

# 算法设计与分析

## 复杂度分析

# 目录

- 1 算法与时间复杂度的概念
- 2 算法的伪代码
- 3 函数的渐近阶
- 4 重要的函数类
- 5 常见运行时间概览

# 问题与解

## 问题描述

- 一组参数：用于刻画问题（集合、变量、函数、序列等），包括定义域和参数间关系的描述
- 解的定义：由优化目标或约束条件确定

# 问题与解

## 问题描述

- 一组参数：用于刻画问题（集合、变量、函数、序列等），包括定义域和参数间关系的描述
- 解的定义：由优化目标或约束条件确定

实例：对参数进行一次赋值 → 问题的一个实例

# 算法

## 定义 1 (算法)

算法  $A$  是一个有限的、定义明确的、可由计算机实现的指令序列，用于解决一类问题。

- 算法总是无歧义的
- 是执行计算、数据处理、自动推理及其他任务的规范

## 问题 $P$ 的算法 $A$

- 以  $P$  的任意实例作为  $A$  的输入，每一步计算都是确定性的
- $A$  在有限步内终止
- 总是输出正确的解

# 基本计算步骤与输入规模

深刻的分析建立在正确的简化之上。

基本计算步骤：抽象的原子操作

- 例如：比较、加法、乘法、交换、赋值.....

这是第一个重要的简化！

输入规模：刻画实例的规模，与实例编码串的长度成正比

- 例如：数组元素个数、调度任务数、顶点和边的数目

## 输入规模与基本计算步骤的示例 (1/2)

排序：数组  $a[n]$

- $n$ ：数组中元素的个数
- 元素比较与移动

查找：在数组  $a[n]$  中查找  $x$

- $n$ ：数组中元素的个数
- $x$  与  $a[i]$  之间的元素比较

整数乘法： $a \times b$

- $a$  和  $b$  的二进制长度，即  $m = \log_2 a$ ,  $n = \log_2 b$
- 按位乘法—— $a \times b$  需要  $mn$  次按位乘法

## 输入规模与基本计算步骤的示例 (2/2)

矩阵乘法:  $A_{n_1 \times n_2} \cdot B_{n_2 \times n_3}$

- $A$  和  $B$  的维度, 即  $n_1, n_2, n_3$
- 逐点乘法—— $A \cdot B$  需要  $n_1 n_2 n_3$  次逐点乘法
- 当  $n_1 = n_2 = n_3 = n$  时, 需要  $n^3$  次

图遍历:  $G = (V, E)$

- 顶点数和边数
- 标记变量的赋值



# 算法效率的度量

通过将基本计算步骤的数目表示为输入规模的函数，来刻画运行时间。

简洁、与机器无关的刻画方式

# 算法效率的度量

通过将基本计算步骤的数目表示为输入规模的函数，来刻画运行时间。

简洁、与机器无关的刻画方式

对于相同规模的不同输入，基本计算步骤的数目可能不同  $\Rightarrow$  函数可能不同

选择哪一个？

## 三种分析类型

“做最坏的打算，抱最好的希望。”

—Benjamin Disraeli

## 三种分析类型

“做最坏的打算，抱最好的希望。”

—Benjamin Disraeli

**最坏情况：**规模为  $n$  的所有输入中的最大运行时间

例：快速排序对  $n$  个元素排序最多需要  $n^2$  次比较

## 三种分析类型

“做最坏的打算，抱最好的希望。”

—Benjamin Disraeli

**最坏情况：**规模为  $n$  的所有输入中的最大运行时间

例：快速排序对  $n$  个元素排序最多需要  $n^2$  次比较

**最好情况：**规模为  $n$  的所有输入中的最小运行时间

例：当输入已排序时，插入排序只需要  $n$  次比较

## 三种分析类型

“做最坏的打算，抱最好的希望。”

—Benjamin Disraeli

**最坏情况：**规模为  $n$  的所有输入中的最大运行时间

例：快速排序对  $n$  个元素排序最多需要  $n^2$  次比较

**最好情况：**规模为  $n$  的所有输入中的最小运行时间

例：当输入已排序时，插入排序只需要  $n$  次比较

**平均情况：**规模为  $n$  的随机输入的期望运行时间

例：快速排序的期望元素比较次数约为  $n \log n$

## 关于最坏情况

算法：一些指数时间算法在实践中被广泛使用，因为最坏情况的实例似乎很少见。

- Linux 的 grep 命令

## 关于最坏情况

算法：一些指数时间算法在实践中被广泛使用，因为最坏情况的实例似乎很少见。

- Linux 的 `grep` 命令

密码学：要求困难实例能够被高效采样——仅具有高最坏情况复杂度的问题可能不适合作为困难性假设



# 关于最坏情况

算法：一些指数时间算法在实践中被广泛使用，因为最坏情况的实例似乎很少见。

- Linux 的 grep 命令

密码学：要求困难实例能够被高效采样——仅具有高最坏情况复杂度的问题可能不适合作为困难性假设

对算法的好消息 = 对密码学的坏消息

双赢的意味

## $A(n)$ 的公式

$A(n)$ : 平均情况复杂度

- 设  $X$  为规模为  $n$  的所有输入的集合,  $\Pr[x \in X] = p(x)$
- $t(x)$ : 算法  $A$  在输入  $x$  上执行的基本操作次数

$$A(n) = \sum_{x \in X} p(x)t(x)$$

在很多情况下, 我们假设输入服从均匀分布。

# 查找问题示例

## 查找问题

输入：升序数组  $a[n]$ ，待查找元素  $x$

输出： $j \in [0, \dots, n]$

- 若  $x \in a[n]$ ，则  $j$  是满足  $a[j] = x$  的第一个下标
- 否则， $j = 0$

基本操作： $x$  与  $a[i]$  之间的元素比较

# 顺序查找算法

## Search( $a[n], x$ )

输入：数组  $a[n]$ ，待查找元素  $x$

输出：下标  $j$

```
1: flag  $\leftarrow$  0
2: for  $j = 1$  to  $n$  do
3:   if  $a[j] == x$  then
4:     flag  $\leftarrow$  1
5:     break
6:   end if
7: end for
8: if flag == 0 then
9:    $j \leftarrow$  0
10: end if
11: return  $j$ 
```

