Math in OI (Discrete Part)

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步

永吐西1 反演

大UFF 线性基 高斯消元

行列式 生成树

生成树 矩乘

を供 复数 FFT

计数原.

生成函数 Burnside 与 Polya 计影

康托展开

一些习题

Thanks

Math in OI (Discrete Part)

吴克文

2018年1月23日

1 数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试 反演

2 矩阵 线性基

高斯消元 行列式 生成树 矩乘

3 卷积 复数 FFT NTT

4 计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计数

康托展开

- 6 博弈论
- 6 一些习题

Math in OI (Discrete Part)

Section 1

数论

Math in OI (Discrete Part)

吴克文

逆元以及其 原根 大步小步 素性测试 反演

矩阵 线性基 高斯消式 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

MAT AL

TP1---1--

一些刁起

引入题

从 $1 \le N$ 中选出最多数量的数,使它们两两不存在整除关系

 $N < 10^6$

辗转相除法

- gcd(a, b) = gcd(b%a, a)
- $\gcd(a,b) = \gcd(a,b-a) = \dots = \gcd(a,b\%a)$
- 复杂度

扩展欧几里得

设 (a,b) = k, 求满足 ax + by = c 的解

hint

- (b%a)x' + ay' = 1
- $(b-a \mid \frac{b}{a} \mid) x' + ay' = 1$
- $x = y' \frac{b}{a}x', y = x'$
- 迭代求解

费马小定理

 $a^{p-1} \equiv 1 \mod p, \ (a,p) = 1$

欧拉定理

 $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n, \ (a, n) = 1$

威尔逊定理

 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$

逆元

 $ax \equiv 1 \mod b$ $ax \equiv c \mod b$

hint

EXGCD 或欧拉定理 (费马小定理)

Math in OI (Discrete Part)

线性求逆

线性求出 1-n 对 p 的逆元



线性求逆

线性求出 1-n 对 p 的逆元

轻而易举

 $(ab)^{-1} \equiv a^{-1}b^{-1} \mod p$ 素数分布 [] 欧拉线性筛+暴力求逆

逆元以及其他

再简单点?

$$x^{-1} \equiv (x!)^{-1} \times (x-1)! \mod p$$

再简单点?

$$x^{-1} \equiv (x!)^{-1} \times (x-1)! \mod p$$

一行搞定?

$$p = a \lfloor \frac{p}{a} \rfloor + p\%a$$

$$a \lfloor \frac{p}{a} \rfloor \equiv -(p\%a) \mod p$$

$$a \lfloor \frac{p}{a} \rfloor \times (-(p\%a)^{-1}) \equiv 1 \mod p$$

$$a^{-1} \equiv \left\lfloor \frac{p}{a} \right\rfloor \times (-(p\%a)^{-1}) \mod p$$

CRT

$$x \equiv a_i \mod b_i$$
 b_i 互质



CRT

$$x \equiv a_i \mod b_i$$
 b_i 互质

hint

$$B = \prod_{i=1}^{n} b_i \to B_i 为 \frac{B}{b_i} 对 b_i 的逆$$

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \times \frac{B}{b_i} \times B_i \mod \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$$

模线性方程组的合并

 $x \equiv a_i \mod b_i$ bi不一定互质

模线性方程组的合并

$$x \equiv a_i \mod b_i$$

 b_i 不一定互质

hint

$$x \equiv r_1 \mod m_1$$

$$x \equiv r_2 \mod m_2$$

$$m_1 u + m_2 v = r_2 - r_1 \rightarrow u'$$

$$x \equiv u' \times m_1 + r_1 \mod lcm(m_1, m_2)$$

简单题

未知数 x,给出 $x\%c_i$ 的结果 $\{b_i\}$ 试确定是否能获得 x%y 的值

简单题

未知数 x, 给出 $x\%c_i$ 的结果 $\{b_i\}$ 试确定是否能获得 x%y 的值

hint

 $(a\%(b \times c))\%c = a\%c$

《四》《圖》《意》《意》

Lucas 定理

$$\binom{n}{k} \equiv \prod \binom{A_i}{B_i} \mod p$$

 $\{A_n\},\{B_n\}$ 分别为 n,k 的 p 进制各数位

$$(1+x)^{ap+b} \equiv (1+x)^{pa}(1+x)^b \equiv (1+x^p)^a(1+x)^b$$

$$i \exists n = ap+b, k = cp+d$$

$$\binom{ap+b}{cp+d} x^k = \binom{a}{c} x^{cp} \binom{b}{d} x^d$$

原根

原根

a 作为 p 的原根,则有 $a^x \equiv 1 \mod p$ 的最小正整数解为 p-1

性质

a 生成的乘法群包含所有 F_p 的非零元 乘法 ⇒ 加法

Math in OI (Discrete Part)

Math in OI (Discrete Part)

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步

素性测 反演

矩阵

高斯消元 行列式 生成树

> 卷积 ^{复数} FFT

FFT NTT

TT 致从尽 注 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 睫托展开

博弈论

一些习是

Thanks

BSGS

 $a^x \equiv b \mod c, (a, c) = 1$

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试

矩阵

线性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 康托展开

uv ← m

Thanks

BSGS

$$a^x \equiv b \mod c$$
, $(a, c) = 1$

hint

$$x = u \left\lfloor \sqrt{\phi} \right\rfloor + v$$
 meet in the middle

Math in OI (Discrete Part)

