Math in OI (Continuous Part)

吴克文

2018 年 1 月 22 日

Section 1

高等数学基础

写在前面

虽然高数不应该称为 OI 的考察点
但是在各种赛事的考题中常有这部份的考察
此外，有很多算法需要建立在一定的高数基础上，比如 FFT，生成函数，概率期望等
所以我会尽量精简地介绍一些高数概念，希望能有助于大家理解

极限

记号：$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
通俗含义：当自变量 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$ 趋向于 A
严格定义：$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t.\forall|x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \epsilon$

特殊记号

$x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$

一些显然的公式

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)*g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to x_0} g(x)$$

注意事项

注意各个公式中 f, g 的要求
只能应用有限次!!!
$(1+\frac{1}{n})^n, n \to +\infty$

夹逼定理

在 x_0 的某邻域内有 $f(x) < g(x) < h(x)$，且
$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} h(x) = A$，则 $\lim_{x_0} g(x) = A$

连续

连续： $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$
左连续，右连续
连续是一个局部概念!!

一些显然的定理

连续函数的复合是连续的
初等函数是连续的

一些重要结论

$\lim_{+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{-\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim_0 \frac{\sin x}{x} = \lim_0 \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_0 \frac{\arctan x}{x} = \lim_0 \frac{e^x - 1}{x} = 1$

等价无穷小，等价无穷大，高阶小量

导数

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$(f(x) + g(x))' = ?$

$(f(x)g(x))' = ?$

$(f(x)/g(x))' = ?$

$(f(g(x)))' = ?$

奇怪函数

$f(x) = |x|$

$f(x) = \ln |x|$

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

洛必达定理

$x \to x_0, f(x), g(x) \to 0$，且 $x \to x_0, \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$，则

$x \to x_0, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

简单练习

$x \to 0, \frac{\cos x - 1}{\sin x}$

$x \to 0, \frac{e^{x^2} - 1}{x^3}$

$x \to 3, \frac{\tan x - 3}{x - 3}$

开根

给出实数 y 和整数 k，$|y| < 100$，试求 y 的 k 次根
y 最多两位小数

开根

给出实数 y 和整数 k，$|y| < 100$，试求 y 的 k 次根
y 最多两位小数

hint

三分，二分，牛顿迭代
精度与收敛速度

传送带

平面上两条不相交的线段 AB 和 CD，蚂蚁在 AB 上的移动速度为 v_1，在 CD 上移动速度为 v_2，在其他平面区域移动速度为 v_3，求从 A 到 D 的最短时间

传送带

平面上两条不相交的线段 AB 和 CD，蚂蚁在 AB 上的移动速度为 v_1，在 CD 上移动速度为 v_2，在其他平面区域移动速度为 v_3，求从 A 到 D 的最短时间

hint

多元函数的极值问题
凸 + 凸 = 三分套三分

不定积分与定积分

不定积分：求导的逆运算 $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
定积分：由黎曼和定义，具体不多赘述，OI 中仅需了解微积分基本定理

微积分基本定理

$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)' = f(x)$
$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 可理解为 $f(x)$ 的线下有向面积

一些结论

$\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$

$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$(分部积分)

$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

连续函数一定可积，不过不一定存在初等原函数 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

应用

计算面积：$\int y \, \mathrm{d}x$
计算旋转体体积：$\int \pi y^2 \, \mathrm{d}x$
Simpson 积分：多项式函数拟合一般函数 (交给讲计算几何的老师 XD)
期望概率：连续型随机变量

Buffed Buffer

给定 d 种食物，食物分两个类型：离散食物和连续食物离散食物只能按份供应，每种食物有一个质量 w 连续食物可以食用任意质量每种食物有一个初始美味值 t 和一个美味值衰减系数 D

对于一种离散食物，如果你吃了 N 份，那么获得的美味值为 $\sum_{i=1}^{N}(t-D(i-1))$

对于一种连续食物，如果你吃的质量为 X，那么获得的美味值为 $\int_0^X(t-D\cdot x)dx$

现在你必须吃总质量为 W 的食物，求最多获得的美味值 (可以为负)，无解输出 “impossible”