示例：数组  $[1, 2, 3, 4, 5]$

- $x = 4$ ：需要 4 次比较
- $x = 2.5$ ：需要 5 次比较

## 最坏情况复杂度

共有  $2n + 1$  种不同类型的输入：

- 在数组内：  $x = a[1], x = a[2], \dots, x = a[n]$
- 在数组外：  $x < a[1], a[1] < x < a[2], \dots, a[n] < x$

最坏情况输入：  $x \notin A$  或  $x = A[n]$ ，需要  $n$  次比较

最坏情况复杂度：  $T(n) = n$

## 平均情况复杂度

假设  $\Pr[x \in A] = p$ , 且在每个位置上的分布概率相等。

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{p}{n} + (1-p)n \quad // \text{等差数列求和} \\ &= \frac{p(n+1)}{2} + (1-p)n \end{aligned}$$

当  $p = 1/2$  时:

$$T(n) = \frac{n+1}{4} + \frac{n}{2} \approx \frac{3n}{4}$$

# 目录

- 1 算法与时间复杂度的概念
- 2 算法的伪代码
- 3 函数的渐近阶
- 4 重要的函数类
- 5 常见运行时间概览

# 算法的伪代码

## 定义 2（伪代码）

对算法操作原理的非正式高层描述：使用程序设计语言的结构约定，但面向人类阅读而非机器阅读。

指令	符号
赋值	$\leftarrow$ 或 $:=$
分支语句	if...then...[else...]
循环结构	while, for, repeat until
转移语句	goto
返回语句	return
函数调用	Func()
注释	// 或 /* */



## 示例：求最大公约数的欧几里得算法

算法 2: EuclidGCD( $n, m$ )

输入:  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \geq m$

输出:  $\text{gcd}(n, m)$

```
1: while  $m > 0$  do  
2:    $r \leftarrow n \bmod m$   
3:    $n \leftarrow m$   
4:    $m \leftarrow r$   
5: end while  
6: return  $n$ 
```

演示:  $n = 36, m = 15$

循环	$n$	$m$	$r$
第 1 次	36	15	6
第 2 次	15	6	3
第 3 次	6	3	0
	3	0	0

输出: 3

# 插入排序示例

算法 3: Algorithm InsertSort( $A[n]$ )

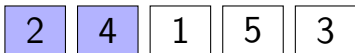
输入: 数组  $A[n]$

输出: 升序排列的  $A[n]$

```
1: for  $j \leftarrow 2$  to  $n$  do  
2:    $x \leftarrow A[j]$   
3:    $i \leftarrow j - 1$  {将  $A[j]$  插入  $A[1 \dots j - 1]$ }  
4:   while  $i > 0$  and  $x < A[i]$  do  
5:      $A[i + 1] \leftarrow A[i]$   
6:      $i \leftarrow i - 1$   
7:   end while  
8:    $A[i + 1] \leftarrow x$   
9: end for
```

$i$  是最终插入位置的左邻下标

## 插入排序演示



$j = 3, x = A[3] = 1$

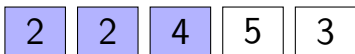
$i = 2, A[2] = 4$

$i > 0, x < A[2] \checkmark$



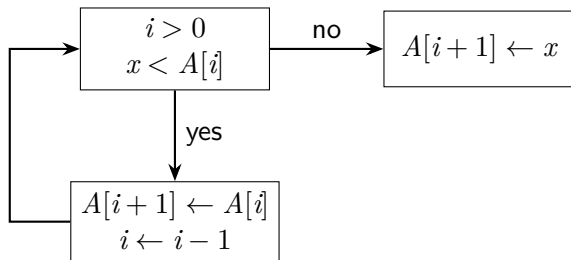
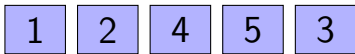
$A[3] = 4, i = 1, x = 1$

$i > 0, x < A[1] \checkmark$



$A[2] = 2, i = 0, x = 1$

$i > 0 \text{ ✗}$



## 二路归并排序示例

算法 4: Algorithm MergeSort( $A, l, r$ )

输入: 数组  $A[l, r]$

输出: 升序排列的  $A[l, r]$

```
1: if  $l < r$  then  
2:    $m \leftarrow \lfloor (l + r) / 2 \rfloor$   
3:   MergeSort( $A, l, m$ )  
4:   MergeSort( $A, m + 1, r$ )  
5:   Merge( $A, l, m, r$ )  
6: end if
```

MergeSort 是一个递归算法

- 在其代码内部调用自身

## 算法 A 的伪代码

### 算法 5: 算法 $\mathcal{A}$

输入: 数组  $P[0, \dots, n] \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

输出:  $y$

```
1:  $y \leftarrow P[0]$ ;  $power \leftarrow 1$   
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
3:    $power \leftarrow power \times x$   
4:    $y \leftarrow y + P[i] \times power$   
5: end for  
6: return  $y$ 
```

第 3–4 行计算了什么?

