习题 1–1

1. 设 $A=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty)$,

$A\cap B=[-10, -5)$,

$A\backslash B=(-\infty, -10)\cup(5, +\infty)$,

$A\backslash(A\backslash B)=[-10, -5)$.

2. 设A、B是任意两个集合, 证明对偶律: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明 因为

$$x\in(A\cap B)^C \Leftrightarrow x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\notin A \text{或} x\notin B \Leftrightarrow x\in A^C \text{或} x\in B^C \Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C,$$

所以 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f : X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 因为

$$y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B, \text{使 } f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow(\text{因为 } x\in A \text{ 或 } x\in B)\ y\in f(A) \text{或 } y\in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B),$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2)因为

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B$, 使 $f(x)=y\Leftrightarrow$(因为 $x\in A$ 且 $x\in B$) $y\in f(A)$且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$,

所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射$f : X\to Y$, 若存在一个映射$g: Y\to X$, 使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$, 其中I_X、I_Y分别是X、Y上的恒等映射, 即对于每一个$x\in X$, 有$I_X x=x$; 对于每一个$y\in Y$, 有$I_Y y=y$. 证明: f是双射, 且g是f的逆映射: $g=f^{-1}$.

证明 因为对于任意的$y\in Y$, 有$x=g(y)\in X$, 且$f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 即Y中任意元素都是X中某元素的像, 所以f为X到Y的满射.

又因为对于任意的$x_1\neq x_2$, 必有$f(x_1)\neq f(x_2)$, 否则若$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g[f(x_1)]=g[f(x_2)]\Rightarrow x_1=x_2$.

因此 f 既是单射, 又是满射, 即 f 是双射.

对于映射$g: Y\to X$, 因为对每个$y\in Y$, 有$g(y)=x\in X$, 且满足$f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 按逆映射的定义, g是f的逆映射.

5. 设映射 $f : X\to Y$, $A\subset X$. 证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当f是单射时, 有$f^{-1}(f(A))=A$.

证明 (1)因为$x\in A\Rightarrow f(x)=y\in f(A)\Rightarrow f^{-1}(y)=x\in f^{-1}(f(A))$,

所以 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

(2)由(1)知$f^{-1}(f(A))\supset A$.

另一方面，对于任意的$x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow$存在$y\in f(A)$，使$f^{-1}(y)=x\Rightarrow f(x)=y$．因为$y\in f(A)$且$f$是单射，所以$x\in A$. 这就证明了$f^{-1}(f(A))\subset A$. 因此$f^{-1}(f(A))=A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;

解 由 $3x+2\geq 0$ 得 $x>-\frac{2}{3}$. 函数的定义域为$[-\frac{2}{3},+\infty)$.

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

解 由 $1-x^2\neq 0$ 得$x\neq\pm 1$. 函数的定义域为$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$.

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

解 由$x\neq 0$ 且 $1-x^2\geq 0$ 得函数的定义域$D=[-1, 0)\cup(0, 1]$.

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 由 $4-x^2>0$ 得 $|x|<2$. 函数的定义域为$(-2, 2)$.

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;

解 由 $x\geq 0$ 得函数的定义 $D=[0, +\infty)$.

(6) $y=\tan(x+1)$;

解 由 $x+1\neq\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdot\cdot\cdot)$得函数的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdot\cdot\cdot)$.

(7) $y=\arcsin(x-3)$;

解 由$|x-3|\leq 1$ 得函数的定义域 $D=[2, 4]$.

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

解 由 $3-x\geq 0$ 且 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, 3)$.

(9) $y=\ln(x+1)$;

解 由 $x+1>0$ 得函数的定义域 $D=(-1, +\infty)$.

(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

7. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(4)$f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, $x<0$ 时, $g(x)=-x$.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$;

(2)$y=x+\ln x$, $(0, +\infty)$.

证明 (1)对于任意的$x_1, x_2\in(-\infty, 1)$, 有 $1-x_1>0$, $1-x_2>0$. 因为当$x_1<x_2$时,

$$y_1-y_2=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

所以函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在区间$(-\infty, 1)$内是单调增加的.

(2)对于任意的$x_1, x_2\in(0, +\infty)$, 当$x_1<x_2$时, 有

$$y_1-y_2=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

所以函数 $y=x+\ln x$ 在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l, l)$内的奇函数, 若 $f(x)$在$(0, l)$内单调增加, 证明 $f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

证明 对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$且$x_1<x_2$, 有$-x_1, -x_2\in(0, l)$且$-x_1>-x_2$.

因为 $f(x)$在$(0, l)$内单调增加且为奇函数, 所以

$$f(-x_2)<f(-x_1),\ -f(x_2)<-f(x_1),\ f(x_2)>f(x_1),$$

这就证明了对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$, 有$f(x_1)< f(x_2)$, 所以$f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l, l)$上的, 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设 $F(x)=f(x)+g(x)$. 如果 $f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果 $f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$. 如果 $f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$是偶函数, 而 $g(x)$是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)$y=x^2(1-x^2)$;

(2)$y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4)$y=x(x-1)(x+1)$;

(5)$y=\sin x-\cos x+1$;

(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1)因为$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 所以$f(x)$是偶函数.

(2)由$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$可见$f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

(4)因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$是奇函数.

(5)由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(6)因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数, 指出其周期:

(1)$y=\cos(x-2)$;

(2)$y=\cos 4x$;

(3)$y=1+\sin \pi x$;

(4)$y=x\cos x$;

(5)$y=\sin^2 x$.

解 (1)是周期函数, 周期为 $l=2\pi$.

(2)是周期函数, 周期为 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3)是周期函数, 周期为 $l=2$.

(4)不是周期函数.

(5)是周期函数, 周期为 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$;

(4) $y=2\sin 3x$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1)由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得$x=y^3-1$, 所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为$y=x^3-1$.

(2)由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$, 所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3)由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$, 所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4)由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$, 所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5)由$y=1+\ln(x+2)$得$x=e^{y-1}-2$, 所以$y=1+\ln(x+2)$的反函数为$y=e^{x-1}-2$.

(6)由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$, 所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数 $f(x)$在 X 上有界, 则存在正数 M, 使$|f(x)|\le M$, 即$-M\le f(x)\le M$. 这这就证明了 $f(x)$在 X 上有下界$-M$ 和上界 M.

再证充分性. 设函数$f(x)$在X上有下界K_1和上界K_2, 即$K_1\le f(x)\le K_2$. 取$M=\max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $-M\le K_1\le f(x)\le K_2\le M$,

即 $|f(x)|\le M$.

这就证明了 $f(x)$在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值x_1和x_2的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\frac{\pi}{8,}$, $x_2=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2= 2$;

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1 =0$, $x_2=1$;

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解 (1)$y=\sin^2 x$, $y_1=\sin^2\frac{\pi}{6}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $y_2=\sin^2\frac{\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$.

(2)$y=\sin 2x$, $y_1=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$, $y_1=e^{0^2}=1$, $y_2=e^{1^2}=e$.

(5)$y=e^{2x}$, $y_1=e^{2\cdot 1}=e^2$, $y_2=e^{2\cdot(-1)}=e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$的定义域 $D=[0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;

(4)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1)由 $0\le x^2\le 1$ 得$|x|\le 1$, 所以函数$f(x^2)$的定义域为$[-1, 1]$.

(2)由 $0\le\sin x\le 1$ 得 $2n\pi\le x\le(2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2\cdots$), 所以函数 $f(\sin x)$的定义域为

$$[2n\pi, (2n+1)\pi]\ (n=0, \pm 1, \pm 2\cdots) .$$

(3)由 $0\le x+a\le 1$ 得$-a\le x\le 1-a$, 所以函数 $f(x+a)$的定义域为$[-a, 1-a]$.

(4)由 $0\le x+a\le 1$ 且 $0\le x-a\le 1$ 得: 当$0<a\le\frac{1}{2}$时, $a\le x\le 1-a$; 当 $a>\frac{1}{2}$时, 无解. 因此当$0<a\le\frac{1}{2}$时函数的定义域为$[a, 1-a]$, 当 $a>\frac{1}{2}$时函数无意义.

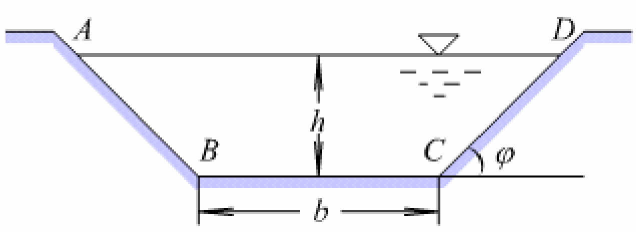
18. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |e^x|<1\\ 0 & |e^x|=1\\ -1 & |e^x|>1\end{cases}$, 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$.

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1 & |x|<1\\ e^0 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$, 即 $g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角$\varphi=40°$(图 1–37). 当过水断面ABCD的面积为定值S_0时，求湿周L(L=AC+CD+DB)与水深h之间的函数关系式，并说明定义域.

图 1–37



解 $Ab=DC=\frac{h}{\sin 40^\circ}$，又从 $\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]=S_0$ 得 $BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$, 所以

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h\,.$$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h>0,\ \frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0$$

确定, 定义域为 $0<h<\sqrt{S_0\cot 40^\circ}$.

20. 收敛音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1)将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2)将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3)某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少?

解 (1)当 $0\le x\le 100$ 时, $p=90$.

令 $0.01(x_0-100)=90-75$，得$x_0=1600$. 因此当$x\ge 1600$ 时, $p=75$.

当 $100<x<1600$ 时,

$p=90-(x-100)\times 0.01=91-0.01x$.

综合上述结果得到

$$p=\begin{cases}90 & 0\le x\le 100\\ 91-0.01x & 100<x<1600\\ 75 & x\ge 1600\end{cases}.$$

(2) $P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0\le x\le 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1600 \\ 15x & x\ge 1600 \end{cases}$.

(3) $P=31\times1000-0.01\times1000^2=21000$(元).

习题 1−2

1. 观察一般项x_n如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势, 写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$;

(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$;

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;

(5) $x_n=n(-1)^n$.

解 (1)当 $n\to\infty$时, $x_n=\frac{1}{2^n}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(2)当 $n\to\infty$时, $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3)当 $n\to\infty$时, $x_n=2+\frac{1}{n^2}\to 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})=2$.

(4)当 $n\to\infty$时, $x_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}\to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5)当$n\to\infty$时, $x_n=n(-1)^n$没有极限.

2. 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出$N$, 使当$n>N$时, x_n与其极限之差的绝对值小于正数ε, 当$\varepsilon=0.001$ 时, 求出数N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$|x_n-0|=\frac{|\cos\frac{n\pi}{2}|}{n}\le\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 要使$|x_n-0|<\varepsilon$, 只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$, 也就是$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则$\forall n>N$, 有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时, $N=[\frac{1}{\varepsilon}]=1000$.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

(1)分析 要使$|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，只须$n^2>\frac{1}{\varepsilon}$，即$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$，当$n>N$时，有$|\frac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2)分析 要使$|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}<\varepsilon$，只须$\frac{1}{4n}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{4\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{1}{4\varepsilon}]$，当$n>N$时，有$|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

(3)分析 要使$|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\frac{a^2}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4)分析 要使$|0.99\cdots9-1|=\frac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，只须$\frac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，即$n>1+\lg\frac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[1+\lg\frac{1}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|0.99\cdots9-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而

$$||u_n|-|a||\le|u_n-a|<\varepsilon.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限. 例如$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为数列$\{x_n\}$有界，所以存在M，使$\forall n\in\boldsymbol{Z}$，有$|x_n|\le M$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\boldsymbol{N}$，当$n>N$时，有$|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. 从而当$n>N$时，有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| \le M|y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$若$x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$, $x_{2k+1}\to a$ $(k\to\infty)$, 证明: $x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

证明 因为$x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$, $x_{2k+1}\to a$ $(k\to\infty)$, 所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists K_1$, 当 $2k>2K_1$时, 有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$;

$\exists K_2$,当 $2k+1>2K_2+1$ 时, 有$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$..

取$N=\max\{2K_1, 2K_2+1\}$, 只要$n>N$, 就有$|x_n-a|<\varepsilon$. 因此$x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

习题 1–3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$;

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

证明 (1)分析 $|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|$, 要使$|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 只须$|x-3|<\frac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\frac{1}{3}\varepsilon$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有$|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2)分析 $|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$, 要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只须$|x-2|<\frac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3)分析 $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|=|x-(-2)|$, 要使$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$, 只须$|x-(-2)|<\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时, 有$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4)分析 $\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2|x-(-\frac{1}{2})|$, 要使$\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 只须$|x-(-\frac{1}{2})|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$, 当$0<|x-(-\frac{1}{2})|<\delta$ 时, 有$\left|\frac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证明 (1)分析 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$, 要使$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, 只须$\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$, 即$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall \varepsilon>0, \exists X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，当$|x|>X$时，有$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2)分析 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$，要使$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即$x>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

证明 因为$\forall \varepsilon>0, \exists X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>X$时，有$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当$x\to 2$时，$y=x^2\to 4$. 问δ等于多少，使当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$?

解 由于$x\to 2$, $|x-2|\to 0$，不妨设$|x-2|<1$，即$1<x<3$. 要使$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$，只要$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002$，取$\delta=0.0002$，则当$0<|x-2|<\delta$时，就有$|x^2-4|<0.001$.

4. 当$x\to\infty$时，$y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$，问$X$等于多少，使当$|x|>X$时，$|y-1|<0.01$?

解 要使$\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\frac{4}{x^2+3}<0.01$，只$|x|>\sqrt{\frac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397}$，$X=\sqrt{397}$.

5. 证明函数$f(x)=|x|$ 当$x\to 0$时极限为零.

6. 求$f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的左、右极限，并说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

证明 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.

因为

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi(x)\ne\lim_{x\to 0^+}\varphi(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$不存在.

7. 证明: 若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的极限都存在且都等于A，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明 因为 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists X_1>0$, 使当$x<-X_1$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

$\exists X_2>0$, 使当$x>X_2$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$X=\max\{X_1, X_2\}$, 则当$|x|>X$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 即 $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 根据极限的定义证明: 函数$f(x)$当$x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设$f(x)\to A(x\to x_0)$, 则$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

因此当$x_0-\delta<x<x_0$和$x_0<x<x_0+\delta$ 时都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这说明$f(x)$当$x\to x_0$时左右极限都存在并且都等于A.

再证明充分性. 设$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$, 则$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta_1>0$, 使当$x_0-\delta_1<x<x_0$时, 有$| f(x)-A<\varepsilon$;

$\exists\delta_2>0$, 使当$x_0<x<x_0+\delta_2$时, 有$| f(x)-A|<\varepsilon$.

取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有$x_0-\delta_1<x<x_0$及$x_0<x<x_0+\delta_2$, 从而有

$$| f(x)-A|<\varepsilon,$$

即$f(x)\to A(x\to x_0)$.

9. 试给出 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

解 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理: 如果 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限存在, 则存在 $X>0$ 及 $M>0$, 使当$|x|>X$ 时, $|f(x)|<M$.

证明 设 $f(x)\to A(x\to\infty)$, 则对于$\varepsilon=1$, $\exists X>0$, 当$|x|>X$ 时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon=1$. 所以

$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

这就是说存在 $X>0$ 及 $M>0$, 使当$|x|>X$ 时, $|f(x)|<M$, 其中 $M=1+|A|$.

习题 1–4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 不一定.

例如，当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=2x$, $\beta(x)=3x$ 都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{2}{3}$，$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无穷小.

2. 根据定义证明:

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$ 当 $x\to3$ 时为无穷小;

(2) $y=x\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to0$ 时为无穷小.

证明 (1)当 $x\neq3$ 时 $|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$. 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有

$$|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to3$ 时 $y=\frac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2)当 $x\neq0$ 时 $|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|$. 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有

$$|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to0$ 时 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 为当$x\to0$ 时的无穷大. 问x应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$?

证明 分析 $|y|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|\geq\frac{1}{|x|}-2$，要使$|y|>M$，只须 $\frac{1}{|x|}-2>M$，即 $|x|<\frac{1}{M+2}$.

证明 因为$\forall M>0$, $\exists\delta=\frac{1}{M+2}$，使当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,

所以当 $x\to0$ 时，函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

取$M=10^4$，则 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$. 当 $0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$ 时，$|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1)因为 $\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$，而当 $x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 是无穷小，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$.

(2)因为 $\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$ ($x\neq1$)，而当 $x\to0$ 时 x 为无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表:

6. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是否有界？这个函数是否为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界.

这是因为$\forall M>0$，在$(-\infty, +\infty)$内总能找到这样的 x，使得$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi)=2k\pi\cos2k\pi=2k\pi\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当 k 充分大时，就有$|y(2k\pi)|>M$.

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=x\cos x$ 不是无穷大.

这是因为$\forall M>0$，找不到这样一个时刻 N，使对一切大于 N 的 x，都有$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi+\frac{\pi}{2})=(2k\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

对任何大的 N，当 k 充分大时，总有 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}>N$，但$|y(x)|=0<M$.

7. 证明: 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0, 1]$上无界，但这函数不是当$x\to0^+$时的无穷大.

证明 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0, 1]$上无界. 这是因为

$\forall M>0$，在$(0, 1]$中总可以找到点x_k，使$y(x_k)>M$. 例如当

$$x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\ (k=0, 1, 2, \cdots)$$

时，有

$$y(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

当k充分大时, $y(x_k)>M$.

当$x\to0^+$时，函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大. 这是因为

$\forall M>0$，对所有的$\delta>0$，总可以找到这样的点x_k，使 $0<x_k<\delta$，但$y(x_k)<M$. 例如可取

$$x_k=\frac{1}{2k\pi}\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当k充分大时, $x_k<\delta$，但$y(x_k)=2k\pi\sin2k\pi=0<M$.

习题 1–5

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=0$ (分子次数低于分母次数, 极限为零)

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x^2})=1\times 2=2$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\dfrac{1}{2})^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n-1)n}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{2}$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})(1+\dfrac{3}{n})=\dfrac{1}{5}$.

(14) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{0}{16}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty$ (因为分子次数高于分母次数)；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ (当$x\to 0$ 时, x^2是无穷小，而 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界变量).

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0$ (当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1–6

1. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x}=\omega\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}=3$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

(4) $\lim_{x\to 0}x\cot x$;

解 $\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

解法一 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$.

解法二 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数).

解 $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=x$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

解 $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=\left\{\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\right\}^{-1}=e^{-1}$.

(2) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

解 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\right]^2=e^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}$ (k 为正整数).

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I′.

解

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$;

证明 因为 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$,

而 $$\lim_{n\to\infty}1=1 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1,$$

由极限存在准则 I, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

证明 因为

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

(3)数列 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cdots$ 的极限存在;

证明 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$).

先证明数列$\{x_n\}$有界. 当$n=1$ 时 $x_1=\sqrt{2}<2$, 假定$n=k$时$x_k<2$, 当$n=k+1$ 时,

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2,$$

所以$x_n<2$($n=1, 2, 3, \cdots$), 即数列$\{x_n\}$有界.

再证明数列单调增.

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

而$x_n-2<0$, $x_n+1>0$，所以$x_{n+1}-x_n>0$，即数列$\{x_n\}$单调增.

因为数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以此数列是有极限的.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$；

证明 当$|x|\le 1$ 时，则有

$1+x\le 1+|x|\le (1+|x|)^n$,

$1+x\ge 1-|x|\ge (1-|x|)^n$,

从而有 $1-|x|\le \sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)=1$,

根据夹逼准则，有

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

证明 因为 $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$，所以 $1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

习题 1−7

1. 当$x\to0$时, $2x-x^2$ 与x^2-x^3相比, 哪一个是高阶无穷小?

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^2}{2-x}=0$,

所以当$x\to0$时, x^2-x^3是高阶无穷小, 即$x^2-x^3=o(2x-x^2)$.

2. 当$x\to1$时, 无穷小 $1-x$和(1)$1-x^3$, (2)$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶? 是否等价?

解　(1)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$,

所以当$x\to1$时, $1-x$和 $1-x^3$是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}(1+x)=1$,

所以当 $x\to1$ 时, $1-x$ 和 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当 $x\to0$ 时, 有:

(1) $\arctan x\sim x$;

(2) $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

证明　(1)因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\tan y}=1$(提示: 令 $y=\arctan x$, 则当 $x\to0$ 时, $y\to0$),

所以当 $x\to0$ 时, $\arctan x\sim x$.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x-1}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$,

所以当 $x\to0$ 时, $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n>m\\ \infty & n<m\end{cases}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

(4)因为

$$\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)=-2\tan x\sin^2\frac{x}{2}\sim -2x\cdot(\frac{x}{2})^2=-\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2}-1=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\sim\frac{1}{3}x^2\ (x\to 0),$$

$$\sqrt{1+\sin x}-1=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+1}\sim\sin x\sim x\ (x\to 0),$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2\cdot x}=-3.$$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性);

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\beta\sim\alpha$(对称性);

(3)若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, 则$\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明 (1) $\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$, 所以$\alpha\sim\alpha$;

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, 从而$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$. 因此$\beta\sim\alpha$;

(3) 若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, $\lim\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$. 因此$\alpha\sim\gamma$.

习题 1−8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x & -1\le x\le 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$.

解 (1)已知多项式函数是连续函数, 所以函数 $f(x)$在$[0, 1)$和$(1, 2]$内是连续的.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$.

所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, 从而函数 $f(x)$在 $x=1$ 处是连续的.

综上所述，函数 $f(x)$在$[0, 2]$上是连续函数.

(2)只需考察函数在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性.

在 $x=-1$ 处, 因为 $f(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 1=1\ne f(-1)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x=-1=f(-1)$, 所以函数在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1=f(1)$, 所以函数在 $x=1$ 处连续.

综合上述讨论, 函数在$(-\infty, -1)$和$(-1, +\infty)$内连续, 在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=k$, $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$;

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$, $x=0$;

(4) $y=\begin{cases} x-1 & x\le 1 \\ 3-x & x>1 \end{cases}$, $x=1$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在 $x=2$ 和 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=2$ 和 $x=1$ 是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$, 所以 $x=2$ 是函数的第二类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$，所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点，并且是可去间断点．在 $x=1$ 处，令 $y=-2$，则函数在 $x=1$ 处成为连续的.

(2)函数在点 $x=k\pi(k\in Z)$和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$处无定义，因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty$ $(k\neq 0)$，故 $x=k\pi(k\neq 0)$是第二类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$ $(k\in Z)$，所以 $x=0$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 是第一类间断点且是可去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$，则函数在 $x=0$ 处成为连续的;

令 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时, $y=0$，则函数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

(3)因为函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 的间断点．又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在，所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点.

(4)因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，所以 $x=1$ 是函数的第一类不可去间断点.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$.

在分段点 $x=-1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=1$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$，所以 $x=-1$ 为函数的第一类不可去间断点.

在分段点 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为函数的第一类不可去间断点.

4. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$时, $f(x)\neq 0$.

证明 不妨设 $f(x_0)>0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$，由极限的局部保号性定理，存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时 $f(x)>0$，从而当 $x\in U(x_0)$时, $f(x)>0$. 这就是说，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$时, $f(x)\neq 0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$的例子:

(1)$x=0, \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$是 $f(x)$的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;

(2)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续, 但$|f(x)|$在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义, 但仅在一点连续.

解 函数 $f(x)=\csc(\pi x)+\csc\frac{\pi}{x}$ 在点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$处是间断的, 且这些点是函数的无穷间断点.

解(2)函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbf{Q}\\ 1 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续, 但$|f(x)|=1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

解(3)函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbf{Q}\\ -x & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义, 它只在 $x=0$ 处连续.

习题 1−9

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$, 函数在$(-\infty, +\infty)$内除点 $x=2$ 和 $x=-3$ 外是连续的, 所以函数 $f(x)$的连续区间为$(-\infty, -3)$、$(-3, 2)$、$(2, +\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$.

在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty,\quad \lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

2. 设函数$f(x)$与$g(x)$在点x_0连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\},\ \psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

在点x_0也连续.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|],$$

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)+|\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0),$$

所以$\varphi(x)$在点x_0也连续.