$d<250, W<10^4, 0<t, D<10^4$

hint

将离散与连续分开处理

离散型： $f[i][j] = \max_k f[i-1][j-kw_i] + \sum_{l=1}^{k}(t_i - D_i(l-1))$

$\Rightarrow$ 斜率优化

连续型：贪心先吃最大 t_i，直至其 t_i 降至次大，合并 m 个同美味值，新 $D' = 1/(\sum \frac{1}{D_i}) \Rightarrow$ 并联电路

多元函数与偏导数

多元函数：含有多个变量的函数 $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$
偏导数：固定其他维当作常数，对某一维进行求导 (严格定义等不做具体介绍)，记号为 $\frac{\partial f}{\partial x}$(读作 ruang)

例

$$f(x,y,z)=x^2y+z^x+\cos(yz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+z^x\ln z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-z\sin(yz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=(x-1)z^x-y\sin(yz)$$

函数极值

一元函数：$f'(x) = 0$
多元函数：$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$

注意，以上求解所得为驻点，是否为极值点 (甚至最值点) 需另行判断
并非所有函数都可求导，以及会存在有瑕点的函数，遇到时不可盲目套用公式

简单题

实现三种操作:
1. 在平面加入一条直线
2. 删除一条已有直线
3. 求一个点到平面所有之间的距离平方和最小，并输出

$n < 10^5$

简单题

实现三种操作:
1. 在平面加入一条直线
2. 删除一条已有直线
3. 求一个点到平面所有之间的距离平方和最小，并输出

$n < 10^5$

hint

(x, y) 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离平方: $\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$
求函数极值 $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$
动态维护 A, B, C, D, E, F

线性回归

给出平面上 n 个点，求最小均方误差线性拟合直线

$n < 10^5$

线性回归

给出平面上 n 个点，求最小均方误差线性拟合直线

$n < 10^5$

hint

$y = ax + b \Rightarrow \min_{a,b} \sum (y_i - ax_i - b)^2$

$a = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$

拉格朗日乘数法

求解多元函数的最优值 (最大化或最小化)$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
并满足约束条件 $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$

基本解法

定义 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) =$
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum \lambda_i g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，求解 h 的极值

例

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2,\quad x+y+z=1,\quad 100xyz=1$$

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy+yz+2z},\quad x^2+y^2+z^2=1$$

骑行川藏

有 n 段路，每段路长 s_i，并有参数 k_i, v_i'，该人在每段路上均匀速骑车。若骑车速度为 v，则阻力为 $F = k_i(v - v_i)^2$，设初始能量为 E，求到达目的地的最短时间

$n < 10^4, E < 10^8, s_i < 10^5, 0 < k_i < 1, -100 < v_i' < 100$

骑行川藏

有 n 段路，每段路长 s_i，并有参数 k_i, v_i'，该人在每段路上均匀速骑车。若骑车速度为 v，则阻力为 $F = k_i(v - v_i)^2$，设初始能量为 E，求到达目的地的最短时间

$n < 10^4, E < 10^8, s_i < 10^5, 0 < k_i < 1, -100 < v_i' < 100$

hint

$\min \sum \frac{s_i}{u_i}$

$E = \sum k_i(u_i - v_i)^2$

泰勒公式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x),$$

$R_n(x)$ 是余项 (可以理解为误差)，拉格朗日余项：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$$

泰勒公式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x),$$

$R_n(x)$ 是余项 (可以理解为误差)，拉格朗日余项：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$$

这有什么用?
你以为 C++ 之类的怎么算 $e^x, \cos, \sin, \ln$?

一些结论 (在 0 处展开)

$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$\sin x = \frac{-x}{1} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$\cos x = 1 + \frac{-x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

由此定义的 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$(1+x)^m = \sum_0^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$ (注意 m 为整数和小数时的区别)

$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{-x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$

注意各展开的收敛区间!!

