## 图论选讲

dy0607

nnectivity

SCC

---

Eulei Circu

Coloring

k-coloring

ŭ

Spanning Tree.

iviatem

Flows

minimum cut maximum flow

# 图论选讲

dy0607

雅礼中学

August 14, 2018

# Preface

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2 cot

Euler Circ

bipartite

k-colorin

Snortest Pat

Spanning Tree

Elow

minimum cut maximum flow 图论是一个几乎每次讲课都有的专题,由于套路的东西实在讲过太多次了,这里会尽量找一些讲得不多的题目。

# **Preface**

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

Euler Circ

bipartite

k-colorin

Shortest Path

Spanning Tree

Spanning free

minimum cut maximum flow 图论是一个几乎每次讲课都有的专题,由于套路的东西实在讲过太多次了,这里会尽量找一些讲得不多的题目。

由于是NOIP集训,涉及的算法都是比较简单的常见算法。

# **Preface**

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Euler Circ

bipartito

k-coloring

Shortest Path

Spanning free

---

minimum cut maximum flow mcmf 图论是一个几乎每次讲课都有的专题,由于套路的东西实在讲过太 多次了,这里会尽量找一些讲得不多的题目。

由于是NOIP集训,涉及的算法都是比较简单的常见算法。

题目难度与顺序无关。

# Overview

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

2 Euler Circuit

Coloring

Shortest Path

Spanning Trees

6 Matchings

Flows

## 2 300

Euler Circ

Coloring

bipartite k-colorir

Shortest Pa

Spanning Tre

Flow

minimum cu maximum fl



### 图论选讲

dy0607

#### Connectivity

SCC

2-cat

Edici Circo

Coloring

k-colorin

Shortest Patl

Spanning Tree

opanning reco

Elouis

minimum cut maximum flow 强连通分量:在有向图G中,如果u能到v,v能到u,则称u和v强连通。如果一个图中任意两点强连通,则称该图为强连通图。有向图的极大强连通子图称为强连通分量。有向图缩强连通分量后是一个DAG(有向无环图)。

### 图论选讲

dy0607

### Connectivit

2 504

Edici Circo

Coloring

k-coloring

Shortest Patl

Spanning Tree

-,-----

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 强连通分量:在有向图G中,如果u能到v,v能到u,则称u和v强连通。如果一个图中任意两点强连通,则称该图为强连通图。有向图的极大强连通子图称为强连通分量。有向图缩强连通分量后是一个DAG(有向无环图)。

点(边)双连通分量:在无向图G中,任意删去一个点(一条边),如果连通性保持不变,则称该图点(边)双联通。无向图的极大点(边)双联通子图称为点(边)双联通分量。

以上均可以用Tarjan在O(n+m)内解决。

### 图论选讲

dy0607

#### Connectivity

SCC

2-sat

Fuler Circu

Luici Circi

hinartite

k-colorin

Shortest Pati

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow 2-satisfiability: n个布尔变量,有若干形如" $x_i$ 为真/假不能与 $x_j$ 为真/假同时成立"的限制,要求给出一组解。方法是将每个变量拆成真/假两个点,然后将限制连边求强连通分量,判断两个点是否在一个分量内。

### 图论选讲

dy0607

#### Connectivi

bcc

2-sat

Euler Circu

Coloring

bipartite k-coloring

Shortest Par

Spanning Tree

Mariate

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 2-satisfiability: n个布尔变量,有若干形如" $x_i$ 为真/假不能与 $x_j$ 为真/假同时成立"的限制,要求给出一组解。方法是将每个变量拆成真/假两个点,然后将限制连边求强连通分量,判断两个点是否在一个分量内。

传递闭包:对于一个有向图G,求出从每一个点出发可以到达哪些点。方法是先缩强连通分量,然后在DAG上dp。

传递闭包问题的常用技巧是bitset优化获得一个164的常数。

## 图论选讲

dy0607

### Connectivi

SCC

2-sat

\_\_\_\_

Luici Circi

Coloring

k-colorin

Shortest Path

Spanning Trees

opaning rices

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 有一个 $r \times c$ 的网格,网格的n个格子放着宝藏,每个有宝藏的格子都有一个传送门,传送门是以下三种中的一种:

- "横天门":由该门可以传送到同行的任一格子;
- "纵寰门":由该门可以传送到同列的任一格子;
- "自由门":由该门可以传送到以该门所在格子为中心周围8格中任一格子。

找一条路径(起点终点任意,可以经过重复的点)经过尽量多的宝藏(重复经过只算一次)。

$$n \le 10^5, r, c \le 10^6$$

### 图论选讲

dy0607

#### nnectivity

SCC

0

2-sat

Euler Circu

bipartit

k-colorir

Shortest Pat

Spanning Tree

-----

Elour

minimum cut maximum flow 从传送门直接向可以传送到的有宝藏的格子连边,然后缩强连通分量,得到一个DAG.

### 图论选讲

dy0607

#### nnectivity

SCC

2 ---

2-300

Euler Circu

Lineatie

k-coloring

Shortest Path

Spanning Tree

Spanning free

Flows

minimum cut maximum flow 从传送门直接向可以传送到的有宝藏的格子连边,然后缩强连通分量,得到一个DAG.

答案就是DAG上size之和最大的链,可以简单地dp得到答案。但这样边数是 $O(n^2)$ 的。

## 图论选讲

dy0607

#### Connectivit

scc

2-52

...

Euler Circu

bipartite

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Trees

. . . . .

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 从传送门直接向可以传送到的有宝藏的格子连边,然后缩强连通分量,得到一个DAG.

答案就是DAG上size之和最大的链,可以简单地dp得到答案。但这样边数是 $O(n^2)$ 的。

对于所有行和列额外建一个点,向这行/列的每一个有宝藏的格子连边,然后有传送整行/列的传送门就可以直接向新建的点连边了.

$$O(r+c+n)$$

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

Eules Cies

Luici Circi

bipartite

K-Coloring

Shortest Fati

Spanning Tree

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 煤矿工地可以看成是由隧道连接挖煤点组成的无向图。为安全起见,希望在工地发生事故时所有挖煤点的工人都能有一条出路逃到救援出口处。于是矿主决定在某些挖煤点设立救援出口,使得无论哪一个挖煤点坍塌之后,其他挖煤点的工人都有一条道路通向救援出口。

计算至少需要设置几个救援出口,以及不同最少救援出口的设置方 案总数。

 $m \le 500$ 

图论选讲

dy0607

nnectivity

SCC

bcc

2-300

Euler Circi

bipartit

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

-----

---

minimum cut maximum flow 找出所有点双连通分量以及割点.

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

scc

bcc

Edici Circi

Coloring

bipartite

Shortest Patl

Spanning Tree

Spanning free

Elous

minimum cut maximum flow mcmf 找出所有点双连通分量以及割点.

如果一个双联通分量中只有一个割点,那么必须在这个双联通分量的非割点位置放一个出口.

如果整个连通块是一个双连通分量(也就是没有割点),那么必须 任意放两个出口

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

bcc 2-sat

\_\_\_\_

\_\_\_\_

hipartite

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Trees

-----

Elou

minimum cut maximum flow 找出所有点双连通分量以及割点.