## 算法 A 的解释

循环	$power$	$y$
0	1	$P[0]$
1	$x$	$P[0] + P[1] \times x$
2	$x^2$	$P[0] + P[1] \times x + P[2] \times x^2$
3	$x^3$	$P[0] + P[1] \times x + P[2] \times x^2 + P[3] \times x^3$
		$\vdots$

输入  $P[0, \dots, n]$  是  $n$  次多项式  $P(x)$  的系数

算法 A 计算  $P(x) = \sum_{i=0}^n P[i]x^i$

# 目录

- 1 算法与时间复杂度的概念
- 2 算法的伪代码
- 3 函数的渐近阶
- 4 重要的函数类
- 5 常见运行时间概览



# 动机

我们使用定义在  $\mathbb{N}$  上的函数来刻画算法的运行时间或空间需求如何随输入规模增长。

# 动机

我们使用定义在  $\mathbb{N}$  上的函数来刻画算法的运行时间或空间需求如何随输入规模增长。

如何比较它们？ 如何分类它们？

# 动机

我们使用定义在  $\mathbb{N}$  上的函数来刻画算法的运行时间或空间需求如何随输入规模增长。

如何比较它们？如何分类它们？

第一个简化引出了另一个简化。现在，第二个简化登场了：考虑函数的阶而非其具体形式。

# 大 $O$ 记号

Paul Bachmann 和 Edmund Landau 发明了一族记号，称为大  $O$  记号，用于描述当输入趋向无穷大时函数的极限行为。

[Paul Bachmann 与 Edmund Landau 的图片]

- 也称为 Bachmann-Landau 记号或渐近记号
- 数学记号  $\rightarrow$  描述运行时间

# 大 $O$ 记号

## 定义 3 (大 $O$ )

$\exists c > 0, \exists n_0$ , 使得  $\forall n \geq n_0$ :

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$f$  渐近地被  $g$  从上界定 (相差常数因子)

$$f(n) = O(g(n))$$

## 极限定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

## 一些说明

大  $O$  记号根据增长率对函数进行分类：具有相同增长率的不同函数可以用相同的  $O$  记号表示。

- 使用字母  $O$  是因为函数的增长率也被称为函数的阶
- 存在很多  $(c, n_0)$  对，找到一对即可
- 对于有限值  $n \leq n_0$ ，不等式可能不成立
- 常数函数可以写成  $O(1)$

## 关于大 $O$ 的更多内容

$f(n) = O(g(n))$ :  $f(n)$  的阶小于等于  $g(n)$  的阶

典型用法: 给出上界

- 插入排序对  $n$  个元素排序需要  $O(n^2)$  次比较

例 1:  $f(n) = n^2 + n$

- $f(n) = O(n^2) \leftarrow$  取  $c = 2, n_0 = 1$
- $f(n) = O(n^3) \leftarrow$  取  $c = 1, n_0 = 2$

例 2:  $f(n) = 32n^2 + 17n + 1$

- $f(n) = O(n^2) \leftarrow$  取  $c = 50, n_0 = 1$
- $f(n)$  也是  $O(n^3)$
- $f(n)$  既不是  $O(n)$  也不是  $O(n \log n)$

# 大 $O$ 的局限性

大  $O$  记号只提供函数增长率的上界。

与大  $O$  记号相关的还有几个记号，使用符号  $o$ 、 $\Omega$ 、 $\omega$  和  $\Theta$ ，用于描述渐近增长率的其他类型的界。



# 大 $\Omega$ 记号

## 定义 4 (大 $\Omega$ )

$\exists c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0:$

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

$f$  渐近地被  $g$  从下界定

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

## 极限定义

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$$

# 大 $\Omega$ 示例

$f(n) = \Omega(g(n))$ :  $f(n)$  的阶大于等于  $g(n)$  的阶

典型用法: 给出下界

- 任何基于比较的排序算法在最坏情况下都需要  $\Omega(n \log n)$  次比较

无意义的陈述: 任何基于比较的排序算法在最坏情况下至少需要  $O(n \log n)$  次比较。

- $O(\cdot)$  不能给出下界

例:  $f(n) = n^2 + n$

- $f(n) = \Omega(n^2) \leftarrow c = 1, n_0 = 1$
- $f(n) = \Omega(100n) \leftarrow c = 1/100, n_0 = 1$

# 紧界

大  $O$  和  $\Omega$  记号最初用作算法代价增长的紧上界（或紧下界）。  
但是，根据定义：

$g(n)$  可能是一个松的上界（或下界）。

# 紧界

大  $O$  和  $\Omega$  记号最初用作算法代价增长的紧上界（或紧下界）。

但是，根据定义：

$g(n)$  可能是一个松的上界（或下界）。

为了更清楚地表明紧上界的作用，使用小  $o$  和  $\omega$  记号来描述不可能是紧的上界/下界。

# 小 $o$ 记号

## 定义 5 (小 $o$ )

$\forall c > 0, \exists n_0$ , 使得  $\forall n \geq n_0$ :

$$f(n) < c \cdot g(n)$$

$f$  渐近地被  $g$  支配:

$$f(n) = o(g(n))$$

## 极限定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

## 关于小 $o$ 的更多内容

$f(n) = o(g(n))$ :  $f(n)$  的阶严格小于  $g(n)$  的阶

典型用法:  $\log n = o(n)$

例:  $f(n) = n^2 + n$ ,  $f(n) = o(n^3)$

- $c \geq 1$ : 显然成立, 取  $n_0 = 2 \Rightarrow n^2 + n < cn^3$

$$cn^3 \geq n^3 = n^2((n-1) + 1) \geq n^2 + n, \quad \text{当 } n \geq n_0$$

- $0 < c < 1$ : 取  $n_0 > \lceil 2/c \rceil$ , 因为

$$cn \geq cn_0 \geq 2 \Rightarrow n^2 + n < 2n^2 \leq cn \cdot n^2 < cn^3$$

# 小 $\omega$ 记号

## 定义 6 (小 $\omega$ )

$\forall c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0:$

$$f(n) > c \cdot g(n)$$

$f$  渐近地支配  $g$ :

$$f(n) = \omega(g(n))$$

## 极限定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

## 小 $\omega$ 示例

$f(n) = \omega(g(n))$ :  $f(n)$  的阶严格大于  $g(n)$  的阶

典型用法:  $n = \omega(\log n)$

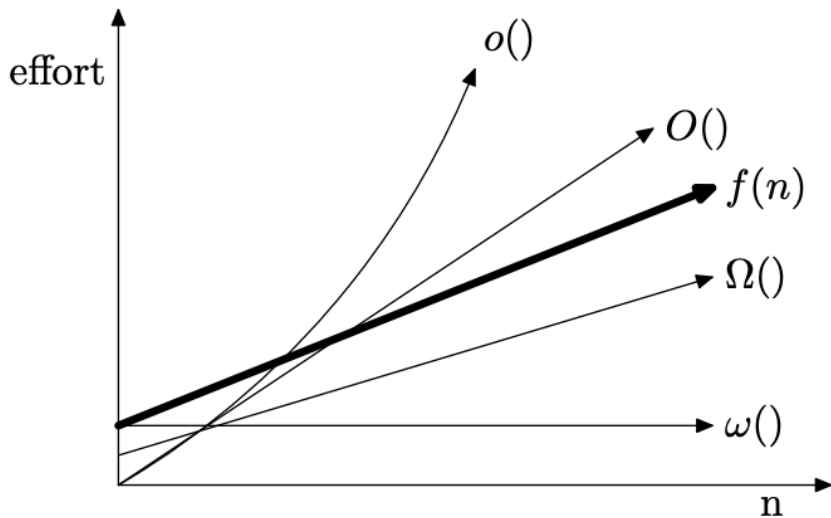
例:  $f(n) = n^2 + n$ ,  $f(n) = \omega(n)$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \infty$
- $f(n) \neq \omega(n^2)$ : 取  $c = 2$ , 不存在  $n_0$  使得  $\forall n \geq n_0$

$$cn^2 = 2n^2 < n^2 + n$$



## 这些记号之间关系的可视化



# 比较

记号	$\exists c > 0$	$\exists n_0$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$	含义
$O$	$\exists$	$\exists$	$\leq$	上界
$o$	$\forall$	$\exists$	$<$	非紧上界
$\Omega$	$\exists$	$\exists$	$\geq$	下界
$\omega$	$\forall$	$\exists$	$>$	非紧下界

虽然  $o$  和  $\omega$  不常用于描述算法，但我们定义  $O$  和  $\Omega$  的组合： $\Theta$ ，表示  $g(n)$  既是紧上界也是紧下界。

## 大 $\Theta$ 记号：旨在给出紧界

### 定义 7 (大 $\Theta$ )

$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists n_0$ , 使得  $\forall n > n_0$ :

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$f$  渐近地被  $g$  从上下两方界定

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

### 极限定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \quad (c > 0)$$

## 等价性证明

证明：由极限的定义  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0$ :

$$|f(n)/g(n) - c| < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < f(n)/g(n) < c + \varepsilon$$

## 等价性证明

证明：由极限的定义  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0$ :

$$|f(n)/g(n) - c| < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < f(n)/g(n) < c + \varepsilon$$

取  $\varepsilon = c/2 \Rightarrow c/2 < f(n)/g(n) < 3c/2$

- $\forall n \geq n_0, f(n) \leq (3c/2)g(n) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- $\forall n \geq n_0, f(n) \geq (c/2)g(n) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

## 等价性证明

证明：由极限的定义  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0$ :

$$|f(n)/g(n) - c| < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < f(n)/g(n) < c + \varepsilon$$

取  $\varepsilon = c/2 \Rightarrow c/2 < f(n)/g(n) < 3c/2$

- $\forall n \geq n_0, f(n) \leq (3c/2)g(n) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- $\forall n \geq n_0, f(n) \geq (c/2)g(n) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

这证明了  $f(n) = \Theta(g(n))$

## 关于大 $\Theta$ 的更多内容

$f(n) = \Theta(g(n))$ :  $f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$ ,  $f(n)$  和  $g(n)$  具有相同的阶  
典型用法:

- 归并排序对  $n$  个元素排序需要  $\Theta(n \log n)$  次比较

例 1:  $f(n) = n^2 + n$ ,  $g(n) = 100n^2$

- $f(n) = \Theta(g(n))$

例 2:  $f(n) = 32n^2 + 17n + 1$

- $f(n)$  是  $\Theta(n^2) \leftarrow$  取  $c_1 = 32$ ,  $c_2 = 50$ ,  $n_0 = 1$
- $f(n)$  既不是  $\Theta(n)$  也不是  $\Theta(n^3)$