同理可证明$\psi(x)$在点x_0也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 (1)因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数, $f(x)$在点 $x=0$ 有定义, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{0^2-2\cdot 0+5}=\sqrt{5}.$$

(2)因为函数$f(x)=(\sin 2x)^3$是初等函数, $f(x)$在点$x=\dfrac{\pi}{4}$有定义, 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3=f(\frac{\pi}{4})=(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})^3=1.$$

(3)因为函数 $f(x)=\ln(2\cos 2x)$是初等函数, $f(x)$在点 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=f(\frac{\pi}{6})=\ln(2\cos 2\cdot\frac{\pi}{6})=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5\cdot 1-4}+\sqrt{1}}=2.$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{a+a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}=1.$$

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x})=\ln 1=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$.

(5) $(\dfrac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=(1+\dfrac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}=-\frac{3}{2},$$

所以 $\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\geq 0 \end{cases}$. 应当如何选择数 a, 使得 $f(x)$成为在$(-\infty, +\infty)$内的连续函数?

解 要使函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 只须 $f(x)$在 $x=0$ 处连续, 即只须

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)=a.$$

因为 $\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}e^x=1$, $\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(a+x)=a$, 所以只须取 $a=1$.

习题 1−10

1. 证明方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设$f(x)=x^5-3x-1$, 则$f(x)$是闭区间$[1, 2]$上的连续函数.

因为$f(1)=-3$, $f(2)=25$, $f(1)f(2)<0$, 所以由零点定理, 在$(1, 2)$内至少有一点ξ $(1<\xi<2)$, 使$f(\xi)=0$, 即$x=\xi$ 是方程$x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0$, $b>0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=a\sin x+b-x$, 则 $f(x)$是$[0, a+b]$上的连续函数.

$f(0)=b$, $f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\le 0$.

若 $f(a+b)=0$, 则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根;

若 $f(a+b)<0$, 则 $f(0)f(a+b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(0, a+b)$, 使 $f(\xi)=0$, 这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根.

总之, 方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

3. 设函数 $f(x)$对于闭区间$[a, b]$上的任意两点 x、y, 恒有$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明: 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明 设x_0为(a, b)内任意一点. 因为

$$0\le\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\le\lim_{x\to x_0}L|x-x_0|=0,$$

所以 $$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0,$$

即 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

因此 $f(x)$在(a, b)内连续.

同理可证 $f(x)$在点 a 处左连续, 在点 b 处右连续, 所以 $f(x)$在$[a, b]$上连续.

因为 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 由零点定理, 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

4. 若$f(x)$在$[a, b]$上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 显然$f(x)$在$[x_1, x_n]$上也连续. 设M和m分别是$f(x)$在$[x_1, x_n]$上的最大值和最小值.

因为$x_i\in[x_1, x_n]$ $(1\le i\le n)$, 所以有$m\le f(x_i)\le M$, 从而有

$$n\cdot m\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le n\cdot M,$$

$$m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \le M\,.$$

由介值定理推论，在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\,.$$

5. 证明：若 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$必在$(-\infty, +\infty)$内有界.

证明 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，只要$|x|>X$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon\,,\ \text{即}\ A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon\,.$$

又由于 $f(x)$在闭区间$[-X, X]$上连续，根据有界性定理，存在 $M>0$，使$|f(x)|\le M$, $x\in[-X, X]$.

取 $N=\max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$，则$|f(x)|\le N$, $x\in(-\infty, +\infty)$，即 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

6. 在什么条件下，(a, b)内的连续函数 $f(x)$为一致连续？

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________的条件.

(2)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的________条件.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的________条件.

(3) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的________条件.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的________条件.

(4)$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的________条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

3. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设$f(x)=2^x+3^x-2$. 则当$x\to 0$时, 有(　　).

$(A)f(x)$与 x 是等价无穷小; $(B)f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小;

$(C)f(x)$是比 x 高阶的无穷小; $(D)f(x)$是比 x 低阶的无穷小.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

$$=\ln 2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}+\ln 3\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln 2+\ln 3\ (\text{令 } 2^x-1=t,\ 3^x-1=u)\ .$$

所以 $f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小. 故应选 B.

4. 设 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;

(4) $f(\cos x)$.

解 (1)由 $0\le e^x\le 1$ 得$x\le 0$, 即函数$f(e^x)$的定义域为$(-\infty, 0]$.

(2) 由 $0\le \ln x\le 1$ 得 $1\le x\le e$, 即函数 $f(\ln x)$的定义域为$[1, e]$.

(3) 由 $0\le \arctan x \le 1$ 得 $0\le x\le \tan 1$, 即函数 $f(\arctan x)$的定义域为$[0, \tan 1]$.

(4) 由 $0\le \cos x\le 1$ 得 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

即函数 $f(\cos x)$的定义域为$[2n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}]$, ($n$=0, ±1, ±2, · · ·).

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases},$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)\ge 0$, 所以 $f[f(x)]=f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$;

因为 $g(x)\le 0$, 所以 $g[g(x)]=0$;

因为 $g(x)\le 0$, 所以 $f[g(x)]=0$;

因为$f(x)\ge 0$, 所以$g[f(x)]=-f^2(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$.

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1)$y=|\sin x|$;

(2)$y=\sin|x|$;

(3) $y=2\sin\frac{x}{2}$.

7. 把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为α的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为 r, 高为 h, 依题意有

$$R(2\pi-\alpha)=2\pi r,\quad r=\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}=R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}.$$

圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\cdot R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi\alpha-a^2}\quad (0<\alpha<2\pi).$$

8. 根据函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 要使$|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5|<\varepsilon$, 只需$|x-3|<\varepsilon$, 取$\delta=\varepsilon$,

当 $0<|x-3|<\delta$时，就有$|x-3|<\varepsilon$，即$|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 (1)因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{2}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=e.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ (提示：用等价无穷小换).

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$，因为

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x})$$

$$=\frac{1}{3}[\ln a\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)}+\ln b\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)}+\ln c\lim_{v\to 0}\frac{1}{\ln(1+v)}]$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}\,,$$

所以 $\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$.

提示: 求极限过程中作了变换$a^x-1=t$, $b^x-1=u$, $c^x-1=v$.

(6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$, 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=e\,,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin^2 x-1)}{\cos x(\sin x+1)}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin x+1}=0\,,$$

所以 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$.

10.设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x>0\\ a+x^2 & x\le 0\end{cases}$, 要使 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 应怎样选择数 a ?

解 要使函数连续, 必须使函数在 $x=0$ 处连续.

因为 $f(0)=a$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$,

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$在 $x=0$ 处连续. 因此选取 $a=0$ 时, $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\le 0\end{cases}$, 求 $f(x)$的间断点, 并说明间断点所属类形.

解 因为函数 $f(x)$在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 是函数的一个间断点.

因为 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$ (提示 $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$),

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$ (提示 $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$),

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(x+1)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}$，

所以 x=0 也是函数的间断点，且为第一类间断点.

12. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1，\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x)=\sin x+x+1$，则函数 $f(x)$在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续.

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-1-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}$，$f(\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}$，$f(-\frac{\pi}{2})\cdot f(\frac{\pi}{2})<0$，

所以由零点定理，在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 这说明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

14. 如果存在直线 L: $y=kx+b$，使得当 $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)时，曲线 $y=f(x)$上的动点 $M(x, y)$到直线 L 的距离 $d(M, L)\to 0$，则称 L 为曲线 $y=f(x)$的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\ne 0$ 时，称 L 为斜渐近线.

(1)证明：直线 L: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}，b=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}[f(x)-kx].$$

(2)求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

证明 (1) 仅就 $x\to\infty$的情况进行证明.

按渐近线的定义, $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

必要性：设 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，

于是有 $$\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

同时有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0 \Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

充分性：如果 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$，则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0,$$

因此 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线.

(2)因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=2$,

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-2x]=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=2\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=2\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}-1=1,$$

所以曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y=2x+1$.

习题 2−1

(1) $y=x^4$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(3) $y=x^{1.6}$;

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\frac{1}{x^2}$;

(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;

(7) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$;

解 (1) $y'=(x^4)'=4x^{4-1}=4x^3$.

(2) $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y'=(x^{1.6})'=1.6x^{1.6-1}=1.6x^{0.6}$.

(4) $y'=(\frac{1}{\sqrt{x}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y'=(\frac{1}{x^2})'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$.

(6) $y'=(x^3\sqrt[5]{x})'=(x^{\frac{16}{5}})'=\frac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y'=(\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}})'=(x^{\frac{1}{6}})'=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m), 求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

解 $v=(s)'=3t^2$, $v|_{t=2}=12$(米/秒).

9. 如果 $f(x)$为偶函数, 且 $f(0)$存在, 证明 $f(0)=0$.

证明 当 $f(x)$为偶函数时, $f(-x)=f(x)$, 所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{-x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0),$$

从而有 $2f'(0)=0$, 即 $f'(0)=0$.

10. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以斜率分别为

$$k_1=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ k_2=\cos\pi=-1.$$

11. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程式.

解 $y'=-\sin x$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点 $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 处, 切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})$,

法线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{-2}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})$.

12. 求曲线$y=e^x$在点(0,1)处的切线方程.

解$y'=e^x$, $y'|_{x=0}=1$, 故在(0, 1)处的切线方程为

$y-1=1\cdot(x-0)$, 即 $y=x+1$.

13. 在抛物线$y=x^2$上取横坐标为$x_1=1$ 及$x_2=3$ 的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 $y'=2x$, 割线斜率为 $k=\frac{y(3)-y(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$.

令 $2x=4$, 得 $x=2$.

因此抛物线$y=x^2$上点(2, 4)处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1)$y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

解 (1)因为

$$y(0)=0,\ \lim_{x\to -0}y=\lim_{x\to -0}|\sin x|=\lim_{x\to -0}(-\sin x)=0,\ \lim_{x\to +0}y=\lim_{x\to +0}|\sin x|=\lim_{x\to +0}\sin x=0,$$

所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

而$y'_-(0)\neq y'_+(0)$, 所以函数在$x=0$ 处不可导.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$, 又 $y(0)=0$, 所以函数在在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以函数在点 $x=0$ 处可导, 且 $y'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$为了使函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

解 因为

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,\ \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b,\ f(1)=a+b,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处连续, 必须 $a+b=1$.

又因为当 $a+b=1$ 时

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2,\ f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处可导, 必须 $a=2$, 此时 $b=-1$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 求$f_+'(0)$及$f_-'(0)$, 又$f'(0)$是否存在?

解 因为

$$f_-'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{-x-0}{x}=-1,\ f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

而$f_-'(0)\ne f_+'(0)$, 所以$f'(0)$不存在.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时, $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$;

当 $x>0$ 时, $f(x)=x$, $f'(x)=1$;

因为 $$f_-'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x-0}{x}=1,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x-0}{x}=1,$$ 所以$f'(0)=1$, 从而

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}.$$

18. 证明: 双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

解 由$xy=a^2$得 $y=\frac{a^2}{x}$, $k=y'=-\frac{a^2}{x^2}$.

设(x_0, y_0)为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

令$y=0$, 并注意$x_0 y_0=a^2$, 解得 $x=\frac{y_0x_0^2}{a^2}+x_0=2x_0$, 为切线在x轴上的距.

令$x=0$, 并注意$x_0 y_0=a^2$, 解得 $y=\frac{a^2}{x_0}+y_0=2y_0$, 为切线在y轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2|x_0y_0|=2a^2.$$

习题 2−2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$(\cot x)'=-\csc^2 x$; $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

解 $(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

$(\csc x)'=(\frac{1}{\sin x})'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$;

(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$;

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$;

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$;

(6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\frac{\ln x}{x}$;

(8) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$;

(10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

解 (1) $y'=(\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12)'=(4x^{-5}+7x^{-4}-2x^{-1}+12)'$

$=-20x^{-6}-28x^{-5}+2x^{-2}=-\frac{20}{x^6}-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$.

(2) $y'=(5x^3-2^x+3e^x)'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=(2\tan x+\sec x-1)'=2\sec^2 x+\sec x\cdot\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=(\sin x\cdot\cos x)'=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos 2x$.

(5) $y'=(x^2\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(6) $y'=(3e^x\cos x)'=3e^x\cdot\cos x+3e^x\cdot(-\sin x)=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=(\frac{\ln x}{x})'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=(\frac{e^x}{x^2}+\ln 3)'=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=(x^2\ln x\cos x)'=2x\cdot\ln x\cos x+x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x+x^2\ln x\cdot(-\sin x)$

$2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$.

(10) $s'=(\frac{1+\sin t}{1+\cos t})'=\frac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y=\sin x-\cos x$, 求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$,求 $\frac{d\rho}{d\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$和 $f'(2)$.

解 (1)$y'=\cos x+\sin x$,

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

(2) $\frac{d\rho}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$$\frac{d\rho}{d\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\frac{\pi}{2}).$$

(3) $f'(x)=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2}{5}x$, $f'(0)=\frac{3}{25}$, $f'(2)=\frac{17}{15}$.

4. 以初速v_0竖直上抛的物体, 其上升高度s与时间t的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1)该物体的速度 $v(t)$;

(2)该物体达到最高点的时刻.

解 (1)$v(t)=s'(t)=v_0-gt$.

(2)令$v(t)=0$, 即$v_0-gt=0$, 得 $t=\frac{v_0}{g}$, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线$y=2\sin x+x^2$上横坐标为$x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 因为$y'=2\cos x+2x$, $y'|_{x=0}=2$, 又当$x=0$ 时, $y=0$, 所以所求的切线方程为

$$y=2x,$$

所求的法线方程为

$$y=-\frac{1}{2}x, \text{ 即 } x+2y=0.$$

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x+5)^4$

(2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=e^{-3x^2}$;

(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$;

(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan(x^2)$;

(8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$;

(10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^{4-1}\cdot(2x+5)'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(4-3x)'=-\sin(4-3x)\cdot(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-3x^2)'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=\left[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(a^2-x^2)'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2(x^2)\cdot(x^2)'=2x\sec^2(x^2)$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot(\arcsin x)'=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(1-2x)$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;

(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)'=\dfrac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x^2)'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y'=(e^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'=e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{x}{2})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)(3x)'$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(-\frac{1}{x^2})=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\frac{\cos 2x\cdot 2\cdot x-\sin 2x\cdot 1}{x^2}=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(a^2+x^2)']$

$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x)]=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=\frac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x+\tan x)'=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$.

(10) $y'=\frac{1}{\csc x-\cot x}\cdot(\csc x-\cot x)'=\frac{-\csc x\cot x+\csc^2 x}{\csc x-\cot x}=\csc x$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$;

(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$;

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5)$y=\sin^n x\cos nx$;

(6) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$;

(7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

(8) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

(9) $y\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y'=2\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'=2\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot(\dfrac{x}{2})'$

$$=2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}.$$

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot(\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\csc x$.

(3) $y'=\sqrt{1+\ln^2 x}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot(1+\ln^2 x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

(4) $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot(\arctan\sqrt{x})'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'$

$=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

(5) $y'=n\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot(nx)'$

$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot n$

$=n\sin^{n-1}x\cdot(\cos x\cdot\cos nx-\sin x\cdot\sin nx)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

(6) $y'=\dfrac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot(\dfrac{x+1}{x-1})'=\dfrac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(7) $y'=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(\arccos x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2}$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot[\ln(\ln x)]'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

(9) $y'=\dfrac{(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+1-x^2}}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot(\dfrac{1-x}{1+x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

9. 设函数$f(x)$和$g(x)$可导, 且$f^2(x)+g^2(x)\neq 0$, 试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[f^2(x)+g^2(x)]'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$

$=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

10. 设 $f(x)$可导, 求下列函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=f'(x^2)\cdot 2x=2x\cdot f'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$

$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x)$;

(2) $y=\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}$;

(3) $y=\mathrm{th}(\ln x)$;

(4) $y=\mathrm{sh}^3 x+\mathrm{ch}^2 x$;

(5) $y=\mathrm{th}(1-x^2)$;

(6) $y=\mathrm{arch}(x^2+1)$;

(7) $y=\mathrm{arch}(e^{2x})$;

(8) $y=\arctan(\mathrm{th}\, x)$;

(9) $y=\ln\mathrm{ch}x+\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$;

(10) $y=\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

解 (1) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot\mathrm{ch}\, x$.

(2) $y'=\mathrm{ch}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}+\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}\cdot\mathrm{sh}\, x=e^{\mathrm{ch}\, x}(\mathrm{ch}\, x+\mathrm{sh}^2 x)$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x\cdot\mathrm{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y'=3\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}\, x+2\mathrm{ch}\, x\cdot\mathrm{sh}\, x=\mathrm{sh}\, x\cdot\mathrm{ch}\, x\cdot(3\mathrm{sh}\, x+2)$.

(5) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)=\dfrac{-2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)}}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot(e^{2x})'=\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot(\mathrm{th}\,x)'=\dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}\right)}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$

$=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x}=\dfrac{1}{1+2\mathrm{sh}^2x}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\cdot(\mathrm{ch}\,x)'-\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^4x}\cdot(\mathrm{ch}^2x)'=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^4x}\cdot2\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{sh}x$

$=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}\,x\cdot(\mathrm{ch}^2x-1)}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}^3x}{\mathrm{ch}^3x}=\mathrm{th}^3x$.

(10) $y'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left[\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'$

$=\mathrm{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}\mathrm{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

12. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;

(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$;

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;

(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2x\cdot\cos(x^2)\cdot2x=\sin2x\cdot\sin(x^2)+2x\cdot\sin^2x\cdot\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x^2+4}\arctan\dfrac{x}{2}$.

(4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^n-\ln x\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y'=\dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\dfrac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$.

(6) $y'=\sec\frac{1}{x}\cdot(\cos\frac{1}{x})'=\sec\frac{1}{x}\cdot(-\sin\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$.

(7) $y'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-\sin^2\frac{1}{x})'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-2\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(x+\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin\frac{x}{2}$.

(10) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot(\frac{2t}{1+t^2})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+t^2)-2t\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}$

$=\frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$.

习题 2−3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\frac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\frac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$, $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y=x\cos x$; $y'=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos x-\sin x)$

$y''=-e^{-t}(\cos x-\sin x)+e^{-t}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} .$$

(6) $y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=-\frac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} .$$

(7) $y'=\sec^2 x$,

$y''=2\sec x\cdot(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$.

(8) $y'=\frac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=-\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$,

$$y''=-\frac{6x\cdot(x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3} .$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$$y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2} .$$

(10) $y'=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$$y''=\frac{[e^x(x-1)+e^x]\cdot x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot(2x)=e^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot(1+2x^2)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

(12) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=-\frac{1}{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2}\cdot)'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2)}}=-\frac{x}{(1+x)^2\sqrt{1+x}}.$$

2. 设$f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解$f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120(2+10)^3=207360$.

3. 若 $f''(x)$存在, 求下列函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1)$y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+2x\cdot 2xf'(x^2)=2f'(x^2)+4x^2f'(x^2)$.

(2) $y'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$,

$$y''=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

4. 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}(-\frac{y''}{(y')^3})=\frac{d}{dx}(-\frac{y''}{(y')^3})\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A、ω是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

解 $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos\omega t$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$ 就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2 A\sin\omega t=0.$$

6. 验证函数$y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda$,$C_1$, C_2是常数)满足关系式:

$$y''-\lambda^2 y=0 .$$

解 $y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$,

$y''=C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x}$.

$y''-\lambda^2 y=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-\lambda^2(C_1 e^{\lambda x}+C_2 e^{-\lambda x})$

$=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})=0$.

7. 验证函数$y=e^x\sin x$满足关系式:

$$y''-2y'+2y=0 .$$

解 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$.

$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x=0$.

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n$都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=x\ln x$;

(4) $y=x e^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1x^0=n!$.

(2) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$y''=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$,

$y'''=2^2\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})$,

$y^{(4)}=2^3\cos(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})=2^3\sin(2x+3\cdot\frac{\pi}{2})$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}]$.

(3) $y'=\ln x+1$,

$y''=\frac{1}{x}=x^{-1}$,

$y'''=(-1)x^{-2}$,

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+2)x^{-n+1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.

(4) $y'=e^x+xe^x$,

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$,

$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=ne^x+xe^x=e^x(n+x)$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求$y^{(4)}$;

(2) $y=x\,\mathrm{sh}\,x$, 求$y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$，求$y^{(50)}$.

解 (1)令$u=e^x$, $v=\cos x$, 有

$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x$;

$v'=-\sin x$, $v''=-\cos x$, $v'''=\sin x$, $v^{(4)}=\cos x$,

所以 $y^{(4)}=u^{(4)}\cdot v+4u'''\cdot v'+6u''\cdot v''+4u'\cdot v'''+u\cdot v^{(4)}$

$=e^x[\cos x+4(-\sin x)+6(-\cos x)+4\sin x+\cos x]=-4e^x\cos x$.

(2)令 $u=x$, $v=\text{sh}\, x$, 则有

$u'=1$, $u''=0$;

$v'=\text{ch}\, x$, $v''=\text{sh}\, x$, $\cdots$, $v^{(99)}=\text{ch}\, x$, $v^{(100)}=\text{sh}\, x$,

所以 $y^{(100)}=u^{(100)}\cdot v+C_{100}^{1}u^{(99)}\cdot v'+C_{100}^{2}u^{(98)}\cdot v''+\cdots C_{100}^{98}u''\cdot v^{(98)}+C_{100}^{99}u'\cdot v^{(99)}+u\cdot v^{(100)}$

$=100\text{ch}\, x+x\,\text{sh}\, x$.

(3)令$u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$;

$v^{(48)}=2^{48}\sin(2x+48\cdot\frac{\pi}{2})=2^{48}\sin 2x$,

$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x$, $v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x$,

所以 $y^{(50)}=u^{(50)}\cdot v+C_{150}^{1}u^{(49)}\cdot v'+C_{50}^{2}u^{(48)}\cdot v''+\cdots C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$

$=C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$

$=\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{28}\sin 2x+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x)$

$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x)$.

习题 2−4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$;

(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$.;

(4) $y=1-xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2yy'-2y-2xy'=0,$$

于是 $(y-x)y'=y$,

$$y'=\frac{y}{y-x}.$$

(2)方程两边求导数得

$$3x^2+3y^2y'-2ay-3axy'=0,$$

于是 $(y^2-ax)y'=ay-x^2$,

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y+xy'=e^{x+y}(1+y'),$$

于是 $(x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y$,

$$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=-e^y-xe^yy',$$

于是 $(1+xe^y)y'=-e^y$,

$$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

于是 $$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}},$$

在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处 $y'=-1$.

所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所求法线方程为

$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)$, 即 $x-y=0$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$;
(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;
(3) $y=\tan(x+y)$;
(4) $y=1+xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2x-2yy'=0,$$

$$y'=\frac{x}{y},$$

$$y''=(\frac{x}{y})'=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-x\frac{x}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2)方程两边求导数得

$$2b^2x+2a^2yy'=0,$$

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y})}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y'),$$

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}=\frac{\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)}=-1-\frac{1}{y^2},$$

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=\frac{2}{y^3}(-1-\frac{1}{y^2})=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{1-(y-1)}=\frac{e^y}{2-y},$$

$$y''=\frac{e^yy'(2-y)-e^y(-y')}{(2-y)^2}=\frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=(\frac{x}{1+x})^x$;

(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;

(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1)两边取对数得

$$\ln y=x\ln|x|-x\ln|1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\ln(1+x)-x\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是 $$y'=(\frac{x}{1+x})^x[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}].$$

(2)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{5}\ln|x-5|-\frac{1}{25}\ln(x^2+2),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}=[\frac{1}{x-5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2+2}].$$

(3)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1},$$

于是 $$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}]$$

(4)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)},$$

于是 $$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)}]=\frac{1}{4}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{2}{x}+2\cot x+\frac{e^x}{e^x-1}].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^2\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\ y=\theta\cos\theta\end{cases}$.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3b}{2a}t$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. 已知 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$,

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$, 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$, 在 t=2 处.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}$.

