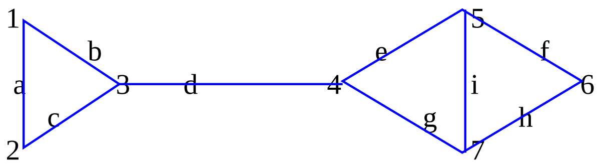
$$\kappa(G) = \max\{k \mid \text{G là k-liên thông}\}$$

◊ *Ghi chú*

(i) Tập V và V – {v} $\forall v \in V$ đều không phải là tập tách đỉnh.

(ii) Đồ thị đủ K_n không có tập tách đỉnh. Vì vậy ta quy ước số liên thông đỉnh của K_n là (n–1).

◊ *Ví dụ 1.1.12*. Xét đồ thị sau.



Hình 1.1.12

Các tập cạnh sau

{b,c}, {e,g}, {b,c,d}, {d,e,g}, {d}

là tập tách cạnh, trong đó cạnh *d* là cầu, {b,c} và {e,g} là các tập cắt cạnh.

Suy ra số liên thông cạnh $\lambda(G) = 1$.

Các tập đỉnh sau

{2,3}, {3,4}, {3}, {4}, {5,7}

là tập tách đỉnh, trong đó đỉnh 3, 4 là đỉnh tách, {5,7} là các tập cắt đỉnh.

Suy ra số liên thông đỉnh $\kappa(G) = 1$.

• ***Định lý 1.1.10 (Bất đẳng thức Whitney).*** Với mọi đồ thị G ta có

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

Chứng minh

Tập các cạnh liên thuộc đỉnh v có bậc nhỏ nhất $\delta(G)$ là tập tách. Suy ra $\lambda(G) \le \delta(G)$. Để chứng minh bất đẳng thức $\kappa(G) \le \lambda(G)$ ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp $\lambda(G) = 0$: Đồ thị G chỉ có 1 đỉnh hoặc không liên thông, kéo theo $\kappa(G) = 0$.
- Trường hợp $\lambda(G) = 1$: Đồ thị G có cầu (u,v). Nếu G chỉ có hai đỉnh u và v thì G là đồ thị đủ K_2 , và theo quy ước $\kappa(G) = 1$. Nếu G có hơn 2 đỉnh thì một trong hai đỉnh u và v phải có bậc lớn hơn 1, và đỉnh đó là đỉnh tách, suy ra $\kappa(G) = 1$.
- Trường hợp $\lambda(G) > 1$: Nếu ta xoá $\lambda(G)-1$ cạnh của tập tách cạnh với $\lambda(G)$ cạnh, ta sẽ nhận được đồ thị liên thông với cầu (v, w). Với mỗi cạnh xoá ta chọn đỉnh liên thuộc khác v và w. Ký hiệu U là tập đỉnh chọn. Nếu G–U không liên thông thì ta có $\kappa(G) < \lambda(G)$. Nếu G–U liên thông, vì $\lambda(G-U)=1$ nên theo trường hợp trên $\kappa(G-U)=1$, tức là G–U sẽ có đỉnh u mà khi xoá u sẽ nhận đồ thị chỉ có 1 đỉnh hoặc đồ thị không liên thông. Như vậy tập U và đỉnh u sẽ là tập tách đỉnh của G. Suy ra $\kappa(G) \le \lambda(G)$.

□

• ***Định lý 1.1.11.*** Đồ thị G = (V,E) bậc *n* là k-liên thông ($1 \le k \le n-1$), nếu

$$\delta(G) \ge (n + k - 2)/2.$$

Chứng minh

Nếu G là đồ thị đủ thì G là k-liên thông vì $k \leq n-1 = \kappa(G)$ (theo quy ước). Giả thiết G không đủ và không k-liên thông. Như vậy sẽ tồn tại tập tách đỉnh $S \subset V$, $s = card(S) < k$. Ký hiệu H là thành phần liên thông của đồ thị không liên thông G-S với số đỉnh là ít nhất là r. Khi đó $r \leq (n-s-r)$, kéo theo $r \leq (n-s)/2$.

Nếu $v \in H$, thì bậc của v trong G thoả $d_G(v) \leq (r-1)+s$. Suy ra

$$d_G(v) \leq (n-s)/2 -1 + s = (n+s-2)/2 < (n+k-2)/2$$

mâu thuẫn với giả thiết.

□

• *Định nghĩa 1.1.13*

Cho đồ thị G=(V,E,*w*). Ta định nghĩa *khoảng cách* từ *u* đến *v*, $\forall u, v \in V$, là độ dài đường đi ngắn nhất từ *u* đến *v* và ký hiệu là $d(u,v)$.

Đại lượng

$$e(v) = max\{d(v, w) \mid w \in V\}$$

gọi là *độ lệch tâm* của đỉnh *v*, $\forall v \in V$.

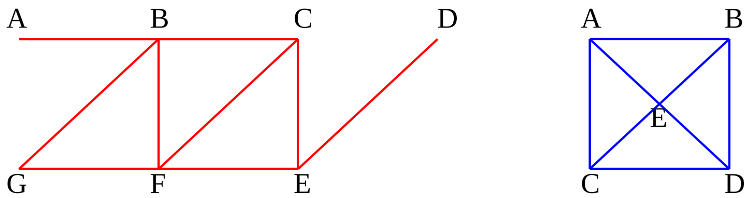
Bán kính của đồ thị G, ký hiệu $r(G)$, là độ lệch tâm nhỏ nhất

$$r(G) = min\{e(v) \mid v \in V\}$$

Đỉnh $v \in V$ gọi là *đỉnh tâm* nếu $e(v) = r(G)$. Tập hợp tất cả các đỉnh tâm gọi là *tâm* của đồ thị và ký hiệu là C(G).

◊ *Ví dụ 1.1.13*

Xét các đồ thị sau (trọng số các cạnh bằng 1)



G_1 G_2

Hình 1.1.13

Độ lệch tâm các đỉnh A, B, C, D, E, F, G của đồ thị G_1 tương ứng là 4, 3, 2, 4, 3, 2, 3. Suy ra bán kính $r(G_1) = 2$, các đỉnh tâm là C và F, và tâm $C(G_1) = \{C,F\}$.

Độ lệch tâm các đỉnh A, B, C, D, E của đồ thị G_2 tương ứng là 2, 2, 2, 2, 1. Suy ra bán kính $r(G_2) = 1$, đỉnh tâm duy nhất là E, và tâm $C(G_2) = \{E\}$.

II. BIỂU DIỄN SỐ ĐỒ THỊ

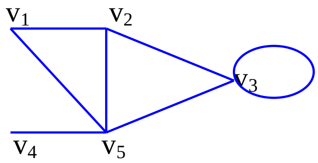
1. Ma trận kề

1.1. Đồ thị vô hướng

• ***Định nghĩa 1.2.1.*** Cho đồ thị vô hướng G=(V,E) có n đỉnh theo thứ tự v_1, v_2, ..., v_n. *Ma trận kề* của đồ thị G là ma trận vuông $A=(a_{ij})_{n\times n}$, trong đó a_{ij} là số cạnh (khuyên) nối v_i với v_j. Lưu ý rằng khi tính bậc của đỉnh mỗi khuyên được tính hai bậc.

Từ định nghĩa suy ra rằng ma trận kề của đồ thị vô hướng luôn *đối xứng* qua đường chéo chính.

◊ *Ví dụ 1.2.1.* Đồ thị



Hình 1.2.1

có ma trận kề là

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	1
v_2	1	0	1	0	1
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0	1
v_5	1	1	1	1	0

• ***Mệnh đề 1.2.1.*** Cho đồ thị G=(V,E) với ma trận kề $(a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó

$$deg(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} + a_{ii}, \ \forall v_i \in V$$

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa.

• ***Định lý 1.2.2***

Cho đồ thị đơn G=(V,E) có n đỉnh, V={v_1, v_2, ..., v_n} và ma trận kề của đồ thị G là ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Giả sử $A^k=(c_{ij})_{n\times n}$, $k \geq 1$. Khi đó c_{ij}, $i\neq j$, là số dây chiều dài k từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j. Đặc biệt phần tử trên ô $[i,i]$, $1 \leq i \leq n$, của A^2 là bậc của đỉnh v_i.

Chứng minh

Qui nạp theo k.

• ***Hệ quả 1.2.3.***

Cho đồ thị đơn G=(V,E) có n đỉnh, V={v_1, v_2, ..., v_n} và ma trận kề của đồ thị G là ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Ký hiệu

$$T = A + A^2 + ... + A^{n-1}.$$

Khi đó đồ thị G liên thông khi và chỉ khi các phần tử ngoài đường chéo chính của ma trận T đều lớn hơn 0.

Chứng minh

Sử dụng định lý 1.1.6 ở mục trước, suy ra đồ thị G liên thông khi và chỉ khi các cặp đỉnh đều có đường đi sơ cấp nối chúng với nhau. Mặt khác các đường đi sơ cấp có độ dài không quá (n–1). Từ đó áp dụng định lý trên ta suy ra điều phải chứng minh.

◊ *Chú ý*. Nếu đồ thị có 2 thành phần liên thông thì ta có thể đánh số lại các đỉnh và ma trận kề có dạng

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

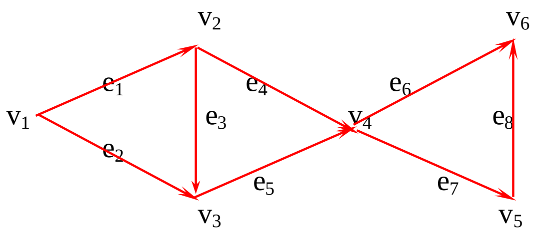
Nếu đồ thị là lưỡng phân thì ta có thể đánh số lại các đỉnh và ma trận kề có dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$$

1.2. Đồ thị có hướng

• ***Định nghĩa 1.2.2.*** Cho đồ thị có hướng G=(V,E) có n đỉnh theo thứ tự v_1, v_2, ..., v_n. *Ma trận kề* của đồ thị G là ma trận vuông $A=(a_{ij})_{n\times n}$, trong đó a_{ij} là số cung đi từ v_i tới v_j.