吴克文

BSGS+

 $a^x \equiv b \mod c, (a, c) = t$

DSUS

LASTIN

一些习是

Thanks

《四》《圖》《意》《意》

致 化 逆元以及其他 原根 大步小步

_{反演} 矩阵

线性基 高斯消元 行列式 生成树 钜乘

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

Thanks

BSGS+

$$a^x \equiv b \mod c, (a, c) = t$$

hint

$$a^u a^v \equiv b \mod c$$

使得
$$(a^{\nu},c)=(a^{\nu+1},c)$$

Miller-Robin 1

快速检验p是否为素数 利用 a^{p-1} %p=1,可以选取若干 a,利用快速幂判断模 p 后 是否为1 能骗过底数 a 的合数称为以 a 为底的伪素数 能骗过所有小于 p 的底数的合数称为 Carmichael 数 (561) 由于这类数的存在(尽管稀疏),还需加强测试

Miller-Robin 2

考虑到如下事实,如果 p 是素数,且 $x^2\%p=1$,则 x 等于 1 或-1

因此将 p-1 分解为 $d2^r$, 先计算 a^d , 再逐步平方, 检查每次 平方结果是否为 1, 若是,则判断前次结果是否为 ±1 (二次探 测门

合起来就是完整 MR 素性测试 通过以 a 为底的 MR 测试的合数称作以 a 为底的强伪素数 (2,2047)

由于这类数的存在, 需要多选取一些 a 进行测试

吴克文

致化 逆元以及其作 原根 大步小步 **素性测试**

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Miller-Robin 3

 $2,7,61 \Rightarrow 4759123141$ $2,3,5,7,11,13,17 \Rightarrow 341550071728320$ $2,3,7,61,24251 \Rightarrow 10^{16}$ (除了 46856248255981)

可以近似认为 k 个底数的测试失误率约为 0.25k

一般常用第三组

一道 NOIP--题

给出一个大整数 n, 将它质因数分解

 $n < 10^{18}$

Pollard-Rho

先素性测试

随机 m 个数, 两两做差判断是否为 n 的因数, 然后递归分解 当 $m \sim \sqrt{n}$ 时, 概率约为 0.5

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步

素性測 反演

矩阵

成性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 睫托展开

-些习题

Thanks

Pollard-Rho

先素性测试

随机 \mathbf{m} 个数,两两做差判断是否为 \mathbf{n} 的因数,然后递归分解 当 $m \sim \sqrt{n}$ 时,概率约为 0.5

随机 m 个数,两两做差与 n 求 gcd,然后递归分解,概率大大提升

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步

素性測i 反演

矩阵 线性基 高斯消元 行列式

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 ^{容斥原理} 生成函数 Burnside 与 Polya i

博弈论

-些习题

=-78

Pollard-Rho

先素性测试

随机 \mathbf{m} 个数,两两做差判断是否为 \mathbf{n} 的因数,然后递归分解 当 $m \sim \sqrt{n}$ 时,概率约为 0.5

随机 m 个数,两两做差与 n 求 gcd,然后递归分解,概率大大提升

它的准确率之高甚至不需要两两做差

利用随机函数 $f(x) = x^2 + a \mod p$,每次生成两个随机数,做差求 gcd 即可

素性測 反演

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 ^{容斥原理} 生成函数 Burnside 与 Poly

博弈论

一些习题

Pollard-Rho

先素性测试

随机 \mathbf{m} 个数,两两做差判断是否为 \mathbf{n} 的因数,然后递归分解 当 $m \sim \sqrt{n}$ 时,概率约为 0.5

随机 m 个数,两两做差与 n 求 gcd,然后递归分解,概率大大提升

它的准确率之高甚至不需要两两做差

利用随机函数 $f(x) = x^2 + a \mod p$,每次生成两个随机数,做差求 gcd 即可

循环怎么办? Floyd 判环法,利用一个两倍速指针,如果两个 指针相遇,则已循环

Math in OI (Discrete Part)

算法流程:

- ❶ 对 n 进行素性测试
- 2 随机选取 a 和大素数 p
- 3 随机启始点 x 和两倍速点 y
- ⑤ 如果 x=y 则已循环,重新尝试分解
- 6 利用 x-y 与 n 做 gcd, 如果可约则退出 否则回到第4步

取整

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \left\lfloor \frac{A+B-1}{B} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A-1}{B} \right\rfloor + 1 \tag{1}$$

$$\left| \frac{\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor}{C} \right| = \left\lfloor \frac{A}{B \times C} \right\rfloor \tag{2}$$

取模

$$(Ag)\%(Bg) = (A\%B) \times g$$

 $(A\%(BC))\%C = A\%C$

$$A\%B = A - \left| \frac{A}{B} \right| \times B$$

快速幂 → 快速乘

反演

$$\mu(x) = \begin{cases} (-1)^k & x = \prod_1^k p_i \\ 0 & \exists p^2 | x \end{cases}$$

 $\mu(1) = 1$ 复杂度?

《四》《圖》《意》《意》

 $\mu(1) = 1$ 复杂度?

反演公式

$$F(n) = \sum_{d|n} G(d)$$

$$G(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d})$$

直观理解? 容斥原理

一些习点

Thanks

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1\\ 0 & n>1 \end{cases}$$

反演的证明?