如果一个双联通分量中只有一个割点,那么必须在这个双联通分量的非割点位置放一个出口.

如果整个连通块是一个双连通分量(也就是没有割点),那么必须 任意放两个出口.

可以发现这样放就够了, O(n).

# 51NOD1318 最大公约数与最小公倍数方程组

### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

2-sat

Euler Circi

bipartite

------

Spanning Tree

Matchi

minimum cut maximum flov 求解一个有趣的方程组,方程组有n个未知正整数 $x_i$ 。 方程组由M个方程组成,方程只有两种类型:

- $gcd(x_i, x_j) = p$
- $lcm(x_i, x_j) = q$

你需要判断这样一个方程组是否存在正整数解。

$$T \le 10, n \le 200, p, q \le 10^9$$

# 51NOD1318 最大公约数与最小公倍数方程组

## 图论选讲

dy0607

Connectivi

2-sat

Euler Circu

Colorin

bipartite k-colorii

Shortest Patl

Spanning Trees

Matchings

Flows minimum cut maximum flo 对每个方程中右边的数质因数分解,设cnt(i,p)为 $x_i$ 中有多少个质因子p,那么我们实际上得到的是这样一些限制:

- $\max(cnt(i, p), cnt(j, p)) = a$
- $\bullet \ \min(cnt(i,p),cnt(j,p)) = b$

这个问题可以用2-sat解决:变量a[i][p][j]表示是否有 $p^j \mid x_i$ ,上面的限制就可以很容易地表示出来。

当然如果某个变量的某个质因子在方程组中没有涉及,就不需要建出点了,这样复杂度为 $O(Tm\log 10^9)$ 

### 图论选讲

dy0607

onnectivity

\_\_\_

2 ---

\_ 500

Euler Circuit

C-1--:--

bipartit

k-coloring

Spanning Tree

NA . . . I T

Flows

minimum cut maximum flow 欧拉回路:一条路径经过所有的边恰好一次,最后回到起点。欧拉 路径的区别是不要求回到起点。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Euler Circuit

bipartit

.. -----

Shortest rat

Spanning free

е.

minimum cut maximum flow 欧拉回路:一条路径经过所有的边恰好一次,最后回到起点。欧拉 路径的区别是不要求回到起点。

存在欧拉回路的充要条件是所有点度数为偶数,且除去孤立点后图连通。欧拉路径则允许有两个点度数为奇数。

欧拉回路可以用DFS在线性时间内求出。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

DCC

2-sat

## Euler Circuit

bipartite

k-coloring

Snortest Patr

Spanning Tree

Spanning Tree

Elour

minimum cut maximum flow mcmf n个点m条边的连通无向图,加尽量少的边(可以有重边自环),使得存在一种给边定向的方案,方案中每个点的入度和出度都是偶数。输出方案。

 $n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5$ 

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

scc

2-sat

Euler Circuit

COIOIIIIE

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

----

\_\_\_

minimum cut maximum flow 这类问题有一个比较常见的思路:找一个答案的下界,然后尝试通 过构造达到这个下界。

### 图论选讲

dy0607

Connectivity

2-sat

Fuler Circuit

Luici Circi

bipartite

k-colorin

Jilortest i atri

Spanning Tree

. .

Flow

minimum cut maximum flow 这类问题有一个比较常见的思路:找一个答案的下界,然后尝试通 过构造达到这个下界。

首先每个点的度数一定是偶数,我们可以先把度数是奇数的点两两 连起来。然后边的个数一定是偶数,如果此时边的个数是奇数,那 么还要加上一条边。这显然是一个答案的下界。

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc

2-sat

**Euler Circuit** 

Coloring

k-colorin

Siloi test i di

Spanning Tree

Matchings

Flows

minimum cut maximum flov mcmf 这类问题有一个比较常见的思路:找一个答案的下界,然后尝试通 过构造达到这个下界。

首先每个点的度数一定是偶数,我们可以先把度数是奇数的点两两 连起来。然后边的个数一定是偶数,如果此时边的个数是奇数,那 么还要加上一条边。这显然是一个答案的下界。

如果边的个数是偶数考虑怎么构造答案,注意到此时图中一定存在欧拉回路,如果存在一条回路a-b-c-d-a,我们我们可以这样给边交错地定向: a>b<c>d<a, 这样经过的每个点要么入度增加2,要么出度增加2,一定会满足条件。

### 图论选讲

dy0607

Connectivity

2-sat

**Euler Circuit** 

bipartite

k-colorin

------

Spanning Tree

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 这类问题有一个比较常见的思路:找一个答案的下界,然后尝试通 过构造达到这个下界。

首先每个点的度数一定是偶数,我们可以先把度数是奇数的点两两 连起来。然后边的个数一定是偶数,如果此时边的个数是奇数,那 么还要加上一条边。这显然是一个答案的下界。

如果边的个数是偶数考虑怎么构造答案,注意到此时图中一定存在 欧拉回路,如果存在一条回路a-b-c-d-a,我们我们可以这样 给边交错地定向:a>b<c>d<a,这样经过的每个点要么入度 增加2,要么出度增加2,一定会满足条件。

边的个数是奇数时加上一个自环即可,O(n+m).

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

## Euler Circuit

bipartite

k-colorin

Shortest Patl

Spanning Trees

Spanning Tree

Elour

minimum cut maximum flow mcmf 一个全为0的序列,有n段区间 $[l_i,r_i]$ ,你需要给每一段区间+1或者-1,使得操作结束后序列中的所有位置绝对值不超过1。输出方案。

$$n \le 10^5, 1 \le l_i \le r_i \le 10^9$$

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sa

Euler Circuit

...

biparer.

Spanning rice

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow 考虑对序列差分,那么区间加[l,r]就相当于在差分的序列上将l增加1,将r+1减去1.区间减是类似的.

### 图论选讲

dy0607

Connectivit scc

2-sat

Fuler Circuit

\_\_\_\_

bipartit

k-colorin

Spanning Tree

NA COLUMN

Flows

minimum cut maximum flow 考虑对序列差分,那么区间加[l,r]就相当于在差分的序列上将l增加1,将r+1减去1.区间减是类似的.

发挥想象力,发现这很像有一条无向边(l,r+1),加减两种决策就是给这条边定向,每个点的值就是入度与出度的差。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit scc

2-sat

**Euler Circuit** 

Coloring

k-colorir

Shortest Par

Spanning Tree

Maria

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 考虑对序列差分,那么区间加[l,r]就相当于在差分的序列上将l增加1,将r+1减去1.区间减是类似的.

发挥想象力,发现这很像有一条无向边(l,r+1),加减两种决策就是给这条边定向,每个点的值就是入度与出度的差。

先分析简单的情况:如果每个点的度数都是偶数,那么对于每个连通块求欧拉回路,这样每个点的入度等于出度,也就是差分序列全为0,原序列也是全为0.