◊ *Ví dụ 1.2.2*. Xét đồ thị có hướng sau



Hình 1.2.2

Đồ thị trên có ma trận kề là

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	1	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	0	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	0	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0

• ***Mệnh đề 1.2.4.*** Cho đồ thị có hướng G=(V,E) với ma trận kề $(a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó

$$deg_O(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \& \quad deg_I(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\ , \forall v_i \in V$$

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa.

• ***Định lý 1.2.5***

Cho đồ thị có hướng G=(V,E) có n đỉnh, V={v_1, v_2, ..., v_n} và ma trận kề của đồ thị G là ma trận A=$(a_{ij})_{n\times n}$. Giả sử $A^k=(c_{ij})_{n\times n}$, $k \geq 1$. Khi đó c_{ij}, i≠j, là số dây có hướng chiều dài k từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j.

Chứng minh

Qui nạp theo k.

• *Hệ quả 1.2.6*

Cho đồ thị có hướng G=(V,E) có n đỉnh, V={v_1, v_2, ..., v_n} và ma trận kề của đồ thị G là ma trận A=$(a_{ij})_{n\times n}$. Ký hiệu

$$T = A + A^2 + ... + A^{n-1}.$$

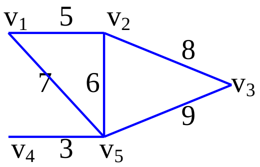
Khi đó đồ thị G liên thông mạnh khi và chỉ khi các phần tử ngoài đường chéo chính của ma trận T đều lớn hơn 0.

Chứng minh

Tương tự như chứng minh hệ quả 1.2.3.

◊ *Ghi chú:* Nếu đồ thị G có trọng số cạnh (cung) $(i,j) \in G$ là w_{ij}, thì có thể thay ma trận kề bằng *ma trận trọng số* $(a_{ij})_{n\times n}$, trong đó $a_{ij} = w_{ij}$ nếu $(i,j)\in G$ và $a_{ij} = +\infty$ hoặc $-\infty$ (tùy theo bài toán cụ thể), nếu không tồn tại cạnh (cung) (i,j).

◊ *Ví dụ*. Đồ thị có trọng số



Hình 1.2.1

có ma trận trọng số là

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	∞	5	∞	∞	7
v_2	5	∞	8	∞	6
v_3	∞	8	∞	∞	9
v_4	∞	∞	∞	∞	3
v_5	7	6	9	3	∞

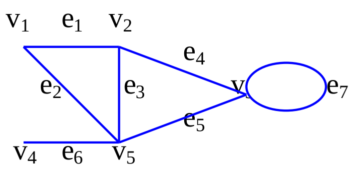
2. Ma trận liên thuộc

2.1. Đồ thị vô hướng

• *Định nghĩa 1.2.3.* Cho đồ thị G=(V,E) có n đỉnh, V={v_1, v_2, ..., v_n} và m cạnh E={e_1, e_2, ..., e_m}. *Ma trận liên thuộc* của đồ thị G là ma trận A=$(a_{ij})_{nxm}$ thoả mãn

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ liên thuộc cạnh } e_j \\ 0, \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ không liên thuộc cạnh } e_j \end{cases}$$

◊ *Ví dụ 1.2.3.* Đồ thị



Hình 1.2.3

có ma trận liên thuộc là

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0	0	1	0
v_5	0	1	1	0	1	1	0

• ***Mệnh đề 1.2.7***. Cho đồ thị đơn $G=(V,E)$ với ma trận liên thuộc (a_{ij}). Khi đó

$$\deg(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \forall v_i \in V$$

Chứng minh: Suy ra từ định nghĩa.

◊ *Chú ý*. Nếu đồ thị có 2 thành phần liên thông thì ta có thể đánh số lại các đỉnh và các cạnh để có ma trận liên thuộc dạng

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

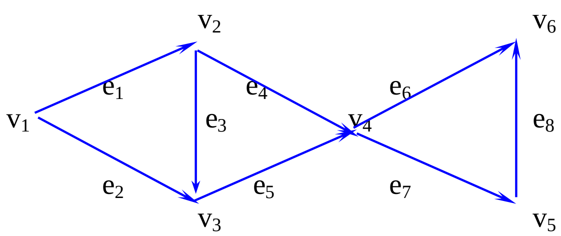
2.2. Đồ thị có hướng

• ***Định nghĩa 1.2.4.*** Cho đồ thị có hướng không khuyên $G=(V,E)$ có n đỉnh, $V=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và m cung $E=\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. *Ma trận liên thuộc* của đồ thị G là ma trận $A=(a_{ij})_{nxm}$ thoả mãn

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1, \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0, \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ không liên thuộc cung } e_j \end{cases}$$

◊ *Ví dụ 1.2.4*

Xét đồ thị có hướng sau



Hình 1.2.4

Đồ thị có ma trận liên thuộc là

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	-1	0	1	1	0	0	0	0
v_3	0	-1	-1	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	-1	-1	1	1	0
v_5	0	0	0	0	0	0	-1	1
v_6	0	0	0	0	0	-1	0	-1

• ***Mệnh đề 1.2.8.*** Cho đồ thị có hướng không khuyên G=(V,E) với ma trận liên thuộc (a_{ij}). Khi đó

$$\deg_O(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \max\{0, a_{ij}\} \quad \forall v_i \in V$$

$$\deg_I(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \max\{0, -a_{ij}\} \quad \forall v_i \in V$$

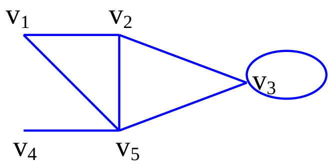
Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa.

3. Danh sách cạnh (cung)

Trong trường hợp đồ thị *thưa* (đồ thị có *n* đỉnh và *m* cạnh hoặc cung thoả măn $m < 6n$) người ta thường dùng cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh (cung).

Trong cách biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh (cung) chúng ta sẽ lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung) của đồ thị vô hướng (có hướng). Một cạnh (cung) $e=(x,y)$ của đồ thị sẽ tương ứng với hai biến *Đầu*[*e*], *Cuối*[*e*]. Như vậy, để lưu trữ đồ thị ta cần sử dụng $2m$ đơn vị bộ nhớ. Nhược điểm của cách biểu diễn này là để xác định những đỉnh nào của đồ thị là kề với một đỉnh cho trước chúng ta phải làm cỡ *m* phép so sánh (khi duyệt qua danh sách tất cả các cạnh hoặc cung của đồ thị).

◊ *Ví dụ 1.2.5*. Đồ thị



Hình 1.2.5

có danh sách cạnh là

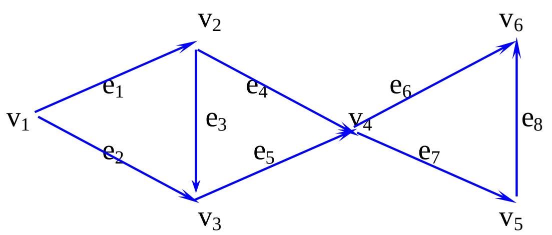
$(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_3), (v_3, v_5), (v_4, v_5)$

được lưu trữ bởi các mảng *Đầu*[*e*], *Cuối*[*e*], $e = 1, ..., 7$, như sau

Cạnh	1	2	3	4	5	6	7
Đầu	v_1	v_1	v_2	v_2	v_3	v_3	v_4
Cuối	v_2	v_5	v_3	v_5	v_3	v_5	v_5

◊ *Ví dụ 1.2.6*

Xét đồ thị có hướng sau



Hình 1.2.6

Đồ thị có danh sách cung là

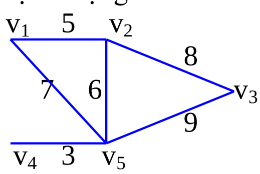
$[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_4], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_6], [v_4, v_5], [v_5, v_6]$

được lưu trữ bởi các mảng *Đầu*[*e*], *Cuối*[*e*], *e* = 1, ..., 8, như sau

Cung	1	2	3	4	5	6	7	8
Đầu	v_1	v_1	v_2	v_2	v_3	v_4	v_4	v_5
Cuối	v_2	v_3	v_4	v_3	v_4	v_6	v_5	v_6

◊ *Ghi chú*: Trong trường hợp đồ thị có trọng số ta cần thêm mảng *Trong_So* có *m* phần tử để lưu trữ trọng số của các cạnh.

◊ *Ví dụ*. Đồ thị có trọng số



Hình 1.2.1

có mảng trọng số như sau

Cạnh	1	2	3	4	5	6
Đầu	v_1	v_1	v_2	v_2	v_3	v_4
Cuối	v_2	v_5	v_3	v_5	v_5	v_5
Trọng số	5	7	8	6	9	3

Bài tập: Viết thủ tục tính bậc (nửa bậc) của đỉnh v_i trên cơ sở danh sách cạnh (danh sách cung).

4. Danh sách kề

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách kề là cách biểu diễn thích hợp nhất.

Trong cách biểu diễn này, với mỗi đỉnh v của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó, mà ta sẽ ký hiệu là

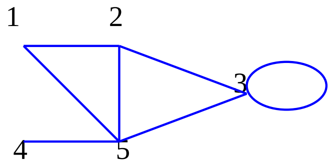
$$Kề(v) = \{ u \in V \mid (v,u) \in E\}$$

Khi đó vòng lặp thực hiện với mỗi một phần tử trong danh sách này theo thứ tự các phần tử được sắp xếp trong nó sẽ được viết như sau:

Với mọi $u \in Kề(v)$ do <công việc>

Sau đây là các ví dụ danh sách kề liên kết.

◊ *Ví dụ 1.2.7.* Đồ thị



Hình 1.2.7

có danh sách kề liên kết là

Kề[1] → 2 → 5 ∅

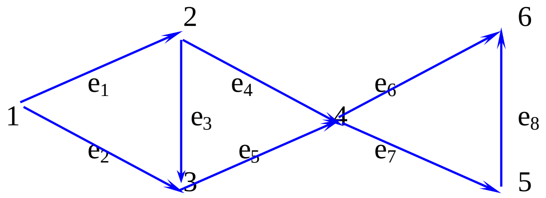
Kề[2] → 1 → 3 → 5 ∅

Kề[3] → 2 → 3 → 5 ∅

Kề[4] → 5 ∅

Kề[5] → 1 → 2 → 3 → 4 ∅

◊ *Ví dụ 1.2.8*. Đồ thị có hướng



Hình 1.2.8

có danh sách kề liên kết (sau) là

Kề[1] → 2 → 3 ∅

Kề[2] → 3 → 4 ∅

Kề[3] → 4 ∅

Kề[4] → 5 → 6 ∅

Kề[5] → 6 ∅

Kề[6] = ∅

Bài tập: Viết thủ tục tính bậc (nửa bậc) của đỉnh v_i trên cơ sở danh sách kề.