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1\\ 0 & n>1 \end{cases}$$

反演的证明?

$$\begin{split} & \sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) \\ & = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} F(k) \\ & = \sum_{k|n} G(k) \sum_{d|\frac{n}{t}} \mu(d) \end{split}$$

可见点

有个人站在原点向第一象限看去, 求在坐标范围 $[1,n] \times [1,m]$ 间的可见整点数



4 0 5 4 1 1 5 5 4 5 5 5

可见点

有个人站在原点向第一象限看去, 求在坐标范围 $[1,n] \times [1,m]$ 间的可见整点数

hint

μ 函数的常见用法:

$$[gcd(a,b) = 1] = \sum_{d|gcd(a,b)} \mu(d) = \sum_{d|a,d|b} \mu(d)$$

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) [\frac{n}{d}] [\frac{m}{d}]$$

快速求解

$$\sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right] \left[\frac{m}{d} \right]$$

快速求解

$$\textstyle\sum_{d=1}^n \mu(d) \big[\frac{n}{d}\big] \big[\frac{m}{d}\big]$$

hint

$$\forall j \in \left[i, \left[\frac{n}{\left[\frac{n}{i}\right]}\right]\right], \left[\frac{n}{j}\right] \equiv k$$



另类 μ 函数

也许你们听说过集合逆卷积

$$\mu(S) = \sum_{S' \subset S} (-1)^{|S'|}$$

$$\sum_{S'\subset S}\mu(S')=\begin{cases} 1 & S=\varnothing\\ 0 & S\neq\varnothing \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(S) = \sum_{S' \subset S} G(S') \\ G(S) = \sum_{S' \subset S} \mu(S') F(S - S') \end{cases}$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B >

二项式反演

$$\begin{cases} F(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} G(i) \\ G(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} F(i) \end{cases}$$

证明核心:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{i}{m} = \begin{cases} 1 & n=m\\ 0 & n>m \end{cases}$$

Math in OI (Discrete Part)

错位排列

求n个元素恰好m个错位的方案数

求 n 个元素恰好 m 个错位的方案数

hint

$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} D_k = n!$$

$$D_m = m! \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Math in OI (Discrete Part)

映射计数

求m元集到n元集的满射方案数

映射计数

求m元集到n元集的满射方案数

hint

$$n^{m} = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} g(m, k)$$

$$g(m, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} {n \choose k} k^{m}$$

吴克文

逆元以及1 原根 大步小步

素性測

矩阵

高斯消元 行列式

行列式 生成树 矩乘

ゼル 复数 FFT

NTT

容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya i

康托展开

博弈论

一些刁声

Thanks

Section 2

矩阵

定义

线性无关:一组向量 $\{v_k\}$,如果不存在非全零数列 $\{a_k\}$,使

得 $\sum a_i v_i = 0$,则称这组向量线性无关

线性相关:存在非全零数列 $\{a_k\}$,使得 $\sum a_i v_i = 0$

example

(1,0),(1,2) 线性无关 (1,0,1),(2,3,3),(0,3,1) 线性相关

线性基

基底

基底:一组可以生成整个线性空间的线性无关组(任何向量均 可由基底线性表出)

 $\mathbb{R}^n \in n$ 维线性空间,它的一组基底由 n 个线性无关的向量组 成

基向量的选取有很多种

example

以 \mathbb{R}^3 为例, (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) 是常见的选法 $(e,0,\pi),(2,3,3),(0,0,976528)$ 同样也是一组基

イロト (例) (注) (4 注) (注)

特殊线性空间

 \mathbb{F}_p 在 \mathbb{F}_p^n 上的乘法作用生成的线性空间 特别的, p=2时, 乘法表现为 and 运算, 加法表现为 xor 运算

example

0b101,0b011,0b001 是一组 F₂ 的一组基

给出一组 Q 上线性方程组, 求出它的一组解或判断无解

模板题

<ロト <部ト < 重ト < 重ト < 重ト < 1000 × 100

模板题

给出一组 Q 上线性方程组, 求出它的一组解或判断无解

模板题+

给出一组模线性方程组,求出它的一组解或判断无解

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基 **高斯消元** 行列式

行列式 生成树 矩乘 卷积

复数 FFT NTT

一些习题

模板题

给出一组 Q 上线性方程组,求出它的一组解或判断无解

模板题+

给出一组模线性方程组,求出它的一组解或判断无解

模板题 ++

给出一组 Q 上一组线性关系, 求出它的线性基

简单题

给出一个矩阵 $A_{n\times n}$, 求出它的逆矩阵或判断不可逆

-些结论

行向量线性无关 ⇒ 矩阵有右逆 列向量线性无关 ⇒ 矩阵有左逆 方阵⇒行向量组线性无关等价于列向量组线性无关

定义

行列式仅对方阵有定义

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i} A_{i,\pi(i)}$$

物理解释: n 维空间立方体的有向体积

人力算法

二阶矩阵: ad - bc(平行四边形面积)

三阶矩阵:看我画图 TAT

行列式

-些结论

某一行加上另一行的若干倍: 行列式不变

某两行交换: 行列式变号 某一行乘 k: 行列式乘 k矩阵转置: 行列式不变

某一列(行)分裂:行列式分裂求和

均可以用粗略的物理直观解释

-些结论

某一行加上另一行的若干倍: 行列式不变

某两行交换: 行列式变号 某一行乘 k: 行列式乘 k矩阵转置: 行列式不变

某一列(行)分裂:行列式分裂求和

均可以用粗略的物理直观解释

计算机算法

初等行列变换将矩阵消至上三角 记录过程中的变更信息 上三角矩阵的行列式求法?