反正切函数的应用

$$\arctan x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

由此可计算 $\pi = 4\arctan 1 = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots)$，但效率很低，利用公式

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

有 $\arctan p + \arctan q = \arctan \frac{p+q}{1-pq}$，令 $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{3}$，可计算 $\arctan 1$，且 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 的反正切运算更快

设 $\arctan \frac{1}{a} = \arctan \frac{1}{b} + \arctan \frac{1}{c}$，给定正整数 a，求正整数 b, c，使 $b + c$ 最小

$a < 60000$

hint

$a = \frac{bc-1}{b+c}$

记 $S = b + c$，则 $S(c) = c + a + \frac{a^2+1}{c-a}$

冷静分析：$c = a + \sqrt{a^2 + 1}$ 是最小值点

在附近枚举整数解

多项式

n 次多项式 f,$f(i) = \frac{i}{i+1}, i = 0, 1, 2, \cdots, n$，现在试问对于 F(n+1) 是否唯一确定

若确定，输出 $F(n+1)$（如果为整数, 直接输出；如果是分数 (p/q) p 与 q 互质，则输出 $pq(\%10^9+7)$；否则输出至小数点后 6 位）

否则输出 No

$n < 10^{15}$

拉格朗日插值法

n 次多项式可由 n+1 个不同点的取值唯一确定

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1} y_i \frac{\prod_{k\neq i}(x-x_k)}{\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}$$

待定系数法求 k 次前缀和

Section 2

概率期望

定义与结论

- 离散型: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} P(x \geqslant k)$
- 连续型: $\mathbb{E}(X) = \int u f(u)\,\mathrm{d}u = \int p(x \geqslant u)\,\mathrm{d}u$
- $\mathbb{E}(K) = K$
- $\mathbb{E}(KX) = K\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- 如果 X, Y 独立,$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

独立与相关

随机变量独立： $\forall a, b, p(x = a)p(y = b) = p(x = a, y = b)$
随机变量不相关： $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(Y)$

在 OI 中，一般不会特意考察这部分的知识
在此提一下独立性的要求强于相关性

全概公式

$P(A) = \sum P(A|B_i)$

全期望公式

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

Bayes 公式

$P(B|A)$ 表示 A 发生时 B 发生的概率
$P(A,B)$ 表示 AB 同时发生的概率

$$P(A,B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)}$$

地震后的幻想乡

n 个点 m 条边的简单连通无向图，每条边权是 $[0,1]$ 间的随机数，问最小生成树最大边的边权的期望

$n < 11$

地震后的幻想乡

n 个点 m 条边的简单连通无向图，每条边权是 $[0,1]$ 间的随机数，问最小生成树最大边的边权的期望

$n < 11$

hint

$\mathbb{E}(MSTe) = \int_0^1 p(\text{MSTe} \geqslant x)\,\mathrm{d}x$

状压概率 DP 计算 $p(\text{MSTe} \geqslant x)$

用小于 x 的边即可连通的概率为 $1 - \sum_S S(x) * (1-x)^k$

地震后的幻想乡 +

n 个点 m 条边的简单连通无向图，每条边权是 $[0, \sqrt[3]{3}]$ 间的随机数，服从分布 $f(x) = x^2$，问最小生成树最大边的边权的期望

$n < 11$

简单题

一个机器人在 $N \times M$ 的方阵第 s 行 t 列，每次会随机选择不动、向左、向右或向下四种方案 (不能越过边界)，求它走到最后一行的期望步数

$n, m < 1000$

简单题

一个机器人在 $N \times M$ 的方阵第 s 行 t 列，每次会随机选择不动、向左、向右或向下四种方案 (不能越过边界)，求它走到最后一行的期望步数

$n, m < 1000$

hint

记 $E[i][j]$ 表示从 (i, j) 走到最后一行的期望步数
倒序递推求解
对于每一行，记 $E[i][1] = x$，向右推至 $E[i][m]$ 得到方程反解 x

自动机

自动机 (OI 中一般考虑有限状态自动机)：具有有限状态，概率转移的一个有向图
经常考察从起点到终点的期望步数
$E(x)$ 表示从起点到 x 的期望步数 or
$E(x)$ 表示从 x 到终点的期望步数?