对于度数是奇数的点,仍然采用上一题的做法,将奇数点从左往右 依次两两配对连边,再求欧拉回路即可。

 $O(n \log n)$ 

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2 co+

Eulei Circu

Coloring

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

----

minimum cut maximum flow 独立集:一个点集中两两之间没有连边,则称这个点集是一个独立集。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit scc

2-sat

Euler Circu

## Coloring

bipartite k-colorin

Shortest Path

Spanning Tree

-----

Flows

minimum cut maximum flow 独立集:一个点集中两两之间没有连边,则称这个点集是一个独立集。

团: 一个点集中两两之间都有连边,则称这个点集是一个团。最大团可以在 $O(3\frac{\pi}{3})$ 内求解。

## 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-300

Euler Circu

Coloring bipartite

k-coloring

Shortest Path

Spanning Tree

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow 独立集:一个点集中两两之间没有连边,则称这个点集是一个独立集。

团:一个点集中两两之间都有连边,则称这个点集是一个团。最大团可以在 $O(3\frac{\pi}{3})$ 内求解。

图染色问题:判断一个图能否被划分为k个不相交的独立集。k>2时为NP问题。

# HNOI2010 平面图判定

#### 图论选讲

dy0607

onnectivity

SCC

2-521

Edici Circi

bipartite

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 给出一个存在哈密顿回路的无向图以及它的哈密顿回路,问这张图 是否是平面图。

 $T \le 100, n \le 200, m \le 10^4$ , 没有重边自环

# HNOI2010 平面图判定

图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

-

2 500

Euler Circi

Colorin

bipartite

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Tree

Spanning Tree

Match

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 哈密顿回路构成了一个圈,考虑除哈密顿回路以外的边,我们可以 从圈内连接这两个点,也可以从圈外连接。

# HNOI2010 平面图判定

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Z=Sat

Euler Circu

Colorin

bipartite

Spanning Tree

minimum cut maximum flow 哈密顿回路构成了一个圈,考虑除哈密顿回路以外的边,我们可以 从圈内连接这两个点,也可以从圈外连接。

有些边是不能放在同一边的,我们将冲突的边两两连边。我们只需要判断连出来的图是不是二分图。

### HNOI2010 平面图判定

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2 ....

Fuler Circu

Colorini

bipartite

Shortest Pati

-,-----

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 哈密顿回路构成了一个圈,考虑除哈密顿回路以外的边,我们可以 从圈内连接这两个点,也可以从圈外连接。

有些边是不能放在同一边的,我们将冲突的边两两连边。我们只需要判断连出来的图是不是二分图。

注意到 $m>3\times n$ 时肯定不合法,可以直接跳过。这样复杂度为 $O(Tn^2)$ 。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

bcc 2-sat

F 1. C. . .

Edici Circui

Coloring

bipartite k-coloring

Shortest Patl

Spanning Trees

Spanning Trees

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 一个n个点的有向图,设f(u,v)表示是否存在一条u到v的路径。对于每一对 $1 \le u < v \le n$ ,你知道它们至少满足下面的某个条件(输入会对每一对u,v给出这个条件):

- $\bullet \ f(u,v) \ {\rm and} \ f(v,u) = true$
- f(u,v) xor f(v,u) = true
- f(u,v) or f(v,u) = true

求这张图至少有多少条边,或者判断无解。

 $n \leq 47$ .

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Luici Circu

Coloring

bipartite

k-coloring

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 如果满足and为真,那么两个点一定在一个强连通分量内;如果xor为真则一定不在一个中。我们将一定在一个强连通分量内的点缩点,并判掉无解的情况。

### 图论选讲

dy0607

### Connectivi

bcc

2-sat

Euler Circu

bipartite

k-coloring

Shortest Pat

c . . .

0

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 如果满足and为真,那么两个点一定在一个强连通分量内;如果xor为真则一定不在一个中。我们将一定在一个强连通分量内的点缩点,并判掉无解的情况。

由于三个条件中一定会满足一个,而我们又要最小化边的数量,这个图最后一定会形如一些强连通分量连成一条链。构造大于一个点的强连通分量,最省边的方法是连成一个环,因此答案就是(n-1+大小大于1的强连通分量个数)。

### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

2-360

Euler Circu

Coloring

k-coloring

. .

------

Spanning Tree:

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow 如果满足and为真,那么两个点一定在一个强连通分量内;如果xor为真则一定不在一个中。我们将一定在一个强连通分量内的点缩点,并判掉无解的情况。

由于三个条件中一定会满足一个,而我们又要最小化边的数量,这个图最后一定会形如一些强连通分量连成一条链。构造大于一个点的强连通分量,最省边的方法是连成一个环,因此答案就是(n-1+大小大于1的强连通分量个数)。

于是对于大小大于1的强连通分量(最多 $\frac{n}{2}$ 个),我们希望将它们合并成尽量少的块,而两个强连通分量可以合并当且仅当它们之间没有xor的关系,我们实际要算一个图的最小染色数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2

Euler Circu

Coloring

k-coloring

. .

Spanning Tree

Spanning free

---

minimum cut maximum flow 判断一张任意图能否被k染色可以在 $O(2^n)$ 内解决。考虑一个看起来更难的问题:有多少种选择k个独立集的方案,使得它们覆盖了整张图,(独立集之间可以有交集)。显然一张图可以被k染色当且仅当这个问题的答案大于0。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

\_\_\_\_

Edici Circo

Coloring

k-coloring

. .

Spanning Tree

-----

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 判断一张任意图能否被k染色可以在 $O(2^n)$ 内解决。考虑一个看起来更难的问题:有多少种选择k个独立集的方案,使得它们覆盖了整张图,(独立集之间可以有交集)。显然一张图可以被k染色当且仅当这个问题的答案大于0。

这个问题可以用容斥解决,大概就是用任意选择k个的方案减去未完全覆盖的方案:

$$ans = \sum_{S \in V} (-1)^{n-|S|} cnt^k(S)$$

其中cnt(S)表示S内有多少独立集.

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

Euler Circu

Colorin

bipartit

k-coloring

Shortest Pati

Spanning Trees

-,-----

Elous

minimum cut maximum flow mcmf cnt(S)可以用简单的状压在 $O(2^n)$ 内得到(考虑独立集是否包含某个点u):

$$cnt(S) = cnt(S-u) + cnt(S-u - adj(u)) \\$$

adj(u)表示与u相邻的点的集合。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

Euler Circu

hinartit

k-coloring

Shortest Pat

c . . . . .

Spanning free

Flow

minimum cut maximum flow mcmf cnt(S)可以用简单的状压在 $O(2^n)$ 内得到(考虑独立集是否包含某个点u):

$$cnt(S) = cnt(S - u) + cnt(S - u - adj(u))$$

adj(u)表示与u相邻的点的集合。

由于方案数可能会比较多,我们需要在模大质数意义下算,这样错误率可以接受。 $O(n2^{\frac{n}{2}})$ 

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

. . .