行列式

给出一个 n 阶整系数矩阵的第一行, 问是否有可能填充剩余 位置, 使得行列式为 K, 并给出一个可行方案

 $n < 200, K < 10^{18}$

基尔霍夫矩阵与生成树定理

S = D - A, D 为度数矩阵, A 为邻接矩阵, S 为基尔霍夫矩阵 无向图的生成树个数即为 S 任一个主子式的行列式

有向版本

S = D - A, D 为出度矩阵, A 为邻接矩阵, S 为基尔霍夫矩阵 有向图以i 为根的内向树个数即为主子式 S_i 的行列式

生成树

简单题

 $M \times M$ 的格状矩形,每个格子是房间或是柱子。相邻的格子 之间都有墙隔着 你想要打通一些墙,使得所有房间能够互相到达。在此过程 中, 你不能把房子给打穿, 或者打通柱子(以及柱子旁边的墙) 同时, 你希望任意两个房间之间都只有一条通路 统计一共有多少种可行的方案,对 10^9+7 取模

N, M < 10

简单题

 $M \times M$ 的格状矩形,每个格子是房间或是柱子。相邻的格子 之间都有墙隔着

你想要打通一些墙,使得所有房间能够互相到达。在此过程 中, 你不能把房子给打穿, 或者打通柱子(以及柱子旁边的墙) 同时, 你希望任意两个房间之间都只有一条通路 统计一共有多少种可行的方案,对 10^9+7 取模

N, M < 10

简单题+

方案数对 0 取模

 $N, M < 10, Q < 10^{18}$

特殊矩阵

- 稀疏矩阵 ⇒ ijk 循环的顺序
- 循环矩阵 $\Rightarrow O(N^3)$?
- 对称矩阵 ⇒ 乘一半
- 分块矩阵 ⇒ 分块乘法

Math in OI (Discrete Part)

简单题

给出一个有向图, 启始点为 1, 求 k 步走到 n 号点的方案数

简单题

给出一个有向图, 启始点为 1, 求 k 步走到 n 号点的方案数

简单题+

给出一个有向图, 启始点为 1, 求 k 步内走到 n 号点的方案数

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > -

简单题

给出一个有向图, 启始点为 1, 求 k 步走到 n 号点的方案数

简单题+

给出一个有向图, 启始点为 1, 求 k 步内走到 n 号点的方案数

简单题 ++

给出一个有向图, 启始点为1, 边权为转移概率, 保证 $\sum_{i} p_{i,i} = 1$, 求第 k 步在 n 号点的概率

递推求解

$$A_n = uA_{n-1} + vA_{n-2}, \ \ R A_N A_N < 10^{18}$$

递推求解

递推求解+

$$A_n = \sum_{i}^{M} b_i \times A_{n-i} + A_{n-2}, \quad \Re A_N$$

 $N < 10^{18}, M < 100$

<ロト <部ト < 重ト < 重ト < 重ト < 1000 × 100

递推求解+

$$A_n = \sum_{i}^{M} b_i \times A_{n-i} + A_{n-2}, \quad \Re A_N$$

 $N < 10^{18}, M < 100$

递推求解 ++

$$A_n = \sum_{i}^{M} b_i \times A_{n-i} + A_{n-2}, \quad \Re A_N$$

 $N < 2^{100}, M < 200$

一些习点

Thanks

4日 8 4周 8 4 3 8 4 3 8 9 3

CH 定理

矩阵的特征多项式是它的零化多项式 $f(x) = |xI - A| \implies f(A) = 0$

有啥用啊

矩阵的线性表出 $N^2 \stackrel{}{\cong} N \stackrel{}{\cong} N$

Section 3



Math in OI (Discrete Part)

棣莫弗定理

$$x^{n} = 1 \Rightarrow x_{n}^{k} = \xi_{n}^{k} = e^{2\pi i \times \frac{k}{n}}$$

$$\xi_{n}^{k} \times \xi_{n}^{j} = \xi_{n}^{k+j} = \xi_{n}^{(k+j)\%n}$$

$$\overline{\xi_n^k} = \xi_n^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_n^k = 0$$

复数

多项式卷积

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

$$\vec{x} h(x) = f(x) \times g(x)$$

复数

hint

n 次多项式 ⇒ n+1 个点唯一插值表示 (回忆拉格朗日插值法) 卷积 ⇒ 点值乘法 系数表示法 ⇒ 点值表示法

 $f(x):(x_i,y_i), 0 \le i \le m+n$ $g(x): (x_i, y_i), 0 \le i \le m + n$ $h(x):(x_i,y_i\times y_i'),0\leqslant i\leqslant m+n$

复数

算法思路

f(x) 系数表示 $\Rightarrow f(x)$ 点值表示 g(x) 系数表示 $\Rightarrow g(x)$ 点值表示 点值相乘 $\Rightarrow h(x)$ 点值表示 $\Rightarrow h(x)$ 系数表示

选取精妙的点 使得从系数表示到点值表示,以及从点值表示到系数表示的 转换更快

系数转点值,不妨设 $n=2^m$

$$f_n(\xi_n^k) = a_0 + a_1 \xi_n^k + a_2 \xi_n^{2k} + \dots + a_{2^{m-1}} \xi_n^{(2^m - 1)k}$$

$$= (a_0 + a_2 \xi_n^{2k} + \dots + a_{2^{m-2}} \xi_n^{(2^m - 2)k}) +$$

$$\xi_n^k (a_1 + a_3 \xi_n^{2k} + \dots + a_{2^{m-1}} \xi_n^{(2^m - 2)k})$$

$$= (a_0 + a_2 \xi_{\frac{n}{2}}^k + \dots + a_{2^{m-2}} \xi_{\frac{n}{2}}^{tk}) +$$

$$\xi_n^k (a_1 + a_3 \xi_{\frac{n}{2}}^k + \dots + a_{2^{m-1}} \xi_{\frac{n}{2}}^{tk})$$

$$= f_{\frac{n}{2}} (\xi_{\frac{n}{2}}^k) + \xi_n^k \times g_{\frac{n}{2}} (\xi_{\frac{n}{2}}^k)$$

这为啥是 N log N??