◊ *Ghi chú*. Thủ tục xây dựng danh sách kề liên kết được trình bày ở phần bài tập.

Trong các thuật toán mô tả ở các phần tiếp theo hai cấu trúc danh sách kề và ma trận trọng số được sử dụng thường xuyên.

III. ĐỒ THỊ ĐẲNG CẤU

Trong thực tế người ta thường gặp bài toán phải xác định xem hai đồ thị có thể được vẽ bằng một cách hay không. Chẳng hạn trong hoá học, đồ thị dùng để biểu diễn cấu trúc hợp chất. Các hợp chất khác nhau có thể có cùng công thức nhưng cấu trúc khác nhau. Ngược lại có những cấu trúc có vẻ khác nhau nhưng lại cho cùng một hợp chất. Đó chính là những cấu trúc đẳng cấu.

Xét ví dụ sau. Giả sử hai người nhận được yêu cầu sau : ”Cho 4 điểm a, b, c, d. Nối a với b, b với c, c với d và d với a”. Rất có thể 2 người sẽ vẽ 2 đồ thị như sau

Hình 1.3.1

Hai đồ thị trên trông bề ngoài khác nhau, nhưng chúng thực chất là một. Đó là các đồ thị đẳng cấu.

• ***Định nghĩa 1.3.1***. Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ gọi là *đẳng cấu* với nhau, nếu tồn tại song ánh $f: V_1 \to V_2$ và $g: E_1 \to E_2$ thoả mãn

$$\forall e \in E_1 : \ e = (v, w) \Leftrightarrow g(e) = (f(v), f(w))$$

Cặp ánh xạ (f, g) gọi là một *đẳng cấu* từ G_1 đến G_2.

Từ định nghĩa suy ra

• ***Mệnh đề 1.3.1.*** Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ *đẳng cấu* với nhau nếu tồn tại song ánh $f: V_1 \to V_2$ thoả mãn

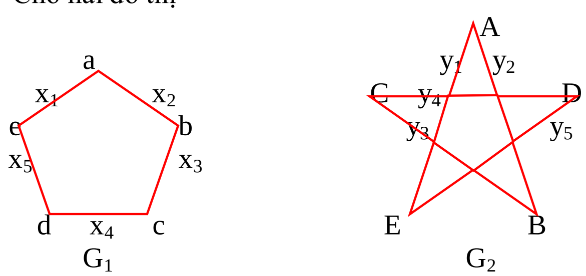
$$\forall v, w \in V_1 : v \text{ kề } w \Leftrightarrow f(v) \text{ kề } f(w) \text{ trong } G_2$$

Chứng minh

Ánh xạ $g: E_1 \to E_2$, $(u,v) \mapsto (f(u), f(v))$, cùng với ánh xạ f tạo thành một đẳng cấu từ G_1 vào G_2.

Trong trường hợp G_1 và G_2 là đơn đồ thị, hàm f trong mệnh đề 1.3.1 gọi là một *đẳng cấu* từ G_1 đến G_2.

◊ *Ví dụ 1.3.1*. Cho hai đồ thị



Hình 1.3.2

Một đẳng cấu f từ G_1 vào G_2 là

$$f(a)=A,\ f(b)=B,\ f(c)=C,\ f(d)=D,\ f(e)=E$$

vì

$(a,b) \in G_1 \Leftrightarrow (f(a),f(b)) = (A,B) \in G_2$
$(b,c) \in G_1 \Leftrightarrow (f(b),f(c)) = (B,C) \in G_2$
$(c,d) \in G_1 \Leftrightarrow (f(c),f(d)) = (C,D) \in G_2$
$(d,e) \in G_1 \Leftrightarrow (f(d),f(e)) = (D,E) \in G_2$
$(a,e) \in G_1 \Leftrightarrow (f(a),f(e)) = (A,E) \in G_2$

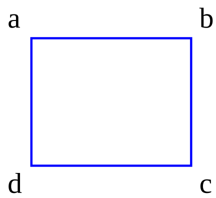
• ***Định lý 1.3.2***

Cho $G_1 =(V_1,E_1)$ và $G_2 =(V_2,E_2)$ là hai đơn đồ thị. G_1 đẳng cấu với G_2 khi và chỉ khi hai ma trận kề tương ứng bằng nhau sau khi thay đổi thứ tự các hàng và cột nếu cần thiết.

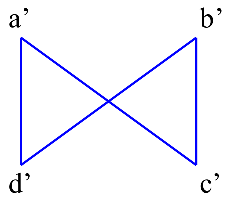
Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Việc xác định tính đẳng cấu của hai đồ thị là bài toán thú vị. Các thuật toán quen biết đều có độ phức tạp hàm mũ hay giai thừa trong trường hợp xấu nhất. Tuy nhiên cũng có những thuật toán cho độ phức tạp trung bình tuyến tính (xem [11], [12]).

◊ *Ví dụ*. Cho hai đồ thị sau



G_1



G_2

Xét song ánh $f:V_1 \rightarrow V_2$ như sau

$$f(a)=a’,\ f(b)=c’,\ f(c)=b’,\ f(d)=d’$$

Ta có

$(a,b) \in G_1 \Leftrightarrow (f(a),f(b)) = (a’,c’) \in G_2$
$(b,c) \in G_1 \Leftrightarrow (f(b),f(c)) = (c’,b’) \in G_2$
$(c,d) \in G_1 \Leftrightarrow (f(c),f(d)) = (b’,d’) \in G_2$
$(d,a) \in G_1 \Leftrightarrow (f(d),f(a)) = (d’,a’) \in G_2$

Vậy f là đẳng cấu từ G_1 vào G_2, kéo theo G_1 và G_2 đẳng cấu.

Ma trận kề M_1 của G_1 là

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	1	0

Ma trận kề M_2 của G_2 là

	a'	b'	c'	d'
a'	0	0	1	1

b'	0	0	1	1
c'	1	1	0	0
d'	1	1	0	0

Hoán vị cột b’ và c’ của M_2 ta được

	a'	c'	b'	d'
a'	0	1	0	1
b'	0	1	0	1
c'	1	0	1	0
d'	1	0	1	0

Tiếp tục hoán vị hàng b’ và c’ ta nhận được M_1

	a'	c'	b'	d'
a'	0	1	0	1
c'	1	0	1	0
b'	0	1	0	1
d'	1	0	1	0

• ***Định nghĩa 1.3.2***. *Tính chất bất biến*

Một tính chất P gọi là *bất biến* nếu mọi cặp đồ thị đẳng cấu G_1 và G_2 thỏa mãn G_1 có tính chất P khi và chỉ khi G_2 có tính chất P.

Do đó để chứng minh hai đồ thị không đẳng cấu ta phải tìm ra tính chất bất biến nào đó mà một đồ thị có, còn đồ thị kia không có.

Sau đây là một số tính chất bất biến về đồ thị đẳng cấu.

• ***Định lý 1.3.3***. Cho $G_1 =(V_1,E_1)$ và $G_2 =(V_2,E_2)$ là hai đồ thị đẳng cấu. Khi đó

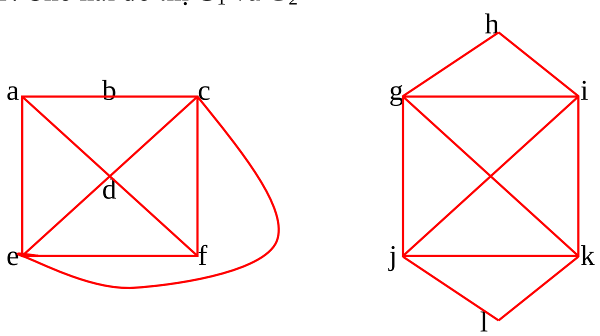
(i) G_1 và G_2 có số cạnh và số đỉnh bằng nhau.

(ii) Với mọi số *k* tự nhiên, số đỉnh bậc *k* của G_1 và G_2 bằng nhau.

(iii) Với mọi số *k* tự nhiên, số chu trình sơ cấp chiều dài *k* của G_1 và G_2 bằng nhau.

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa.

◊ *Ví dụ 1.3.2*. Cho hai đồ thị G_1 và G_2

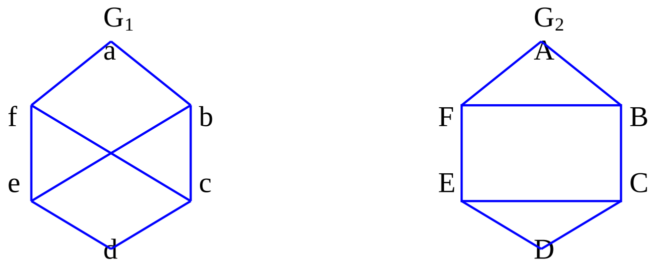


G_1 G_2

Hình 1.3.3

Hai đồ thị trên cùng số đỉnh (6) và số cạnh (10), nhưng không đẳng cấu vì G_1 có đỉnh a bậc 3, nhưng G_2 không có đỉnh bậc 3.

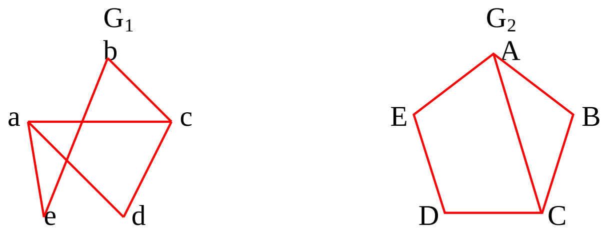
◊ *Ví dụ 1.3.3*. Xét hai đồ thị G và H sau



Hình 1.3.4

Cả hai đồ thị đều có 6 đỉnh và 8 cạnh. Mỗi đồ thị có 4 đỉnh bậc 3 và hai đỉnh bậc 2. Tuy nhiên G_2 có chu trình đơn độ dài 3, nhưng G_1 lại không có. Vì vậy G_1 và G_2 không đẳng cấu.