DCC

2-300

Euler Circu

bipartit

k-coloring

Shortest Path

Spanning Trees

----

Elous

minimum cut maximum flow mcmf 最短路:对于带权无向图G,最短路是一条S到T权值和最小的路径。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Luici Circu

Coloring

k-colorin

Shortest Path

Spanning Tree

Spanning free

E1----

minimum cut maximum flow mcmf 最短路:对于带权无向图G,最短路是一条S到T权值和最小的路径。

 $Floyd: O(n^3)$ 算出所有点对之间的最短路。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

\_ . \_ .

\_\_\_\_

Coloring

k-colorin

Shortest Path

Spanning Trees

-,----

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 最短路:对于带权无向图G,最短路是一条S到T权值和最小的路径。

 $Floyd: O(n^3)$ 算出所有点对之间的最短路。

Dijkstra: 暴力 $O(n^2)$ , 一般的堆是 $O((n+m)\log n)$ , 斐波那契堆可以做到 $O(m+n\log n)$ .

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Eules Cissus

\_\_\_\_

Coloring

k-colorin

Shortest Path

Spanning Trees

-,-----

Flow

minimum cut maximum flow 最短路:对于带权无向图G,最短路是一条S到T权值和最小的路径。

 $Floyd: O(n^3)$ 算出所有点对之间的最短路。

Dijkstra: 暴力 $O(n^2)$ , 一般的堆是 $O((n+m)\log n)$ , 斐波那契堆可以做到 $O(m+n\log n)$ .

Bellman-Ford / SPFA: O(m)或者O(nm), 取决于出题人。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC .

2-sat

Fuler Circu

\_\_\_\_

bipartito

k-colorin

Shortest Path

Spanning Trees

-,----

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 最短路:对于带权无向图G,最短路是一条S到T权值和最小的路径。

 $Floyd: O(n^3)$ 算出所有点对之间的最短路。

Dijkstra: 暴力 $O(n^2)$ , 一般的堆是 $O((n+m)\log n)$ , 斐波那契堆可以做到 $O(m+n\log n)$ .

Bellman-Ford / SPFA: O(m)或者O(nm),取决于出题人。

SPFA的特殊用途是用来找负权环。

# APIO2017 商旅

#### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

2=5dt

Luier Circi

Coloring

bipartite

Shortest Path

Flow

minimum cut maximum flow mcmf n个城市, m条单向道路, 每条道路有一个长度, k种商品。每个城市都可以卖出或购买某些商品, 每个城市卖出获得的收益一定小于等于购买需要的花费, 各个城市之间的价格可能不同, 因此你可以通过赚取差价来获得收益。

你最多只能持有一个商品,你需要找一个环(可以多次经过一个点或边),最大化走一遍环的收益与环长的比值。

 $n \le 100, m \le 9900, k \le 1000$ 

## APIO2017 商旅

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

- 1 0.

. . . . .

hinartite

k-colorir

Shortest Path

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow 首先求出最短路,对每个城市对(u,v),求出从u市购买到v市卖出能获得的最大收益w。建一个新图,u到v的距离dis为原来的最短路的长度,边权为w。那么我们要求一个环,边权与环长比值最大。

# APIO2017 商旅

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Fuler Circ

hinartit

k-colori

Shortest Path

Spanning Tree

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 首先求出最短路,对每个城市对(u,v),求出从u市购买到v市卖出能获得的最大收益w。建一个新图,u到v的距离dis为原来的最短路的长度,边权为w。那么我们要求一个环,边权与环长比值最大。

二分答案k, 我们要判断是否有 $\sum_{dis}^{w} \ge k$ ,

即 $\sum (w - k \times dis) \ge 0$ 。将边权变为 $k \times dis - w$ ,判断是否存在非正权环即可。

$$O(n^2k + nm)$$

图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Euler Circi

Coloring

bipartite

Shortest Path

Spanning Trees

Matchings

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 一个(n+1) × (n+1)的点阵,每个点有一个海拔,你只知道左上角海拔为(n+1) 的点阵,每个点有一个海拔,你只知道左上角海拔为(n+1) 的点之间有双向道路连接,走过一条边耗费的体力是(n+1) 是点海拔 — 起点海拔)。每条边的每个方向都有一定数量的行人走过,你需要计算所有行人耗费的体力之和至少是多少。

 $80\% : n \le 40$ 

 $100\%: n \le 500$ 

图论选讲

dy0607

onnectivity

SCC

0 .

...

Euler Circi

bipartite

k-colori

Shortest Path

Spanning Tree

Spanning free

Match

Flows

minimum cut maximum flow 首先发现最优情况下海拔一定为0/1,并且存在这样一条割,使得割的两部分海拔分别为0/1.

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Euler Circu

hinartite

k-colorin

Shortest Path

Spanning Tree

N4-----

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 首先发现最优情况下海拔一定为0/1,并且存在这样一条割,使得 割的两部分海拔分别为0/1.

将经过边的行人作为流量,我们实际上要求一个最小割。直接做可以拿到80分。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

Fuler Circu

Luici Circi

bipartite

k-coloring

Shortest Path

Spanning Tree

Matchines

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 首先发现最优情况下海拔一定为0/1,并且存在这样一条割,使得 割的两部分海拔分别为0/1.

将经过边的行人作为流量,我们实际上要求一个最小割。直接做可以拿到80分。

注意到这是个平面图,而平面图上的最小割可以转化为其对偶图上的最短路, $O(n^2 \log n)$ .

## **USACO07FEB Lilipad Pond**

图论选讲

dy0607

Connectivity scc

2 500

Euler Circu

bipartite

Shortest Path

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow 一个 $n \times m$ 的池塘,一些位置上放置了荷叶叶。给定起点,你需要通过走马步(坐标某一维变化1,另一维变化2)到达终点,你不能跳到水里,每一步都必须在荷叶上(起点和终点都在荷叶上)。你需要算出最少还需要放置多少荷叶叶才能到达终点,以及有多少种最少放置的放置方法。

 $n, m \le 30$ 

### **USACO07FEB** Lilipad Pond

#### 图论选讲

dy0607

Shortest Path

第一问非常简单,连边时如果边的终点没有荷叶,则边权为1,否 则为(), 跑最短路即可。

### **USACO07FEB Lilipad Pond**

#### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

2-sat

Euler Circı

bipartite

k-colorii

### Shortest Path

Spanning Tree

Manahiman

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 第一问非常简单,连边时如果边的终点没有荷叶,则边权为1,否则为0,跑最短路即可。

然而在这张图上算出的最短路个数并不是第二问的答案,我们需要改变一下最短路建边方式。我们只对起点和没有荷叶的点建点,对于每个点,考虑它走到的下一个没有荷叶的点可能是哪些,连边权为1的边。再求最短路方案数即可。

 $O(n^2m^2)$ .