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}$, $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0=0$,

所求切线方程为

$$y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{, 即 } 2\sqrt{2}x+y-2=0 \text{;}$$

所求法线方程为

$$y=-\frac{1}{-2\sqrt{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{, 即 } \sqrt{2}x-4y-1=0 \text{ .}$$

(2) $y'_t=\frac{6at(1+t^2)-3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{6at}{(1+t^2)^2}$, $x'_t=\frac{3a(1+t^2)-3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{3a-3at^2}{(1+t^2)^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6at}{3a-3at^2}=\frac{2t}{1-t^2} \text{ .}$$

当 t=2 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$, $x_0=\frac{6}{5}a$, $y_0=\frac{12}{5}a$,

所求切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}(x-\frac{6}{5}a) \text{, 即 } 4x+3y-12a=0;$$

所求法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}(x-\frac{6}{5}a) \text{, 即 } 3x-4y+6a=0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t. \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t} \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，设 $f''(t)$存在且不为零.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-1}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{-\frac{2}{3}\cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$：

(1) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$.

解(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-t^3)'}{(1-t^2)'}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{1-3t^2}{-2t}\right)'}{-2t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right)'}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2) .$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2}t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}t\right)'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{1+t^2}{4t})'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s, 问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解 设波的半径为r, 对应圆面积为S, 则$S=\pi r^2$, 两边同时对t求导得

$$S_t'=2\pi rr'.$$

当t=2 时, $r=6\cdot 2=12$, $r'_t=6$,

故$S_t'|_{t=2}=2\cdot 12\cdot 6\pi=144\pi$ (米^2/秒).

11. 注水入深 8m上顶直径 8m的正圆锥形容器中, 其速率为 4m^2/min . 当水深为 5m时, 其表面上升的速度为多少?

解 水深为 h 时, 水面半径为 $r=\frac{1}{2}h$, 水面面积为 $S=\frac{1}{4}h^2\pi$,

水的体积为$V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{4}h^2\pi=\frac{\pi}{12}h^3$,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt},\ \frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

已知$h=5(m)$, $\frac{dV}{dt}=4$ (m^3/min), 因此 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}$ (m/min).

12. 溶液自深 18cm 直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 设在 t 时刻漏斗在的水深为 y, 圆柱形筒中水深为 h. 于是有

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2y=5^2h.$$

由$\frac{r}{6}=\frac{y}{18}$, 得$r=\frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi(\frac{y}{3})^2y=5^2h,$$

即 $$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3^3}y^3=5^2h.$$

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2}y^2y_t'=5^2h'.$$

当y=12 时, y'_t=−1 代入上式得

$$h_t'=\frac{-\frac{1}{3^2}\cdot 12^2\cdot(-1)}{5^2}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ \text{(cm/min)}..$$

2−7

1. 已知$y=x^3-x$, 计算在$x=2$处当Δx分别等于1, 0.1, 0.01时的Δy及dy.

解 $\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=1}=[(2+1)^3-(2+1)]-(2^3-2)=18$,

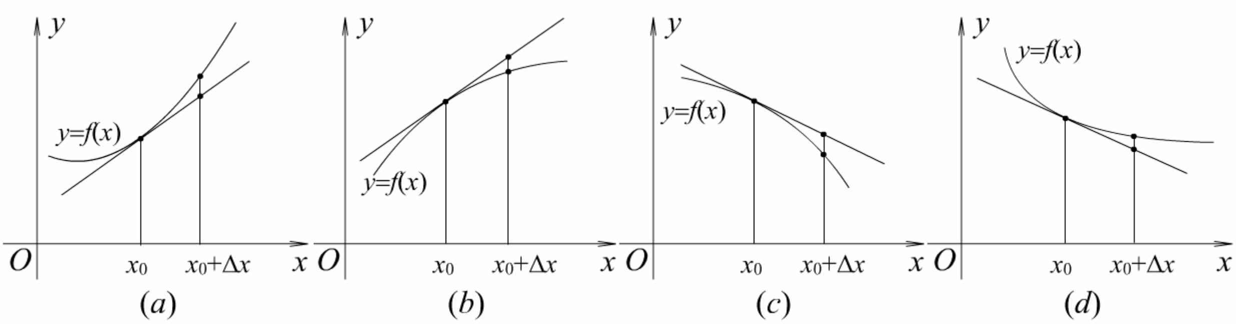
$dy|_{x=2,\ \Delta x=1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=1}=11$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=[(2+0.1)^3-(2+0.1)]-(2^3-2)=1.161$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=1.1$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=[(2+0.01)^3-(2+0.01)]-(2^3-2)=0.110601$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=0.11$.



2. 设函数$y=f(x)$的图形如图所示, 试在图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点x_0的dy、Δy及$\Delta y-dy$并说明其正负.

解 $(a)\Delta y>0$, $dy>0$, $\Delta y-dy>0$.

$(b)\Delta y>0$, $dy>0$, $\Delta y-dy<0$.

$(c)\Delta y<0$, $dy<0$, $\Delta y-dy<0$.

$(d)\Delta y<0$, $dy<0$, $\Delta y-dy>0$.

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$;

(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2e^{2x}$;

(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A, ω, φ是常数).

解 (1)因为 $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $dy=(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

(2)因为 $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$, 所以 $dy=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$.

(3)因为 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$，所以 $dy=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

(4) $dy=y'dx=[\ln^2(1-x)]'dx=[2\ln(1-x)\cdot\dfrac{-1}{(1-x)}]dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx$.

(5)$dy=y'dx=(x^2e^{2x})'dx=(2x\,e^{2x}+2\,x^2e^{2x})dx=2x(1+x)\,e^{2x}$.

(6) $dy=y'dx=[e^{-x}\cos(3-x)]dx=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$.

(7) $dy=y'dx=(\arcsin\sqrt{1-x^2})'dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot(-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$.

(8) $dy=d\tan^2(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)d\tan(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)d(1+2x^2)$

$=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x\,dx=8x\cdot\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)dx$.

(9) $dy=d\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})^2}d(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})$

$=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})^2}\cdot\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx=-\dfrac{4x}{1+x^4}dx$.

(10) $dy=d[A\sin(\omega t+\varphi)]=A\cos(\omega t+\varphi)d(\omega t+\varphi)=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dx$.

4. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立:

(1) $d(\qquad)=2dx$;

(2) $d(\qquad)=3xdx$;

(3) $d(\qquad)=\cos tdt$;

(4) $d(\qquad)=\sin\omega xdx$;

(5) $d(\qquad)=\dfrac{1}{x+1}dx$;

(6) $d(\qquad)=e^{-2x}dx$;

(7) $d(\qquad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(8) $d(\qquad)=\sec^2 3xdx$.

解 (1) $d(\,2x+C\,)=2dx$.

(2) $d(\dfrac{3}{2}x^2+C\,)=3xdx$.

(3) $d(\,\sin t+C\,)=\cos tdt$.

(4) $d(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\,)=\sin\omega xdx$.

(5) $d(\,\ln(1+x)+C\,)=\dfrac{1}{x+1}dx$.

(6) $d(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C\,)=e^{-2x}dx$.

(7) $d(\,2\sqrt{x}+C\,)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

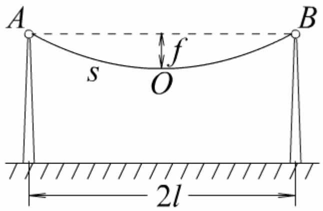
(8) $d(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\,)=\sec^2 3xdx$.

5. 如图所示的电缆 $\overset{\frown}{AOB}$ 的长为 s, 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,

则电缆长可按下面公式计算:

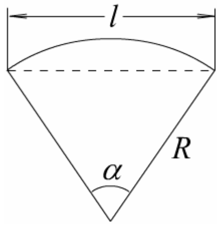
$$s=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2}),$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少?



解 $\Delta S\approx dS=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2})'df=\frac{8}{3l}f\Delta f$.

6. 设扇形的圆心角 α=60°, 半径 R=100cm(如图), 如果 R 不变, α 减少 30′, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1cm, 问扇形面积大约改变了多少?



解 (1)扇形面积 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$,

$$\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_{\alpha}d\alpha=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha .$$

将 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$, R=100, $\Delta\alpha=-30'=-\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\cdot100^2\cdot(-\frac{\pi}{360})\approx-43.63\ (\mathrm{cm}^2).$$

(2) $\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_R dR=\alpha R\Delta R$.

将 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$, R=100, ΔR=1 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{\pi}{3}\cdot100\cdot1\approx104.72\ (\mathrm{cm}^2).$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) cos29°;

(2) tan136°.

解 (1)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\cos x$ 时, 有 $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\cdot\Delta x$, 所以

$$\cos29°=\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180})\approx\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx0.87467 .$$

(2)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\tan x$ 时, 有 $\tan(x+\Delta x)\approx\tan x+\sec^2 x\cdot\Delta x$, 所以

$$\tan136°=\tan(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180})\approx\tan\frac{3\pi}{4}+\sec^2\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=-1+2\cdot\frac{\pi}{180}\approx-0.96509 .$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) arcsin0.5002;

(2) arccos 0.4995.

解 (1)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\arcsin x$ 时, 有

$$\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x\,,$$

所以

$$\arcsin 0.5002=\arcsin(0.5+0.0002)\approx\arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot 0.0002$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0002\approx 30°47''.$$

(2)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\arccos x$ 时, 有

$$\arccos(x+\Delta x)\approx\arccos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x\,,$$

所以

$$\arccos 0.4995=\arccos(0.5-0.0005)\approx\arccos 0.5-\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot(-0.0005)$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0005\approx 60°2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

(1) $\tan x\approx x$ (x 是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x)\approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$,

并计算 tan45′ 和 ln1.002 的近似值.

(1)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\tan x$, $x_0=0$, $\Delta x=x$, 则有

$\tan x=\tan(0+x)\approx\tan 0+\sec^2 0\cdot x=\sec^2 0\cdot x=x$.

(2)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$\ln(1+x)\approx\ln 1+(\ln x)'|_{x=1}\cdot x=x$.

(3)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$$\frac{1}{1+x}\approx 1+\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=1}\cdot x=1-x\,.$$

$\tan 45'\approx 45'\approx 0.01309$;

$\ln(1.002)=\ln(1+0.002)\approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;

(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1)设 $f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$,

$$\sqrt[3]{996}=\sqrt[3]{1000-4}=10\cdot\sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}}\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1000}\right)\approx 9.987\,.$$

(2)设 $f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$, 于是

$$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{64+1}=2\cdot\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64})\approx 2.0052\,.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2%以内, 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 球的体积为 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$, $dV=\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D$, 因为计算球体体积时, 要求精度在 2%以内, 所以其相对误差不超过 2%, 即要求

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\cdot\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leq 2\%\,,$$

所以 $\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leq\frac{2}{3}\%$,

也就是测量直径的相对误差不能超过 $\frac{2}{3}\%$.

12. 某厂生产如图所示的扇形板, 半径 R=200mm, 要求中心角 α 为 55°. 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α, 如果测量弦长 l 时的误差 δ_l=0.1mm, 问此而引起的中心角测量误差 δ_x 是多少?

解 由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得 $\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400}$,

当 α=55°时, $l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin 27.5°\approx 184.7$,

$$\delta'_\alpha=|\alpha'_l|\cdot\delta_l=\left|2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{l}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\right|\cdot\delta_l\,.$$

当 l=184.7, δ_l=0.1 时,

$$\delta_\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{184.7}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot 0.1\approx 0.00056\ (\text{弧度}).$$

总 习 题 二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)$f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0连续的____________条件. $f(x)$在点x_0连续是$f(x)$在点x_0可导的____________条件.

(2) $f(x)$在点x_0的左导数$f_-'(x_0)$及右导数$f_+'(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点x_0可导的_______条件.

(3) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0可微的____________条件.

解 (1)充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在; (B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在; (D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

解 正确结论是 D.

提示: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ $(\Delta x=-h)$.

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的做标x为, 于是分布在区间$[0, x]$上细棒的质量m是x的函数$m=m(x)$,应怎样确定细棒在点x_0处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$.

在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

于是, 在点x_0处的线密度为

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=m'(x_0).$$

4. 根据导数的定义, 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}$.

5. 求下列函数$f(x)$的$f_-'(0)$及$f_+'(0)$,又$f'(0)$是否存在?

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x) & x\geq 0\end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

解 (1)因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=\lim_{x\to +0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

而且$f_-'(0)=f_+'(0)$, 所以$f'(0)$存在, 且$f'(0)=1$.

(2)因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

而$f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 所以$f'(0)$不存在.

6. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, 所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续;

因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, 所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不导数.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$.

解(1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(\sin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot(\dfrac{1+x}{1-x})'=\dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\dfrac{x}{2})'+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\dfrac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'$

$\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\dfrac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}})=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln x$, $\dfrac{1}{y}y'=-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$, $y'=\sqrt[x]{x}(-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$.

8. 求下列函数的二阶导数:

(1)$y=\cos^2 x\cdot\ln x$;

(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=-2\cos x\sin x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$,

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}-2\cos x\sin x\cdot\frac{1}{x}-\cos^2 x\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $y'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$y''=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

9. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y=\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$,

$$y'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1},\quad y''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},\quad y'''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)(1+x)^{\frac{1}{m}-3},\cdots,$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)\cdots(\frac{1}{m}-n+1)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}=-1+2(1+x)^{-1}$,

$y'=2(-1)(1+x)^{-2}$, $y''=2(-1)(-2)(1+x)^{-3}$, $y'''=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$, $\cdots$,

$$y^{(n)}=2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定, 求$y''(0)$.

解　方程两边求导得

$e^y y'+y+xy'=0$, 　□□ (1)

于是　$y'=-\frac{y}{x+e^y}$;

$$y''=(-\frac{y}{x+e^y})'=-\frac{y'(x+e^y)-y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}.\quad \text{——(2)}$$

当 $x=0$ 时, 由原方程得 $y(0)=1$, 由(1)式得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$, 由(2)式得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{(a\sin^3\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\tan\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\cdot\csc\theta.$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{(\arctan t)'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{1}{t})'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线$\begin{cases}x=2e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$在 $t=0$ 相的点处的切线方程及法线方程.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}}$.

当 t=0 时, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$, x=2, y=1.

所求切线的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$;

所求法线的方程为 $y-1=2(x-2)$.

13. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过 t 小时, 两船之间的距离为 S, 则有

$$S^2=(16-8t)^2+(6t)^2,$$

$$2S\frac{dS}{dt}=-16(16-8t)+72t,$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-16(16-8t)+72t}{2S}.$$

当 t=1 时, S=10,

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8\ (\text{km/h}),$$

即下午一点正两船相离的速度为-2.8km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则有 $f(1+\Delta x)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\Delta x$, 或 $f(1+\Delta x)\approx 1+\frac{1}{3}\Delta x$ 于是

$$\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}=1+\frac{1}{3}\cdot 0.02=1.007 .$$

15. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中g=980 cm/s^2, l为摆长(单位为cm). 设原摆长为20cm, 为使周期T增大 0.05s, 摆长约需加长多少?

解 因为 $\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{gL}}\cdot\Delta L$,

所以 $\Delta L\approx\frac{0.05\sqrt{gL}}{\pi}\Big|_{L=20}=2.23\ (\text{cm})$,

即摆长约需加长 2.23cm.

习题 3−1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$上的正确性.

解 因为 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$上连续, 在$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$内可导, 且 $y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})$, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使得 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得 $\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

因此确有 $\xi=\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数$y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间[0, 1]上的正确性.

解 因为$y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间[0, 1]上连续, 在(0, 1)内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点$\xi\in(0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由$y'(x)=12x^2-10x+1=0$ 得 $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$.

因此确有 $\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间$[0, \frac{\pi}{2}]$上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间$[0, \frac{\pi}{2}]$上连续, 在$(0, \frac{\pi}{2})$可导, 且 $F'(x)=1-\sin x$ 在$(0, \frac{\pi}{2})$内不为 0, 所以由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

令 $\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}$, 即 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{2}{\pi-2}$.

化简得 $\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$. 易证 $0<\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1<1$, 所以 $\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$ 在$(0, \frac{\pi}{2})$内有解, 即确实存在 $\xi\in(0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

4. 试证明对函数$y=px^2+qx+r$应用拉格朗日中值定理时所求得的点ξ总是位于区间的正中间.

证明 因为函数$y=px^2+qx+r$在闭区间$[a, b]$上连续, 在开区间(a, b)内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点$\xi\in(a, b)$, 使得$y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$, 即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

化间上式得

$$p(b-a)(b+a)=2p\xi(b-a),$$

故$\xi=\frac{a+b}{2}$.

5. 不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程$f'(x)=0$有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于$f(x)$在$[1, 2]$上连续, 在$(1, 2)$内可导, 且$f(1)=f(2)=0$, 所以由罗尔定理可知, 存在$\xi_1\in(1, 2)$, 使$f'(\xi_1)=0$. 同理存在$\xi_2\in(2, 3)$, 使$f'(\xi_2)=0$; 存在$\xi_3\in(3, 4)$, 使$f'(\xi_3)=0$. 显然ξ_1、ξ_2、ξ_3都是方程$f'(x)=0$的根. 注意到方程$f'(x)=0$是三次方程, 它至多能有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程$f'(x)=0$的全部根.

6. 证明恒等式: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $(-1\leq x\leq 1)$.

证明 设$f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

所以$f(x)\equiv C$, 其中C是一常数.

因此$f(x)=f(0)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, 即$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

7. 若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x_0$, 证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于x_0的正根.

证明 设$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$, 由于$F(x)$在$[0, x_0]$上连续, 在$(0, x_0)$内可导, 且$F(0)=F(x_0)=0$, 根据罗尔定理, 至少存在一点$\xi\in(0, x_0)$, 使$F'(\xi)=0$, 即方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于x_0的正根.

8. 若函数$f(x)$在(a, b)内具有二阶导数, 且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中$a<x_1<x_2<x_3<b$, 证明: 在(x_1, x_3)内至少有一点ξ, 使得$f''(\xi)=0$.

证明 由于$f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续, 在(x_1, x_2)内可导, 且$f(x_1)=f(x_2)$, 根据罗尔定理, 至少存在一点$\xi_1\in(x_1, x_2)$, 使$f'(\xi_1)=0$. 同理存在一点$\xi_2\in(x_2, x_3)$, 使$f'(\xi_2)=0$.

又由于$f'(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$上连续, 在(ξ_1, ξ_2)内可导, 且$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 根据罗尔定理, 至少存

在一点$\xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(x_1, x_3)$, 使$f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$, $n>1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b) .$$

证明 设$f(x)=x^n$, 则$f(x)$在$[b, a]$上连续, 在(b, a)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(b, a)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \text{ 即} a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$

因为 $nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)< na^{n-1}(a-b)$,

所以 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n< na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} .$$

证明 设$f(x)=\ln x$, 则$f(x)$在区间$[b, a]$上连续, 在区间(b, a)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(b, a)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } \ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b) .$$

因为$b<\xi<a$, 所以

$$\frac{1}{a}(a-b)<\ln a-\ln b<\frac{1}{b}(a-b) , \text{ 即 } \frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} .$$

11. 证明下列不等式:

(1)$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$;

(2)当$x>1$ 时, $e^x>e\cdot x$.

证明 (1)设$f(x)=\arctan x$, 则$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a) ,$$

所以 $|\arctan b-\arctan a|=\frac{1}{1+\xi^2}|b-a|\le|b-a|$, 即$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

(2)设$f(x)=e^x$, 则$f(x)$在区间$[1, x]$上连续, 在区间$(1, x)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(1, x)$, 使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1), \text{ 即 } e^x-e=e^{\xi}(x-1).$$

因为$\xi>1$, 所以

$$e^x-e=e^{\xi}(x-1)>e(x-1), \text{ 即} e^x>e\cdot x.$$

12. 证明方程$x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明 设$f(x)=x^5+x-1$, 则$f(x)$是$[0, +\infty)$内的连续函数.

因为$f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(0)f(1)<0$, 所以函数在$(0, 1)$内至少有一个零点, 即$x^5+x-1=0$ 至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, $f'(x)$存在零点, 但$f'(x)=5x^4+1\ne0$, 矛盾. 这说

明方程只能有一个正根.

13. 设 $f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 证明在(a, b)内有一点ξ, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 设 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续, 在$(a, b)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 使

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),$$

即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=(b-a)\left[\begin{vmatrix} [f(a)]' & f(\xi) \\ [g(a)]' & g(\xi) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}\right].$$

因此

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明: 若函数.$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内满足关系式$f'(x)=f(x)$, 且$f(0)=1$ 则$f(x)=e^x$.

证明 令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, 则在$(-\infty, +\infty)$内有

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}\equiv 0,$$

所以在$(-\infty, +\infty)$内$\varphi(x)$为常数.

因此$\varphi(x)=\varphi(0)=1$, 从而$f(x)=e^x$.

15. 设函数$y=f(x)$在$x=0$ 的某邻域内具有n 阶导数, 且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\ (0<\theta<1).$$

证明 根据柯西中值定理

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}\ (\xi_1\text{介于 0 与}x\text{之间}),$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n\cdot 0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\ (\xi_2\text{介于 0 与}\xi_1\text{之间}),$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}=\frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}-n(n-1)\cdot 0^{n-2}}=\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}}\ (\xi_3\text{介于 0 与}\xi_2\text{之间}),$$

依次下去可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}-n(n-1)\cdots 2\cdot 0}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\ (\xi_n\text{介于 0 与}\xi_{n-1}\text{之间}),$$

所以 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$.

由于ξ_n可以表示为$\xi_n=\theta x\ (0<\theta<1)$, 所以$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\ (0<\theta<1)$.

习题 3–2

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(14) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to +0}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-2}=-\dfrac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{mx^{m-1}}{na^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2}=\dfrac{7}{2}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}=\dfrac{7}{2}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sec^2 2x\cdot 2}{\sec^2 7x\cdot 7}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 3x\cdot 3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{2\cos x(-\sin x)}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2}=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\ln(1+x^2)}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos^2 x}$ (注: $\cos x\cdot\ln(1+x^2)\sim x^2$)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{-2\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sec^2 2x\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{1}=+\infty$ (注: 当 $x\to0$ 时, $t=\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$).

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

(14)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}$,

而 $$\lim_{x\to\infty}x(\ln(1+\frac{a}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot(-\frac{a}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1}=a,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}=e^a.$$

.

(15)因为 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$$

(16)因为 $\lim\limits_{x\to+0}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}=e^{-\tan x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\tan x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim_{x\to+0}e^{-\tan x\ln x}=e^0=1.$$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$, 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在, 不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot 0=0$, 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 不能用洛必达法则.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}} & x\le 0\end{cases}$ 在点 x=0 处的连续性.

解 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$,

因为 $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}$,

而 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1]=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$.

因此 $f(x)$在点 x=0 处连续.

习题 3–3

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式$x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 因为 $f(4)=-56$,

$f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21$,

$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74$,

$f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66$,

$f^{(4)}(4)=24$,

所以按$(x-4)$的幂展开的多项式为

$$x^4-5x^3+x^2-3x+4$$

$$=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. 应用麦克劳林公式, 按x幂展开函数$f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 因为

$f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3)$,

$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2)$,

$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3)$,

$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2)$,

$f^{(5)}(x)=360(2x-3)$,

$f^{(6)}(x)=720$;

$f(0)=1$, $f'(0)=-9$, $f''(0)=60$, $f'''(0)=-270$, $f^{(4)}(0)=720$, $f^{(5)}(0)=-1080$, $f^{(6)}(0)=720$,

所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$=1-9x+30x^3-45x^3+30x^4-9x^5+x^6$.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为 $f(4)=\sqrt{4}=2$ $f'(4)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}$, $f''(4)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=4}=-\frac{1}{32}$,

$$f'''(4)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{3}{8\cdot 32},\ f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

所以 $$\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4\quad(0<\theta<1).$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解　因为

$$f'(x)=x^{-1},\ f''(x)=(-1)x^{-2},\ f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3},\ \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$f^{(k)}(2)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$$

所以

$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解　因为

$$f(x)=x^{-1},\ f'(x)=(-1)x^{-2},\ f''(x)=(-1)(-2)x^{-3},\ \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}}=-k!\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

所以
$$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n]+\frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解　因为

$$f'(x)=\sec^2 x,$$

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\cdot\tan^3 x+8\sec^4 x\cdot\tan x+8\sec^4 x\cdot\tan x=\frac{8\sin x(\sin^2 x+2)}{\cos^5 x};$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2,$$

所以 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x)+2]}{3\cos^5(\theta x)}x^4 \ (0<\theta<1).$

7. 求函数$f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式.