点值转系数 (IDFT),同样假设 $n=2^m$ 记矩阵 $F = [\xi_n^{ij}]_{0 \le i, i \le n-1}$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi_n^1 & \xi_n^2 & \cdots & \xi_n^{n-1} \\ 1 & \xi_n^2 & \xi_n^4 & \cdots & \xi_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n^{n-1} & \xi_n^{2(n-1)} & \cdots & \xi_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

则有

$$F\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\xi_n^0) \\ f(\xi_n^1) \\ \vdots \\ f(\xi_n^{n-1}) \end{bmatrix}$$

故系数矩阵即为 $F^{-1}X$

$$F^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \xi_n^{n-1} & \xi_n^{n-2} & \cdots & \xi_n^1\\ 1 & \xi_n^{n-2} & \xi_n^{n-4} & \cdots & \xi_n^{n-2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \xi_n^{n-(n-1)} & \xi_n^{n-2(n-1)} & \cdots & \xi_n^{n-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

可以画一个 F5 验证一下

直观理解 \overline{F} ?

除了第一行,后面的行成对交换!

$$\vec{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}, 则 \overline{F} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \\ \vdots \\ v_1 \end{bmatrix}$$

所以类似地对换 $f(\xi_n^k)$, 将它当作系数做点值转换 (IDFT), 最 后再对换回即可

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

 $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$
求 $h(x) = f(x) \times g(x)$
系数对 $p = k2^t + 1$ 取模 (p 是素数)

57 / 102

多项式卷积

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

 $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$
求 $h(x) = f(x) \times g(x)$
系数对 $p = k2^t + 1$ 取模 (p 是素数)

hint

依然将 n 扩充为 2 的次幂 把原根 a 当作 ξ_n^1 即可 $\xi_n^k = a^{(p-1)\frac{k}{n}}$ n次单位复根 $\Rightarrow F_p$ 上原 n 次单位根 然后跟 FFT 一毛一样 (注意除 n 时使用逆元)

若多项式系数不是很大,可以使用 NTT 代替 FFT

Math in OI (Discrete Part)

K 进制大整数乘法

给出两个 K 进制的大整数, 求他们乘法后的 L 进制表示

K进制大整数乘法

给出两个 K 进制的大整数, 求他们乘法后的 L 进制表示

卷积式 DP 转移

$$H_n = \sum F_i \times G_{n-1-i}$$

构造生成函数
$$f(x) = \sum F_i x^i$$
 和 $g(x) = \sum G_i x^i$

求 $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x+i)$ 的系数表示

类阶乘函数

求
$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x+i)$$
的系数表示

hint

分治 FFT $O(N \log^2 N)$

集合取数

给定整数集合 S, 试问有多少中从 S 中取出 n 个数 (可重复) 的方案, 使选出的数的积对 p 取模为 x, 方案数对 1004535809 取模

 $p < 8000, n < 10^9$

集合取数

给定整数集合 S, 试问有多少中从 S 中取出 n 个数 (可重复) 的方案, 使选出的数的积对 p 取模为 x, 方案数对 1004535809 取模

$$p < 8000, n < 10^9$$

hint

 $1004535809 = 479 \times 2^{21} + 1$ 利用原根将乘法转化为加法

些结论

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m} \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \tag{5}$$

$$m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1} \tag{6}$$

吴克文

计数

n 个人坐在 m 张凳子上 m 张凳子形成圆环 任意两个人的环上距离不小于 k, 求方案数

PS: 循环翻转视为不同 $0 < n, m < 10^6, 0 < k < 100, 多测$

example

2 5 1

Ans=5

イロト (例) (注) (4 注) (注)

弱化问题

n 个人坐在 m 张凳子上 m 张凳子排成一列

任意两个人的距离不小于 k, 求方案数

弱化问题

n 个人坐在 m 张凳子上 m 张凳子排成一列 任意两个人的距离不小于 k, 求方案数

hint

考虑前 n-1 个人, 并删去他后面的 k 张椅子 方案数即为

$$\binom{m-(n-1)k}{n}$$

素性測试 反演

线性基

行列式生成树

生成树矩乘

卷积 ^{复数} FFT

FFT NTT

计数原理 容医原理

生成函数 Burnside 与 Polya 计

博弈论

一些习题

hint

对干环的情况,考虑破环成链 取长为k+1的连续椅子 其中最多能放一个人

若放了一个人,则问题转化为m-2k-1的链上放n-1个人 若未放人,则问题转化为m-k-1的链上放n个人

$$Ans = (k+1) \binom{m-2k-1-(n-2)k}{n-1} + \binom{m-k-1-(n-1)k}{n}$$

Trick: 一个人的时候 Ans = m

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B

Math in OI (Discrete Part)