### AIM Tech 4 div1 D

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

bcc

2=5dt

Euler Circu

Coloring

bipartit

Shortest Path

Spanning Tree

iviaccii

minimum cut maximum flov

### 一张带权无向图, g次操作:

- 1 v 询问1到v的最短路
- $2 c l_1 l_2 ... l_c$  将边 $l_i$ 的权值增加1

$$n, m \leq 10^5, q \leq 2000, \sum c \leq 10^6, TL = 10s.$$

### AIM Tech 4 div1 D

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

SCC

2-sat

\_\_\_\_

\_\_\_\_

COIOIIII

k colorir

Shortest Path

Spanning Tree

Spanning free

Elour

minimum cut maximum flow Dijkstra有个这样的技巧:如果所有点的距离都小于某个较小的值,我们就可以不用堆,而是开值域个队列,这样最短路就变为线性了。

### AIM Tech 4 div1 D

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2-sat

Euler Circu

Coloring

bipartite k-colorir

Shortest Path

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow mcmf Dijkstra有个这样的技巧:如果所有点的距离都小于某个较小的值,我们就可以不用堆,而是开值域个队列,这样最短路就变为线性了。

先求一遍最短路,之后每次修改后重新算最短路时,每个点距离的增加量是 $\leq c$ 的。这样我们在Dijkstra时,每次找出距离的增加量最小的点进行松弛,可以发现这样仍是对的。而由于距离增加量的值域很小,就可以用队列代替堆解决。

$$O((n+m)q + \sum c)$$

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

\_\_\_

2-521

Euler Circi

Coloring

bipartit

. .

Spanning Trees

Spanning Tree.

Match

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 生成树:无向图的一个连通子图,恰好有n-1条边。最小生成树主要有Prim和Kruskal算法。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Luici Circu

Coloring

k-colorin

Charles Dark

Spanning Trees

Match

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 生成树:无向图的一个连通子图,恰好有n-1条边。最小生成树主要有Prim和Kruskal算法。

 $Prim: O((n+m)\log n)$ 或用斐波那契堆做到 $O(m+n\log n)$ 。

 $\mathsf{Kruskal}: O(m\log m)$ ,可配合基尔霍夫矩阵进行最小生成树计数。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

F 1 C

Coloring

bipartite k colorin

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 生成树:无向图的一个连通子图,恰好有n-1条边。最小生成树主要有Prim和Kruskal算法。

 $Prim: O((n+m)\log n)$ 或用斐波那契堆做到 $O(m+n\log n)$ 。

 $\mathsf{Kruskal}: O(m\log m)$ ,可配合基尔霍夫矩阵进行最小生成树计数。

树形图:有向图的一个子图,从某个点可以到达其它所有点。最小

树形图一般用朱刘算法。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

\_ . \_ .

\_\_\_\_

Coloring

k-colorin

Shortest Patl

Spanning Trees

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 生成树:无向图的一个连通子图,恰好有n-1条边。最小生成树主要有Prim和Kruskal算法。

 $Prim: O((n+m)\log n)$ 或用斐波那契堆做到 $O(m+n\log n)$ 。

 $\mathsf{Kruskal}: O(m\log m)$ ,可配合基尔霍夫矩阵进行最小生成树计数。

树形图:有向图的一个子图,从某个点可以到达其它所有点。最小树形图一般用朱刘算法。

朱刘算法:朴素实现为O(nm),后被Tarjan优化到 $O(m \log n)$ .

### CF 434 div1 D

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Luier Circi

bipartito

k-coloring

Shortest Patl

#### Spanning Trees

#### Spanning frees

Elous

minimum cut maximum flow 一个无向图,每次可以删去两条有公共点的边,求最多能删去多少 条边,输出方案。

 $n, m \leq 2 \times 10^5$ ,无重边自环

### CF 434 div1 D

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

. . .

DCC

2-sat

Euler Circu

\_\_\_\_

Coloring

k-coloring

. . .

Shortest I ati

Spanning Trees

Flow

minimum cut maximum flow 题目可以这样理解:将每条边放在两个端点中的一个上,使得尽量 多的点上的边的数量为偶数。

### CF 434 div1 D

#### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

Euler Circu

bipartite

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Trees

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 题目可以这样理解:将每条边放在两个端点中的一个上,使得尽量 多的点上的边的数量为偶数。

每个连通块分开考虑,随意求出一棵生成树,对于非树边任意分配。然后考虑分配树边,对于一个点处理完它子树后,如果它的边的数量为奇数,则将它到它父亲的边分配给子集,否则给父亲。这样最多只有根无法变为偶数,已经达到了答案上界。

$$O(n+m)$$

### SCOI2012 滑雪

#### 用论铣讲

dy0607

Spanning Trees

n个点m条边的带权图,每个点有一个高度。从一号点开始,每次 选择一种操作:

- 瞬移到曾经到过的某个点
- 选择一条边走过去,要求终点的高度不高于起点的高度

求最多能经过多少点,在经过尽量多的点的前提下最小化走过的边 权之和。

 $n < 10^5, m < 10^6$ 

### SCOI2012 滑雪

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

scc

.

Luici Circi

bipartite

k-coloring

hortest Pat

#### Spanning Trees

----

minimum cut

最后得到的路径是一棵树,但直接最小生成树又可能无法满足高度 的限制。

### SCOI2012 滑雪

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

Euler Circu

Coloring

bipartite

Shortest Path

Spanning Trees

Flow

minimum cut maximum flov mcmf 最后得到的路径是一棵树,但直接最小生成树又可能无法满足高度的限制。

在做Prim时,以高度为第一关键字,距离为第二关键字,优先拓展高度高的节点。这样一个节点一定是由高度较高的节点拓展而来的,因此保证了合法性

 $O(m \log m)$ 

#### 图论选讲

dy0607

nectivity

...

-

2-sat

Euler Circu

COIOIIIIE

Dipartit

Shortest Pat

Spanning Tree

### Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 匹配:对于无向图G,一组匹配是一个边集,所有点至多是其中一条边的端点。完美匹配则要求所有点都在匹配中。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

DCC

\_ . \_ \_ .

Luici Circu

bipartite

k-coloring

Shortest Path

opaning ire

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 匹配:对于无向图G,一组匹配是一个边集,所有点至多是其中一条边的端点。完美匹配则要求所有点都在匹配中。

二分图匹配有O(nm)的匈牙利算法以及 $O(\sqrt{nm})$ 的Hopcraft-Karp算法(其实就是Dinic)。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc 2 cot

F 1 C:

Edici Circa

bipartite

k-colorin

Shortest Pati

Spanning Trees

Matchings Tree

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 匹配:对于无向图G,一组匹配是一个边集,所有点至多是其中一条边的端点。完美匹配则要求所有点都在匹配中。

二分图匹配有O(nm)的匈牙利算法以及 $O(\sqrt{nm})$ 的Hopcraft-Karp算法(其实就是Dinic)。

霍尔定理给出了一个存在完美匹配的充要条件:对于同一边的任意 点集S,与S相邻的点的个数大于等于S的点数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Z=Sat

Euler Circu

Coloring

k-colorin

Shortest Patl

Spanning Trees

Matchings Tree

Flows

minimum cut maximum flow 匹配:对于无向图G,一组匹配是一个边集,所有点至多是其中一条边的端点。完美匹配则要求所有点都在匹配中。

二分图匹配有O(nm)的匈牙利算法以及 $O(\sqrt{nm})$ 的Hopcraft-Karp算法(其实就是Dinic)。

霍尔定理给出了一个存在完美匹配的充要条件:对于同一边的任意 点集S,与S相邻的点的个数大于等于S的点数。

二分图最大权匹配存在 $O(n^3)$ 的KM算法,也可以用费用流做.