◊ *Ví dụ 1.3.4*. Xét hai đồ thị G_1 và G_2 sau



Hình 1.3.5

Các bất biến về đỉnh, cạnh, bậc, chu trình đều phù hợp nên G_1 và G_2 có thể là đẳng cấu. Để tìm phép đẳng cấu chúng ta sẽ đi theo đường đi qua tất cả các đỉnh sao cho các đỉnh tương ứng trong hai đồ thị cùng bậc.

Chẳng hạn, đường đi (a,d,c,b,e) trong G_1 và đường đi (C,B,A,E,D) trong G_2 có bậc các đỉnh tương ứng theo thứ tự là 3,2,3,2,2. Theo đường đi này ta thiết lập ánh xạ f sau:

$$f(a)=C,\ f(d)=B,\ f(c)=A,\ f(b)=E,\ f(e)=D$$

Kiểm tra tính bảo toàn cạnh của ánh xạ f đối với tất cả các cặp đỉnh:

$(a,d) \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a),f(d)) = (C,B) \in G_2$

$(d,c) \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(d),f(c)) = (B,A) \in G_2$

...

$(a,b) \notin G_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a),f(b)) = (C,E) \notin G_2$

...

Suy ra ánh xạ f thực sự là một đẳng cấu giữa G_1 và G_2.

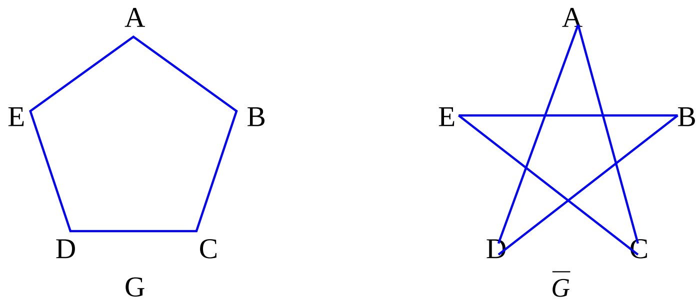
◊ *Ví dụ 1.3.5. Đồ thị bù.*

Xét đơn đồ thị G=(V,E). *Đồ thị bù* của G là đơn đồ thị $\overline{G} = (V, \overline{E})$ với tập các cạnh $\overline{E}$ được định nghĩa như sau

$$\overline{E} = \{ (u,v) \mid u, v \in V \ \& \ (u,v) \notin E \}$$

Ta thấy tính bù là tương hỗ: nếu $\overline{G}$ là đồ thị bù của G thì G cũng là đồ thị bù của $\overline{G}$, chúng tạo thành cặp đồ thị bù.

Hình sau là ví dụ cặp đồ thị sau bù



Hình 1.3.6

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra kết luận sau

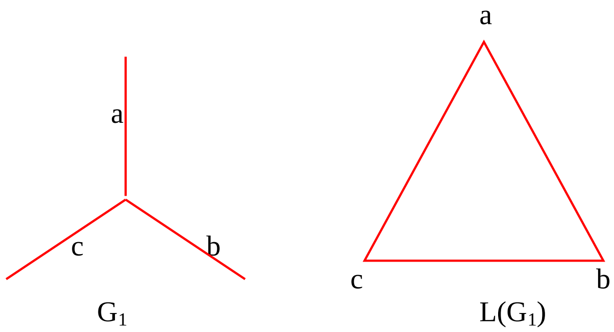
• ***Mệnh đề 1.3.4.*** Hai đơn đồ thị đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi các đồ thị bù của chúng đẳng cấu với nhau.

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa.

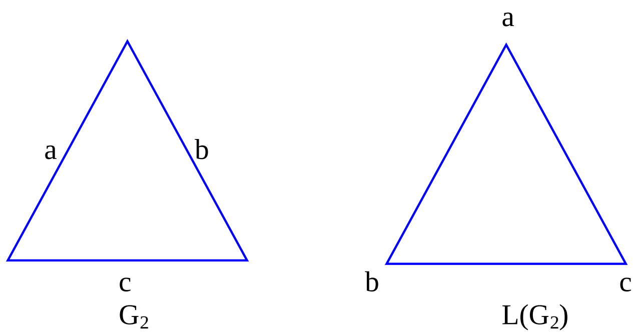
◊ *Ví dụ 1.3.6. Đồ thị đường.*

Cho đồ thị G = (V,E). *Đồ thị đường* của G, ký hiệu L(G), là đồ thị có các đỉnh tương ứng với các cạnh của G và hai đỉnh kề nhau trong L(G) nếu các cạnh tương ứng trong G kề nhau.

Sau đây là các ví dụ về đồ thị đường



Hình 1.3.7



Hình 1.3.8

• ***Mệnh đề 1.3.5.*** Cho hai đơn đồ thị $G_1 =(V_1, E_1)$ và $G_2 =(V_2, E_2)$ đẳng cấu với nhau. Khi đó các đồ thị đường của chúng đẳng cấu với nhau.

Chứng minh

Ta có song ánh $f:V_1 \to V_2$ là đẳng cấu từ G_1 vào G_2. Ta xây dựng ánh xạ $g:E_1 \to E_2$ như sau

$$\forall e = (u,v) \in E_1 : g(e) := (f(u),f(v)) \in E_2$$

Theo tính chất của ánh xạ đẳng cấu của f, ánh xạ g hoàn toàn xác định và là song ánh.

Ta cũng dễ dàng thấy rằng, các cạnh a, b trong G_1 kề nhau kéo theo các cạnh g(a), g(b) trong G_2 cũng kề nhau, và ngược lại.

Bây giờ nếu ta coi các cạnh là các đỉnh trong các đồ thị đường tương ứng, thì g chính là đẳng cấu từ $L(G_1)$ vào $L(G_2)$. □

◊ *Ghi chú*. Điều ngược lại không đúng. Trong ví dụ 1.3.6, đồ thị $L(G_1)$ (hình 1.3.7) và $L(G_2)$ (hình 1.3.8) đẳng cấu, nhưng G_1 (hình 1.3.7) và G_2 (hình 1.3.8) không đẳng cấu.

IV. ĐỒ THỊ PHẲNG

Ta xét vấn đề thực tế sau: Cho các thành phố A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 . Có thể xây dựng các đường nối mỗi thành phố A_i đến từng thành phố B_j sao cho chúng không cắt nhau ? Câu trả lời là không. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu những bài toán tương tự.

1. Đồ thị phẳng

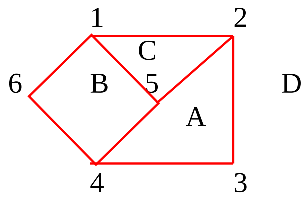
• *Định nghĩa 1.4.1*

Một đồ thị gọi là *đồ thị hình học phẳng*, nếu nó được biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau.

Một đồ thị gọi là *đồ thị phẳng*, nếu nó đẳng cấu với đồ thị hình học phẳng.

Với một đồ thị hình học phẳng liên thông, mặt phẳng được chia làm các miền con gọi là *mặt*. Mỗi mặt được giới hạn bởi chu trình gọi là *biên* của mặt. Số cạnh trên biên của mặt *f* được gọi là *bậc* của mặt, ký hiệu *deg*(*f*). Bậc nhỏ nhất gọi là *đai* của đồ thị.

◊ *Ví dụ 1.4.1*. Đồ thị sau là đồ thị hình học phẳng chia mặt phẳng thành các miền A, B, C, D



Hình 1.4.1

Miền A có bậc 4, miền B có bậc 4, miền C có bậc 3, miền D có bậc 5. Đai của đồ thị là 3.

• ***Mệnh đề 1.4.1.*** Mọi chu trình đồ thị phẳng có độ dài chẵn khi và chỉ khi mọi mặt của đồ thị có bậc chẵn.

Chứng minh.

Điều kiện cần là hiển nhiên.

Điều kiện đủ: Ta chứng minh qui nạp theo số mặt của đồ thị.

- Trường hợp đồ thị có 1 mặt: mệnh đề là hiển nhiên.

- Giả thiết mệnh đề đúng với mọi đồ thị có n mặt. Cho G là đồ thị phẳng có n+1 mặt và mỗi mặt đều có bậc chẵn.

Ta chứng minh mọi chu trình của G có độ dài chẵn bằng phản chứng. Giả sử G có chu trình C độ dài lẻ. (Không mất tính tổng quát giả thiết C là chu trình sơ cấp). Chu trình C không thể là biên của mặt được, vì biên phải có độ dài chẵn. Như vậy phía trong của C phải có ít nhất 2 mặt. Khi đó phải tồn tại hai mặt M_1 và M_2 có cạnh chung. Các cạnh chung không thể nằm trên chu trình C. Loại các cạnh chung khỏi G ta được đồ thị G' có n mặt. Mặt M có được từ việc nối mặt M_1 và M_2 sau khi bỏ các cạnh chung cũng có bậc chẵn, vì

$$\deg(M) = \deg(M_1) + \deg(M_2) - 2*(\text{số cạnh chung})$$

Lúc này C cũng là chu trình độ dài lẻ của G', và điều này mâu thuẫn với giả thiết qui nạp.

• ***Định nghĩa 1.4.2***

Đồ thị G gọi là *đồ thị tuyến tính phẳng*, nếu G là đồ thị hình học phẳng có tất cả các cạnh là đoạn thẳng.

• ***Định lý 1.4.2.*** Mỗi đơn đồ thị phẳng đẳng cấu với đồ thị tuyến tính phẳng.

Chứng minh (xem [6] Busacker, Saaty, 103).

2. Công thức Euler

• ***Định lý 1.4.3*** (*công thức Euler*). Cho G là đồ thị liên thông phẳng có e cạnh, v đỉnh và f mặt. Khi đó ta có *công thức Euler*

$$f = e - v + 2$$

Chứng minh

Quy nạp theo số cạnh.

(i) Với e = 1, G có dạng một trong hai đồ thị sau: khuyên hoặc 1 cạnh

f = 2, e = 1, v = 1 f = 1, e = 1, v= 2

Khi đó hiển nhiên công thức Euler thoả mãn.