栈操作

有n个人栈操作和m个弹栈操作,求合法的操作序列方案数

Fibonacci 数列

$$A_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ A_{n-1} + A_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

$$A_n = \frac{-\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}$$

More Example

$$A_n = 5A_{n-1} - 6A_{n-2}$$

$$A_n + 2A_{n-1} + 3A_{n-2} = 7$$

$$A_n + 3A_{n-1} + 9A_{n-2} = 4^n$$

$$h_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \times h_{n-1-i}$$

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$
 (7)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \tag{8}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{9}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \tag{10}$$

正 n 边形顶点连线, 连线仅在顶点处相交 划分为 n-2 个三角形的方案数

n 个节点的有根二叉树形态数

Math in OI (Discrete Part)

hint

考虑 +-+-+ 与-+-++ 的一一对应关系

$$Ans = \binom{n}{n/2} - \binom{n}{n/2+1}$$

生成函数

从 (0,0) 向右向上走到 (n,n)不穿越对角线的方案数

从(0,0)向右向上走到(n,m)不穿越 y = x 的方案数

从 (0,0) 向右向上走到 (n,m)不穿越 y = x 和 y = x + m - n 的方案数

Math in OI (Discrete Part)

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试 反演

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 **生成函数** Burnside 与 Polya 计数 康托展开

一些习题

TO 1

求满足以下要求带出n个物品的方案数

A,D:0 或 1

B:0 或 1 或 2

C:0 或 1 或 2 或 3

E: 奇数个

F: 偶数个 H:3 的倍数个 G:4 的倍数个

吴克文

致以比 逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 I

一此习题

Thanks

Burnside 引理

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{|G|} c_1(\pi_i)$$

例

2*2 方格 01 染色问题,循环同构

Burnside 引理

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{|G|} c_1(\pi_i)$$

例

2*2 方格 01 染色问题,循环同构 2*2 方格 01 染色问题,循环翻折同构

Burnside 与 Polya 讨 康托展开

一些习题

Thanks

吴克文

Polya 计数

为解决染色问题中,Burnside 运算量过大的问题,改进提出 Polya 计数原理

$$S = \frac{1}{|G'|} \sum_{i=1}^{|G'|} M^{c(\pi_i)}$$

例

2*2 方格 01 染色问题,循环同构

2*2 方格 01 染色问题,循环翻折同构

Burnside 与 Polya 计数

康托展升

—此习期

프리

Math in OI (Discrete Part)

简单题-

n 元环 m 染色, 循环翻折同构, 求方案数

 $n < 1000, m < 10^5$

4 0 5 4 1 1 5 5 4 5 5

简单题-

n 元环 m 染色,循环翻折同构,求方案数

 $n < 1000, m < 10^5$

简单题

n 元环 m 染色,循环翻折同构,求方案数

 $n < 10^{12}, m < 10^5$

Burnside 与 Polya 计数

イロト (例) (注) (4 注) (注)

吴克文

遊元以及其他 原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高斯消式 行列式 生成树 矩乘

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与

Burnside 与 Polya 计数 康托展开

博弈论

一些习是

Thanks

简单题+

n 元环 m 染色,循环翻折同构 同时给出 k 组限制 a_i,b_i ,要求不能有相邻的颜色为 a_i,b_i ,求 方案数

 $n < 10^{12}, m < 100$

康托展开

求排列 a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 的排名 T $T = \sum rank(a_i) \times (i-1)!$

 $rank(a_i)$ 表示 $a_1 \sim a_i$ 中 a_i 的排名 (从 0 开始)

矩阵

高斯消疗 行列式 生成树

卷积 ^{复数} FFT

FFT NTT

行 数 原 基 容 斥 原 理 生 成 函 数

Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

一些习题

康托展开

求排列 a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 的排名 T $T = \sum rank(a_i) \times (i-1)!$

 $rank(a_i)$ 表示 $a_1 \sim a_i$ 中 a_i 的排名 (从 0 开始)

例

 $4, 2, 1, 3 \Rightarrow 3*3! + 1*2! + 0 + 0 = 20$

至于这个有什么用,大约可能会有那种求第 k 字典序大的题,然后可以和数据结构结合起来,用来二分 or 快速统计

吴克文

逆元以及3 原根 士忠小忠

素性測记 反演

矩阵 线性基 高斯消息

行列式 生成树 矩乘

を 复数 FFT

计数原理 容斥原理 生成函数

Burnside 与 Polya 计数 康托展开

博弈论

一些习是

Thanks

Section 5

博弈论

Nim 游戏

经典组合游戏, n 堆石头, 两个玩家轮流行动, 每次选择某一 堆石头,拿走数量大于0的石子,不能操作者输 问先手是否必胜

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

一些刁声

701 1

SG 函数

定义一个局面 X 经过一步操作后的所有后继局面集合为 S,则 $SG(X) = mex\{SG(Y_i)\}, Y_i \in S$,即第一个不在 S 中的自然数 若 X 由若干个独立的子游戏 X_1, \dots, X_n 组成,则

$$SG(X) = \bigoplus_{k=1}^{n} SG(X_k)$$

SG 函数

定义一个局面 X 经过一步操作后的所有后继局面集合为 S. 则 $SG(X) = mex\{SG(Y_i)\}, Y_i \in S$,即第一个不在 S 中的自然数 若X由若干个独立的子游戏 X_1, \dots, X_n 组成、则

$$SG(X) = \bigoplus_{k=1}^{n} SG(X_k)$$

解释

在 Nim 游戏中,单独一堆大小为 x 的石堆的局面为 x, SG(x) = x, 整个局面的 SG 值为所有石堆大小的异或和计算 出每个局面的 SG 值后,游戏便等效于 Nim 取石子游戏