#### 图论选讲

dy0607

### Connectivit

SCC

2-sat

#### Euler Circu

Coloring

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Trees

### Matchings

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 匹配:对于无向图G,一组匹配是一个边集,所有点至多是其中一条边的端点。完美匹配则要求所有点都在匹配中。

二分图匹配有O(nm)的匈牙利算法以及 $O(\sqrt{nm})$ 的Hopcraft-Karp算法(其实就是Dinic)。

霍尔定理给出了一个存在完美匹配的充要条件:对于同一边的任意 点集S,与S相邻的点的个数大于等于S的点数。

- 二分图最大权匹配存在 $O(n^3)$ 的 $\mathsf{KM}$ 算法,也可以用费用流做.
- 一般图最大匹配需用带花树, $O(n^2m)$ ,后被优化到 $O(\sqrt{n}m)$ .

图论选讲

dy0607

Connectivit

\_\_\_

0 . . .

Euler Circ

Coloring

bipartit

k-coloring

SHOTEEST T GE

Spanning Tree

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow 最大独立集:等于n-最大匹配数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

F 1. C.

Luici Circo

bipartite

k-coloring

Shortest Path

### Matchings

minimum cut maximum flow 最大独立集:等于n-最大匹配数。

最小边覆盖:选中尽量少的边,使得所有点至少是一条选中的边的端点。等于n-最大匹配数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

DCC

Euler Circi

bipartite

k-coloring

Shortest Path

Spanning Tree

Matchings Matchings

Flows

minimum cut maximum flow 最大独立集:等于n-最大匹配数。

最小边覆盖:选中尽量少的边,使得所有点至少是一条选中的边的端点。等于n-最大匹配数。

最小点覆盖:选中尽量少的点,使得所有边有至少一个端点被选中。等于最大匹配数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2

Euler Circi

bipartite

k-coloring

Shortest Path

Spanning Trees

Matchings Irees

Elour

minimum cut maximum flow 一个 $n \times n$ 的网格,每个格子有黑白两种颜色。你可以交换两行或交换两列(可以进行任意次操作),使得主对角线(左上到右下)上的格子均为黑色。

判断是否有解,  $n \leq 200$ 。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

\_\_\_

0 .

2-sat

Euler Circi

. . .

bipartite

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Tree

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 我们实际上要找是否存在一个排列P, $\forall i \in [1,n]$ ,  $(i,P_i)$ 为黑色。如果存在我们就可以通过行交换造出主对角线,而列交换并不会对是否存在产生影响。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC .

2-sat

Fuler Circu

Coloring

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Tree

Matchings

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 我们实际上要找是否存在一个排列P,  $\forall i \in [1,n]$ ,  $(i,P_i)$ 为黑色。如果存在我们就可以通过行交换造出主对角线,而列交换并不会对是否存在产生影响。

对行和列分别建n个点,如果第i行第j列为黑色,则将第i行和第j列连边。这样我们得到一个二分图,原问题有解当且仅当这个二分图存在完美匹配.

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Euler Circu

Coloring

k-colorin

Shortest Pat

Spanning Tree

Matchings

Flow

minimum cut maximum flow mcmf 我们实际上要找是否存在一个排列P, $\forall i \in [1,n]$ ,  $(i,P_i)$ 为黑色。如果存在我们就可以通过行交换造出主对角线,而列交换并不会对是否存在产生影响。

对行和列分别建n个点,如果第i行第j列为黑色,则将第i行和第j列连边。这样我们得到一个二分图,原问题有解当且仅当这个二分图存在完美匹配.

 $O(n^3)$ 

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Euler Circi

bipartit

k-colorir

Shortest Patl

Spanning Trees

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 有一个n的排列P,定义 $D(x,y)=\min(|x-y|,n-|x-y|)$ ,给 出 $D(i,P_i)$ ,求出满足条件的字典序最小的P,或者判断无解。  $n\leq 10^4$ .

#### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

\_ ----

Euler Circu

hipartite

k-colorir

Snortest Pat

Spanning Tre

Matchings

---

minimum cut maximum flow 对于每个i, 备选的 $P_i$ 最多只有两个。我们还需要使得字典序最小,一种暴力方法是从前往后逐位确定,先将 $P_i$ 设为较小的那个候选值,再判断在前面的匹配不变的情况下后面的点是否能够完美匹配,不能则设为较大的,这样是 $O(n^3)$ 的。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit scc

2-sat

Euler Circu

bipartite

CI . . . . . .

. . -

Spanning Trees

Matchings

minimum cut

对于每个i, 备选的 $P_i$ 最多只有两个。我们还需要使得字典序最小,一种暴力方法是从前往后逐位确定,先将 $P_i$ 设为较小的那个候选值,再判断在前面的匹配不变的情况下后面的点是否能够完美匹配,不能则设为较大的,这样是 $O(n^3)$ 的。

另一种方法是从后往前做匈牙利算法,每次贪心地选最小的点尝试进行匹配(也就是把边表从小到大排序),这样是 $O(n^2)$ 的。注意它用到了备选点不超过2的性质。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc

2-sat

Euler Circu

Coloring

k-coloring

C . . . .

Spanning Trees

Matchings

minimum cut maximum flow 对于每个i, 备选的 $P_i$ 最多只有两个。我们还需要使得字典序最小,一种暴力方法是从前往后逐位确定,先将 $P_i$ 设为较小的那个候选值,再判断在前面的匹配不变的情况下后面的点是否能够完美匹配,不能则设为较大的,这样是 $O(n^3)$ 的。

另一种方法是从后往前做匈牙利算法,每次贪心地选最小的点尝试进行匹配(也就是把边表从小到大排序),这样是 $O(n^2)$ 的。注意它用到了备选点不超过2的性质。

另一种做法是,如果备选点为u,v,那么我们可以连一条u到v的 边,显然只有每个连通块的点数等于边数时才有解,也就是每个连通块都是环套树。对于树边可以直接确定,环上也只有两种决策,可以做到线性。

### 图论选讲

dy0607

Connectivi

bcc

Euler Circi

Coloring

bipartit

Shortest Dat

C----:-- T---

Matchings Matchings

Elour

minimum cut maximum flow mcmf 有一个n个点的无向图,其中只有m对点之间没有连边,保证这张图可以被分为至多两个团.

对于m对未连边的点对,判断有哪些点对满足将他们连边后最大团的大小增加.

 $n \le 10^4, m \le 1.5 \times 10^5.$ 

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

bcc

2-sat

Euler Circi

Coloring

biparti

Shortest Pat

Spanning Tree

### Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 考虑将原图取反,也就是输入的m条边构成的图.这个图一定是个二分图,因为题目保证了原图可以被至多两个团覆盖.

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc bcc

Fuler Circu

\_\_\_\_

bipartite

-----

. .

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 考虑将原图取反,也就是输入的m条边构成的图.这个图一定是个二分图,因为题目保证了原图可以被至多两个团覆盖.