# 素性测试示例

## 算法 6: PrimalityTest( $n$ )

输入: 奇整数  $n > 2$

输出: true 或 false

```
1:  $s \leftarrow \lfloor n^{1/2} \rfloor$   
2: for  $j \leftarrow 2$  to  $s$  do  
3:   if  $j$  整除  $n$  then  
4:     return false  
5:   end if  
6: end for  
7: return true
```



# 素性测试示例

## 算法 6: PrimalityTest( $n$ )

输入: 奇整数  $n > 2$

输出: true 或 false

```
1:  $s \leftarrow \lfloor n^{1/2} \rfloor$   
2: for  $j \leftarrow 2$  to  $s$  do  
3:   if  $j$  整除  $n$  then  
4:     return false  
5:   end if  
6: end for  
7: return true
```

如果  $n^{1/2}$  可在  $O(1)$  时间内计算, 基本操作是除法

# 素性测试示例

## 算法 6: PrimalityTest( $n$ )

输入: 奇整数  $n > 2$

输出: true 或 false

```
1:  $s \leftarrow \lfloor n^{1/2} \rfloor$   
2: for  $j \leftarrow 2$  to  $s$  do  
3:   if  $j$  整除  $n$  then  
4:     return false  
5:   end if  
6: end for  
7: return true
```

如果  $n^{1/2}$  可在  $O(1)$  时间内计算, 基本操作是除法

朴素素性测试的最坏情况复杂度是多少?

## 输入规模很重要：素性测试的情形

以  $n$  作为  $W(\cdot)$  的输入规模：

$$W(n) = O(n^{1/2}) \checkmark \quad W(n) = \Omega(n^{1/2}) \times$$

- 考虑形如  $3m$  的输入，则  $n^{1/2}$  不是下界

以  $\lambda$  ( $n$  的二进制表示长度) 作为  $W(\cdot)$  的输入规模：

$$W(n) = O(2^{\lambda/2}) \checkmark \quad W(n) = \Omega(2^{\lambda/2}) \checkmark$$

即  $W(\lambda) = \Theta(2^{\lambda/2})$

输入规模旨在刻画一类实例的规模。这使得该概念有意义。对于第一种情况，一类实例退化为单个实例，从而使最坏情况复杂度失去意义。

## 多变量的大 $O$ 记号

上界:  $f(m, n) = O(g(m, n))$ , 若  $\exists c > 0, m_0 \geq 0, n_0 \geq 0$ , 使得  $\forall n \geq n_0, m \geq m_0$ ,  $f(m, n) \leq c \cdot g(m, n)$

例:  $f(m, n) = 32mn^2 + 17mn + 32n^3$

- $f(m, n)$  既是  $O(mn^2 + n^3)$  也是  $O(mn^3)$
- $f(m, n)$  既不是  $O(n^3)$  也不是  $O(mn^2)$

典型用法: 广度优先搜索在有向图中寻找从  $s$  到  $t$  的最短路径需要  $O(m + n)$  时间

# 大 $O$ 记号的性质 (1/2)

传递性：函数的阶具有传递性

- $f = O(g) \wedge g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$
- $f = \Omega(g) \wedge g = \Omega(h) \Rightarrow f = \Omega(h)$
- $f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h) \Rightarrow f = \Theta(h)$
- $f = o(g) \wedge g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$
- $f = \omega(g) \wedge g = \omega(h) \Rightarrow f = \omega(h)$

## 大 $O$ 记号的性质 (2/2)

### 乘积

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$
- $f \cdot O(g) = O(fg)$

## 大 $O$ 记号的性质 (2/2)

### 乘积

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$
- $f \cdot O(g) = O(fg)$

### 求和

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$
- 这意味着  $f_1 = O(g) \wedge f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$ , 即  $O(g)$  是凸锥

## 大 $O$ 记号的性质 (2/2)

### 乘积

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$
- $f \cdot O(g) = O(fg)$

### 求和

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$
- 这意味着  $f_1 = O(g) \wedge f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$ , 即  $O(g)$  是凸锥

此性质可推广到  $f_i$  的有限复合

- 应用: 对于一个算法, 如果其每一步的运行时间都被  $h(n)$  上界, 且算法只包含常数步, 则总体复杂度为  $O(h(n))$



## 大 $O$ 记号的性质 (2/2)

### 乘积

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$
- $f \cdot O(g) = O(fg)$

### 求和

- $f_1 = O(g_1) \wedge f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$
- 这意味着  $f_1 = O(g) \wedge f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$ , 即  $O(g)$  是凸锥

此性质可推广到  $f_i$  的有限复合

- 应用：对于一个算法，如果其每一步的运行时间都被  $h(n)$  上界，且算法只包含常数步，则总体复杂度为  $O(h(n))$

常数乘法：设  $k > 0$  为常数，则：

- $O(kg) = O(g)$ , 若  $k \neq 0$
- $f = O(g) \Rightarrow kf = O(g)$  (乘法常数可省略)

# 目录

- 1 算法与时间复杂度的概念
- 2 算法的伪代码
- 3 函数的渐近阶
- 4 重要的函数类**
- 5 常见运行时间概览

## 重要的函数类（按增长速度递增）

- 常数:  $O(1)$
- 双对数:  $\log \log n$
- 对数:  $\log n$
- 多对数:  $(\log n)^c$ ,  $c > 1$
- 分数幂:  $n^c$ ,  $0 < c < 1$
- 线性:  $O(n)$
- 对数线性或拟线性:  $n \log n$
- 多项式:  $n^c$ ,  $c > 1$  (二次:  $n^2$ , 三次:  $n^3$ )
- 指数:  $c^n$ ,  $c > 1$
- 阶乘:  $n!$