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高行列战树 生成栗

卷积 ^{复数} FFT NTT

TT 数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya i

博弈论

一些习题

SG 函数的性质

- SG(X) 非 0 时,存在一个后继局面 Y,使得 SG(Y) = 0 分析:对 X 的某一个子游戏进行操作后 SG(X) 的改变,等效于异或上该子游戏 SG 值和小于该子游戏 SG 值的一个值。一定存在一个子游戏,SG 值二进制下最高位和SG(X) 相同,异或之后剩下的值,可以补一个一模一样的数字直接将它消去。于是我们找到了一个后继局面SG(Y) = 0
- SG(X) 为 0 时,对于所有后继局面 Y,都有 $SG(Y) \neq 0$ 分析:任意一个子游戏操作后,相当于 SG(x) 异或了两个不同的值。由于 SG(x) = 0,那么一定有 $SG(Y) \neq 0$

重要推论

必胜态:存在一步操作,变成必败态 必败态: 对于任意操作, 变成必胜态

而由 SG 函数的这两个性质, 我们可以得出, SG(X) 非 0 为必

胜态, SG(X) 为 0 时为必败态

吴克文

遊元以及其他 原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

Thanks

Crosses and Crosses

 $1 \times n$ 的棋盘上,两人轮流行动,每次选择一个空格子画 X。若某人操作后,出现了连续 $3 \cap X$,则他获得胜利问先手是否必胜

2 < n < 2000

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高所列式 生成树 生成乘

卷积 复数 FFT NIT

计数原理 ^{容斥原理} 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

=-1/6

N阶NIM和

从 m 堆石子中,每次选定不超过 n 堆,每堆至少取 1 个石子,不能取的人输 问先手是否必胜?

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成柄

卷积 gg fft NTT

円 女人 ホリ生 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计

博弈论

一些习题

Thanks

hint

每堆石子的 SG 函数依然是石子数量。

由于每次可以取 n 堆,此时一个局面的 SG 函数不再是简单的异或和。简单异或是每次只能取不超过 1 堆时的特殊情况。设二进制位最高位为第 k 位。石堆 $x_i = SG(x_i) = \sum b_{ij}2^j$,则对于局面 X

$$SG(X) = \sum_{i=0}^{k} ((\sum_{j=0}^{m} b_{ij}) \mod (n+1)) \times 2^{j}$$

也即在二进制下,每一位求和后对(n+1)取模

吴克文

逆元以及:原根 大步小步

反演

线性基 高斯消元 行列式 生成树

生成树 矩乘 光和

FFT NTT 计数原

> 生成函数 Burnside 与 Polya 计变 康托展开

一些习题

Thonks

Section 6

一些习题

吴克文

逆元以及其他 原根 大步小步

矩阵

线性基 高斯消元 行列式 生成树

> 卷积 复数 FFT

FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 唐托屈开

博弈论

一些刁角

Thanks

一道奇怪的题

给出 x, 试求出一个 y, 使得

$$\phi(x+y) = \phi(y)$$

 $x < 10^{18}$

吳克文

一道奇怪的题

给出 x, 试求出一个 y, 使得

$$\phi(x+y) = \phi(y)$$

 $x < 10^{18}$ $x < 10^{1000}$

を 复数 FFT NTT 十数原理 容斥原理

生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

イロト (部) (注) (注) (注)

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya i 康托展开

一些习题

轮状病毒

一个圆环上有N个点,每个点通过圆环与相邻的两个点直接相连,而且每个点与圆心有一条连边,试求生成树个数

 $N < 10^{18}$

吴克文

轮状病毒

一个圆环上有N个点,每个点通过圆环与相邻的两个点直接相连,而且每个点与圆心有一条连边,试求生成树个数

 $N < 10^{18}$

hint

 $F_i = 3F_{i-1} - F_{i-2} + 2$

不找规律怎么求行列式递推?

看我表演 TAT(挂黑板的话... 你们理解意思就行了

博弈论

吳克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步

矩阵 线性基 高斯消力

高斯消 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 康托展开

一些习题

Thanks

给出一个带权无向图, 求最小生成树的个数

N < 100, M < 1000 同权值边至多 10 条

吴克文

巨额奖金

给出一个带权无向图, 求最小生成树的个数

N < 100, M < 1000 同权值边至多 10 条

巨额奖金+

给出一个带权无向图, 求最小生成树的个数

N < 500, M < 100000

4日 5 4周 5 4 3 5 4 3 5 1

吳克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试 反演

矩阵 线性基 高斯式 行列 树 生成乘

卷积 ^{复数} FFT NTT

容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

开门

N个房间, M 把钥匙分散在不同房间,只要用了一下钥匙,就能被传送到那把钥匙对应的房间,但是钥匙一旦使用就会消失。现在你在1号房间,而任务是把所有的钥匙都用完,并且最后回到1号房间。你想知道完成这个任务有多少种方式两种完成任务的方式算作不同当且仅当使用钥匙的顺序不同(所有钥匙都是互不相同的)答案对 1000003 取模

N < 100, M < 200000

门开

N 个房间,M 把钥匙分散在不同房间,只要用了一下钥匙, 就能被传送到那把钥匙对应的房间,但是钥匙一旦使用就会 消失。现在你在1号房间,而任务是把所有的钥匙都用完,并 且最后回到1号房间。你想知道完成这个任务有多少种方式 两种完成任务的方式算作不同当且仅当使用钥匙的顺序不同 (所有钥匙都是互不相同的) 答案对 1000003 取模