吃鱼

一个池塘有 n 条鱼，每天随机会有两条鱼 i, j 相遇，i 吃掉 j 的概率为 A_{ij}，j 吃掉 i 的概率为 $1 - A_{ij}$，分别求出每条鱼存活到最后的概率

$n < 19$

吃鱼

一个池塘有 n 条鱼，每天随机会有两条鱼 i, j 相遇，i 吃掉 j 的概率为 A_{ij}，j 吃掉 i 的概率为 $1 - A_{ij}$，分别求出每条鱼存活到最后的概率

$n < 19$

hint

状压 DP+ 暴力转移

Section 3

一些习题

奇怪的实验

地上有无数条彼此平行，且间距为 w 的直线，小明总是在投掷一枚长度为 L 的针，求问：扔 k 次针，针碰到线的次数的数学期望

$L < w < 300, k < 300$

奇怪的实验

地上有无数条彼此平行，且间距为 w 的直线，小明总是在投掷一枚长度为 L 的针，求问：扔 k 次针，针碰到线的次数的数学期望

$L < w < 300, k < 300$

hint

设下端点距上方直线距离 x，则概率为 $p(x) = 2\arccos\frac{x}{l}/\pi$
每次概率为 $\int_0^L \frac{p(x)}{w}\,\mathrm{d}x$

Cutting Cheese

一个边长为 100 的实心立方体中挖去 n 个不相交的球，要求将整个立方体沿水平方向切 $s-1$ 刀，使分出的 s 块体积相等，求这 s 块分别的厚度

$n < 10000, s < 100$

Cutting Cheese

一个边长为 100 的实心立方体中挖去 n 个不相交的球，要求将整个立方体沿水平方向切 $s-1$ 刀，使分出的 s 块体积相等，求这 s 块分别的厚度

$n < 10000, s < 100$

hint

二分答案 + 积分算体积

球缺公式：$\frac{\pi(3r-h)h^2}{3}$

取数问题

给出数列 $\{A_n\}$，试求出一个最大的正整数，使它整除至少一半的 A_k

$n < 10^5, A_k < 10^7$

醉醺醺的幻想乡—

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_ix^2+b_ix$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。每条边的流量限制为整数，求最小费用最大流

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

醉醺醺的幻想乡–

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_ix^2+b_ix$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。求最小费用最大流，输出精确到 0.1

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

醉醺醺的幻想乡–

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_ix^2+b_ix$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。求最小费用最大流，输出精确到 0.1

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

hint

流量微元 $\Rightarrow$ 瞬时代价 $2a_ix + b_i$
模拟每 Δx 的流量走向

醉醺醺的幻想乡-

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_i x^2 + b_i x$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。求最小费用最大流，输出精确到 0.1

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

醉醺醺的幻想乡-

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_ix^2+b_ix$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。求最小费用最大流，输出精确到 0.1

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

hint

流量微元 $\Rightarrow$ 瞬时代价 $2a_ix+b_i$
记 $f(x)$ 为总流量为 x 时的 S 到 T 最短路，答案即为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
这咋算....

正难则反

记 $x = g(y)$ 为 f 的反函数，X 为最大流，Y 为最大瞬时代价
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = X \times Y - \int g(y)\,\mathrm{d}y$ (几何直观)
$g(y)$ 表示最短路长不超过 y 时的最大流，算一下 $2a_i x + b_i \leqslant y$ 即可设置新流量上界，再跑个最大流即可知道 $g(y)$
$\int g(y)\,\mathrm{d}y$ 怎么算?

正难则反

记 $x = g(y)$ 为 f 的反函数，X 为最大流，Y 为最大瞬时代价
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = X \times Y - \int g(y)\,\mathrm{d}y$ (几何直观)
$g(y)$ 表示最短路长不超过 y 时的最大流，算一下 $2a_i x + b_i \leqslant y$
即可设置新流量上界，再跑个最大流即可知道 $g(y)$
$\int g(y)\,\mathrm{d}y$ 怎么算?
Simpson 积分!

醉醺醺的幻想乡

给出一个二分图，左 n 右 m 个点，源点向左测第 i 个点连边容量为 c_i，流量为 x 时费用为 $a_ix^2+b_ix$；左到右有些边，容量无穷且无费用；右边第 j 个点到汇点连边容量为 d_i，无费用。求最小费用最大流，输出最简分数

$0 \leqslant a_i, b_i, c_i, d_i \leqslant 3, a_i + b_i > 0, n, m < 100$ 中间边数不超过 1000

hint

考虑微元的增广过程，它会一直走某条路径，直至代价追上下一条
而每次的瞬时代价为线性函数
所以 f 的图像是分段线性的
暴力枚举左侧所有边对，算出分界点，每个分界点 y 处用分数费用流跑出 $g(y)$，即可知道函数图像
手动分段积分梯形面积算出 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Thanks!