## 常见函数的渐近界 (1/3)

技术工具：  $O$ 、 $\Omega$ 、 $\Theta$ 、 $o$ 、 $\omega$  的极限定义

多项式： 设  $f(n) = a_0 + a_1n + \cdots + a_dn^d$ ， 则  $f(n) = \Theta(n^d)$

证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1n + \cdots + a_dn^d}{n^d} = a_d > 0$$

例： 设  $f(n) = n^2/2 - 3n$ ， 则  $f(n) = \Theta(n^2)$

## 常见函数的渐近界 (2/3)

对数：对于任意常数  $a, b > 0$ ,  $\Theta(\log_a n) \sim \Theta(\log_b n)$

- 无需指定底数（假设底数为常数）

## 常见函数的渐近界 (2/3)

对数：对于任意常数  $a, b > 0$ ,  $\Theta(\log_a n) \sim \Theta(\log_b n)$

- 无需指定底数（假设底数为常数）

对数 **vs.** 多项式：  $\forall d > 0, \log n = o(n^d)$

## 常见函数的渐近界 (2/3)

对数：对于任意常数  $a, b > 0$ ,  $\Theta(\log_a n) \sim \Theta(\log_b n)$

- 无需指定底数（假设底数为常数）

对数 **vs.** 多项式：  $\forall d > 0$ ,  $\log n = o(n^d)$

证明：  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d = \infty$ ，且均可微分。应用洛必达（Bernoulli）法则：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{dn^{d-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{dn^d} = 0$$

## 常见函数的渐近界 (3/3)

指数 **vs.** 多项式:  $\forall c > 1, \forall d > 0, n^d = o(c^n)$



## 常见函数的渐近界 (3/3)

指数 **vs.** 多项式:  $\forall c > 1, \forall d > 0, n^d = o(c^n)$

证明: 不失一般性, 设  $d$  为正整数。  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d = \infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \infty$ , 且均可微分。反复应用洛必达法则直到分子为常数:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^d}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn^{d-1}}{c^n \ln c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(d-1)n^{d-2}}{c^n (\ln c)^2} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{c^n (\ln c)^d} = 0$$

## **Stirling 公式**

(以 James Stirling 命名，但最早由 Abraham de Moivre 提出)

# 阶乘函数

## Stirling 公式

(以 James Stirling 命名，但最早由 Abraham de Moivre 提出)

精确形式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

# 阶乘函数

## Stirling 公式

(以 James Stirling 命名，但最早由 Abraham de Moivre 提出)

精确形式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

简化形式:

$$\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n)$$

# 阶乘函数

## Stirling 公式

(以 James Stirling 命名, 但最早由 Abraham de Moivre 提出)

精确形式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

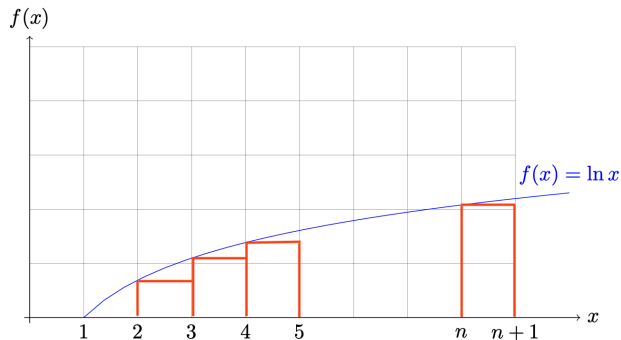
简化形式:

$$\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n)$$

- $n! = o(n^n)$
- $n! = \omega(2^n)$
- $\ln n! = \Theta(n \ln n)$  (通过积分法证明)

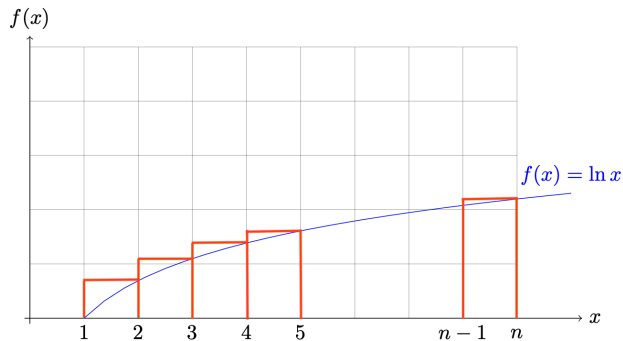
## 上界的证明

$$\begin{aligned}\ln n! &= \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln x \, dx \\ &= (x \ln x - x) \Big|_2^{n+1} = O(n \ln n)\end{aligned}$$



## 下界的证明

$$\begin{aligned}\ln n! &= \sum_{k=1}^n \ln k \geq \int_1^n \ln x \, dx \\ &= (x \ln x - x) \Big|_1^n = n \ln n - n + 1 = \Omega(n \ln n)\end{aligned}$$



## 应用：估计搜索空间的大小

回顾 ROI 优化问题：将  $m$  枚硬币分配到  $n$  个项目的不同投资方案数

$$\begin{aligned} C_{m+n-1}^m &= \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi(m+n-1)}(m+n-1)^{m+n-1} \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{m+n-1}\right)\right)}{\sqrt{2\pi m}m^m \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{m}\right)\right) \sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1} \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n-1}\right)\right)} \\ &= \Theta((1+\varepsilon)^{m+n-1}) \end{aligned}$$



# 取整函数

取整是指用一个近似相等但表示更短、更简单的数来替换原数

- 向下取整 (floor):  $y = \lfloor x \rfloor$ :  $y$  是不超过  $x$  的最大整数
- 向上取整 (ceiling):  $y = \lceil x \rceil$ :  $y$  是不小于  $x$  的最小整数