N < 100, M < 200000

hint

有向图的欧拉回路个数

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数

Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

=:3/12

BEST 定理

有向图G的欧拉回路个数为

$$t(G,i) \times \prod_{j \in G} (r_j - 1)!$$

其中,如果 t(G,i) 是内向树的个数,那么 r_j 是 j 的出度;如果 t(G,i) 是外向树的个数,那么 r_j 是 j 的入度

proof

每个内向树决定了除了根节点以外其余节点的第一次出边, 之后所有的出边可以任意选择 对于根节点,可以强行选择某个方向作为第一次出边(不然会重复计某一个欧拉环路,只是起点不同而已) 由乘法原理得到结论成立。

吴克文

対化
 逆元以及其作
 原根
 大步小步

东任测1 反演

知阵 线性基 高斯消元

行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理

生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

一些习匙

Thanks

一道不知道放在哪里的题

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_i \& a_j$$
$$c_i = \sum_{i=1}^n a_i | a_j$$

给出 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 试构造 $\{a_n\}$ 或判断无解

Example

b: 6844

c: 16 22 10 10

a: 3 5 1 1

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基 高斯消元 行列式 生成树 年来

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Thombso

取模序列

给出序列 $\{A_n\}$ 每次询问 $L \subseteq R$

$$F(L,R) = \begin{cases} A_i & L = R \\ F(L,R-1) \mod A_R & L < R \end{cases}$$

$$n < 10^5, q < 10^5$$

吴克文

数论 逆元以及其他 原根 大步小步 素性测试

矩阵 线性基

高斯消元 行列式 生成树 矩乘

> 卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数

Burnside 与 Polya 计 康托展开

博弈论

一些习是

Thanks

取模序列

给出序列 $\{A_n\}$ 每次询问 $L \subseteq R$

$$F(L,R) = \begin{cases} A_i & L = R \\ F(L,R-1) \mod A_R & L < R \end{cases}$$

 $n < 10^5, q < 10^5$

hint

$$\forall n \geqslant m, \ n\%m \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} f(gcd(i,j))$$
$$f(n) = \max\{k, p^{k}|n\}$$

$$f(n) = \max\{k, p^k | n\}$$

吴克文

逆元以及其 原根 大步小步 素性測试 后演

线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 ^{容斥原理} 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Tl. . . . l. .

卷和

又是一个圆桌问题

n 对夫妇围坐在有 2n 个座位的圆桌旁,要求每个丈夫不能与自己的妻子或其他丈夫相对而坐,求方案数 (旋转同构)每个人的标号不同



吳克文

数化 逆元以及其他 原根 大步小步 素性測试

发性基 高斯消元 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Thonko

又是一个圆桌问题

n 对夫妇围坐在有 2n 个座位的圆桌旁,要求每个丈夫不能与自己的妻子或其他丈夫相对而坐,求方案数 (旋转同构)每个人的标号不同

hint

n 个丈夫固定后,剩余的即是一个错排 $2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot n! \cdot (\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!})$

求 $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$ 的整数部分对 M 取模的结果

吴克文

遊元以及其他原根 大步小步 素性測试

足件 线性基 高斯消元 行列式 生成树

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 ^{容斥原理} 生成函数 Burnside 与 Pol ^{康托展开}

一些习题

Thombso

我也不知道起什么名字

求 $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$ 的整数部分对 M 取模的结果

hint

构造数列使特征值为 ϕ , $\frac{1}{\phi}$ $A_{n+1} + A_{n-1}$ 来消除乘法因子的影响

吴克文

逆元以及其(原根 大步小步 素性測试 反演

矩阵 线性基 高斯列式 生成概 生乘

卷积 ^{复数} FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Thanke

我还是不知道起什么名字

圆桌边有 n 个座位,一种坐人的方案合法当且仅当没有人的 左右手边坐着人,求方案数 (循环同构视为相同)

 $n < 10^{12}$



A Funny Stone Game

游戏中,有 n 堆石子,被编号为 0 到 n-1。两名玩家轮流取石 子。每一轮游戏,每名玩家选取 3 堆石子 i, j, k ($i < j, j \le k$, 且至少有一枚石子在第 i 堆石子中), 从 i 中取出一枚石子, 并向 i, k 中各放入一枚石子 (如果 i = k 则向 k 中放入 2 颗石 子)。最先不能取石子的人输

石子堆的个数不会超过23,每一堆石子不超过1000个

hint

每一堆的每个石子之间都是相互独立的 将第i位每一个石子看做一个子游戏,每一步操作都是删除 该石子并在 i, k 位置各增加一个石子 这样分解后,在 n^3 计算每个子游戏的 SG 值 然后再在 $O(\sum a_i)$ 时间内计算整个 SG 值

吴克文

逆元以及其(原根 大步小步 素性測试 反演

足(件 线性基 高斯消式 行列式 生成树 矩乘

卷积 复数 FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数 Burnside 与 Polya 计 康托展开

一些习题

Thanke

这是一道真正的反演题

解出 xi

$$\forall i, \sum_{i=1}^{n} gcd(i,j)^{c} lcm(i,j)^{d} x_{j} \equiv b_{i} \mod p$$

吴克文

奴 化 逆元以及共作 [6]相

原根 大步小步 素性测试

反演

矩阵

高斯消元 行列式 生成树

生成权 矩乘

复数

FFT NTT

计数原理 容斥原理 生成函数

康托展开

博弈论

一些习题

Thanks

Thanks!