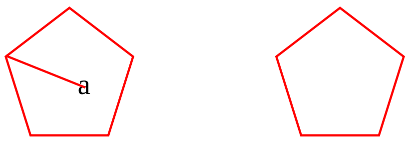
(ii) Giả sử công thức đúng với đồ thị liên thông, phẳng m cạnh.

Cho G là đồ thị có m+1 cạnh. Ta xét 2 trường hợp sau

+ Trường hợp G có đỉnh treo:

Chọn a là đỉnh treo (d(a)=1). Ta bỏ đỉnh a và cạnh tới a thì đồ thị G' nhận được có số cạnh e', số đỉnh v' , số mặt f' như sau

$$e' = m = e - 1,\ v' = v - 1,\ f' = f$$



G G'

Theo giả thiết quy nạp

$f' = e' - v' + 2 \Leftrightarrow f = e - 1 - v + 1 + 2 = e - v + 2$

+ Trường hợp G không có đỉnh treo:

Đồ thị G phải có mặt được bao bởi chu trình. Gọi x là một cạnh của chu trình đó. Nếu ta bỏ cạnh x thì đồ thị G' thu được có số cạnh e', số đỉnh v' , số mặt f' như sau

$$e' = m = e - 1,\ v' = v\ ,\ f' = f - 1$$

G G'

Theo giả thiết quy nạp

$$f' = e' - v' + 2 \Leftrightarrow f - 1 = e - 1 - v + 2 \Leftrightarrow f = e - v + 2$$

□

• ***Định lý 1.4.4*** (*Bất đẳng thức cạnh-đỉnh*). Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh và đai g ($g \geq 3$), và không có đỉnh treo. Khi đó ta có

$$e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$$

Chứng minh

Một đơn đồ thị liên thông sẽ chia mặt phẳng thành f miền: $m_1, \ldots, m_f$. Bậc của mỗi miền ít nhất là g. Tổng số bậc của các miền bằng đúng 2 lần số cạnh. Suy ra

$$2e = \sum_{i=1}^{f} \deg(m_i) \geq g.f$$

Theo công thức Euler $f = e - v + 2$. Vậy

$$g.(e - v + 2) \leq 2e$$

suy ra

$$e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$$

□

• ***Hệ quả 1.4.5.*** Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh ($v \geq 3$), và không có đỉnh treo. Khi đó ta có

$$e \leq 3(v-2).$$

Chứng minh

Vì G là đơn đồ thị không có cạnh song song và khuyên, nên $g \geq 3$, kéo theo $\frac{g}{g-2} \leq 3$. Từ đó suy ra Hệ quả.

• ***Hệ quả 1.4.6.*** Đồ thị K_5 là không phẳng.

Chứng minh

K_5 có 10 cạnh và và 5 đỉnh, không thoả Hệ quả 1.4.5, nên nó không thể là đồ thị phẳng.

• ***Hệ quả 1.4.7.*** Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh ($v \geq 3$), không có đỉnh treo và không có chu trình độ dài 3. Khi đó ta có

$$e \leq 2(v-2).$$

Chứng minh.

Tương tự chứng minh hệ quả 1.4.5 với điều kiện bậc của mỗi mặt ít nhất là 4.

• ***Hệ quả 1.4.8.*** Đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng.

Chứng minh

$K_{3,3}$ có 9 cạnh và 6 đỉnh, không thoả Hệ quả 1.4.7, nên nó không thể là đồ thị phẳng.

3. Định lý Kuratowski

• ***Định nghĩa 1.4.3***

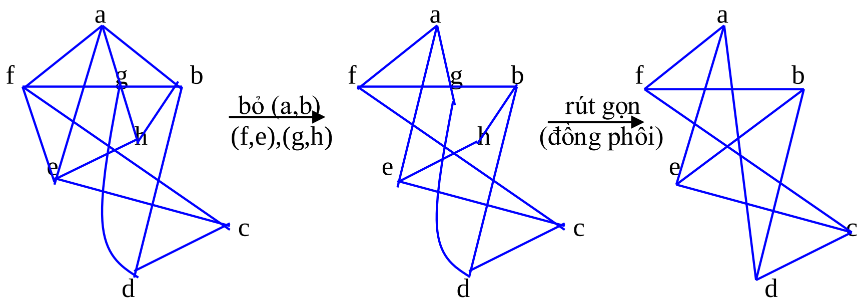
Phép rút gọn nối tiếp. Cho đồ thị G có đỉnh v bậc 2 với các cạnh (v,v_1) và (v,v_2). Nếu ta bỏ hai cạnh (v,v_1) và (v,v_2) và thay bằng cạnh (v_1,v_2), thì ta nói rằng ta đã thực hiện phép *rút gọn nối tiếp*. Đồ thị G' thu được gọi là *đồ thị rút gọn* từ G.

Đồ thị đồng phôi. Hai đồ thị G_1 và G_2 gọi là *đồng phôi* nếu G_1 và G_2 có thể rút gọn thành những đồ thị đẳng cấu qua một số phép rút gọn nối tiếp.

• ***Định lý 1.4.9*** (*Kuratowski*)**.** Đồ thị G là đồ thị phẳng khi và chỉ khi G không chứa đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

Chứng minh. Công nhận.

◊ *Ví dụ 1.4.2*. Chứng minh đồ thị (a) ở Hình 1.4.2 không phẳng



(a) **(b)** **(c)**

Hình 1.4.2

Ta tìm đồ thị con của đồ thị (a) đồng phôi với $K_{3,3}$. Vì mọi đỉnh của $K_{3,3}$ có bậc 3, ta bỏ cạnh (a,b), (f,e), (g,h) khỏi đồ thị (a) và nhận được đồ thị (b). Trong đồ thị (b) hai đỉnh g, h có bậc 2. Rút gọn nối tiếp hai đỉnh này ta thu được đồ thị (c) là $K_{3,3}$. Như vậy (a) không phải đồ thị phẳng.

◊ *Ghi chú*. Định lý Kuratowski chỉ ra đặc trưng của đồ thị phẳng, nhưng không cung cấp thuật toán hiệu quả để nhận biết đồ thị phẳng. Trong thực tế người ta đã phát triển thuật toán có độ phức tạp tuyến tính để nhận biết đồ thị phẳng (xem [13]).

4. Nhúng đồ thị

Trong nhiều trường hợp chúng ta muốn biểu diễn đồ thị trong không gian nào đó, chẳng hạn như mặt phẳng, mặt cầu, không gian Euclide ba chiều, ..., trong đó các điểm của không gian biểu diễn đỉnh đồ thị và các đường cong không cắt nhau (trừ các đỉnh đồ thị) biểu diễn các cạnh đồ thị.

Trước hết ta định nghĩa khái niệm đường cong Jordan.

• ***Định nghĩa 1.4.4.*** Một *đường cong Jordan* trong mặt phẳng là đường cong liên tục không tự cắt. Đường cong Jordan với điểm đầu và cuối trùng nhau gọi là *đường cong Jordan khép kín*.

Tương tự định nghĩa đường cong Jordan trong các mặt khác (mặt cầu, mặt xuyến, không gian Euclide ba chiều, ...).

Ta thừa nhận định lý sau

• ***Định lý 1.4.10.*** Giả sử C là đường cong Jordan khép kín trong mặt phẳng và x và y là hai điểm khác nhau của C. Khi đó mọi đường cong Jordan nối x và y hoặc nằm hoàn toàn bên trong C (trừ x và y), hoặc nằm hoàn toàn bên ngoài C (trừ x và y), hoặc cắt C ở điểm khác x và y.

• ***Định nghĩa 1.4.5.*** Đồ thị G gọi là *nhúng được* vào không gian đã cho nếu nó đẳng cấu với đồ thị biểu diễn trong không gian đó với các điểm của không gian biểu diễn đỉnh đồ thị và các đường cong Jordan không cắt nhau (trừ các đỉnh đồ thị) biểu diễn các cạnh đồ thị.

◊ *Ví dụ 1.4.3*. Đồ thị phẳng là đồ thị nhúng được vào mặt phẳng.

• ***Định lý 1.4.11.*** Một đồ thị nhúng được vào mặt phẳng khi và chỉ khi nó nhúng được vào mặt cầu.

Chứng minh

Giả sử G nhúng được vào mặt cầu. Ta đặt hình cầu lên mặt phẳng sao cho điểm trên mặt cầu đối diện điểm tiếp xúc, gọi là điểm "xa nhất", không nằm trên cạnh hay đỉnh của G. Khi đó một biểu diễn phẳng của G nhận được bằng phép chiếu G lên mặt phẳng từ điểm "xa nhất".

Ngược lại, cho G nhúng được vào mặt phẳng. Bằng phép chiếu ngược từ mặt phẳng lên mặt cầu bất kỳ, ta nhận được nhúng của G vào mặt cầu.

□

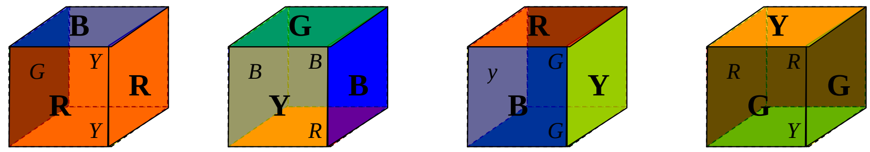
• ***Định lý 1.4.12.*** Mọi đồ thị hữu hạn nhúng được vào không gian Euclide ba chiều.