解 因为

$f'(x)=e^x+x\,e^x$,

$f''(x)=e^x+e^x+x\,e^x=2e^x+x\,e^x$,

$f'''(x)=2e^x+e^x+x\,e^x=3e^x+x\,e^x, \cdots$,

$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x$;

$f^{(k)}(0)=k\ (k=1, 2, \cdots, n)$,

所以 $$xe^x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots\frac{1}{(n-1)!}x^n+o(x^n)\,.$$

8. 验证当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算e^x 的近似值时, 所产生的误差小于 0.01, 并求 $\sqrt{e}$ 的近似值, 使误差小于 0.01.

解 因为公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 右端为e^x的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x)=\frac{e^{\xi}}{4!}x^4\,,$$

所以当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算e^x的误差

$$|R_3(x)|=|\frac{e^{\xi}}{4!}x^4|\le\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}(\frac{1}{2})^4\approx0.0045<0.01\,.$$

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^3\approx1.645\,.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1)$\sqrt[3]{30}$;

(2)sin 18°.

解 (1)设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则$f(x)$在$x_0=27$ 点展开成三阶泰勒公式为

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot27^{-\frac{2}{3}}(x-27)+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot27^{-\frac{5}{3}})(x-27)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})(x-27)^4\ (\xi\text{介于 } 27 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

于是 $$\sqrt[3]{30}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot 3+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot 27^{-\frac{5}{3}})\cdot 3^2+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})\cdot 3^3$$

$$\approx 3(1+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^{10}})\approx 3.10724,$$

其误差为

$$|R_3(30)|=|\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})\cdot 3^4|<\frac{1}{4!}\cdot\frac{80}{81}\cdot 27^{-\frac{11}{3}}\cdot 3^4=\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}=1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 已知

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{\sin\xi}{4!}x^4\ (\xi\text{介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

所以 $$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3\approx 0.3090,$$

其误差为

$$|R_3(\frac{\pi}{10})|=|\frac{\sin\xi}{4!}(\frac{\pi}{10})^4|<\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{4!}(\frac{\pi}{10})^4=2.03\times 10^{-4}.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解 (1) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}.$$

因为 $\sqrt[3]{1+3t}=1+t+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t}=1-\frac{1}{2}t+o(t)$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{t\to+0}\frac{[1+t+o(t)]-[1-\frac{1}{2}t+o(t)]}{t}=\lim_{t\to+0}[\frac{3}{2}+\frac{o(t)}{t}]=\frac{3}{2}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)]-[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)]}{x^3[1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+e^{-1}}=0\ .$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-[1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)]}{[(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4))]x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4-\frac{11}{24}x^6+x^2\cdot o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4!}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}-\frac{11}{24}x^2+\frac{o(x^4)}{x^2}}=\frac{\frac{3}{4!}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}\ .$$

习题 3−4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 单调性.

解 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{1}{1+x^2}\leq 0$, 且仅当 $x=0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$的单调性.

解 因为 $f'(x)=1-\sin x\geq 0$, 所以 $f(x)=x+\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;

(2) $y=2x+\frac{8}{x}\,(x>0)$;

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$;

(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\,(a.>0)$;

(7) $y=x^n e^{-x}$ $(n>0, x\geq 0)$;

(8)$y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$, 令$y'=0$ 得驻点$x_1=-1$, $x_2=3$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

可见函数在$(-\infty, -1]$和$[3, +\infty)$内单调增加, 在$[-1, 3]$内单调减少.

(2) $y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}=0$,令$y'=0$ 得驻点$x_1=2$, $x_2=-2$(舍去).

因为当 $x>2$ 时, $y>0$; 当 $0<x<2$ 时, $y'<0$, 所以函数在$(0, 2]$内单调减少, 在$[2, +\infty)$内单调增加.

(3) $y'=\frac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$, 令$y'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, 不可导点为$x=0$.

列表得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	−	不存在	−	0	+	0	−
y	↘		↘	0	↗		↘

可见函数在$(-\infty, 0)$，$(0, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$内单调减少，在$[\frac{1}{2}, 1]$上单调增加.

(4)因为 $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$，所以函数在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

(5) $y' = (x+1)^3 + 3(x-1)(x+1)^2 = 4(x-\frac{1}{2})(x+1)^2$. 因为当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $y'<0$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $y'>0$, 所以函数在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调减少，在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加.

(6) $y' = \frac{-(x-\frac{2a}{3})}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$，驻点为 $x_1 = \frac{2a}{3}$，不可导点为 $x_2 = \frac{a}{2}$, $x_3 = a$.

列表得

x	$(-\infty, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	–	不存在	+
y	↗		↗		↘		↗

可见函数在$(-\infty, \frac{a}{2})$，$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}]$, $(a, +\infty)$内单调增加，在$[\frac{2a}{3}, a)$内单调减少.

(7)$y' = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$，驻点为$x=n$. 因为当 $0<x<n$时，$y'>0$；当$x>n$时，$y'<0$，所以函数在$[0, n]$上单调增加，在$[n, +\infty)$内单调减少.

(8) $y = \begin{cases} x+\sin 2x & k\pi \le x \le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-\sin 2x & k\pi+\frac{\pi}{2} < x < k\pi+\pi \end{cases}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$,

$$y' = \begin{cases} 1+2\cos 2x & k\pi \le x \le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 1-2\cos 2x & k\pi+\frac{\pi}{2} < x < k\pi+\pi \end{cases} \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

y'是以π为周期的函数，在$[0, \pi]$内令 $y'=0$，得驻点 $x_1 = \frac{\pi}{2}$， $x_2 = \frac{5\pi}{6}$，不可导点为 $x_3 = \frac{\pi}{2}$.

列表得

x	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
y'	+	0	–	不存在	+	0	–
y	↗		↘		↗		↘

根据函数在$[0, \pi]$上的单调性及y'在$(-\infty, +\infty)$的周期性可知函数在$[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}]$上单调增加, 在$[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$上单调减少($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

4. 证明下列不等式:

(1)当$x>0$时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$;

(2)当$x>0$时, $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$;

(3)当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\sin x+\tan x>2x$;

(4)当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$;

(5)当$x>4$时, $2^x>x^2$;

证明 (1)设$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则$f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

所以$f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的, 从而当$x>0$时$f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0,$$

也就是 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2)设$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, 则$f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

所以$f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的, 从而当$x>0$时$f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0,$$

也就是 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3)设$f(x)=\sin x+\tan x-2x$, 则$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$内连续,

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{(\cos x-1)[(\cos^2 x-1)-\cos x]}{\cos^2 x}.$$

因为在$(0,\frac{\pi}{2})$内$\cos x-1<0$, $\cos^2 x-1<0$, $-\cos x<0$, 所以$f'(x)>0$, 从而$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内单调增加, 因此当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\sin x+\tan x-2x>0,$$

也就是 $\sin x+\tan x>2x$.

(4)设$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$, 则$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$内连续,

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

因为当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\tan x>x$, $\tan x+x>0$, 所以$f'(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内单调增加, 因此当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0,$$

也就是 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^2$.

(5)设$f(x)=x\ln 2-2\ln x$, 则$f(x)$在$[4, +\infty)$内连续, 因为

$$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

所以当$x>4$时, $f'(x)>0$, 即$f(x)$内单调增加.

因此当$x>4$时, $f(x)>f(4)=0$, 即$x\ln 2-2\ln x>0$, 也就是也就是$2^x>x^2$.

5. 讨论方程$\ln x=ax$ (其中$a>0$)有几个实根?

解 设$f(x)=\ln x-ax$. 则$f(x)$在$(0, +\infty)$内连续, $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$, 驻点为$x=\frac{1}{a}$.

因为当$0<x<\frac{1}{a}$时, $f'(x)>0$, 所以$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$内单调增加; 当$x>\frac{1}{a}$时, $f'(x)<0$, 所以$f(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$内单调减少. 又因为当$x\to 0$及$x\to+\infty$时, $f(x)\to-\infty$, 所以如果$f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>0$, 即$a<\frac{1}{e}$, 则方程有且仅有两个实根; 如果$f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1<0$, 即$a>\frac{1}{e}$, 则方程没有实根. 如果$f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=0$, 即$a=\frac{1}{e}$, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如$f(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上,

$$f'(x)=1+\cos x\geq 0,$$

这就明$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的. $f''(x)=-\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内不保持确定的符号,

故 $f'(x)$在$(-\infty, +\infty)$内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;

(2) $y=\text{sh}\, x$;

(3) $y=1+\dfrac{1}{x}\quad (x>0)$;

(4) $y=x\arctan x$;

解 (1)$y'=4-2x$, $y''=-2$,

因为 $y''<0$, 所以曲线在$(-\infty, +\infty)$内是凸的.

(2)$y'=\text{ch}\, x$, $y''=\text{sh}\, x$. 令 $y''=0$, 得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时, $y''=\text{sh}\, x<0$; 当 $x>0$ 时, $y''=\text{sh}\, x>0$, 所以曲线在$(-\infty, 0]$内是凸的, 在$[0, +\infty)$内是凹的.

(3) $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2}{x^3}$.

因为当 $x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$(0, +\infty)$内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$, $y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}$.

因为在$(-\infty, +\infty)$内, $y''>0$, 所以曲线 $y=x\text{arctg}\, x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1).$y=x^3-5x^2+3x+5$;

(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;

(6) $y=x^4(12\ln x-7)$,

解 (1)$y'=3x^2-10x+3$, $y''=6x-10$. 令$y''=0$, 得 $x=\dfrac{5}{3}$.

因为当 $x<\dfrac{5}{3}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\dfrac{5}{3}$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty, \dfrac{5}{3}]$ 内是是凸的, 在$[\dfrac{5}{3}, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(\dfrac{5}{3}, \dfrac{20}{27})$.

(2)$y'=e^{-x}-x\, e^{-x}$, $y''=-e^{-x}-e^{-x}+x\, e^{-x}=e^{-x}(x-2)$. 令$y''=0$, 得$x=2$.

因为当$x<2$ 时, $y''<0$; 当$x>2$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$(-\infty, 2]$内是凸的, 在$[2, +\infty)$内是凹的, 拐点为$(2, 2e-^2)$.

(3)$y'=4(x+1)^3+e^x$, $y''=12(x+1)^2+e^x$.

因为在$(-\infty, +\infty)$内, $y''>0$, 所以曲线$y=(x+1)^4+e^x$的在$(-\infty, +\infty)$内是凹的, 无拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$， $y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. 令$y''=0$，得$x_1=-1$, $x_2=1$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	ln2 拐点	$\cup$	ln2 拐点	$\cap$

可见曲线在$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$内是凸的，在$[-1, 1]$内是凹的，拐点为$(-1, \ln 2)$和$(1, \ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$, $y''=\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}(1-2x)$. 令 $y''=0$ 得，$x=\dfrac{1}{2}$.

因为当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$y''>0$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$y''<0$，所以曲线$y=e^{\mathrm{arctg}\, x}$在 $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$ 内是凹的，在$[\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 内是凸的，拐点是$(\dfrac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$, $y''=144x^2\cdot\ln x$. 令$y''=0$，得$x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时，$y''<0$；当 $x>1$ 时，$y''>0$，所以曲线在$(0, 1]$内是凸的，在$[1, +\infty)$内是凹的，拐点为$(1, -7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>(\dfrac{x+y}{2})^n$ $(x>0, y>0, x\neq y, n>1)$;

(2) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x>0, y>0, x\neq y)$.

证明 (1)设$f(t)=t^n$，则$f'(t)=nt^{n-1}$，$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 因为当$t>0$ 时，$f''(t)>0$，所以曲线$f(t)=t^n$在区间$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义，对任意的$x>0$, $y>0$, $x\neq y$有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n.$$

(2)设$f(t)=e^t$，则$f'(t)=e^t$，$f''(t)=e^t$. 因为$f''(t)>0$，所以曲线$f(t)=e^t$在$(-\infty, +\infty)$内是凹的. 由定义，对任意的$x, y\in(-\infty, +\infty)$, $x\neq y$有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y).$$

(3)设 $f(t)=t\ln t$，则 $f'(t)=\ln t+1$, $f''(t)=\frac{1}{t}$.

因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以函数 $f(t)=t\ln t$ 的图形在$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的 $x>0, y>0, x\neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

10. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证明 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}$.

令$y''=0$, 得$x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$.

例表得

x	$(-\infty. -1)$	-1	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$-$	0	+	0	$-$	0	+
y	$\cap$	-1	$\cup$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}$	$\cap$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}$	$\cup$

可见拐点为$(-1, -1)$, $(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})})$, $(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})})$. 因为

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},\quad \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

所以这三个拐点在一条直线上.

11. 问a、b为何值时, 点$(1, 3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点?

解 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$. 要使$(1, 3)$成为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点, 必须$y(1)=3$ 且$y''(1)=0$, 即$a+b=3$ 且 $6a+2b=0$, 解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

12. 试决定曲线$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的a、b、c、d, 使得$x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$为拐点, 且点$(-2, 44)$在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$. 依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1$, $b=-3$, $c=-24$, $d=16$.

13. 试决定$y=k(x^2-3)^2$中k的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解$y'=4kx^3-12kx$, $y''=12k(x-1)(x+1)$. 令$y''=0$, 得$x_1=-1$, $x_2=1$.

因为在$x_1=-1$ 的两侧y''是异号的, 又当$x=-1$ 时$y=4k$, 所以点$(-1, 4k)$是拐点.

因为 $y'(-1)=8k$, 所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1)$. 要使法线过原点, 则$(0, 0)$应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

同理, 因为在$x_1=1$ 的两侧y''是异号的, 又当$x=1$ 时$y=4k$, 所以点$(1, 4k)$也是拐点.

因为 $y'(1)=-8k$, 所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点, 则$(0, 0)$应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续导数, 如果$f''(x_0)=0$, 而$f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$是否为拐点? 为什么?

解 不妨设$f'''(x_0)>0$. 由$f'''(x)$的连续性, 存在x_0的某一邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在此邻域内有$f'''(x)>0$. 由拉格朗日中值定理, 有

$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0)$ (ξ介于x_0与x之间),

即 $f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0)$.

因为当$x_0-\delta<x<x_0$时, $f''(x)<0$; 当$x_0<x<x_0+\delta$时, $f''(x)>0$, 所以$(x_0, f(x_0))$是拐点.

习题 3−5

1. 求函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$;

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y=x+\tan x$.

解 (1)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)$, 驻点为$x_1=-1$, $x_2=3$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	17 极大值	↘	−47 极小值	↗

可见函数在 $x=-1$ 处取得极大值 17, 在 $x=3$ 处取得极小值−47.

(2)函数的定义为$(-1, +\infty)$, $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$, 驻点为 $x=0$. 因为当$-1<x<0$ 时, $y'<0$; 当 $x>0$ 时, $y'>0$, 所以函数在 $x=0$ 处取得极小值, 极小值为 $y(0)=0$.

(3)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$,

$$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1),\ y''=-12x^2+4,$$

令$y'=0$, 得$x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

因为 $y''(0)=4>0$, $y''(-1)=-8<0$, $y''(1)=-8<0$, 所以 $y(0)=0$ 是函数的极小值, $y(-1)=1$ 和 $y(1)=1$ 是函数的极大值.

(4)函数的定义域为$(-\infty, 1]$,

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)},$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$.

因为当 $x<\frac{3}{4}$ 时, $y'>0$; 当 $\frac{3}{4}<x<1$ 时, $y'<0$, 所以 $y(1)=\frac{5}{4}$ 为函数的极大值.

(5)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\frac{-5(x-\frac{12}{5})}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$, 驻点为 $x=\frac{12}{5}$.

因为当 $x<\frac{12}{5}$ 时, $y'>0$; 当 $x>\frac{12}{5}$ 时, $y'<0$, 所以函数在 $x=\frac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y(\frac{12}{5})=\frac{\sqrt{205}}{10}$.

(6)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为$x_1=0$, $x_2=-2$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$\frac{8}{3}$极小值	↗	4极大值	↘

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$y'=e^x(\cos x-\sin x)$, $y''=-e^x\sin x$.

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi$, $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

因为 $y''(\frac{\pi}{4}+2k\pi)<0$, 所以 $y(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极大值.

因为 $y''[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]>0$, 所以 $y[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]=-e^{\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极小值.

(8)函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为$(0, +\infty)$,

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=e$.

因为当 $x<e$ 时, $y'>0$; 当 $x>e$ 时, $y'<0$, 所以 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为函数 $f(x)$的极大值.

(9)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$, $y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为 $y'<0$, 所以函数在$(-\infty, +\infty)$是单调减少的, 无极值.

(10)函数 $y=x+\text{tg}\, x$ 的定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

因为$y'=1+\sec^2 x>0$, 所以函数$f(x)$无极值.

2. 试证明: 如果函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件$b^2-3ac<0$, 那么这函数没有极值 .

证明$y'=3a x^2+2b x+c$. 由$b^2-3ac<0$, 知$a\neq0$. 于是配方得到

$$y'=3a x^2+2b x+c=3a(x^2+\frac{2b}{3a}x+\frac{c}{3a})=3a(x^2+\frac{b}{3a})^2+\frac{3ac-b^2}{3a},$$

因 $3ac-b^2>0$, 所以当$a>0$ 时, $y'>0$; 当$a<0$ 时, $y'<0$. 因此$y=ax^3+bx^2+cx+d$是单调函数, 没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$, $f''(x)=-a\sin x-3\sin x$.

要使函数 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 必有 $f'(\frac{\pi}{3})=0$, 即 $a\cdot\frac{1}{2}-1=0$, $a=2$.

当 $a=2$ 时, $f''(\frac{\pi}{3})=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0$. 因此, 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 而且取得极大值, 极大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\leq x\leq 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\leq x\leq 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\leq x\leq 1$.

解 (1)$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$, 令$y'=0$, 得$x_1=0$, $x_2=1$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5,\ y(0)=0,\ y(1)=-1,\ y(4)=80,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-1)=-5$, 最大值为 $y(4)=80$.

(2)$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$, 令$y'=0$, 得$x_1=0$, $x_2=-2$(舍去), $x_3=2$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5,\ y(0)=2,\ y(2)=-14,\ y(3)=11,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(2)=-14$, 最大值为 $y(3)=11$.

(3) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, 令 $y'=0$, 得 $x=\frac{3}{4}$. 计算函数值得

$$y(-5)=-5+\sqrt{6},\ \ y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4},\ y(1)=1,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$，最大值为 $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$.

5. 问函数$y=2x^3-6x^2-18x-7(1\le x\le 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$, 函数$f(x)$在 $1\le x\le 4$ 内的驻点为$x=3$.
比较函数值:

$$f(1)=-29,\quad f(3)=-61,\quad f(4)=-47,$$

函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=-29$.

6. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}$ $(x<0)$在何处取得最小值？

解 $y'=2x+\frac{54}{x^2}$，在$(-\infty, 0)$的驻点为 $x=-3$. 因为

$$y''=2-\frac{108}{x^3},\quad y''(-3)=2+\frac{108}{27}>0,$$

所以函数在 $x=-3$ 处取得极小值. 又因为驻点只有一个, 所以这个极小值也就是最小值, 即函数在 $x=-3$ 处取得最小值, 最小值为 $y(-3)=27$.

7. 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ $(x\ge 0)$在何处取得最大值？

解 $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在$(0, +\infty)$内的驻点为 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时 $y'<0$, 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值. 又因为函数在$(0, +\infty)$内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌20cm长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

解 设宽为 x 长为 y, 则 $2x+y=20$, $y=20-2x$, 于是面积为

$$S=xy=x(20-2x)=20x-2x^2.$$

$$S'=20-4x=4(10-x),\ S''=-4.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=10$.

因为 $S''(10)-4<0$, 所以 $x=10$ 为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为 5 米, 长为 10 米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V, 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解 由$V=\pi r^2h$, 得$h=V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

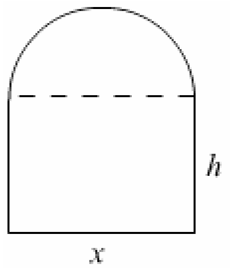
$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}\ (0<x<+\infty),$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}.$$

令 $S'=0$，得驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

因为 $S''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}>0$，所以 S 在驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值，也就是最小值. 这时相应的高为 $h=\dfrac{V}{\pi r_0^2}=2r$. 底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图)，截面的面积为 5m^2，问底宽x为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？



解 设矩形高为 h ，截面的周长 S，则 $xh+\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{x}{2})^2\pi=5$，$h=\dfrac{5}{x}-\dfrac{\pi}{8}x$. 于是

$$S=x+2h+\frac{x\pi}{2}=x+\frac{\pi}{4}x+\frac{10}{x}\ (0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

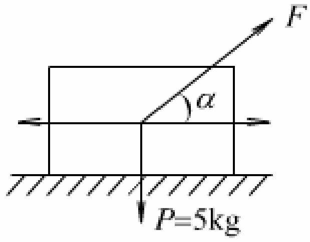
$$S'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$.

因为 $S''=\dfrac{20}{x^3}>0$，所以 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，同时也是最小值点.

因此底宽为 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

11. 设有重量为 5kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数μ=0.25，问力 F 与水平线的交角α为多少时，才可使力 F 的大小为最小？



解 由 $F\cos\alpha=(m-F\sin\alpha)\mu$ 得

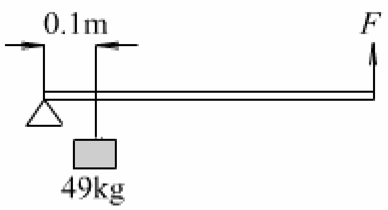
$$F=\frac{\mu m}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\ (0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}),$$

$$F'=\frac{\mu m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2},$$

驻点为 $\alpha=\arctan\mu$.

因为 F 的最小值一定在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内取得，而 F 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内只有一个驻点 $\alpha=\arctan\mu$，所以 $\alpha=\arctan\mu$ 一定也是 F 的最小值点. 从而当 $\alpha=\arctan 0.25=14°$ 时，力 F 最小.

12. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为 5kg/m，求最省力的杆长?



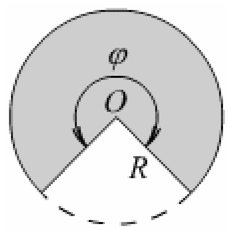
解 设杆长为 x (m)，加于杠杆一端的力为 F，则有

$$xF=\frac{1}{2}x\cdot 5x+49\cdot 0.1\text{，即 }F=\frac{5}{2}x+\frac{4.9}{x}\ (x>0)\ .$$

$$F'=\frac{5}{2}-\frac{4.9}{x^2},$$

驻点为 $x=1.4$. 由问题的实际意义知，F 的最小值一定在$(0, +\infty)$内取得，而 F 在$(0, +\infty)$内只有一个驻点 $x=1.4$，所以 F 一定在 $x=1.4m$ 处取得最小值，即最省力的杆长为 $1.4m$.

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图)，问留下的扇形的中心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大?



解 漏斗的底周长 l、底半径 r、高 h 分别为

$$l=R\cdot\varphi,\ \ r=\frac{R\varphi}{2\pi},\ \ h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\ .$$

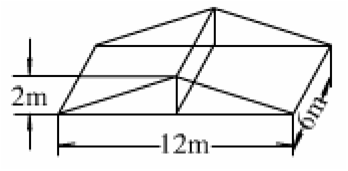
漏斗的容积为

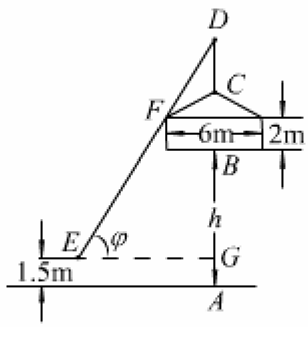
$$V=\frac{1}{3}hr^2\pi=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\quad (0<\varphi<2\pi).$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{\varphi(8\pi^2-3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}\text{，驻点为 }\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\ .$$

由问题的实际意义，V 一定在$(0, 2\pi)$内取得最大值，而 V 在$(0, 2\pi)$内只有一个驻点，所以该驻点一定也是最大值点. 因此当 $\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5m，吊臂长 15m，现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架，水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图)，问能否吊得上去?