原图上的最大团,也就是反图上的最大独立集,而二分图的最大独立集等于点数减去最大匹配数.那么题目就是问去掉哪些边后最大匹配数减少,也就是哪些边一定在最大匹配上.

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc

Euler Circu

Coloring bipartite

Shortest Path

Spanning Trees

Matchings Irees

minimum cut maximum flow 考虑将原图取反,也就是输入的m条边构成的图.这个图一定是个二分图,因为题目保证了原图可以被至多两个团覆盖.

原图上的最大团,也就是反图上的最大独立集,而二分图的最大独立集等于点数减去最大匹配数.那么题目就是问去掉哪些边后最大匹配数减少,也就是哪些边一定在最大匹配上.

这题中n,m较大,需要用Dinic算二分匹配. 怎么判断哪些边一定在最大匹配上?

### 图论选讲

dy0607

Connectivity

\_\_\_\_

Edici Circi

bipartite

Shortest Path

Spanning Trees

Matchings Irees

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 考虑将原图取反,也就是输入的m条边构成的图.这个图一定是个二分图,因为题目保证了原图可以被至多两个团覆盖.

原图上的最大团,也就是反图上的最大独立集,而二分图的最大独立集等于点数减去最大匹配数.那么题目就是问去掉哪些边后最大匹配数减少,也就是哪些边一定在最大匹配上.

这题中n,m较大,需要用Dinic算二分匹配. 怎么判断哪些边一定在最大匹配上?

显然它们一定要满流,其次边上的两个点在残量网络上不能在同一个强连通分量中,因为如果他们在同一个环中,就可以将环上未匹配的边设为匹配边,匹配边设为未匹配边,最大匹配不变.  $O(m\sqrt{n})$ 

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

bcc

...

Euler Circi

. . .

bipartite

k-colorir

Shortest Patl

Spanning Tree

Spanning Tree

Flows

minimum cut maximum flow 最小割:割掉总权值尽量少的边,使得S,T不连通。

最大流最小割定理:S到T的最大流等于S到T的最小割。这是线性规划中对偶原理的一种特殊情况。

残量网络:未满流的边构成的网络。

### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

Eules Cies

Luici Circi

Coloring

bipartite

Shortest Pa

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 最小割:割掉总权值尽量少的边,使得S,T不连通。

最大流最小割定理:S到T的最大流等于S到T的最小割。这是线性规划中对偶原理的一种特殊情况。

残量网络:未满流的边构成的网络。

Edmond-Karp复杂度为 $O(nm^2)$ ; Dinic复杂度为 $O(n^2m)$ ,写个动态树可以优化到 $O(nm\log n)$ ,但在特殊图以及随机图上有更好的复杂度。

wiki上关于网络流最优的复杂度为O(nm).

### AHOI2009 最小割

#### 图论选讲

dy0607

Connectivity

SCC

2 ---

Euler Circi

hinartite

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

-----

iviaten

minimum cut

maximum flow mcmf 给出一个有向图和源点汇点,求哪些边可能在最小割上,哪些边一 定在最小割上。

 $n \le 4 \times 10^3, m \le 6 \times 10^4$ 

### AHOI2009 最小割

#### 图论选讲

dy0607

onnectivity

SCC

2-sat

Euler Circu

Coloring

bipartite

Shortest Pat

c . . .

Spanning free

\_\_\_

minimum cut

maximum flow

是否可能:  $\dot{u}(u,v)$ 满流,且残量网络上u到v不存在路径。即u和v不在同一强连通分量内。

### AHOI2009 最小割

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

SCC

2-sat

Euler Circu

Coloring

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

Flow

minimum cut maximum flow 是否可能:  $\dot{u}(u,v)$ 满流,且残量网络上u到v不存在路径。即u和v不在同一强连通分量内。

是否一定:  $\dot{u}(u,v)$ 满流,且残量网络上存在S到u的路径,v到T的路径。即S和u在同一强连通分量内,v和T在同一强连通分量内。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

Edici Circi

bipartit

SHOREST Fati

Spanning Trees

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 给定序列A,序列中的每一项 $A_i$ 有删除代价 $B_i$ 和附加属性 $C_i$ 。删除若干项,使得A的最长上升子序列长度减少至少1,且付出的代价之和最小,并输出方案。如果有多种方案,请输出将删去项的附加属性排序之后,字典序最小的一种。

 $n \le 700$ 

图论选讲

dy0607

Connectivit

scc bcc

\_ ----

Luici Circu

hinartit

k-coloring

Shortest I at

Spanning Tree

macci

minimum cut

maximum flow

先用 $O(n^2)$ 的dp做最长上升子序列,如果i < j, dp[j] = dp[i] + 1,则由i向j连边。这样我们得到一个DAG,我们需要删掉权值和最小的点,使得DAG中最长链的长度减少1。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Euler Circu

bipartite

k-colorin

SHOREST FALL

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow 先用 $O(n^2)$ 的dp做最长上升子序列,如果i < j, dp[j] = dp[i] + 1,则由i向j连边。这样我们得到一个DAG,我们需要删掉权值和最小的点,使得DAG中最长链的长度减少1。

将每个点拆成两个点,将所有入边连到第一个点,第二个点连所有出边,中间连流量为权值的边,代表割掉这个点的代价。源点向dp[i]=1的位置连 $\infty$ 的边,dp[i]=Max的位置向汇点连 $\infty$ 的边。这样求最小割就就行了,但我们还需要考虑字典序最小。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc 2-sat

Fuler Circu

bipartite

CI . . . . . .

opaning rice.

\_\_\_

minimum cut maximum flow 先用 $O(n^2)$ 的dp做最长上升子序列,如果i < j, dp[j] = dp[i] + 1,则由i向j连边。这样我们得到一个DAG,我们需要删掉权值和最小的点,使得DAG中最长链的长度减少1。

将每个点拆成两个点,将所有入边连到第一个点,第二个点连所有出边,中间连流量为权值的边,代表割掉这个点的代价。源点向dp[i]=1的位置连 $\infty$ 的边,dp[i]=Max的位置向汇点连 $\infty$ 的边。这样求最小割就就行了,但我们还需要考虑字典序最小。

一种方法是按 $C_i$ 从小到大确定是否可能在割上,如果可能,则将它加入答案,并且将这个点删去。但此时残量网络会发生改变,而如果重新做最小割又太慢了.

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2-sat

Euler Circu

Caladian

bipartite

Shortest Pat

Spanning Trees

Match

Flows

minimum cut maximum flov mcmf 先用 $O(n^2)$ 的dp做最长上升子序列,如果i < j, dp[j] = dp[i] + 1,则由i向j连边。这样我们得到一个DAG,我们需要删掉权值和最小的点,使得DAG中最长链的长度减少1。

将每个点拆成两个点,将所有入边连到第一个点,第二个点连所有出边,中间连流量为权值的边,代表割掉这个点的代价。源点向dp[i]=1的位置连 $\infty$ 的边,dp[i]=Max的位置向汇点连 $\infty$ 的边。这样求最小割就就行了,但我们还需要考虑字典序最小。

一种方法是按 $C_i$ 从小到大确定是否可能在割上,如果可能,则将它加入答案,并且将这个点删去。但此时残量网络会发生改变,而如果重新做最小割又太慢了.