Chứng minh

Cho đồ thị G. Ta xây dựng nhúng của G vào không gian Euclide ba chiều (Ox, Oy, Oz) như sau. Trước hết ta đặt các đỉnh đồ thị lên các điểm khác nhau trên trục Ox. Sau đó với mỗi cạnh đồ thị ta chọn mặt phẳng đi qua trục Ox sao cho không có mặt trùng nhau. Điều này luôn luôn làm được nếu số cạnh là đếm được. Sau đó mỗi cạnh không phải khuyên của G ta biểu diễn bằng một nửa đường tròn nối hai đỉnh tương ứng trên mặt phẳng ứng với cạnh đó. Mỗi khuyên của G (nếu có) được biểu diễn bằng đường tròn trong mặt phẳng của khuyên đi qua đỉnh khuyên. Cuối cùng ta nhận được nhúng của G trong không gian Euclide ba chiều. □

V. BÀI TOÁN XẾP CÁC KHỐI LẬP PHƯƠNG 4 MÀU
(instant insanity)

Cho 4 khối lập phương cùng kích thức, và các mặt được tô một trong 4 màu xanh lá cây (G), đỏ (R), vàng (Y), xanh biển (B), ví dụ



1 2 3 4

Hình 1.5.1

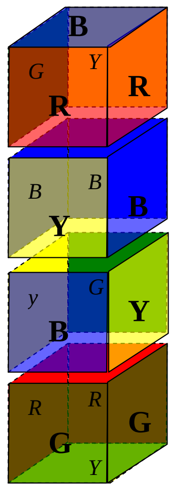
Bài toán đặt ra là xếp các khối lập phương chồng lên nhau sao cho nhìn từ 4 phía trước, sau, phải và trái đều thấy đủ 4 màu. Ví dụ, một cách xếp 4 khối lập phương trên là

Khối 1

Khối 2

Khối 3

Khối 4

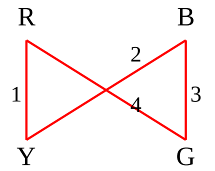


Hình 1.5.2

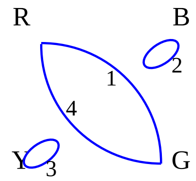
Số cách xếp các khối lập phương rất lớn. Mỗi khối có 24 cách xếp, như vậy số tổ hợp cách xếp 4 khối là $24^4 = 331776$. Vì vậy, phương pháp thử sai xét tất cả cách xếp là không thực tế. Chúng ta sẽ áp dụng lý thuyết đồ thị để đưa ra phương pháp sau đây.

Trước hết ta nhận xét thấy rằng mỗi cách xếp tương ứng với cặp đồ thị, đồ thị thứ nhất biểu diễn các màu mặt trước/sau, đồ thị thứ hai biểu diễn các màu mặt trái/phải của cột khối lập phương.

Ví dụ, cách xếp trên có thể biểu diễn bằng 2 đồ thị sau



đồ thị mặt trước/sau



đồ thị mặt trái/phải

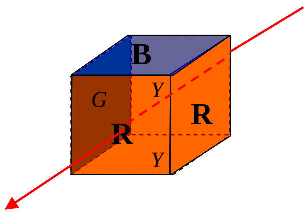
Hình 1.5.3

Các đỉnh R (red), B (blue), G (green), Y (yellow) biểu diễn các màu. Các cạnh i, i=1,..., 4, nối hai đỉnh nếu các mặt đối của khối lập phương i, i=1,...,4, có các màu tương ứng. Ví dụ, trong đồ thị mặt trước/sau, cạnh 1 nối đỉnh R và Y vì mặt trước và sau của khối 1 có màu đỏ và vàng. Trong đồ thị mặt trái/phải ta có khuyên 3 tại đỉnh Y vì các mặt trái và phải của khối 3 đều có màu vàng (Y).

Ngược lại, từ hai đồ thị trên ta có thể xây dựng cách xếp các khối lập phương như sau. Trước hết, xét đồ thị mặt trước/sau. Cạnh 1 nối đỉnh R và Y, tức khối lập phương 1 có hai mặt đỏ và vàng đối diện. Ta có thể chọn mặt bất kỳ, chẳng hạn mặt đỏ, làm mặt trước, và mặt còn lại, là mặt vàng, làm mặt sau. Cạnh 2 liên thuộc đỉnh Y, ứng với mặt sau của khối 1, vì vậy ta chọn mặt vàng của khối 2 làm mặt trước, và mặt màu xanh biển đối diện làm mặt sau. Cạnh 3 liên thuộc đỉnh B, ứng với mặt sau của khối 2, vì vậy ta chọn mặt màu xanh biển của khối 3 làm mặt trước, và mặt xanh lá cây đối diện làm mặt sau. Cạnh 4 liên thuộc đỉnh G, ứng với mặt sau của khối 3, vì vậy ta chọn mặt màu xanh lá cây của khối 4 làm mặt trước, và mặt đỏ đối diện làm mặt sau.

Đến thời điểm này, mặt mặt trái và phải được sắp xếp ngẫu nhiên. Tuy nhiên ta có thể xoay hướng thích hợp mà không làm ảnh hưởng màu các mặt trước và sau.

Xét đồ thị mặt trái/phải. Cạnh 1 nối đỉnh R và G, tức khối lập phương 1 có hai mặt đỏ và xanh lá cây đối diện. Ta có thể chọn mặt bất kỳ, chẳng hạn mặt xanh lá cây, làm mặt trái, và mặt còn lại, là mặt đỏ, làm mặt phải. Lưu ý rằng ta có thể xoay khối lập phương quanh trục mặt trước/sau và không làm thay đổi màu mặt trước sau, như minh hoạ ở hình sau



Hình 1.5.4

Tương tự ta có thể xoay khối 2, 3, 4 và nhận được cách xếp trên.

Từ phân tích trên ta thấy rằng mỗi lời giải tương ứng với cặp đồ thị có các tính chất sau

(i) Các đỉnh đều có bậc 2

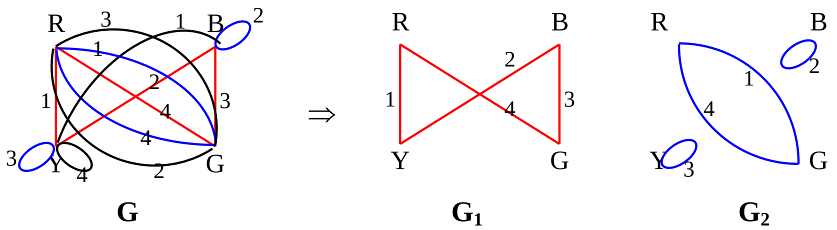
(ii) Mỗi khối 1,2,3,4 được biểu diễn bằng đúng 1 cạnh trong mỗi đồ thị

(iii) Hai đồ thị không được có cạnh chung

Tính chất (i) đảm bảo mỗi màu được sử dụng đúng 2 lần cho các mặt trước/sau và đúng 2 lần cho các mặt trái/phải. Tính chất (ii) đảm bảo mỗi khối được sử dụng đúng 1 lần. Tính chất (iii) đảm bảo rằng sau khi sắp xếp các mặt trước/sau, ta có thể xoay hướng mặt trái/phải để có lời giải.

• *Phương pháp xếp*

Trước hết ta vẽ đồ thị G biểu diễn tất cả các mặt của các khối lập phương. Các đỉnh của G biểu diễn 4 màu và cạnh nhãn i nối hai đỉnh nếu các mặt đối diện của khối i có các màu tương ứng. Sau đó, bằng phương pháp thử sai, ta chọn hai đồ thị con G_1 và G_2 của G thoả các tính chất (i), (ii) và (iii) (xem hình dưới). Cuối cùng ta xây dựng cách xếp theo như ví dụ minh hoạ ở trên.

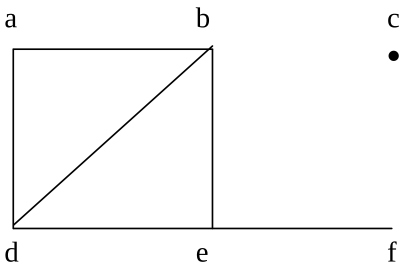


Hình 1.5.5

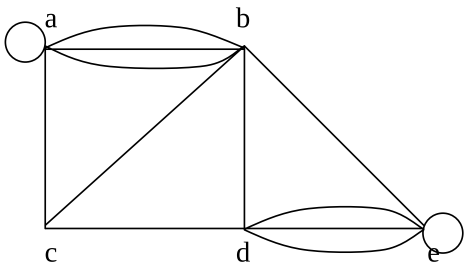
BÀI TẬP

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

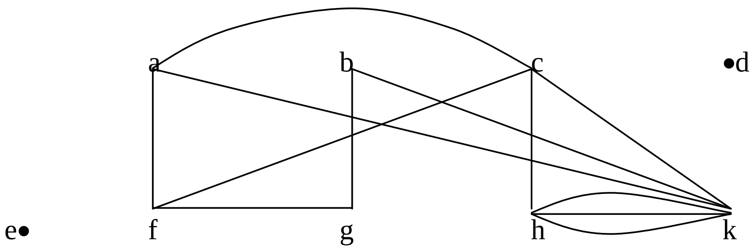
1.1.1. Hãy xác định số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh của những đồ thị vô hướng sau. Hãy chỉ ra những đỉnh cô lập, đỉnh treo, cạnh song song, khuyên (nếu có).



(**a**)



(**b**)



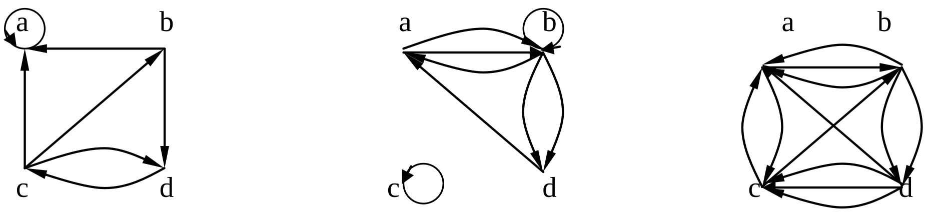
(**c**)

1.1.2. Tính tổng bậc các đỉnh trên các đồ thị bài tập **1.1.1**. Hãy kiểm tra xem tổng bậc các đỉnh có bằng hai lần số cạnh không.

1.1.3. Có thể tồn tại đồ thị 15 đỉnh và mỗi đỉnh có bậc là 5 hay không ? Tại sao ?

1.1.4. Trong một cuộc hội thảo các đại biểu bắt tay nhau. Hãy chỉ ra rằng tổng số lượt người bắt tay nhau là số chẵn.

1.1.5. Hãy xác định số đỉnh, số cung, nửa bậc vào và nửa bậc ra của các đỉnh của những đồ thị có hướng sau. Hãy chỉ ra những đỉnh cô lập, đỉnh treo, cung song song, khuyên (nếu có).