# 取整函数

取整是指用一个近似相等但表示更短、更简单的数来替换原数

- 向下取整 (floor):  $y = \lfloor x \rfloor$ :  $y$  是不超过  $x$  的最大整数
- 向上取整 (ceiling):  $y = \lceil x \rceil$ :  $y$  是不小于  $x$  的最小整数

例:  $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$ ,  $\lceil 2.6 \rceil = 3$ ,  $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$

# 取整函数

取整是指用一个近似相等但表示更短、更简单的数来替换原数

- 向下取整 (floor):  $y = \lfloor x \rfloor$ :  $y$  是不超过  $x$  的最大整数
- 向上取整 (ceiling):  $y = \lceil x \rceil$ :  $y$  是不小于  $x$  的最小整数

例:  $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$ ,  $\lceil 2.6 \rceil = 3$ ,  $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$

应用: 在  $A[n]$  中进行二分查找时, 中位数的下标是  $\lfloor n/2 \rfloor$ , 子问题的规模是  $\lfloor n/2 \rfloor$

# 取整函数的性质

**命题 1:**  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

**证明:** 分两种情况考虑:

①  $x$  是整数: 显然成立

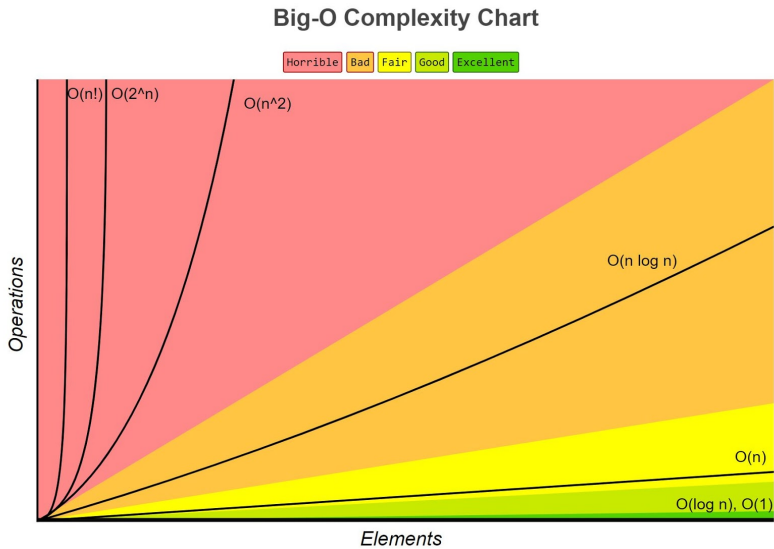
②  $\exists n \in \mathbb{Z}$  使得  $n < x < n + 1$ , 由取整函数的定义  $\Rightarrow \lfloor x \rfloor = n, \lceil x \rceil = n + 1$

**命题 2:** 设  $n, a, b \in \mathbb{Z}$ , 有:

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \quad \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

$$\left\lceil \frac{\lceil n/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$



# 目录

- 1 算法与时间复杂度的概念
- 2 算法的伪代码
- 3 函数的渐近阶
- 4 重要的函数类
- 5 常见运行时间概览

## 常见运行时间 (1/4)

常数时间:  $T(n) = O(1)$

- 判断一个二进制数是奇数还是偶数
- 数组  $A[i]$  的随机访问或哈希表（键值对）访问

## 常见运行时间 (1/4)

常数时间:  $T(n) = O(1)$

- 判断一个二进制数是奇数还是偶数
- 数组  $A[i]$  的随机访问或哈希表（键值对）访问

对数时间:  $T(n) = O(\log n)$

- 在大小为  $n$  的有序数组中查找: 二分查找



## 常见运行时间 (1/4)

常数时间:  $T(n) = O(1)$

- 判断一个二进制数是奇数还是偶数
- 数组  $A[i]$  的随机访问或哈希表（键值对）访问

对数时间:  $T(n) = O(\log n)$

- 在大小为  $n$  的有序数组中查找: 二分查找

分数幂时间:  $T(n) = n^{1/2}$

- 素性测试

## 常见运行时间 (2/4)

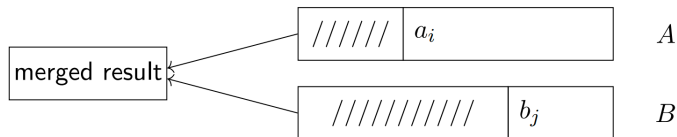
线性时间:  $T(n) = O(n)$ : 运行时间与输入规模成正比

- 归并: 将两个有序列表  $A = a_1, \dots, a_n$  与  $B = b_1, \dots, b_n$  合并成一个有序整体

## 常见运行时间 (2/4)

线性时间:  $T(n) = O(n)$ : 运行时间与输入规模成正比

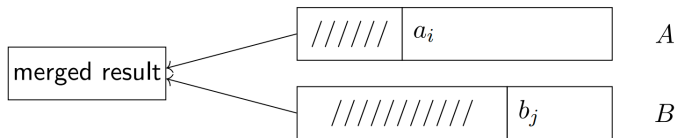
- 归并: 将两个有序列表  $A = a_1, \dots, a_n$  与  $B = b_1, \dots, b_n$  合并成一个有序整体