解 设吊臂对地面的倾角为φ时，屋架能够吊到的最大高度为 h. 在直角三角形ΔEDG中

$$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi,$$

故

$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}.$$

令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx54°$.

因为 $h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$，所以$\varphi=54°$为极大值点，同时这也是最大值点.

当$\varphi=54°$时，$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}\approx7.5$ m.

所以把此屋最高能水平地吊至 7. 5m 高，现只要求水平地吊到 6m 处，当然能吊上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时，公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时，就会多一套公寓租不出去，而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入？

解 房租定为 x 元，纯收入为 R 元.

当 $x\le1000$ 时，$R=50x-50\times100=50x-5000$，且当 $x=1000$ 时，得最大纯收入 45000 元.

当 $x>1000$ 时，

$$R=[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot x-[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot100=-\frac{1}{50}x^2+72x-7000,$$

$$R'=-\frac{1}{25}x+72.$$

令 $R'=0$ 得$(1000,+\infty)$内唯一驻点 $x=1800$. 因为 $R''=-\frac{1}{25}<0$，所以 1800 为极大值点，同时也是最大值点. 最大值为 $R=57800$.

因此，房租定为 1800 元可获最大收入.

习题 3–8

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

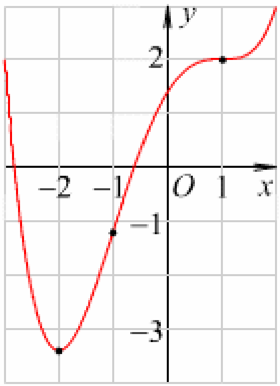
(2) $y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2$, $y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1)$,

令 $y'=0$, 得 $x=-2$, $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$, $x=1$.

(3)列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	$-$	0	+
$y=f(x)$	↘∪	$-\frac{17}{5}$ 极小值	↗∪	$-\frac{6}{5}$ 拐点	↗∩	2 拐点	↗∪

(4)作图:



2. $y=\frac{x}{1+x^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2)奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论 $x\geq 0$ 时函数的图形.

(3) $y'=\frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$,

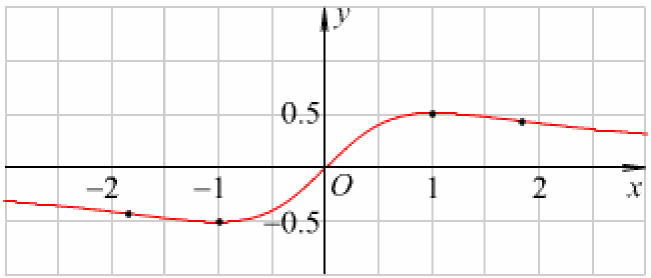
当 $x\geq 0$ 时, 令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=0$, $x=\sqrt{3}$.

(4)列表

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	$-$	$-$	$-$
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	+
$y=f(x)$	0 拐点	↗∩	$\frac{1}{2}$ 极大值	↘∩	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	↘∪

(5)有水平渐近线 $y=0$;

(6)作图:



3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ $y''=4e^{-(x-1)^2}[x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})]$,

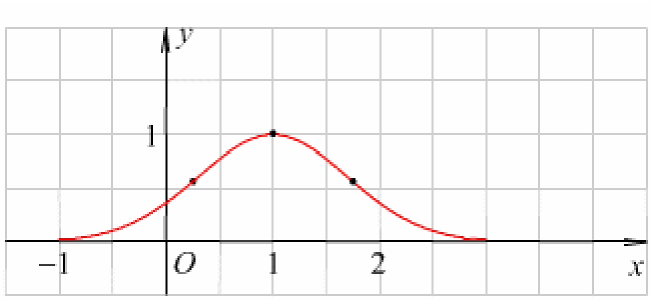
令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)列表

x	$(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	↗∪	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↗∩	1 极大值	↘∩	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↘∪

(4)有水平渐近线 $y=0$;

(5)作图:



4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$;

(2) $y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$,

$y''=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$,

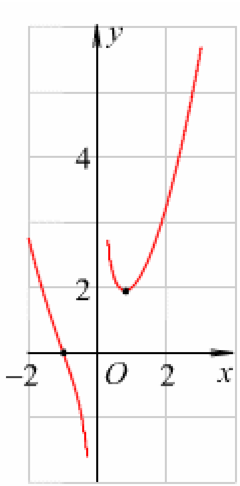
令 $y'=0$, 得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$.

(3)列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$
y'	−	−	−	无	−	0	+
y''	+	0	−	无	+	+	+
$y=f(x)$	↘∪	0 拐点	↘∩	无	↘∪	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ 极小值	↗∪

(4)有铅直渐近线 $x=0$;

(5)作图:



5. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 (1)定义域为 $x \neq \dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2)是偶函数，周期为 2π．可先作$[0, \pi]$上的图形，再根据对称性作出$[-\pi, 0)$内的图形，最后根据周期性作出$[-\pi, \pi]$以外的图形;

(3) $y'=\dfrac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}$， $y''=\dfrac{\cos x\cdot(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x}$，

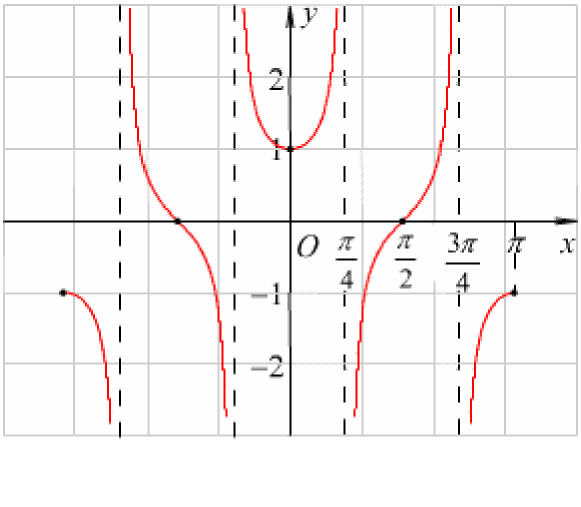
在$[0, \pi]$上，令 $y'=0$，得 $x=0, x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4)列表

x	0	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$	π
y'	0	+	无	+	+	+	无	+	0
y''	+	+	无	−	0	+	无	−	−
$y=f(x)$	1 极小值	↗∪	无	↗∩	0 拐点	↗∪	无	↗∩	−1 极大值

(5)有铅直渐近线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$;

(6)作图:



y
2
1
O
−1
−2
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
x

习题 3–7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0, 2)处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{4x}{y},\quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0,\,2)}=0,\ y''|_{(0,\,2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点(x, y)处的曲率及曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\cdot\tan x=\tan x$, $y''=\sec^2 x$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{|\cos x|}=|\sec x|.$$

3. 求抛物线$y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4$, $y''=2$.

令 $y'=0$, 得顶点的横坐标为 $x=2$.

$$y'|_{x=2}=0,\ y''|_{x=2}=2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}.$$

4. 求曲线$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$在$t=t_0$处的曲率.

解 $y'=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 x)'}=-\tan t$, $y''=\frac{(-\tan x)'}{(a\cos^3 x)'}=\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}=\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^3 t}\right|=\frac{2}{3|a\sin 2t|},$$

$$K\Big|_{t=t_0}=\frac{2}{3|a\sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-\frac{1}{x^2}|}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}\,(2x^2-1)}{x^2}.$$

令$\rho'=0$, 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho<0$; 当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho>0$, 所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是ρ的极小值点, 同时也最小值点. 当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小, 最小曲率半径为 $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在点(x, y)处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

解 $y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

在点(x, y)处的曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}|}=\frac{(\operatorname{ch}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}|}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m)作俯冲飞行, 在坐标原点 O 处飞机的速度为 v=200m/s 飞行员体重 G=70Kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\frac{2x}{10000}=\frac{x}{5000}$, $y''=\frac{1}{5000}$; $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=\frac{1}{5000}$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{\frac{1}{5000}}=5000\,.$$

向心力 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{70\times 200^2}{5000}=560$ (牛顿).

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

$79\times 9.8+560=1246$(牛顿).

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m . 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为$y=ax^2$, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

$$a=\frac{0.25}{25}=0.01\,,$$

于是抛物线方程为$y=0.01x^2$.

$y'=0.02x$, $y''=0.02$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02}=50\,.$$

向心力为 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{5\times 10^3(\frac{21.6\times 10^3}{3600})^2}{50}=3600$ (牛顿).

因为汽车重为 5 吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

$5\times 10^3\times 9.8-3600=45400$(牛顿).

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4},1)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线$y^2=2px$的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内零点的个数为________.

解 应填写 2.

提示: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

在$(0, +\infty)$内, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为 $f''(x)<0$, 所以曲线 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内是凸的, 且驻点 $x=e$ 一定是最大值点, 最大值为 $f(e)=k>0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 所以曲线经过 x 轴两次, 即零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在$[0, 1]$上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$或 $f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为(　　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$;　　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$;　　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 选择 B .

提示: 因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$在$[0, 1]$上单调增加, 从而 $f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi\in[0, 1]$, 所以

$$f'(1)> f(1)-f(0)>f'(0).$$

3. 列举一个函数 $f(x)$满足: $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a,b)内除某一点外处处可导, 但在(a, b)内不存在点 ξ, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$.

易知 $f(x)$在$[-1, 1]$上连续, 且当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=-1$; $f'(0)$不存在, 即 $f(x)$在$[-1, 1]$上除 $x=0$ 外处处可导.

注意 $f(1)-f(-1)=0$, 所以要使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$成立, 即 $f'(\xi)=0$, 是不可能的.

因此在$(-1, 1)$内不存在点 ξ, 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)\cdot a$, ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间.

当 $x\to\infty$ 时, $\xi\to\infty$, 于是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{x\to\infty} f'(\xi)\cdot a=a\lim_{\xi\to\infty} f'(\xi)=ak .$$

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在$[0, 1]$上不可能有两个零点.

证明 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当 $x\in(0, 1)$时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$在$[0, 1]$上单调减少. 因此, $f(x)$ 在$[0, 1]$上至多有一个零点.

6. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$, 证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在$(0,1)$内至少有一个零点.

证明 设$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，则$F(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且$F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理，在$(0, 1)$内至少有一个点$\xi$，使$F(\xi)=0$. 而$F'(x)=f(x)$，所以$f(x)$在$(0, 1)$内至少有一个零点.

7. 设$f(x)$在$[0, a]$上连续，在$(0, a)$内可导，且$f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0, a)$，使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明 设$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[0, a]$上连续，在$(0, a)$内可导，且$F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理，在$(0, a)$内至少有一个点ξ，使$F(\xi)=0$. 而$F(x)=f(x)+x f'(x)$，所以$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点$\xi\in(a, b)$使$f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明 对于$f(x)$和$\ln x$在$[a, b]$上用柯西中值定理，有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}, \xi\in(a, b),$$

即
$$f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}, \xi\in(a, b).$$

9. 设$f(x)$、$g(x)$都是可导函数，且$|f'(x)|<g'(x)$，证明：当$x>a$时, $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

证明 由条件$|f'(x)|<g'(x)$得知，$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，且有$g'(x)>0$, $g(x)$是单调增加的，当$x>a$时，$g(x)>g(a)$.

因为$f(x)$、$g(x)$都是可导函数，所以$f(x)$、$g(x)$ 在$[a, x]$上连续，在(a, x)内可导，根据柯西中值定理，至少存在一点$\xi\in(a, x)$，使$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因此，$\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$, $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$.

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$ (其中$a_1, a_2, \cdots, a_n>0$).

解 (1) $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-x^x)'}{(1-x+\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-x^{x+1}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{x+1}(\ln x+1+\frac{1}{x})(\ln x+1)-x^x}{-1}=2\,.$$

(2) $$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{[x-\ln(1+x)]'}{[x\ln(1+x)]'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})},$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(4)令 $y=[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$． 则 $\ln y=nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$，因为

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\cdot(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)\cdot(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$.

即 $\lim_{x\to\infty}\ln y=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$，从而 $\lim_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=\lim_{x\to\infty}y=a_1\cdot a_2\cdots a_n$．

11. 证明下列不等式:

(1)当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$;

(2):当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

证明 (1)令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$, $x\in(0, \frac{\pi}{2})$.

因为 $f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>\frac{x-\tan x}{x^2}>0$,

所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$为单调增加的. 因此当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时有]

$$\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}, \text{ 即 } \frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2)要证$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$, 即证$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 则 $f(x)$在$[0, +\infty)$上连续, $f'(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}$.

因为当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>0$, $1-\frac{1}{1+x^2}>0$, 所以 $f'(x)>0$, $f(x)$在$[0, +\infty)$上单调增加.

因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)$, 而 $f(0)=0$, 从而 $f(x)>0$, 即$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x} & x>0 \\ x+2 & x\le 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$的极值.

解 $x=0$ 是函数的间断点.

当$x<0$ 时, $f'(x)=1$; 当$x>0$ 时, $f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$.

令 $f'(x)=0$, 得函数的驻点 $x=\frac{1}{e}$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	2 极大值	↘	$e^{-\frac{2}{e}}$ 极小值	↗

函数的极大值为 $f(0)=2$, 极小值为 $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆$x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 $2x-y-xy'+2yy'=0$, $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. 当 $x=\frac{1}{2}y$ 时, $y'=0$.

将 $x=\frac{1}{2}y$ 代入椭圆方程，得 $\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y^2+y^2=3$，$y=\pm 2$.

于是得驻点 $x=-1$，$x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在，且在驻点处取得，又当 $x=-1$ 时，$y=-2$，当 $x=1$ 时，$y=2$，所以纵坐标最大和最小的点分别为(1, 2)和(−1, −2).

14. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$，则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以唯一驻点 $x=e$ 为最大值点.

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧 $y=\sin x$ $(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}\ (0<x<\pi),$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)\cdot\sin x-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cos x(3\sin^2 x+\cos^2 x+1)}{\sin^2 x}.$$

在$(0, \pi)$内，令$\rho'=0$，得驻点 $x=\frac{\pi}{2}$.

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\rho'<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\rho'>0$，所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 是ρ的极小值点，同时也是ρ的最小值点，最小值为 $\rho\frac{(1+\cos^2\frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$.

16. 证明方程$x^3-5x-2=0$ 只有一个正根. 并求此正根的近似值，使精确到本世纪末 10^{-3}.

解 设$f(x)=x^3-5x-2$，则

$f'(x)=3x^2-5, f''(x)=6x$.

当$x>0$时，$f''(x)>0$，所以在$(0, +\infty)$内曲线是凹的，又$f(0)=-2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x-2)=+\infty$，所以在$(0, +\infty)$内方程$x^3-5x-2=0$只能有一个根.

(求根的近似值略)

17. 设$f''(x_0)$存在，证明$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

证明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]+[f(x_0)-f'(x_0-h)]}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f'(x_0-h)}{h}]=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

18. 设$f^{(n)}(x_0)$存在，且$f(x_0)=f'(x_0)=\cdot\cdot\cdot=f^{(n)}(x_0)=0$，证明$f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

证明 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdot\cdot\cdot=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

所以$f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

19. 设$f(x)$在(a, b)内二阶可导，且$f''(x)\geq0$. 证明对于(a, b)内任意两点x_1，x_2及 $0\leq t\leq1$，有$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

证明 设$(1-t)x_1+tx_2=x_0$. 在$x=x_0$点的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \text{(其中}\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间)}.$$

因为$f''(x)\geq0$，所以

$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

因此

$f(x_1)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$， $f(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$.

于是有

$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq(1-t)[f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)]+t[f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)]$

$=(1-t)f(x_0)+t\,f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+t\,x_2]-f'(x_0)[(1-t)x_0+t\,x_0]$

$=f(x_0)+f'(x_0)x_0-f'(x_0)x_0$

$=f(x_0)$,

即 $f(x_0)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$,

所以 $f[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ $(0\le t\le 1)$.

20. 试确定常数 a 和 b, 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 $f(x)$是有任意阶导数的, 它的 5 阶麦克劳公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{3!}x^3+\frac{-a-16b}{5!}x^5+o(x^5)\,.$$

要使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小, 就是要使极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-a-b}{x^4}+\frac{a+4b}{3!x^2}+\frac{-a-16b}{5!}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases},$$

解之得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

因为当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\frac{-a-16b}{5!}=\frac{1}{30}\ne 0\,,$$

所以当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时, $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

习题 4–1

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{1}{x^2}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

(2) $\int x\sqrt{x}dx$;

解 $\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C$.

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}dx$;

解 $\int x^2\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{7}{3}}dx=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+C$.

(5) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}+C$.

(6) $\int\sqrt[m]{x^n}dx$;

解 $\int\sqrt[m]{x^n}dx=\int x^{\frac{n}{m}}dx=\frac{1}{\frac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1}+C=\frac{m}{n+m}x^{\frac{m+n}{m}}+C$.

(7) $\int 5x^3dx$;

解 $\int 5x^3dx=5\int x^3dx=\frac{5}{4}x^4+C$.

(8) $\int(x^2-3x+2)dx$;

解 $\int(x^2-3x+2)dx=\int x^2dx-3\int xdx+2\int dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ (g 是常数);

解 $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot 2h^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C$.

(10) $\int (x-2)^2 dx$;

解 $\int (x-2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \int x^2 dx - 4\int x dx + 4\int dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$.

(11) $\int (x^2 + 1)^2 dx$;

解 $\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + \int dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$.

(12) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx$;

解 $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx = \int (x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - 1) dx = \int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C$.

(13) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$;

解 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

(14) $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$;

解 $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int (3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}) dx = x^3 + \arctan x + C$.

(15) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$;

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C$.

(16) $\int (2e^x + \frac{3}{x}) dx$;

解 $\int (2e^x + \frac{3}{x}) dx = 2\int e^x dx + 3\int \frac{1}{x} dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$.

(17) $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$;

解 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=3\arctan x-2\arcsin x+C$.

(18) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$;

解 $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx=\int(e^x-x^{-\frac{1}{2}})dx=e^x-2x^{\frac{1}{2}}+C$.

(19) $\int 3^x e^x dx$;

解 $\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C=\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$.

(20) $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$;

解 $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int[2-5(\frac{2}{3})^x]dx=2x-5\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln\frac{2}{3}}+C=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x+C$.

(21) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$;

解 $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+C$.

(22) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;

解 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

(23) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$;

解 $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\tan x+C$.

(24) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$.

(25) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

解 $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x})dx=-\cot x-\tan x+C$.

(26) $\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$.

2. 一曲线通过点$(e^2, 3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 设该曲线的方程为$y=f(x)$，则由题意得

$$y'=f'(x)=\frac{1}{x},$$

所以 $y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

又因为曲线通过点$(e^2, 3)$，所以有=3−2=1

$3=f(e^2)=\ln|e^2|+C=2+C$,

$C=3-2=1$.

于是所求曲线的方程为

$y=\ln|x|+1$.

3. 一物体由静止开始运动，经t秒后的速度是$3t^2$(m/s)，问

(1)在3秒后物体离开出发点的距离是多少？

(2)物体走完360m需要多少时间？

解 设位移函数为$s=s(t)$，则$s'=v=3t^2$，$s=\int 3t^2dt=t^3+C$.

因为当$t=0$时，$s=0$，所以$C=0$. 因此位移函数为$s=t^3$.

(1)在3秒后物体离开出发点的距离是$s=s(3)=3^3=27$.

(2)由$t^3=360$，得物体走完360m所需的时间$t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11$s.

4. 证明函数$\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x\text{sh}x$和$e^x\text{ch}x$都是$\frac{e^x}{\text{ch}x-\text{sh}x}$的原函数.

证明 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}=\frac{e^x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}}=\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$.

因为

$$(\frac{1}{2}e^{2x})'=e^{2x},$$

所以$\frac{1}{2}e^{2x}$是$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$的原函数.

因为

$$(e^x\mathrm{sh}x)'=e^x\mathrm{sh}x+e^x\mathrm{ch}x=e^x(\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x)=e^x(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2})=e^{2x},$$

所以$e^x\mathrm{sh}x$是$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$的原函数.

因为

$$(e^x\mathrm{ch}x)'=e^x\mathrm{ch}x+e^x\mathrm{sh}x=e^x(\mathrm{ch}\ x+\mathrm{sh}\ x)=e^x(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2})=e^{2x},$$

所以$e^x\mathrm{ch}x$是$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$的原函数.

习题 4−2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立(例如: $dx=\frac{1}{4}d(4x+7)$:

(1) $dx=$ $d(ax)$;

解 $dx=\frac{1}{a}d(ax)$.

(2) $dx=$ $d(7x-3)$;

解 $dx=\frac{1}{7}d(7x-3)$.

(3) $xdx=$ $d(x^2)$;

解$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$.

(4) $x\mathrm{d}x=$ $d(5x^2)$;

解$x\mathrm{d}x=\frac{1}{10}d(5x^2)$.

(5) $xdx=$ $d(1-x^2)$;

解 $xdx=-\frac{1}{2}d(1-x^2)$.

(6)$x^3dx=$ $d(3x^4-2)$;

解$x^3dx=\frac{1}{12}d(3x^4-2)$.

(7)$e^{2x}dx=$ $d(e^{2x})$;

解$e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})$.

(8) $e^{-\frac{x}{2}}dx=$ $d(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

解 $e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\,d(1+e^{-\frac{x}{2}})$.

(9) $\sin\frac{3}{2}xdx=$ $d(\cos\frac{3}{2}x)$;

解 $\sin\frac{3}{2}xdx=-\frac{2}{3}d(\cos\frac{3}{2}x)$.

(10) $\frac{dx}{x}=$ $d(5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}d(5\ln|x|)$.

(11) $\frac{dx}{x}=$ $d(3-5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x} = -\frac{1}{5}\ d(3-5\ln|x|)$.

(12) $\frac{dx}{1+9x^2} = \quad d(\arctan 3x)$;

解 $\frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\ d(\arctan 3x)$.

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad d(1-\arctan x)$;

解 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)\ d(1-\arctan x)$.

(14) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad d(\sqrt{1-x^2})$.

解 $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)\ d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t}dt$;

解 $\int e^{5t}dt = \frac{1}{5}\int e^{5x}d5x = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

(2) $\int (3-2x)^3 dx$;

解 $\int (3-2x)^3 dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^3 d(3-2x) = -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$.

(3) $\int \frac{1}{1-2x}dx$;

解 $\int \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2x}d(1-2x) = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

解 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C$.

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})dx$;

解 $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\frac{1}{a}\int\sin axd(ax)-b\int e^{\frac{x}{b}}d(\frac{x}{b})=-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$.

(6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

解 $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$.

(7) $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx$;

解 $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx=\int\tan^{10}xd\tan x=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$.

(8) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$;

解 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{1}{\ln x\ln\ln x}d\ln x=\int\frac{1}{\ln\ln x}d\ln\ln x=\ln|\ln\ln x|+C$.

(9) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

解 $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}=\int\frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\sqrt{1+x^2}$

$=-\int\frac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\cos\sqrt{1+x^2}=-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$.

(10) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$;

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\int\frac{1}{\tan x}d\tan x=\ln|\tan x|+C$.

(11) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{1}{1+e^{2x}}de^x=\arctan e^x+C$.

(12) $\int xe^{-x^2}dx$;

解 $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

(13) $\int x\cdot\cos(x^2)dx$;

解 $\int x\cdot\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

(14) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;

解 $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$.

(15) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx$;

解 $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{1-x^4}d(1-x^4)=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$.

(16) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$;

解 $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt=-\frac{1}{\omega}\int\cos^2(\omega t+\varphi)d\cos(\omega t+\varphi)=-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$.

(17) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\cos^{-3}xd\cos x=\frac{1}{2}\cos^{-2}x+C=\frac{1}{2}\sec^2 x+C$.

(18) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

解 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}d(-\cos x+\sin x)$

$=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(19) $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;

解 $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}d(\frac{2}{3}x)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$.

(20) $\int\frac{x^3}{9+x^2}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{9+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{9+x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int(1-\frac{9}{9+x^2})d(x^2)=\frac{1}{2}[x^2-9\ln(9+x^2)]+C$.