于是有一种退流的技巧:从这个点向源点和汇点分别做最小割,就 能将原来流到这个点的流量退回去。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

2 ....

Euler Circi

Coloring

k-colorin

Shortest Path

c . . . . .

Spanning Trees

Elour

minimum cut
maximum flow
mcmf

对于一个二分图,定义最小k-点覆盖为一个最小的边集,使得所有点被覆盖至少k次。设Mindeg为所有点度数的最小值,对所有 $k \in [0, Mindeg]$ ,求最小k点覆盖的大小,并输出方案。

 $n,m \le 2 \times 10^3$ 

图论选讲

dy0607

onnectivity

SCC

DCC

2=5dt

Euler Circu

hinartit

k-coloring

Shortest Pat

Spanning Tree

Spanning rice

Match

Flows

minimum cut

maximum flow

回忆一下正常的最小点覆盖是怎么做的,它等于n-最大匹配数。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2 500

Euler Circu

bipartite

k-colorin

Shortest Path

Spanning Trees

. . . . . .

Flow

minimum cut
maximum flow
mcmf

回忆一下正常的最小点覆盖是怎么做的,它等于n—最大匹配数。

这里我们仍然用最大匹配的建边,只不过源点到每个点的边以及每个点到汇点的边的流量上限变为k。答案是nk—最大流。

$$O((n+m)^2)$$

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc

2-sat

Euler Circ

\_\_\_\_

bipartite

Siloitese i di

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 我们称一个串是"反回文"的,当且仅当 $\forall i \in [1, n], S_i \neq S_{n+1-i}$ .

给出一个串s,你需要找到它的一个排列t,满足t是反回文的。给出 $w_i$ ,定义t的优美度为 $\sum_{i=1}^n [s_i=t_i]w_i$ 。输出满足条件的情况下优美度的最大值。

串中仅包含小写字母, $n \leq 100$ ,n为偶数,保证有解。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

2=5dL

Euler Circu

Coloring

bipartit

Shortest Pat

Spanning Tree

Spanning free

Elour

mcmf

minimum cut maximum flov 对于每个字母建一个点,由源点向它连流量为出现次数的边,费用为0;然后对于每对对称的位置建一个点,由它向汇点连流量为2的边,费用为0.

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc

2-sat

Euler Circu

bipartite

cı . . . . . . . .

c . . .

Spanning Tree

Elour

minimum cut maximum flow 对于每个字母建一个点,由源点向它连流量为出现次数的边,费用为0;然后对于每对对称的位置建一个点,由它向汇点连流量为2的边,费用为0.

每个字母c到每对位置(i, n+1-i)之间连边,流量为1(这里保证了串是反回文的),费用需要进行讨论:

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc bcc

Euler Circui

Coloring bipartite

Shortest Pat

Spanning Trees

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 对于每个字母建一个点,由源点向它连流量为出现次数的边,费用为0;然后对于每对对称的位置建一个点,由它向汇点连流量为2的边,费用为0.

每个字母c到每对位置(i,n+1-i)之间连边,流量为1(这里保证了串是反回文的),费用需要进行讨论:

- 否则费用为0.

### 图论选讲

### dy0607

Connectivity scc

- . . . .

Euler Circu

Coloring bipartite

k-coloring

SHORIEST FAL

Spanning Trees

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 对于每个字母建一个点,由源点向它连流量为出现次数的边,费用为0;然后对于每对对称的位置建一个点,由它向汇点连流量为2的边,费用为0.

每个字母c到每对位置(i,n+1-i)之间连边,流量为1(这里保证了串是反回文的),费用需要进行讨论:

- 否则费用为0.

求最小费用最大流即可,对于中间的边费用都加上一个较大的 值K避免负权,最后答案为nK—最小费用。

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Edici Circi

bipartite

. .

Shortest Fati

Spanning Trees

Matchings

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 共有n种不同的菜品,有 $p_i$ 个同学点了第i种菜品,有m个厨师来制作这些菜品。当所有的同学点餐结束后,菜品的制作任务就会分配给每个厨师。然后每个厨师就会同时开始做菜。厨师们会按照要求的顺序进行制作,并且每次只能制作一人份。第i个厨师制作第j种菜品的时间记为t[i][j]。

如果一个同学点的菜是某个厨师做的第k道菜,则他的等待时间就 是这个厨师制作前k道菜的时间之和。最小化总等待时间。

设同学总数为 $p, p \le 800, n \le 40, m \le 100, t_{i,j} \le 10^3.$ 

#### 图论选讲

dy0607

Connectivit

bcc

Eulei Circu

bipartit

k-colorii

Shortest Pat

Spanning Trees

. . . . . .

Flows

minimum cut maximum flow mcmf 总等待时间比较棘手,可以这样来看:某个厨师做第最后一道菜的时间是 $t_{i,j}$ ,倒数第二道菜的时间为 $2t_{i,j}$ ,倒数第三道为 $3t_{i,j}$ …这样我们就是最小化做菜的总时间。

### 图论选讲

dy0607

Connectivity scc bcc

Fuler Circui

Coloring bipartite

Chartest Dath

C----:-- T---

Spanning Trees

Flows

minimum cut maximum flow 总等待时间比较棘手,可以这样来看:某个厨师做第最后一道菜的时间是 $t_{i,j}$ ,倒数第二道菜的时间为 $2t_{i,j}$ ,倒数第三道为 $3t_{i,j}$ ...这样我们就是最小化做菜的总时间。

对于每个厨师建p个点,第i个点代表这个厨师的倒数第i道菜,并由源点向它们分别连上限为1的边;对于每种菜品建一个点,向汇点连 $p_i$ 的边。然后第i个厨师的第k个点向第j种菜品连流量为1,费用为 $k \times t_{i,j}$ 的边。答案是满流的最小费用。

### 用论铣讲

dy0607

mcmf

总等待时间比较棘手,可以这样来看:某个厨师做第最后一道菜的 时间是 $t_{i,i}$ , 倒数第二道菜的时间为 $2t_{i,i}$ , 倒数第三道为 $3t_{i,i}$ ...这样 我们就是最小化做菜的总时间。

对于每个厨师建p个点,第i个点代表这个厨师的倒数第i道菜,并 由源点向它们分别连上限为1的边:对于每种菜品建一个点,向汇 点连 $p_i$ 的边。然后第i个厨师的第k个点向第i种菜品连流量为1,费 用为 $k \times t_{i,i}$ 的边。答案是满流的最小费用。

但这样复杂度难以接受,这里有另一个技巧。一开始我们只对每个 厨师建一个点,增广一次后,会有某个厨师的第一个点被占用,我 们再给这个厨师开第二个点。这样点数就大大减少了,复杂度大概 是 $O(p^2mk)$ 的。

### 图论选讲

dy0607

nnectivity

SCC

bcc

Euler Circu

Coloring

bipartit

k-coloring

Snortest Patr

Spanning Tree

. . . . . .

E1----

minimum cut

maximum flow

mcmf

# **Thanks**