(**a**) (**b**) (**c**)

1.1.6. Tính tổng nửa bậc vào, tổng nửa bậc ra các đỉnh trên các đồ thị bài tập.
1.1.5. Hãy kiểm tra xem các tổng nửa bậc các đỉnh có bằng số cạnh không.

1.1.7. Có tồn tại đơn đồ thị với bậc các đỉnh cho như sau không. Nếu tồn tại, hãy vẽ đồ thị đó.

(**a**) 1, 2, 2, 3 (**b**) 4, 3, 3, 2, 2 (**c**) 3, 3, 3, 3, 2
(**d**) 1, 2, 3, 4, 5 (**e**) 1, 2, 3, 4, 4 (**f**) 3, 4, 3, 4, 3
(**g**) 0, 1, 2, 2, 3 (**h**) 1, 1, 1, 1, 1 (**i**) 3, 3, 3, 1, 1, 1
(**j**) 1, 2, 3, 3, 4, 5 (**k**) 2, 2, 4, 4, 4, 4 (**l**) 3, 3, 3, 3
(**m**) 3, 3, 3, 3, 3 (**n**) 3, 3, 3, 3, 3, 3

1.1.8. Tìm số đỉnh của đồ thị G, biết

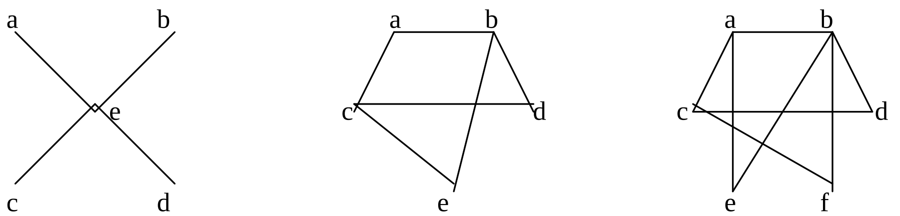
(**a**) G có 12 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc 2.
(**b**) G có 15 cạnh, ba đỉnh bậc 4 và mọi đỉnh còn lại đều có bậc 3.
(**c**) G có 6 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau.

1.1.9. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Đồ thị này có tối đa bao nhiêu đỉnh. Hãy vẽ một đồ thị như thế.

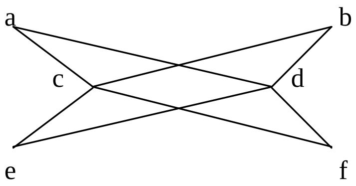
1.1.10. Giả sử mọi đỉnh của đồ thị G đều có bậc là một số lẻ p . Chứng minh rằng số cạnh của G là bội của p.

1.1.11. Có 9 sinh viên làm quen với nhau và phát hiện ra rằng ai cũng có ít nhất 3 đồng hương. Hãy chứng tỏ rằng tồn tại sinh viên có ít nhất 4 đồng hương.

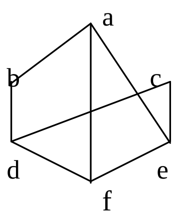
1.1.12. Các đồ thị sau có lưỡng phân hay không



(**a**) (**b**) (**c**)



(**d**)



(**e**)

1.1.13. Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị lưỡng phân có v đỉnh và e cạnh, thì $e \le v^2/4$.

1.1.14. Cho đơn đồ thị G = (V,E) với

$$V = \{1,2, \dots , n\} \ (n \ge 2)$$

và

$$E = \{(i,j) \mid 1 \le i, j \le n \ \& \ i + j \text{ chẵn}\}$$

Chứng minh rằng G không liên thông. Hãy xác định các thành phần liên thông của G.

1.1.15. Cho đơn đồ thị G = (V,E) với

$$V = \{2, 3, \dots , 41\}$$

và

$$E = \{(i,j) \mid 2 \le i, j \le 41 \ \& \ i \text{ và } j \text{ không nguyên tố cùng nhau}\}$$

Chứng minh rằng G không liên thông. Hãy xác định các thành phần liên thông của G.

1.1.16. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh khác nhau trong đồ thị K_4 với n là 2, 3, 4, 5.

1.1.17. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh khác nhau trong đồ thị $K_{3,3}$ với n là 2, 3, 4, 5.

II. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

1.2.1. Hãy lập ma trận kề, ma trận liên thuộc của các đồ thị vô hướng cho ở bài tập **1.1.1.**

1.2.2. Hãy lập ma trận kề, ma trận liên thuộc của các đồ thị có hướng không khuyên cho ở bài tập **1.1.5.**

1.2.3. Hãy vẽ đồ thị có các ma trận kề sau

(**a**) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (**b**) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

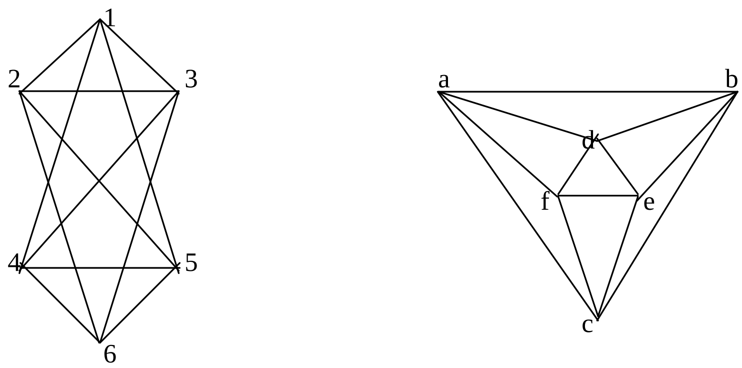
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

III. ĐỒ THỊ ĐẲNG CẤU

1.3.1. Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu không.

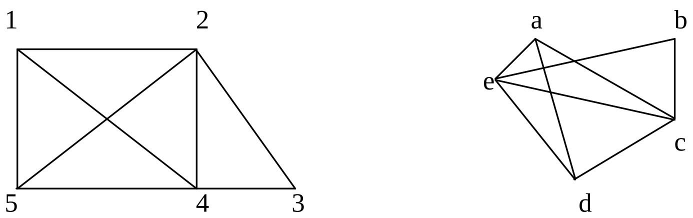
(a)



1-a, 2-c, 3-b, 4-d, 5-f , 6-e

(b)

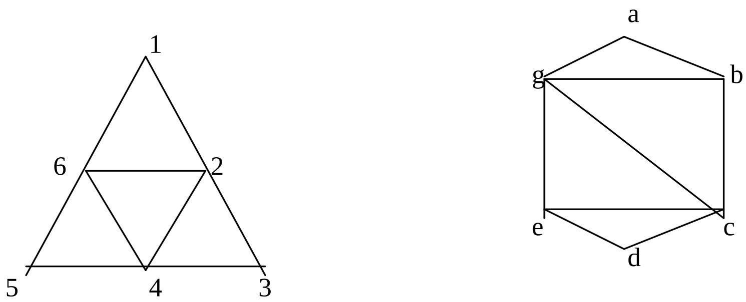
(c)



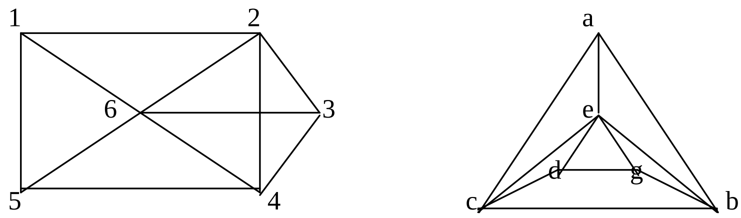
(**d**)


1
2
3
4
5
6
a
b
c
d
e
g

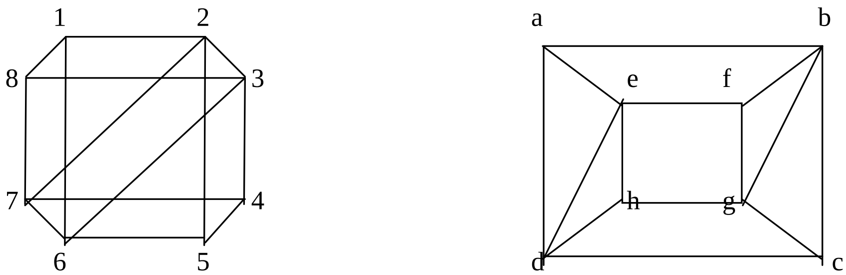
(**e**)


1
2
3
4
5
6
a
b
c
d
e
g

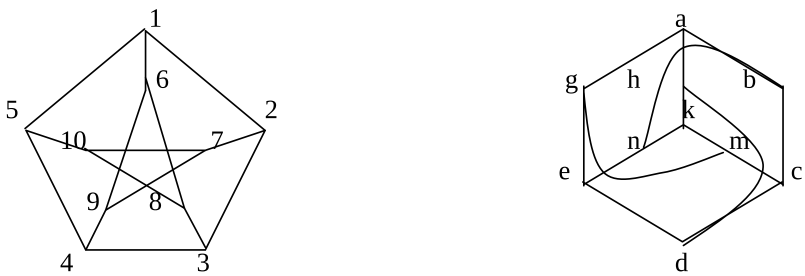
(**f**)


1
2
3
4
5
6
a
b
c
d
e
g

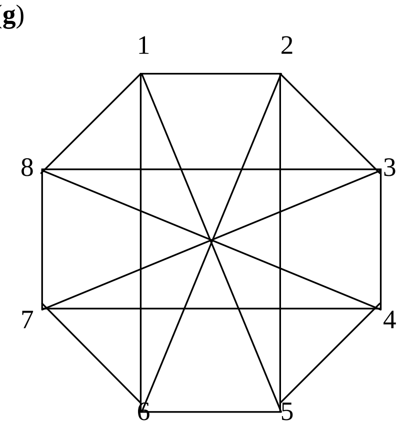
(**g**)

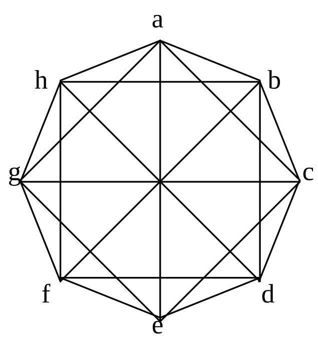

1
2
3
4
5
6
7
8
a
b
c
d
e
f
g
h

(**h**)


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
a
b
c
d
e
g
h
k
m
n

(**g**)





1.3.2. Các cặp đơn đồ thị với ma trận kề sau có đẳng cấu không.

(**a**)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(**b**)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(**c**)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

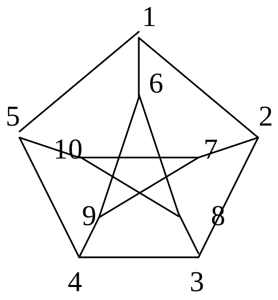
IV. ĐỒ THỊ PHẲNG

1.4.1. Chứng minh các đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không phẳng.

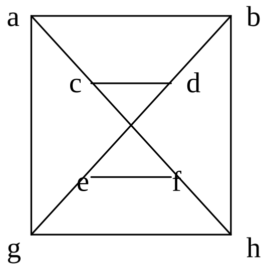
1.4.2. Cho đơn đồ thị phẳng G.
(**a**) Biết số đỉnh là 8, bậc của mỗi đỉnh là 3. Tính số mặt của đồ thị.
(**b**) Biết số đỉnh là 6, bậc của mỗi đỉnh là 4. Tính số mặt của đồ thị.
(**c**) Biết số cạnh là 30, số mặt là 20. Tính số đỉnh của đồ thị.
(**d**) Biết số mặt là 10, bậc của mỗi đỉnh là 4. Tính số đỉnh của đồ thị.
(**e**) Biết số đỉnh là 9, với các bậc là 2,2,2,3,3,3,4,4,5. Tính số cạnh và số mặt của đồ thị.