(21) $\int\frac{1}{2x^2-1}dx$;

解 $\int\frac{1}{2x^2-1}dx=\int\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}dx=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1})dx$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x-1}d(\sqrt{2}x-1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x+1}d(\sqrt{2}x+1)$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x-1|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+1|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}|+C$.

(22) $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$;

解 $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|+C=\frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}|+C$.

(23) $\int\cos^3 xdx$;

解 $\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 xd\sin x=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

(24) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt$;

解 $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{2}\int[1+\cos2(\omega t+\varphi)]dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4\omega}\sin2(\omega t+\varphi)+C$.

(25) $\int\sin2x\cos3xdx$;

解 $\int\sin2x\cos3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos5x+\frac{1}{2}\cos x+C$.

(26) $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx$;

解 $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{1}{2}x)dx=\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{1}{2}x+C$.

(27) $\int\sin5x\sin7xdx$;

解 $\int\sin5x\sin7xdx=-\frac{1}{2}\int(\cos12x-\cos2x)dx=-\frac{1}{24}\sin12x+\frac{1}{4}\sin2x+C$.

(28) $\int \tan^3 x \sec x dx$;

解 $\int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot \sec x \tan x dx = \int \tan^2 x d \sec x$

$= \int (\sec^2 x - 1) d \sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$.

(29) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

解 $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int 10^{2\arccos x} d \arccos x = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x} d(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$.

(30) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$;

解 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)} d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x} d \arctan\sqrt{x} = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$.

(31) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2} d \arcsin x = -\frac{1}{\arcsin x} + C$.

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$;

解 $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{(x\ln x)^2} d(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x} + C$.

(33) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x} dx$;

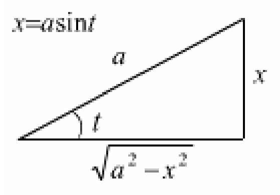
解 $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x} dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x} \cdot \sec^2 x dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x} d \tan x$

$= \int \ln\tan x d \ln\tan x = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$.

(34) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ($a>0$);

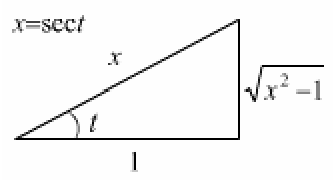
解 $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=} \int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos tdt = a^2\int\sin^2 tdt = a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt$,

$=\frac{1}{2}a^2t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.



(35) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

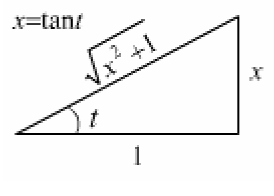
解 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{令x=\sec t}{=\!=\!=\!=} \int\frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan tdt=\int dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$.



或 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\frac{1}{x}=\arccos\frac{1}{x}+C$.

(36) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

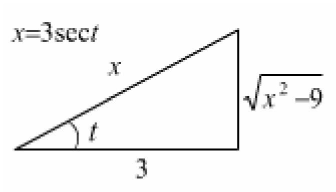
解 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \overset{令x=\tan t}{=\!=\!=\!=} \int\frac{1}{\sqrt{(\tan^2 t+1)^3}}d\tan t=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.



(37) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx\xlongequal{令x=3\sec t}\int\frac{\sqrt{9\sec^2 t-9}}{3\sec t}d(3\sec t)=3\int\tan^2 t dt$

$=3\int(\frac{1}{\cos^2 t}-1)dt=3\tan t-3t+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$.



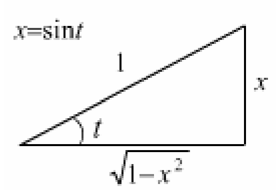
(38) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}\xlongequal{令\sqrt{2x}=t}\int\frac{1}{1+t}tdt=\int(1-\frac{1}{1+t})dt=t-\ln(1+t)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$.

(39) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{令x=\sin t}\int\frac{1}{1+\cos t}\cos tdt=\int(1-\frac{1}{1+\cos t})dt=\int(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2})dt$

$=t-\tan\frac{t}{2}+C=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$.

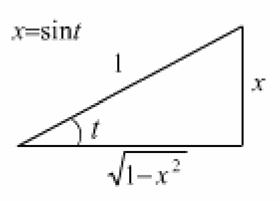


(40) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{令x=\sin t}\int\frac{1}{\sin t+\cos t}\cdot\cos tdt=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t+\sin t+\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin t+\cos t}d(\sin t+\cos t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-x^2}+x|+C\ .$$



习题 4–3

求下列不定积分:

1. $\int x\sin xdx$;

解 $\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x-\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

2. $\int\ln xdx$;

解 $\int\ln xdx=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

3. $\int\arcsin xdx$;

解 $\int\arcsin xdx=x\arcsin x-\int xd\arcsin x$

$$=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

4. $\int xe^{-x}dx$;

解 $\int xe^{-x}dx=-\int xde^{-x}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C.$$

5. $\int x^2\ln xdx$;

解 $\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int\ln xdx^3=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3d\ln x$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$$

6. $\int e^{-x}\cos xdx$;

解 因为

$$\int e^{-x}\cos xdx=\int e^{-x}d\sin x=e^{-x}\sin x-\int\sin xde^{-x}=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin xdx$$

$$=e^{-x}\sin x-\int e^{-x}d\cos x=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x+\int\cos xde^{-x}$$

$$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos xdx\ ,$$

所以 $$\int e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)+C=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C\ .$$

7\. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$;

解 因为

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=2\int e^{-2x}d\cos\frac{x}{2}=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-2\int\cos\frac{x}{2}de^{-2x}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+4\int e^{-2x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8\int e^{-2x}d\sin\frac{x}{2}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-8\int\sin\frac{x}{2}de^{-2x}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+16\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx\ ,$$

所以 $$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2})+C\ .$$

8\. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$;

解 $\int x\cos\frac{x}{2}dx=2\int xd\sin\frac{x}{2}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

9\. $\int x^2\arctan xdx$;

解 $\int x^2\arctan xdx=\frac{1}{3}\int\arctan xdx^3=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx^2=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C\ .$$

10\. $\int x\tan^2 xdx$

解 $\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x\sec^2 xdx-\int xdx=-\frac{1}{2}x^2+\int xd\tan x$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x-\int\tan xdx=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C\ .$$

11\. $\int x^2\cos xdx$;

解 $\int x^2\cos xdx=\int x^2 d\sin x=x^2\sin x-\int\sin x\cdot 2xdx=x^2\sin x+2\int xd\cos x$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos xdx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\ .$$

12. $\int te^{-2t}dt$;

解 $\int te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\int tde^{-2t}=-\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}dt$

$$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C=-\frac{1}{2}e^{-2t}(t+\frac{1}{2})+C\ .$$

13. $\int\ln^2 xdx$;

解 $\int\ln^2 xdx=x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C\ .$$

14. $\int x\sin x\cos xdx$;

解 $\int x\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\int xd\cos 2x=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2xdx$

$$=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C\ .$$

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

解 $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\int x^2d\sin x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin xdx$

$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+\int xd\cos x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\int\cos xdx$$

$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C\ .$$

16. $\int x\ln(x-1)dx$;

解 $\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x-1}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\cdot\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C\ .$$

17. $\int(x^2-1)\sin 2xdx$;

解 $\int(x^2-1)\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int(x^2-1)d\cos 2x=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\cdot 2xdx$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd\sin 2x$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

18. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

解 $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx=-\int\ln^3 xd\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x+\int\frac{1}{x}d\ln^3 x=-\frac{1}{x}\ln^3 x+3\int\frac{1}{x^2}\ln^2 xdx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-3\int\ln^2 xd\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x+3\int\frac{1}{x}d\ln^2 x$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x+6\int\frac{1}{x^2}\ln xdx=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-6\int\ln xd\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x+6\int\frac{1}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C$.

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;

解 $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\overset{令\sqrt[3]{x}=t}{=\!=\!=\!=}3\int t^2e^t dt=3\int t^2de^t$

$=3t^2e^t-6\int te^t dt=3t^2e^t-6\int tde^t$

$=3t^2e^t-6te^t+6\int e^t dt$

$=3t^2e^t-6te^t+6e^t+C$

$=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

20. $\int\cos\ln xdx$;

解 因为

$\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+\int x\cdot\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\cos\ln x+\int\sin\ln xdx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx,$$

所以 $\int\cos\ln xdx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

21. $\int(\arcsin x)^2dx$;

解 $\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

22. $\int e^x\sin^2xdx$.

解 $\int e^x\sin^2xdx=\frac{1}{2}\int e^x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx$,

而 $\int e^x\cos 2xdx=\int\cos 2xde^x=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2xdx$

$$=e^x\cos 2x+2\int\sin 2xde^x=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\cos 2xdx,$$

$$\int e^x\cos 2xdx=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C,$$

所以 $\int e^x\sin^2xdx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C$.

习题 4–4

求下列不定积分:

1. $\int\frac{x^3}{x+3}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\frac{x^3+27-27}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)(x^2-3x+9)-27}{x+3}dx$

$=\int(x^2-3x+9)dx-27\int\frac{1}{x+3}dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;

解 $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{1}{x^2+3x-10}d(x^2+3x-10)=\ln|x^2+3x-10|+C$.

3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

解 $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int(x^2+x+1)dx+\int\frac{x^2+x-8}{x^3-x}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\int\frac{8}{x}dx-\int\frac{4}{x+1}dx-\int\frac{3}{x-1}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

4. $\int\frac{3}{x^3+1}dx$;

解 $\int\frac{3}{x^3+1}dx=\int(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1})dx=\int(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1})dx$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}d(x^2-x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})$

$=\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

5. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

解 $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2}\int(\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x+3})dx$

$=\frac{1}{2}(\ln|x+2|-3\ln|x+3|-\ln|x+1|)+C$.

6. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

解 $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x+1}+C$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$.

7. $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$;

解 $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

8. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1})dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

9. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1})dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

10. $\int\frac{1}{x^4+1}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^4+1}dx=\int\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx$

$$=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}[\int\frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\int\frac{d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}]+\frac{1}{4}(\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C\ .$$

11. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$;

解 $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx\ ,$$

因为

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}d(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})\ ,$$

而 $\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}dx$

由递推公式

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}]\ ,$$

得 $\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}dx$

$$=\frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}(\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\ ,$$

所以 $\displaystyle\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

$\displaystyle=-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\sin^2x}$;

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\sin^2x}=\int\frac{1}{4-\cos^2x}dx=\int\frac{1}{4\tan^2x+3}d\tan x$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\tan^2x+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d\tan x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$.

13. $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}dx$;

解 $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\sec^2\frac{x}{2})}$

$\displaystyle=\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{2+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

或 $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}dx\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{3+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$

$\displaystyle=\int\frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

14. $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx$;

解 $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx=\int\frac{dx}{2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}(\csc^2\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2})}$

$$=-\int\frac{d(\cot\frac{x}{2})}{\cot^2\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}+1}=-\int\frac{d(\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{(\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

或 $$\int\frac{1}{2+\sin x}dx\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{u^2+u+1}du=\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

15. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

解 $$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}=\int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C\,.$$

或 $$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{u+1}du=\ln|u+1|+C=\ln|\tan\frac{x}{2}+1|+C\,.$$

16. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

解 $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1}{3u^2+2u+2}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}du=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\,.$$

或 $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\xlongequal{令u=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{3u^2+2u+2}du=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\ .$$

17. $\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

解 $$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx\xlongequal{令\sqrt[3]{x+1}=u}\int\frac{1}{1+u}\cdot 3u^2du=3\int(u-1+\frac{1}{1+u})du$$

$$=\frac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C\ .$$

18. $\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx$;

解 $$\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx=\int[(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1]dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C\ .$$

19. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

解 $$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx\xlongequal{令\sqrt{x+1}=u}\int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2udu=2\int(u-2+\frac{2}{u+1})du$$

$$=2(\frac{1}{2}u^2-2u+2\ln|u+1|)+C$$

$$=(x+1)-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C\ .$$

20. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\xlongequal{令x=u^4}\int\frac{1}{u^2+u}\cdot 4u^3du$$

$$=4\int(u-1+\frac{1}{1+u})du=2u^2-4u+4\ln|1+u|+C$$

$$=2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C\,.$$

21. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;

解 令 $\frac{1-x}{1+x}=u$，则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$， $dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$，

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du=2\int(\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{1+u^2})du$$

$$=\ln|\frac{u-1}{u+1}|+2\arctan u+C$$

$$=\ln|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\,.$$

22. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=u$，则 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$， $dx=-\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}$，代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int du=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C\,.$$

总习题四

求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

1. $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$;

解 $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx-\int\frac{1}{e^{2x}-1}de^x=\frac{1}{2}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+1}|+C$.

2. $\int\frac{x}{(1-x)^3}dx$;

解 $\int\frac{x}{(1-x)^3}dx=-\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\int\frac{1}{(x-1)^3}dx=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+C$.

3. $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}dx$ ($a>0$);

解 $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(a^3)^2-(x^3)^2}d(x^3)=\frac{1}{6a^3}\ln|\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}|+C$.

4. $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\frac{1}{x+\sin x}d(x+\sin x)=\ln|x+\sin x|+C$.

5. $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx$;

解 $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx=\int\ln\ln x d\ln x=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$.

6. $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}d(\sin^2 x)=\frac{1}{2}\arctan\sin^2 x+C$.

7. $\int\tan^4 xdx$;

解 $\int\tan^4 xdx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}d\tan x=\int\tan^2 x\sin^2 xd\tan x$

$=\int\frac{\tan^4 x}{\tan^2 x+1}d\tan x=\int(\tan^2 x-1+\frac{1}{\tan^2 x+1})d\tan x$

$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+\arctan\tan x+c=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+c$.

8. $\int\sin x\sin 2x\sin 3xdx$;

解 $\int\sin x\sin 2x\sin 3xdx=-\frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos x)\sin 3xdx$

$$=-\frac{1}{2}\int\cos 3x\sin 3xdx+\frac{1}{2}\int\cos x\sin 3xdx$$

$$=\frac{1}{6}\int\cos 3xd(\cos 3x)+\frac{1}{4}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{12}\cos^2 3x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C\ .$$

9. $\int\frac{dx}{x(x^6+4)}$;

解 $\int\frac{dx}{x(x^6+4)}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+4})dx=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$.

10. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx(a>0)$;

解 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}du=a\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\ .$$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+(\sqrt{x})^2})+C=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$.

12. $\int x\cos^2 xdx$;

解 $\int x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int(x+x\cos 2x)dx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C\ .$$

13. $\int e^{ax}\cos bxdx$;

解 因为

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int\cos bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bxdx\ ,$$

所以 $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx)+C$

$=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\overset{令\sqrt{1+e^x}=u}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{u}d\ln(u^2-1)=2\int\frac{1}{u^2-1}du=\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du$.

$=\ln|\frac{u-1}{u+1}|+c=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+c$.

15. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

解 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\overset{令x=\sec t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\sec^2 t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan tdt=\int\cos tdt=\sin t+C$

$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

16. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;

解 $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}\overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{(a\cos t)^5}\cdot a\cos tdt$

$=\frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\cos^4 t}dt=\frac{1}{a^4}\int(\tan^2 t+1)d\tan t$

$=\frac{1}{3a^4}\tan^3 t+\frac{1}{a^4}\tan t+C$

$=\frac{1}{3a^4}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}+\frac{1}{a^4}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$.

17. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

解 $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{令x=\tan t}\int\frac{1}{\tan^4 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt$

$=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}d\sin t$

$=\int(\frac{1}{\sin^4 t}-\frac{1}{\sin^2 t})d\sin t=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C$

$=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

18. $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;

解 $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx\xlongequal{令\sqrt{x}=t}\int t\sin t\cdot 2tdt=2\int t^2\sin tdt$

$=-2\int t^2 d\cos t=-2t^2\cos t+2\int\cos t\cdot 2tdt$

$=-2t^2\cos t+4\int td\sin t=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin tdt$

$=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C$

$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$.

19. $\int\ln(1+x^2)dx$;

解 $\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.

20. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}d\tan x=\int(\tan x-\frac{\tan x}{\tan^2 x+1})d\tan x$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)+C$.

21. $\int\arctan\sqrt{x}dx$;

解 $\int \arctan\sqrt{x}dx = x\arctan\sqrt{x} - \int x\cdot\frac{1}{1+x}d\sqrt{x}$

$=x\arctan\sqrt{x} - \int(1-\cdot\frac{1}{1+x})d\sqrt{x}$

$=x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C$

$=(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

22. $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx = \int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \sqrt{2}\int\csc\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = \sqrt{2}\ln|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}| + C$.

23. $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}dx^4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}[\frac{x^4}{1+x^8} + \arctan x^4] + C$.

提示: 已知递推公式

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}].$$

24. $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$;

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{x^8}{x^8+3x^4+2}dx^4 \overset{令x^4=t}{=\!=\!=} \frac{1}{4}\int\frac{t^2}{t^2+3t+2}dt$

$=\frac{1}{4}\int(1-\frac{3t+2}{t^2+3t+2})dt = \frac{1}{4}\int(1-\frac{4}{t+2}+\frac{1}{t+1})dt$

$=\frac{1}{4}t - \ln|t+2| + \frac{1}{4}\ln|t+1| + C$

$=\frac{1}{4}x^4 + \ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C$.

25. $\int\frac{dx}{16-x^4}$;

解 $\int\frac{dx}{16-x^4}=\int\frac{1}{(4-x^2)(4+x^2)}dx=\frac{1}{8}\int(\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{4+x^2})dx$

$=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\ln|\frac{2+x}{2-x}|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2})+C$

$=\frac{1}{32}\ln|\frac{2+x}{2-x}|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C$.

26. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-1+\frac{1}{\cos^2 x})dx=\sec x-x+\tan x+C$.

27. $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$=\int xd\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C$.

28. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

解 $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos xdx-\int e^{\sin x}\cdot\tan x\cdot\sec xdx$

$=\int xe^{\sin x}d\sin x-\int e^{\sin x}d\sec x$

$=\int xde^{\sin x}-\sec x\cdot e^{\sin x}+\int\sec xde^{\sin x}$

$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\sec x\cdot e^{\sin x}+\int\sec x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos xdx$

$=xe^{\sin x}-\sec x\cdot e^{\sin x}+C$.

29. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx\overset{令x=t^6}{=\!=\!=}\int\frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}\cdot 6t^5dt=6\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt$

$=6\ln\frac{t}{t+1}+C=\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$.

30. $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$;

解 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}\overset{令1+e^x=t}{=\!=\!=}\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t-1}dt=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2})dt$

$=\ln(t-1)-\ln t+\frac{1}{t}+C$

$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C$.

31. $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$;

解 $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{1+(e^x-e^{-x})^2}d(e^x-e^{-x})$

$=\arctan(e^x-e^{-x})+C$

$=\arctan(2\operatorname{sh}x)+C$.

32. $\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;

解 $\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx=\int\frac{x}{(e^x+1)^2}d(e^x+1)=-\int xd\frac{1}{e^x+1}$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x+1}dx=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x(e^x+1)}de^x$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1})de^x$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\ln e^x-\ln(e^x+1)+C$

$=\frac{xe^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)+C$.

33. $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

解 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\cdot[\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})]'dx$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int \sqrt{1+x^2}\cdot[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'dx$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int dx$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$$

34. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$;

解 因为

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx \xlongequal{令x=\tan t} \int \frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t dt=\int \cos t dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C,$$

所以 $$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int \ln x d(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

35. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$;

解 $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx \xlongequal{令x=\sin t} \int t\cdot\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int (t+t\cos 2t)dt$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}\int t\sin 2t=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin 2t-\frac{1}{4}\int \sin 2t dt$$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t+C$$

$$=\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{4}x^2+C_1.$$

36. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

解 $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^2\arccos x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x^2\arccos x d\sqrt{1-x^2}$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2\arccos x)'dx$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot(2x\arccos x-x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2\int x\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x dx-\int x^2dx$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\int\arccos x d\sqrt{(1-x^2)^3}$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arccos x-\frac{2}{3}\int(1-x^2)dx$

$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arccos x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^3+C$

$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+1)\arccos x-\frac{1}{9}x(x^2+6)+C$.

37. $\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x(1+\sin x)}d\sin x=\int(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x})d\sin x$

$=\ln|\sin x|-\ln|1+\sin x|+C=-\ln|\csc x+1|+C$.

38. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$;

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=-\int\frac{1}{\sin x\cos x}d\cot x=-\int\frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}d\cot x=-\int\cot x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}d\cot x$

$=-\int(\frac{1}{\cot x}+\cot x)d\cot x=-\ln|\cot x|-\frac{1}{2}\cot^2 x+C=\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$.

39. $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$ ，则

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1}{(2+\frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{(u^2+3)u}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2u}{u^2+3}du+\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\ln(u^2+3)+\frac{1}{3}\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\tan^3\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}|+C\ .$$

40. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x-\cos x)\sin x\cos x}{\sin x^2-\cos^2 x}du=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{2\sin^2 x-1}dx+\int\frac{\cos^2 x\sin x}{2\cos^2 x-1}dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x-1}d\sin x-\int\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}d\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{2\sin^2 x-1})d\sin x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{2\cos^2 x-1})d\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}|-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\ln|\frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\cos x+1}|+C\ .$$

习题 5−1

1. 利用定积分定义计算由抛物线$y=x^2+1$, 两直线$x=a$、$x=b(b>a)$及横轴所围成的图形的面积.

解 第一步: 在区间$[a, b]$内插入 $n-1$ 个分点 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ (i=1, 2, $\cdots$, $n-1$), 把区间$[a, b]$分成 n 个长度相等的小区间, 各个小区间的长度为: $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ (i=1, 2, $\cdots$, n).

第二步: 在第i个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, $\cdots$, n)上取右端点$\xi_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, 作和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[(a+\frac{b-a}{n}i)^2+1]\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[a^2+\frac{2a(b-a)}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2+1]$$

$$=\frac{(b-a)}{n}[na^2+\frac{2a(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n]$$

$$=(b-a)[a^2+\frac{a(b-a)(n+1)}{n}+\frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1].$$

第三步: 令$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}=\frac{b-a}{n}$, 取极限得所求面积

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a^2+\frac{a(b-a)(n+1)}{n}+\frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1]$$

$$=(b-a)[a^2+a(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^2+1]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a.$$

2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b xdx$ $(a<b)$;

(2) $\int_0^1 e^x dx$.

解 (1)取分点为 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ (i=1, 2, $\cdots$, $n-1$), 则 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ (i=1, 2, $\cdots$, n). 在第 i 个小区间上取右端点 $\xi_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ (i=1, 2, $\cdots$, n). 于是

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=(b-a)^2\lim_{n\to\infty}[a(b-a)+\frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}]=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

(2)取分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ (i=1, 2, · · ·, n–1)，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ (i=1, 2, · · ·, n). 在第 i 个小区间上取右端点 $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$ (i=1, 2, · · ·, n). 于是

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-(e^{\frac{1}{n}})^n]}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-e]}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}=e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义, 说明下列等式:

(1) $\int_0^1 2xdx=1$;

(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=0$;

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

解 (1) $\int_0^1 2xdx$ 表示由直线 $y=2x$、x 轴及直线 $x=1$ 所围成的面积，显然面积为 1.

(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 表示由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 、x轴及y轴所围成的四分之一圆的面积，即圆$x^2+y^2=1$的面积的$\frac{1}{4}$:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}.$$

(3)由于 $y=\sin x$ 为奇函数，在关于原点的对称区间$[-\pi, \pi]$上与 x 轴所夹的面积的代数和为零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=0.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$ 表示由曲线 $y=\cos x$ 与 x 轴上 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 一段所围成的图形的面积. 因为 $\cos x$ 为偶函数，所以此图形关于 y 轴对称. 因此图形面积的一半为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$，即

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx .$$

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力, 已知闸门上水的压强p(单位面积上的压力大小)是水深h的函数, 且有$p=9\cdot 8h$ (kN/m^2). 若闸门高H=3m, 宽L=2m, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力P.