## 常见运行时间 (2/4)

线性时间:  $T(n) = O(n)$ : 运行时间与输入规模成正比

- 归并: 将两个有序列表  $A = a_1, \dots, a_n$  与  $B = b_1, \dots, b_n$  合并成一个有序整体



每次比较后, 输出列表的长度至少增加 1。当一个列表为空时, 另一个列表的剩余部分直接合并到结果列表。

- 上界:  $2n - 1$  vs. 下界:  $n$

## 常见运行时间 (3/4)

对数线性时间:  $T(n) = O(n \log n)$  (出现在分治算法中)

- 归并排序和堆排序是执行  $O(n \log n)$  次比较的排序算法
- 快速傅里叶变换 (FFT)

## 常见运行时间 (3/4)

对数线性时间:  $T(n) = O(n \log n)$  (出现在分治算法中)

- 归并排序和堆排序是执行  $O(n \log n)$  次比较的排序算法
- 快速傅里叶变换 (FFT)

二次时间:  $T(n) = O(n^2)$

- **最近点对**: 给定平面上  $n$  个点  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , 找出距离最近的一对。  $O(n^2)$  解法: 尝试所有点对

注:  $\Omega(n^2)$  似乎不可避免, 但这只是错觉。

## 常见运行时间 (3/4)

对数线性时间:  $T(n) = O(n \log n)$  (出现在分治算法中)

- 归并排序和堆排序是执行  $O(n \log n)$  次比较的排序算法
- 快速傅里叶变换 (FFT)

二次时间:  $T(n) = O(n^2)$

- 最近点对: 给定平面上  $n$  个点  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , 找出距离最近的一对。  $O(n^2)$  解法: 尝试所有点对

注:  $\Omega(n^2)$  似乎不可避免, 但这只是错觉。

三次时间: 枚举所有三元组

- 朴素矩阵乘法:  $A_{n \times n} \times B_{n \times n}$ : 每个  $c_{i,j}$  需要  $O(n)$  次乘法,  $C_{n \times n}$  共有  $n^2$  个元素

## 常见运行时间 (4/4)

多项式时间:  $T(n) = O(n^k)$

- 大小为  $k$  的独立集: 给定一个  $n$  个节点的图, 是否存在  $k$  个节点使得任意两个都不相邻?
- 枚举所有  $k$  个节点的子集然后检验
  - ▶ 检验  $S_k$  是否为独立集需要  $O(k^2)$  时间
  - ▶  $\#(S_k) = C_n^k \leq n^k/k!$
- $O(k^2 n^k/k!) = O(n^k)$  (当  $k = 17$  时为多项式时间, 但不实用)



## 常见运行时间 (4/4)

多项式时间:  $T(n) = O(n^k)$

- 大小为  $k$  的独立集: 给定一个  $n$  个节点的图, 是否存在  $k$  个节点使得任意两个都不相邻?
- 枚举所有  $k$  个节点的子集然后检验
  - ▶ 检验  $S_k$  是否为独立集需要  $O(k^2)$  时间
  - ▶  $\#(S_k) = C_n^k \leq n^k/k!$
- $O(k^2 n^k/k!) = O(n^k)$  (当  $k = 17$  时为多项式时间, 但不实用)

指数时间:  $T(n) = O(c^n)$

- 独立集: 给定一个图, 最大独立集的基数是多少?
- 枚举所有子集并检验:  $O(n^2 2^n)$

# 关于多项式运行时间

理想的缩放性质：当输入规模翻倍时，算法只应减慢某个常数因子  $c$ 。

# 关于多项式运行时间

理想的缩放性质：当输入规模翻倍时，算法只应减慢某个常数因子  $c$ 。

多项式运行时间满足上述缩放性质

- $T(n) = O(n^d) \leftarrow$  取  $c = 2^d$

# 关于多项式运行时间

理想的缩放性质：当输入规模翻倍时，算法只应减慢某个常数因子  $c$ 。

多项式运行时间满足上述缩放性质

- $T(n) = O(n^d) \leftarrow$  取  $c = 2^d$

我们称一个算法是**高效的**，如果它具有多项式运行时间。

# 关于多项式运行时间

理想的缩放性质：当输入规模翻倍时，算法只应减慢某个常数因子  $c$ 。

多项式运行时间满足上述缩放性质

- $T(n) = O(n^d) \leftarrow$  取  $c = 2^d$

我们称一个算法是**高效的**，如果它具有多项式运行时间。

例外：一些多项式时间算法确实有很高的常数和/或指数，在实践中无用。

问题：你更喜欢哪个？ $20n^{100}$  vs.  $n^{1+0.02 \ln n}$

## 本讲小结 (1/2)

- 介绍算法的抽象定义
- 如何刻画算法的复杂度?
  - ▶ 第一个简化：用函数表示基本计算步骤数与输入规模的关系
- 如何比较函数?
  - ▶ 第二个简化：大  $O$  记号（五种标准渐近记号）刻画函数的阶。我们研究了定义、典型用法、示例、性质

大  $O$  记号让我们关注全局。

- 有用的类比：  $O(\leq)$ ,  $\Omega(\geq)$ ,  $\Theta(=)$ ,  $o(\ll)$ ,  $\omega(\gg)$

## 本讲小结 (2/2)

- 研究重要的运行时间函数和经典算法示例

记号滥用： $O(g(n))$  是一个函数集合，但计算机科学家经常写  $f(n) = O(g(n))$  而不是  $f(n) \in O(g(n))$ 。

底线：可以滥用记号，但不可误用。

不要误解这种对常数的随意态度。程序员非常关心常数，愿意熬夜只为获得 5% 的效率提升。

常数改进很重要（勿以善小而不为）



理论突破太~~~~难了!