1.4.3. Sử dụng định lý Kuratowski chứng minh các đồ thị sau không phẳng

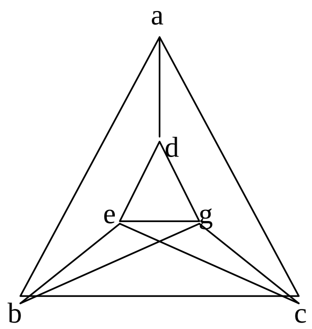
(**a**) Đồ thị Peterson



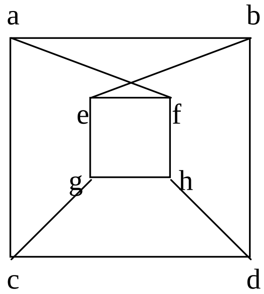
(**b**)



(**c**)

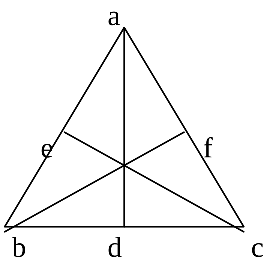


(**d**)

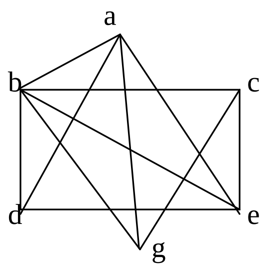


1.4.4. Các đồ thị sau có phẳng không.

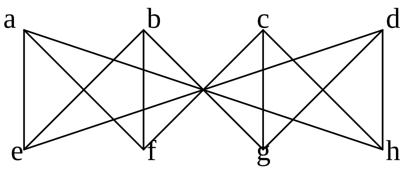
(**a**)



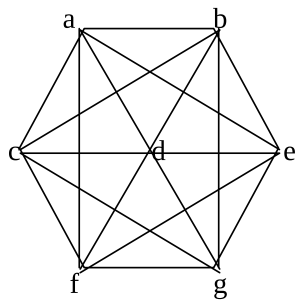
(**b**)



(**c**)



(**d**)



V. BÀI TOÁN XẾP KHỐI LẬP PHƯƠNG

1.5.1. Tìm cách khác (nếu có) xếp 4 khối lập phương cho ở ví dụ

1.5.2. Viết chương trình cài đặt phương pháp giải bài toán xếp các khối lập phương.

BÀI TẬP THỰC HÀNH MÁY TÍNH

B.1.1. Viết chương trình (Pascal hoặc C) cài đặt thủ tục tính bậc (nửa bậc) của các đỉnh theo ma trận kề.

B.1.2. Viết chương trình (Pascal hoặc C) cài đặt thủ tục tính bậc (nửa bậc) của các đỉnh theo danh sách cạnh.

Hướng dẫn:

Gán $deg(v_i) = 0$, $deg_O(v_i) = 0$, $deg_I(v_i) = 0$ $\forall i=1,...,n$.

for e = 1 to m
{
$deg(dau[e])= deg(dau[e])+1;$
$deg_O(dau[e])= deg_O(dau[e])+1;$
$deg(cuoi[e])= deg(cuoi[e])+1;$
$deg_I(cuoi[e])= deg_I(cuoi[e])+1;$
}

B.1.3. Viết chương trình (Pascal hoặc C) cài đặt danh sách kề liên kết cho các trường hợp đồ thị được nhập từ bàn phím hoặc cho bởi file text biểu diễn danh sách cạnh hoặc ma trận kề.

Hướng dẫn:

Sau đây là chương trình Pascal cài đặt danh sách kề liên kết (Linked Adjancency List), trong đó các cạnh của đồ thị được nhập từ bàn phím và đưa danh sách đó ra màn hình.

```
Program AdjList;
Const
        maxV=100;
Type
        link=^node;
        node=record
             v:integer;
             next:link;
        End;
Var
        j,x,y,m,n,u,v:integer;
        t:link;
```

```
        Ke:array[1. .maxV] of link;
    Begin
        Write('Cho so canh va dinh cua do thi:'); readln(m,n);
        (*Khoi tao*)
        for j:=1 to n do Ke[j]:=nil;
        for j:=1 to m do
        begin
            write('Cho dinh dau va cuoi cua canh ',j,':');
            readln(x,y);
            {thêm x vào Ke[y]}
            new(t); t^.v:=x, t^.next:=Ke[y]; Ke[y]:=t;
            {thêm y vào Ke[x]}
            new(t); t^.v:=y, t^.next:=Ke[x]; Ke[x]:=t;
        end;
        writeln('Danh sach ke cua cac dinh cua do thi:');
        for  j:=1 to n do
        begin
            writeln('Danh sach cac dinh ke cua dinh ',j,':');
            t:=Ke[j];
            while t<>nil do
            begin
                write(t^.v:4);
                t:=t^.next;
            end;
        end;
        readln;
    End.
```

Để ý rằng trong cách biểu diễn này chúng ta cần phải sử dụng cỡ $2m+n$ đơn vị bộ nhớ đối với đồ thị vô hướng và $m+n$ đơn vị bộ nhớ đối với đồ thị có hướng.

B.1.4. Viết chương trình giải bài toán vecto đồ thị.

• *Hướng dẫn cài đặt chương trình:*

Vecto *d[1], ..., d[n]* tăng dần, biến logic *KetThuc*

```
<nhập n, d[1], ..., d[n] >
KetThuc:=false; k:=n;
SapXep;
repeat
    If d[1] < 0 or d[k] > k-1 then
        Begin
            <không phải vecto đồ thị>
            KetThuc := true;
        End
    Else
        If d[k] = 0 then
            Begin
                < phải vecto đồ thị>
                KetThuc := true;
            End
        else
            Begin
                GiamBac;
                SapXep;{d[1],...,d[k]}
            End;
Until KetThuc;
Procedure GiamBac;
Var i:integer;
Begin
    for i:=1 to d[k] do
        d[k-i] := d[k-i]-1;
    k := k-1;
End;
***
Procedure  SapXep;{phương pháp chọn}

    var i, j, l : integer;

    begin

        for i:=1 to n-1 do

            begin

                {chọn d[l] nhỏ nhất}

                l := i;

                for j := i + 1 to n do

                if d[j] < d[l] then

                    l := j;

                {đổi chỗ d[l] và d[i]}
```

```
            swap(d[i],d[l]);
        end;
    end;
Procedure  swap(var x, y:integer);
    var  temp : integer;
    begin
        temp := x;
        x := y;
        y := temp;
    end;
```

B.1.5. Viết chương trình tìm các thành phần liên thông.
• *Hướng dẫn cài đặt chương trình:*
Khai báo:

n   là số đỉnh;
m   là số cạnh;
dau[i], cuoi[i] là đỉnh đầu, đỉnh cuối cạnh thứ i, i=1, ..., m.
tplt[i] : integer; số hiệu thành phần liên thông của đỉnh i, i=1..n.
SoTPLT:integer; số thành phần liên thông.

```
Procedure  Input;
{nhập dữ liệu đầu vào từ bàn phím hoặc file: n, m, dau[i], cuoi[i], i=1, …, m }

Procedure Init;{khởi tạo}
begin
    for  v := 1 to n do
        tplt[v] := v;
    SoTPLT := n;
end;

Procedure CapNhatTPLT(x, y:integer);
var i:integer;
begin
    for i := 1 to n do
        if tplt[i] = y then tplt[i] := x;
    for i := 1 to n do
        if tplt[i] = SoTPLT then tplt[i] := y;
end;

Procedure TPLT;
var i, x, y : integer;
begin
    for i := 1 to m do
```

```
        if  (tplt[dau[i]] <> tplt[cuoi[i]]) then
            begin
                x := min(tplt[dau[i]], tplt[cuoi[i]]);
                y := max(tplt[dau[i]], tplt[cuoi[i]]);
                CapNhatTPLT(x, y);
                SoTPLT := SoTPLT – 1;
            end;
end;
Function min(x,y:integer):integer;
begin
    if x < y then min := x
    else min:= y;
end;

Function max(x,y:integer):integer;
begin
    if x > y then max := x
    else max := y;
end;

Procedure Output;
var i:integer;
begin
    {mở file}
    <Ghi SoTPLT>;
    for i := 1 to SoTPLT do
        begin
            <xuống dòng>
            for j := 1 to n do
                if tplt[j] = i then <Ghi(j)>;
        end;
    {đóng file}
end;

{chương trình chính}
begin
    input;
    init;
    TPLT;
    output;
end.
```

***B.1.6**. Viết chương trình kiểm tra tính đẳng cấu của hai đồ thị.

***B.1.7**. Viết chương trình kiểm tra đồ thị phẳng.

***B.1.8**. Viết chương trình tìm các thành phần liên thông mạnh trong đồ thị có hướng.