解 建立坐标系如图. 用分点 $x_i=\frac{H}{n}i$ (i=1, 2, · · ·, n−1)将区间[0, H]分为 n 分个小区间, 各小区间的长为 $\Delta x_i=\frac{H}{n}$ (i=1, 2, · · ·, n).

在第i个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上, 闸门相应部分所受的水压力近似为

$$\Delta P_i=9.8x_i l\cdot\Delta x_i .$$

闸门所受的水压力为

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}9.8x_i\cdot L\cdot\Delta x_i=9.8L\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{H}{n}i\cdot\frac{H}{n}=9.8L\cdot H^2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}=4.8L\cdot H^2 .$$

将 L=2, H=3 代入上式得 P=88.2(千牛).

5. 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$;

(2) $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$.

证明 (1) $\int_a^b kf(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx$.

(2) $\int_a^b 1\cdot dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}(b-a)=b-a$.

6. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4(x^2+1)dx$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)dx$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x dx$;

(4) $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$.

解 (1)因为当 $1\le x\le 4$ 时, $2\le x^2+1\le 17$, 所以

$$2\cdot(4-1)\le\int_1^4(x^2+1)dx\le17\cdot(4-1),$$

即 $$6\le\int_1^4(x^2+1)dx\le51.$$

(2)因为当$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$时, $1\le1+\sin^2x\le2$, 所以

$$1\cdot(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4})\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)dx\le2\cdot(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}),$$

即 $$\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)dx\le2\pi.$$

(3)先求函数$f(x)=x\arctan x$在区间$[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$上的最大值$M$与最小值$m$.

$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$. 因为当$\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le\sqrt{3}$时, $f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)=x\arctan x$ 在区间$[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$上单调增加. 于是

$$m=f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}},\quad M=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

因此 $$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})\le\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即 $$\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx\le\frac{2\pi}{3}.$$

(4)先求函数$f(x)=e^{x^2-x}$在区间[0, 2]上的最大值M与最小值m.

$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$, 驻点为$x=\frac{1}{2}$.

比较$f(0)=1$, $f(2)=e^2$, $f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$,得$m=e^{-\frac{1}{4}}$, $M=e^2$. 于是

$$e^{-\frac{1}{4}}(2-0)\le\int_0^2e^{x^2-x}dx\le e^2\cdot(2-0),$$

即 $$-2e^2\le\int_2^0e^{x^2-x}dxdx\le-2e^{-\frac{1}{4}}.$$

7. 设 $f(x)$及 $g(x)$在$[a, b]$上连续，证明:

(1)若在$[a, b]$上，$f(x)\geq 0$，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 0$;

(2)若在$[a, b]$上，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)\not\equiv 0$，则 $\int_a^b f(x)dx>0$;

(3)若在$[a, b]$上，$f(x)\leq g(x)$，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在$[a, b]$上 $f(x)\equiv g(x)$.

证明 (1)假如$f(x)\not\equiv 0$，则必有$f(x)>0$. 根据$f(x)$在$[a, b]$上的连续性，在$[a, b]$上存在一点x_0，使$f(x_0)>0$，且$f(x_0)$为$f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

再由连续性，存在$[c, d]\subset[a, b]$，且$x_0\in[c, d]$，使当$x\in[c, d]$时，$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx\geq\int_c^d f(x)dx\geq\frac{f(x_0)}{2}(d-c)>0.$$

这与条件 $\int_a^b f(x)dx=0$ 相矛盾. 因此在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 0$.

(2)证法一 因为$f(x)$在$[a, b]$上连续，所以在$[a, b]$上存在一点x_0，使$f(x_0)>0$，且$f(x_0)$为$f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

再由连续性，存在$[c, d]\subset[a, b]$，且$x_0\in[c, d]$，使当$x\in[c, d]$时，$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_c^d f(x)dx\geq\frac{f(x_0)}{2}(d-c)>0.$$

证法二 因为 $f(x)\geq 0$，所以 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. 假如 $\int_a^b f(x)dx>0$ 不成立. 则只有 $\int_a^b f(x)dx=0$，

根据结论(1), $f(x)\equiv 0$，矛盾. 因此 $\int_a^b f(x)dx>0$.

(3)令 $F(x)=g(x)-f(x)$，则在$[a, b]$上 $F(x)\geq 0$ 且

$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=0,$$

由结论(1)，在$[a, b]$上 $F(x)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv g(x)$.

4. 根据定积分的性质及第 7 题的结论，说明下列积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2dx$ 还是 $\int_0^1 x^3dx$?

(2) $\int_1^2 x^2dx$ 还是 $\int_1^2 x^3dx$?

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?

(4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$？

(5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x)dx$？

解 (1)因为当 $0\le x\le 1$ 时, $x^2\ge x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx \ge \int_0^1 x^3 dx$.

又当 $0<x<1$ 时, $x^2>x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$.

(2)因为当 $1\le x\le 2$ 时, $x^2\le x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx \le \int_1^2 x^3 dx$.

又因为当 $1<x\le 2$ 时, $x^2<x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$.

(3)因为当 $1\le x\le 2$ 时, $0\le \ln x<1$, $\ln x\ge (\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx \ge \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

又因为当 $1<x\le 2$ 时, $0<\ln x<1$, $\ln x>(\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

(4)因为当 $0\le x\le 1$ 时, $x\ge \ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx \ge \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

又因为当 $0<x\le 1$ 时, $x>\ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

(5)设 $f(x)=e^x-1-x$, 则当 $0\le x\le 1$ 时 $f'(x)=e^x-1>0$, $f(x)=e^x-1-x$ 是单调增加的. 因此当 $0\le x\le 1$ 时, $f(x)\ge f(0)=0$, 即 $e^x\ge 1+x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx \ge \int_0^1 (1+x)dx$.

又因为当 $0<x\le 1$ 时, $e^x>1+x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x)dx$.

习题 5–2

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 x=0 及 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y'=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt=\sin x$, 当 x=0 时, y'=sin0=0;

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $y'=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin u du$, $y=\int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t)$=sin t , $y'(t)$=cos t , $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\cos t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y'+\cos x=0,$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}.$$

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值?

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$, 令 $I'(x)$=0, 得 x=0.

因为当 x<0 时, $I'(x)$<0; 当 x>0 时, $I'(x)$>0,
所以 x=0 是函数 $I(x)$的极小值点.

5. 计算下列各导数:

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$;

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$;

(3) $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 (1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt \xlongequal{令x^2=u} \frac{d}{du}\int_0^u\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}$

$=\sqrt{1+u^2}\cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)'+\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}\cdot(x^3)'$

$=-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt=-\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x)'+\cos(\pi\cos^2 x)(\cos x)'$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi-\pi\sin^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)+\sin x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$

$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$.

6. 计算下列各定积分:

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$;

解 $\int_0^a(3x^2-x+1)dx=(x^3-\frac{1}{2}x^2+x)\big|_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a$.

(2) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$;

解 $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3})\Big|_1^2=\frac{1}{3}(2^3-2^{-3})-\frac{1}{3}(1^3-1^{-3})=2\frac{5}{8}$.

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$;

解 $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_4^9 (x^{\frac{1}{2}}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9$

$$=(\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}9^2)-(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}4^2)=45\frac{1}{6}.$$

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2}$;

解 $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{1}{a}\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{a}\arctan 0=\frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

解 $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=(x^3+\arctan x)|_{-1}^{0}$

$=-(-1)^3-\arctan(-1)=1+\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}$;

解 $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x||_{-e-1}^{-2}=\ln 1-\ln e=-1$.

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$;

解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$;

解 $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$

$=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=4$.

(12) $\int_{0}^{2}f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2 & x>1\end{cases}$.

解 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x^2dx=(\frac{1}{2}x^2+x)|_{0}^{1}+(\frac{1}{6}x^3)|_{1}^{2}=\frac{8}{3}$.

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{k}\sin k\pi-\frac{1}{k}\sin k(-\pi)=0-0=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k(-\pi)$

$$=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k\pi=0\,.$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

8. 设 k 及 l 为正整数，且 $k\neq l$. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]dx$

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\cos(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}-[-\frac{1}{2(k-l)}\cos(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0\,.$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]dx$

$$=[\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0\,.$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]dx$.

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0\,.$$

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2} dt\cdot(\int_0^x e^{t^2} dt)'}{xe^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2} dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x^2}=2.$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0,1] \\ x & x\in[1,2]\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0, 2]上的表达式，并讨论$\varphi(x)$在(0, 2)内的连续性.

解 当 $0\le x\le 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2 dt=\dfrac{1}{3}x^3$;

当 $1<x\le 2$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2 dt+\int_1^x tdt=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}$.

因此 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6} & 1<x\le 2\end{cases}$.

因为$\varphi(1)=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1-0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{3}$,

$\lim\limits_{x\to 1+0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$,

所以$\varphi(x)$在 $x=1$ 处连续，从而在(0, 2)内连续.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & 0\le x\le\pi \\ 0 & x<0\text{或}x>\pi\end{cases}$. 求$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$在$(-\infty, +\infty)$内的表达式.

解 当$x<0$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0;$$

当$0\le x\le\pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};$$

当$x>\pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin tdt+\int_\pi^x 0dt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^\pi$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0=1.$$

因此 $$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x\le\pi \\ 1 & x\ge\pi\end{cases}.$$

12. 设$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导且$f'(x)\le 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明在(a, b)内有$F'(x)\le 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在$\xi\in[a, x]$, 使$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}f(x)$$

$$=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}f(\xi)(x-a)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)].$$

由$f'(x)\le 0$可知$f(x)$在$[a, b]$上是单调减少的, 而$a\le\xi\le x$, 所以$f(x)-f(\xi)\le 0$. 又在(a, b)内, $x-a>0$, 所以在(a, b)内

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\le 0.$$

习题 5–2

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 x=0 及 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y'=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt=\sin x$，当 x=0 时, y'=sin0=0;

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y'=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin u du$，$y=\int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t)$=sin t , $y'(t)$=cos t , $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\cos t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y'+\cos x=0,$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}.$$

4. 当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值?

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$，令 $I'(x)$=0，得 x=0.

因为当 x<0 时, $I'(x)$<0; 当 x>0 时, $I'(x)$>0,
所以 x=0 是函数 $I(x)$的极小值点.

5. 计算下列各导数:

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$;

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$;

(3) $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 (1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt \xlongequal{令x^2=u} \frac{d}{du}\int_0^{u}\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}$

$=\sqrt{1+u^2}\cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)'+\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}\cdot(x^3)'$

$=-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt=-\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x)'+\cos(\pi\cos^2 x)(\cos x)'$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi-\pi\sin^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)+\sin x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$

$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$.

6. 计算下列各定积分:

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$;

解 $\int_0^a(3x^2-x+1)dx=(x^3-\frac{1}{2}x^2+x)\big|_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a$.

(2) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$;

解 $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3})\Big|_1^2=\frac{1}{3}(2^3-2^{-3})-\frac{1}{3}(1^3-1^{-3})=2\frac{5}{8}$.

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$;

解 $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_4^9 (x^{\frac{1}{2}}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9$

$=(\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}9^2)-(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}4^2)=45\frac{1}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2}$;

解 $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{1}{a}\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{a}\arctan 0=\frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

解 $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=(x^3+\arctan x)\big|_{-1}^{0}$

$=-(-1)^3-\arctan(-1)=1+\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}$;

解 $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\big|_{-e-1}^{-2}=\ln 1-\ln e=-1$.

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$;

解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$;

解 $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$

$=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=4$.

(12) $\int_{0}^{2}f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2 & x>1\end{cases}$.

解 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x^2dx=(\frac{1}{2}x^2+x)\big|_{0}^{1}+(\frac{1}{6}x^3)\big|_{1}^{2}=\frac{8}{3}$.

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{k}\sin k\pi-\frac{1}{k}\sin k(-\pi)=0-0=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k(-\pi)$

$$=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k\pi=0 .$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k\neq l$. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]dx$

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\cos(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}-[-\frac{1}{2(k-l)}\cos(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]dx$

$$=[\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]dx$.

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

9. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{xe^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x^2}=2.$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1]\\ x & x\in[1,2]\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0, 2]上的表达式，并讨论$\varphi(x)$在(0, 2)内的连续性.

解 当 $0\le x\le 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$;

当 $1<x\le 2$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$.

因此 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3 & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6} & 1<x\le 2\end{cases}$.

因为 $\varphi(1)=\frac{1}{3}$，$\lim_{x\to 1-0}\varphi(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}$,

$\lim_{x\to 1+0}\varphi(x)=\lim_{x\to 1+0}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6})=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,

所以$\varphi(x)$在 $x=1$ 处连续，从而在(0, 2)内连续.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x<0或x>\pi\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在$(-\infty, +\infty)$内的表达式.

解 当 $x<0$ 时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0;$$

当 $0\le x\le\pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};$$

当 $x>\pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin tdt+\int_\pi^x 0dt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^\pi$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0=1.$$

因此 $$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x\le\pi\\ 1 & x\ge\pi\end{cases}.$$

12. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导且 $f'(x)\le 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明在(a, b)内有 $F'(x)\le 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在$\xi\in[a, x]$, 使$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}f(x)$$

$$=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}f(\xi)(x-a)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)].$$

由 $f'(x)\le 0$ 可知 $f(x)$在$[a, b]$上是单调减少的, 而 $a\le\xi\le x$, 所以 $f(x)-f(\xi)\le 0$. 又在(a, b)内, $x-a>0$, 所以在(a, b)内

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\le 0.$$

习题 5–3

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})dx$;

解 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})dx=-\cos(x+\frac{\pi}{3})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

解 $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{-2}(11+5x)^{-2}\Big|_{-2}^{1}=-\frac{1}{10}\cdot 16^{-2}+\frac{1}{10}\cdot 1^{-2}=\frac{51}{512}$.

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$;

解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}s\cos^3\varphi d\sin\varphi=-\frac{1}{4}\cos^3\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}\cos^3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cos^3 0=\frac{1}{4}$.

(4) $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta$;

解 $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}d\theta+\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\cos\theta=\theta\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$

$=\pi+(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_{0}^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}$.

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu$;

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=\frac{1}{2}u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\sin 2u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(6) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$;

解 $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx\overset{令x=\sqrt{2}\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$

$=(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$;

解 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy=\sqrt{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-y^2}dy\overset{令y=2\sin x}{=\!=\!=\!=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\cdot 2\cos xdx$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=2\sqrt{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2y)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\overset{令x=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^2 t}-1)dt=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$;

解 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos tdt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{a^4}{8}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{a^4}{32}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4\pi}{16}.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

解 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}\overset{令x=\tan t}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

解 $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}\overset{令\sqrt{5-4x}=u}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{8}\int_3^1(5-u^2)du=-\frac{1}{8}(5u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_3^1=\frac{1}{6}$.

(12) $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

解 $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\overset{令\sqrt{x}=u}{=\!=\!=\!=}\int_1^2\frac{1}{1+u}\cdot 2udu=2\int_1^2(1-\frac{1}{1+u})du=2(u-\ln|1+u|)\Big|_1^2=2(1+\ln\frac{2}{3})$.

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$;

解 $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}\overset{令\sqrt{1-x}=u}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{u-1}\cdot(-2u)du=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{u-1})du=2(u+\ln|u-1|)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=1-2\ln 2$.

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}$;

解 $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{\sqrt{3a^2-x^2}}d(3a^2-x^2)=-\sqrt{3a^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}a}=a(\sqrt{3}-1)$.

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

解 $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}d(-\frac{t^2}{2})=-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}}$.

(16) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

解 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}d\ln x=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^2}=2(\sqrt{3}-1)$.

(17) $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

解 $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-2}^0\frac{1}{1+(x+1)^2}dx=\arctan(x+1)\Big|_{-2}^0=\arctan1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$.

(18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)d\sin x=(\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$.

(19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sqrt{1-\cos^2 x}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\cos x}(-\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$$

(20) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

解 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$.

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$;

解 因为$x^4\sin x$在区间$[-\pi, \pi]$上是奇函数, 所以$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx=0$.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)d\theta$

$=(3\theta+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$

$=\frac{2}{3}(\arcsin x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^3}{324}$.

(4) $\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx$.

解 因为函数$\frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$是奇函数, 所以$\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx=0$.

3. 证明: $\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)dx=2\int_0^a \varphi(x^2)dx$, 其中$\varphi(u)$为连续函数.

证明 因为被积函数$\varphi(x^2)$是x的偶函数, 且积分区间$[-a, a]$关于原点对称, 所以有

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)dx=2\int_0^a \varphi(x^2)dx.$$

4. 设$f(x)$在$[-b, b]$上连续, 证明$\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{b} f(-x)dx$.

证明 令 $x=-t$, 则 $dx=-dt$, 当 $x=-b$ 时 $t=b$, 当 $x=b$ 时 $t=-b$, 于是

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{b}^{-b} f(-t)(-1)dt=\int_{-b}^{b} f(-t)dt,$$

而 $$\int_{-b}^{b} f(-t)dt=\int_{-b}^{b} f(-x)dx,$$

所以 $\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{b} f(-x)dx$.

5. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续., 证明$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

证明 令 $x=a+b-t$, 则 $dx=d\,t$, 当 $x=a$ 时 $t=b$, 当 $x=b$ 时 $t=a$, 于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-1)dt=\int_a^b f(a+b-t)dt\,,$$

而 $\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$,

所以 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

6. 证明: $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}(x>0)$.

证明 令 $x=\frac{1}{t}$, 则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 当 $x=x$ 时 $t=\frac{1}{x}$, 当 $x=1$ 时 $t=1$, 于是

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt\,,$$

而 $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx$,

所以 $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}$.

7. 证明: $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

证明 令 $1-x=t$, 则$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=-\int_1^0 (1-t)^m t^n dt=\int_0^1 (1-t)^m t^n dt=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$,

即$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

8. 证明: $\int_0^{\pi} \sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$.

证明 $\int_0^{\pi} \sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx$,

而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx \xlongequal{令x=\pi-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\pi-t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$,

所以 $\int_0^{\pi} \sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$.

9. 设 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数, 证明$\int_a^{a+1} f(x)dx$ 的值与 a 无关.

证明 已知 $f(x+l)=f(x)$.

$$\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^l f(x)dx+\int_l^{a+l} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx+\int_l^{a+l} f(x)dx-\int_0^a f(x)dx,$$

而 $$\int_l^{a+l} f(x)dx \xlongequal{令x=t+l} \int_0^a f(t+l)dt=\int_0^a f(x+l)dx=\int_0^a f(x)dx,$$

所以 $$\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx.$$

因此 $\int_a^{a+1} f(x)dx$ 的值与 a 无关.

10. 若 $f(t)$是连续函数且为奇函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数; 若 $f(t)$是连续函数且为偶函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证明 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

若 $f(t)$是连续函数且为奇函数, 则 $f(-t)=-f(t)$, 从而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{令t=-u} \int_0^x f(-u)(-1)du=\int_0^x f(u)dx=\int_0^x f(x)dx=F(x),$$

即 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数.

若 $f(t)$是连续函数且为偶函数, 则 $f(-t)=f(t)$, 从而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{令t=-u} \int_0^x f(-u)(-1)du=-\int_0^x f(u)dx=-\int_0^x f(x)dx=-F(x),$$

即 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

11. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

解 $\int_0^1 xe^{-x}dx=-\int_0^1 xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=1-2e^{-1}$.

(2) $\int_1^e x\ln xdx$;

解 $\int_1^e x\ln xdx=\frac{1}{2}\int_1^e \ln xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_0^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$.

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega tdt$ (ω为常数);

解 $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega tdt=-\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} td\cos\omega t=-\frac{1}{\omega}t\cos\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega tdt$

$$=-\frac{2\pi}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=-\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$;

解 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}xd\cot x=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot xdx=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$=(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9})\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\ln xd\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-2\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=8\ln 2-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=8\ln 2-4\sqrt{x}\Big|_1^4=4(2\ln 2-1).$$

(6) $\int_0^1 x\arctan xdx$;

解 $\int_0^1 x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan xdx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\sin x=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx$

$$=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\cos x=e^{\pi}+2e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}+2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$,

于是

(8) $\int_1^2 x\log_2 xdx$;

解 $\int_1^2 x\log_2 xdx=\frac{1}{2}\int_1^2\log_2 xdx^2=\frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x\ln 2}dx$

$$=2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$

(9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$;

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2 d\sin 2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x^3\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2xdx\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}xd\cos 2x\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2xdx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.

(10) $\int_1^e\sin(\ln x)dx$;

解法一 $\int_1^e\sin(\ln x)dx\xlongequal{令\ln x=t}\int_0^1\sin t\cdot e^t dt$.

因为 $\int_0^1\sin t\cdot e^t dt=\int_0^1\sin tde^t=e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\cos tdt$

$=e\cdot\sin 1-\int_0^1\cos tde^t=e\cdot\sin 1-e^t\cos t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\sin tdt$

$=e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1-\int_0^1 e^t\sin tdt$,

所以 $\int_0^1 e^t\sin tdt=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

因此 $\int_1^e\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

解法二 $\int_1^e\sin(\ln x)dx=x\cdot\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=e\cdot\sin 1-\int_1^e\cos(\ln x)dx$

$=e\cdot\sin 1-x\cdot\cos(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1-\int_0^e\sin(\ln x)dx$,

故 $\int_1^e\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|dx$;

解 $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^1\ln xdx+\int_1^e\ln xdx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1+x\ln x\Big|_1^e+\int_{\frac{1}{e}}^1 dx-\int_1^e dx$

$=-\frac{1}{e}+e+(1-\frac{1}{e})-(e-1)=2(1-\frac{1}{e})$.

(12) $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$ (m 为自然数);

解 $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx\xlongequal{令x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}tdt$.

根据递推公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2} xdx$,

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx=\begin{cases}\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & m\text{为奇数}\\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & m\text{为偶数}\end{cases}.$$

(13) $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m xdx$ (m 为自然数).

解 因为

$$\int_0^{\pi}x\sin^m xdx\overset{\text{令}x=\pi-t}{=\!=\!=}\int_{\pi}^0(\pi-t)\sin^m(\pi-t)(-1)dt=\int_0^{\pi}\pi\sin^m tdt-\int_0^{\pi}t\sin^m tdt,$$

所以 $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m xdx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx$(用第 8 题结果).

根据递推公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} xdx$,

$$J_m=\begin{cases}\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2} & m\text{为偶数}\\ \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\pi & m\text{为奇数}\end{cases}.$$

习题 5–7

1. 判别下列各反常积分的收敛性, 如果收敛, 计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

解 因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{3}x^{-3})+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ 收敛, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

解 因为 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}-2=+\infty$, 所以反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 发散.

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ (a>0);

解 因为

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{a}e^{-ax})+\frac{1}{a}=\frac{1}{a},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$.

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}t dt$ (p>1);

解 因为

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}t dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[e^{(1-p)t}+e^{-(1+p)t}]dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-p}e^{(1-p)t}-\frac{1}{1+p}e^{-(1+p)t}]\Big|_0^{+\infty}=\frac{p}{p^2-1},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}t dt$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}t dt=\frac{p}{p^2-1}$.

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt$ (p>0, ω>0);

解 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt=-\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}e^{-pt}d\cos\omega t$

$$=-\frac{1}{\omega}e^{-pt}\cos\omega t\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}\cos\omega t\cdot(-pe^{-pt})dt=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}d\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}e^{-pt}\sin\omega t\Big|_0^{+\infty}+\frac{p}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\sin\omega t\cdot(-pe^{-pt})dt=\frac{1}{\omega}-\frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt,$$

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt=\frac{\omega}{p^2+w^2}$.

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$.

(7) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\lim_{x\to 1^-}(-\sqrt{1-x^2})+1=1 .$$

(8) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点. 因为

$$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2} ,$$

而 $$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\Big|_0^1=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}-1=+\infty ,$$

所以反常积分 $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散.

(9) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\int_1^2(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})dx=[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}]\Big|_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\lim_{x\to 1^+}[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}]=2\frac{2}{3} .$$

(10) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解 这是无界函数的反常积分, $x=e$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}d\ln x=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e=\lim_{x\to e^-}\arcsin(\ln x)=\frac{\pi}{2} .$$

2. 当 k 为何值时, 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时, 这反常积分发散? 又当 k 为何值时, 这反常积分取得最小值?

解 当 $k<1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-k+1}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$;

当 k=1 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$；

当 k>1 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-k+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}$.

因此当 k>1 时，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛；当 $k\le 1$ 时，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 发散.

当 k>1 时，令 $f(k)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}$，则

$$f'(k)=-\frac{1}{(k-1)^2}(\ln 2)^{1-k}-\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}\ln\ln 2=-\frac{(\ln 2)^{1-k}\ln\ln 2}{(k-1)^2}(k-1+\frac{1}{\ln\ln 2}).$$

令 $f'(k)$=0 得唯一驻点 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$.

因为当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(k)$<0，当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(k)$>0，所以 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 为极小值点，同时也是最小值点，即当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，这反常积分取得最小值

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$.

解 因为

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^n de^{-x}=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1},$$

所以 $I_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot\cdot2\cdot I_1$.

又因为 $I_1=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$,

所以 $I_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot\cdot2\cdot I_1=n!$.

总习题五

1. 填空:

(1)函数 $f(x)$在$[a, b]$上(常义)有界是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的______条件，而 $f(x)$在$[a, b]$上连续是 $f(x)$在$[a, b]$上可积______的条件;

解 函数 $f(x)$在$[a, b]$上(常义)有界是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的___必要___条件，而 $f(x)$在$[a, b]$上连续是 $f(x)$在$[a, b]$上可积___充分___的条件;

(2)对$[a, +\infty)$上非负、连续的函数 $f(x)$，它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在$[a, +\infty)$上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的______条件;

解 对$[a, +\infty)$上非负、连续的函数 $f(x)$，它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在$[a, +\infty)$上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的___充分___条件;

(3)绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定______;

解 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定___收敛___;

(4)函数 $f(x)$在$[a, b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a, b]$上可积，此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ______存在.

解 函数 $f(x)$在$[a, b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a, b]$上可积，此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ___不一定___存在.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots(\frac{n}{n})^p]\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)-\frac{1}{n}\cdot n\ln n]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\ln 1-\ln n)+(\ln 2-\ln n)+\cdots+(\ln n-\ln n)]\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x dx$

$=(x\ln x)\Big|_0^1-\int_0^1 dx=(x\ln x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1=-1$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$连续;

解法一 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{\xi\to a}xf(\xi)=af(a)$ (用的是积分中值定理).

解法二 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)dt}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt+xf(x)}{1}=af(a)$ (用的是洛必达法则).

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}$.

3. 下列计算是否正确，试说明理由:

(1) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\frac{d(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2}=(-\arctan\frac{1}{x})\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}$;

解 计算不正确，因为$\frac{1}{x}$在[−1, 1]上不连续.

(2)因为 $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+x+1}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}-\int_{-1}^1\frac{dt}{t^2+t+1}$，所以 $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+x+1}=0$.

解 计算不正确，因为$\frac{1}{t}$在[−1, 1]上不连续.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^A\frac{x}{1+x^2}dx=0$.

解 不正确，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{x}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{1+x^2}dx\neq\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx.$$

4. 设 $p>0$，证明 $\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1$.

证明 $1>\frac{1}{1+x^p}=\frac{1+x^p-x^p}{1+x^p}=1-\frac{x^p}{1+x^p}>1-x^p$. 因为

$$\int_0^1(1-x^p)dx<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<\int_0^1 dx,$$

而 $\int_0^1 dx=1$，$\int_0^1(1-x^p)dx=(x-\frac{x^{p+1}}{p+1})\Big|_0^1=\frac{p}{1+p}$，

所以 $\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1$.

5. 设 $f(x)$、$g(x)$在区间$[a, b]$上均连续，证明:

(1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$;

证明 因为$[f(x)-\lambda g(x)]^2\geq 0$，所以$\lambda^2 g^2(x)-2\lambda f(x)g(x)+f^2(x)\geq 0$，从而

$$\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0.$$

上式的左端可视为关于λ的二次三项式，因为此二次三项式大于等于 0，所以其判别式小于等于 0，即

$$4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leq 0,$$

亦即 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$.

(2) $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

证明 $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\leq\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

又 $\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}=\left([\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}+[\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\right)^2$,

所以 $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x)>0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2$.

证明 已知有不等式$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$，在此不等式中，取

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$， $g(x)=\sqrt{f(x)}$，则有

$$\int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2\cdot dx\cdot\int_a^b[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2dx\ge[\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx]^2,$$

即
$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2.$$

7. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\tan\frac{x}{2})-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=(x\tan\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx+\ln 2=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx.$$

令 $\frac{\pi}{4}-x=u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-u)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos udu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx,$$

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dx=\ln\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}\sqrt{2}.$$

(3) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

解 令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos tdt}{\sin t+\cos t}.$$

又令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t dt}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{\sin u+\cos u},$$

所以 $$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1).$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x(\sec^2 x+1)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

8. 设 $f(x)$为连续函数，证明 $\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x[\int_0^t f(u)du]dt$.

证明 $\int_0^x[\int_0^t f(u)du]dt=t\int_0^t f(u)du\Big|_0^x-\int_0^x td[\int_0^t f(u)du]$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x f(t)(x-t)dt.$$

9. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}$, $x\in[a, b]$. 证明:

(1)$F'(x)\geq 2$;

(2)方程 $F(x)=0$ 在区间(a, b)内有且仅有一个根.

证明 (1) $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$.

(2)因为 $f(x)>0$, $a<b$，所以

$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)}<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0,$$

由介值定理知 $F(x)=0$ 在(a, b)内有根. 又 $F''(x)\geq 2$, 所以在(a, b)内仅有一个根.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^x} & x<0\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

解 $\int_0^2 f(x-1)dx \overset{令x-1=t}{=\!=\!=\!=} \int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$

$$=\int_{-1}^0 \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt+\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt=-\ln(e^{-t}+1)\Big|_{-1}^0+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln(1+e).$$

11. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续, $g(x)$在区间$[a, b]$上连续且不变号. 证明至少存在一点 $x\in[a, b]$, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \text{ (积分第值定理)}.$$

证明 若 $g(x)=0$, 则结论题然成立.

若 $g(x)\neq 0$, 因为 $g(x)$不变号, 不妨设 $g(x)>0$.

因 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 所以 $f(x)$在$[a, b]$上有最大值 M 和最小值 m 即

$m\leq f(x)\leq M$,

因此有 $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$.

根据定积分的性质, 有

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx,$$

或 $$m\leq\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M.$$

因为 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 根据介值定理, 至少存在一点 $x\in(a, b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi),$$

即 $$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

*12.(1)证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx,(n>1)$

证明 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}d(e^{-x^2})$

$$=-\frac{1}{2}[(x^{n-1}e^{-x^2})|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}d(x^{n-1})]$$

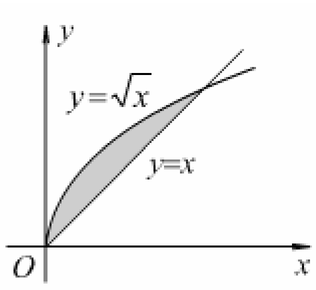
$$=\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-2}e^{-x^2}dx(n>1)$$

(2)证明 $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(n+1)(n\in N)$

习题 6–2

1. 求图 6–21 中各画斜线部分的面积:

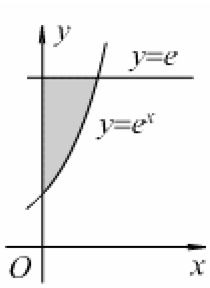
(1)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2)



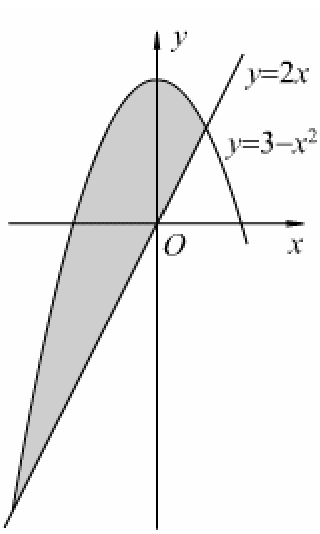
解法一 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_0^1(e-e^x)dx=(ex-e^x)|_0^1=1,$$

解法二 画斜线部分在 y 轴上的投影区间为[1, e]. 所求的面积为

$$A=\int_1^e\ln ydy=y\ln y|_1^e-\int_1^e dy=e-(e-1)=1.$$

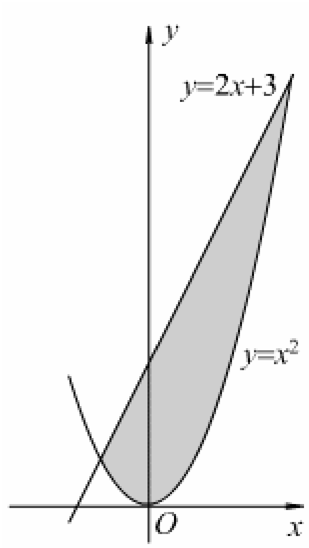
(3)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[−3, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_{-3}^{1}[(3-x^2)-2x]dx=\frac{32}{3}.$$

(4)



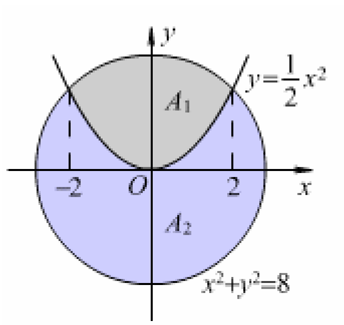
解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[−1, 3]. 所求的面积为

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与$x^2+y^2=8$(两部分都要计算);

解:



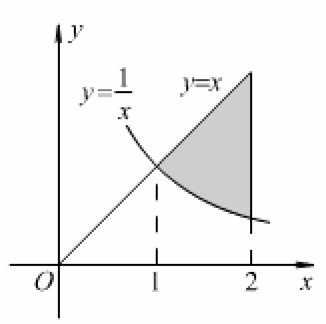
$$A_1=2\int_{0}^{2}(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2)dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{8-x^2}dx-\int_{0}^{2}x^2dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{8-x^2}dx-\frac{8}{3}$$

$$=16\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt-\frac{8}{3}=2\pi+\frac{4}{3}.$$

$$A_2=(2\sqrt{2})^2\pi-S_1=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;

解:

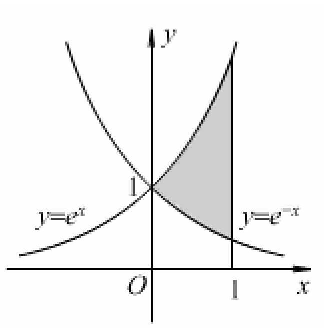


所求的面积为

$$A=\int_0^2(x-\frac{1}{x})dx=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

(3) $y=e^x$, $y=e^{-x}$与直线$x=1$;

解:

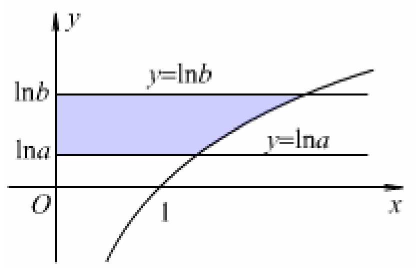


所求的面积为

$$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\frac{1}{e}-2.$$

(4)$y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a$, $y=\ln b$ ($b>a>0$).

解

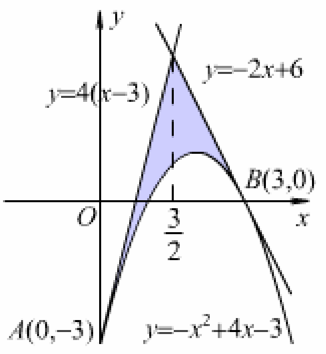


所求的面积为

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b} = b-a$$

3. 求抛物线$y=-x^2+4x-3$ 及其在点(0, −3)和(3, 0)处的切线所围成的图形的面积.

解:



$y'=-2x+4$.

过点(0, −3)处的切线的斜率为 4, 切线方程为 $y=4(x-3)$.

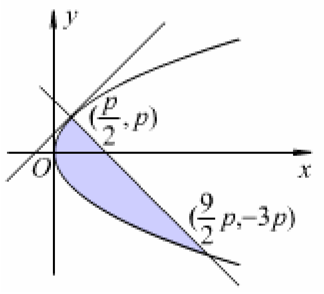
过点(3, 0)处的切线的斜率为−2, 切线方程为 $y=-2x+6$.

两切线的交点为 $(\frac{3}{2}, 3)$, 所求的面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^2+4x-3]dx=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线$y^2=2px$及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解



$2y\cdot y'=2p$.

在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处, $y'=\frac{p}{y}\Big|_{(\frac{p}{2},p)}=1$, 法线的斜率 $k=-1$,

法线的方程为 $y-p=-(x-\frac{p}{2})$, 即 $x=\frac{3p}{2}-y$.

求得法线与抛物线的两个交点为 $(\frac{p}{2},p)$ 和 $(\frac{9}{2}p,-3p)$.

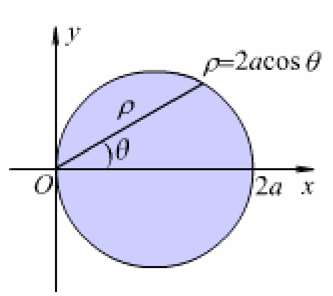
法线与抛物线所围成的图形的面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}(\frac{3p}{2}-y-\frac{y^2}{2p})dy=(\frac{3p}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6p}y^3)|_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2 .$$

5. 求由下列各曲线 所围成的图形的面积;

(1)$\rho=2a\cos\theta$;

解:

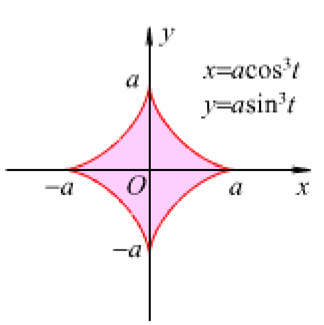


所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\pi a^2.$$

(2)$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

解



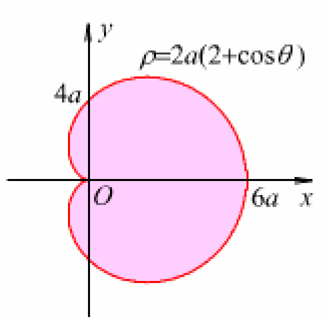
所求的面积为

$$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin^3 t)d(a\cos^3 t)=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2 t\sin^4 tdt$$

$$=12a^2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt]=\frac{3}{8}\pi a^2 .$$

(3)$\rho=2a(2+\cos\theta)$

解

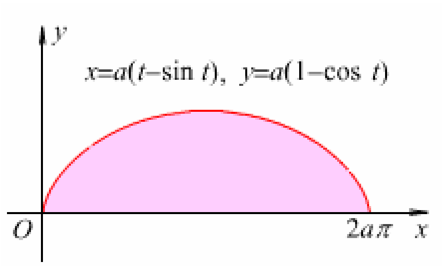


所求的面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2d\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=18\pi a^2\ .$$

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱($0\le t\le 2\pi$)与横轴 所围成的图形的面积.

解:



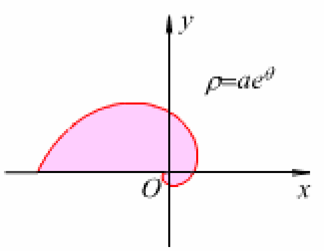
所求的面积为

$$A=\int_0^{2a\pi}ydx=\int_0^{2a}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2a}(1-\cos t)^2dt$$

$$=a^2\int_0^{2a}(1-2\cos t+\frac{1+\cos t}{2})dt=3a^2\pi\ .$$

7. 求对数螺线$\rho=ae^{\theta}$($-\pi\le\theta\le\pi$)及射线$\theta=\pi$所围成的图形面积.

解



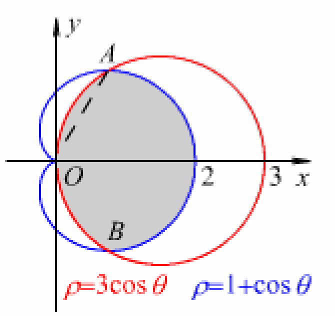
所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(ae^{\theta})^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}d\theta=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi}).$$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积.

(1)$\rho=3\cos\theta$ 及$\rho=1+\cos\theta$

解

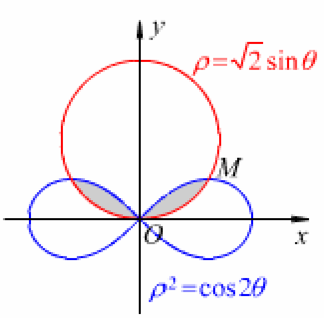


曲线$\rho=3\cos\theta$ 与$\rho=1+\cos\theta$交点的极坐标为 $A(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3})$，$B(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3})$. 由对称性, 所求的面积为

$$A=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2 d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2 d\theta]=\frac{5}{4}\pi.$$

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解



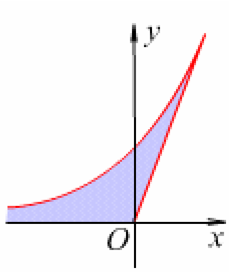
曲线 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $\rho^2=\cos 2\theta$ 的交点 M 的极坐标为 $M(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6})$. 所求的面积为

$$A=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

9. 求位于曲线$y=e^x$下方, 该曲线过原点的切线的左方以及x轴上方之间的图形的面积.

解 设直线$y=kx$与曲线$y=e^x$相切于$A(x_0, y_0)$点, 则有

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 \\ y_0 = e^{x_0} \\ y'(x_0) = e^{x_0} = k \end{cases},$$



求得$x_0=1$, $y_0=e$, $k=e$.

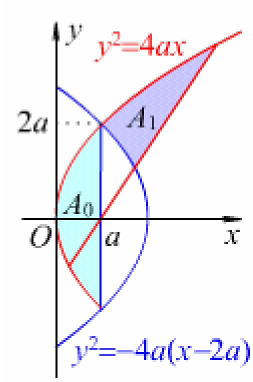
所求面积为

$$\int_0^e (\frac{1}{e}y - \ln y)dy = \frac{1}{2e}y^2\Big|_0^e - y\ln y\Big|_0^e + \int_0^e y\cdot\frac{1}{y}dy = \frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线$y^2=4ax$与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值.

解 设弦的倾角为 α. 由图可以看出, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积为

$$A = A_0 + A_1.$$



显然当$\alpha = \frac{\pi}{2}$时, $A_1=0$; 当$\alpha < \frac{\pi}{2}$时, $A_1>0$.

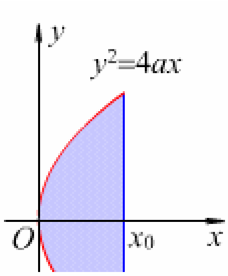
因此, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值为

$$A_0 = 2\int_0^a \sqrt{2ax}dx = \frac{8}{3}\sqrt{a}\sqrt{x^3}\Big|_0^a = \frac{8}{3}a^2.$$

11. 把抛物线$y^2=4ax$及直线$x=x_0(x_0>0)$所围成的图形绕x轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 所得旋转体的体积为

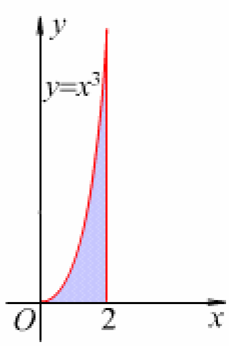
$$V = \int_0^{x_0} \pi y^2 dx = \int_0^{x_0} \pi 4ax dx = 2a\pi x^2\Big|_0^{x_0} = 2a\pi x_0^2.$$



12. 由$y=x^3$, $x=2$, $y=0$ 所围成的图形, 分别绕x轴及y轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi x^6 dx = \frac{1}{7}\pi x^7\Big|_0^2 = \frac{128}{7}\pi.$$



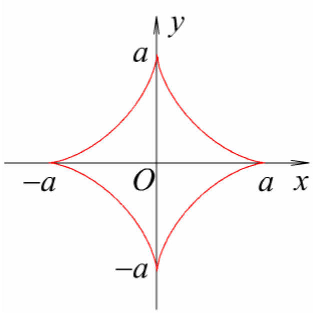
绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_y=2^2\cdot\pi\cdot 8-\int_0^8\pi x^2dy=32\pi-\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=32\pi-\frac{3}{5}\pi\sqrt[3]{y^5}\Big|_0^8=\frac{64}{5}\pi\,.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成的图形, 绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

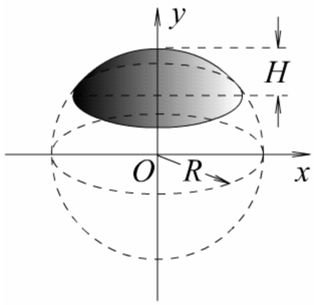
解 由对称性, 所求旋转体的体积为



$$V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx$$

$$=2\pi\int_0^a(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx=\frac{32}{105}\pi a^3\,.$$

14. 用积分方法证明图中球缺的体积为 $V=\pi H^2(R-\dfrac{H}{3})$.



证明 $V=\displaystyle\int_{R-H}^{R}\pi x^2(y)dy=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-y^2)dy$

$$=\pi(R^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{R-H}^{R}=\pi H^2(R-\frac{H}{3})\,.$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2$, $x=y^2$, 绕 y 轴;

解 $V=\pi\displaystyle\int_0^1 ydy-\pi\int_0^1(y^2)^2dy=\pi(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{5}y^5)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\pi\,.$

(2) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $x=0$, $x=a$, $y=0$, 绕 x 轴;

解 $V=\displaystyle\int_0^a\pi y^2(x)dx=\pi\int_0^a a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx\xlongequal{令x=au}\pi a^3\int_0^1\operatorname{ch}^2u\,du$

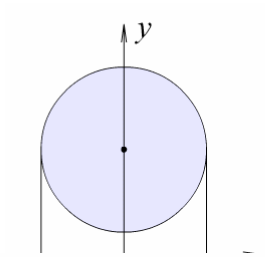
$$=\frac{\pi a^3}{4}\int_0^1(e^{2u}+2+e^{-2u})du=\frac{\pi a^3}{4}(\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u})\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}(2+\mathrm{sh}2).$$

(3) $x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴.

解 $V=\pi\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-x^2})^2dx-\pi\int_{-4}^{4}(5-\sqrt{16-x^2})^2dx$

$$=40\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx=160\pi^2.$$

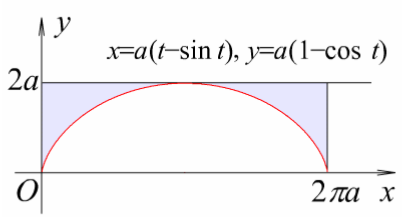


(4)摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱, $y=0$, 绕直线 $y=2a$.

解 $V=\pi\int_0^{2a\pi}(2a)^2dx-\pi\int_0^{2a\pi}(2a-y)^2dy$

$$=8a^3\pi^2-\pi\int_0^{2\pi}[a(1+\cos t)^2]^2da(t-\sin t)$$

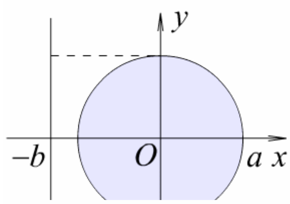
$$=8a^3\pi^2-a^3\pi\int_0^{2a}(1+\cos t)\sin^2 tdt=7a^3\pi^2.$$



16. 求圆盘 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$旋转所成旋转体的体积.

解 $V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-y^2})^2dy-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-y^2})^2dy$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}dy=2a^2b\pi^2.$$

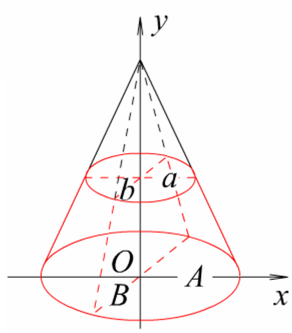


17. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

解 建立坐标系如图. 过 y 轴上 y 点作垂直于 y 轴的平面，则平面与截锥体的截面为椭圆，易得其长短半轴分别为

$$A-\frac{A-a}{h}y,\ B-\frac{B-b}{h}y.$$

截面的面积为 $(A-\frac{A-a}{h}y)\cdot(B-\frac{B-b}{h}y)\pi$.

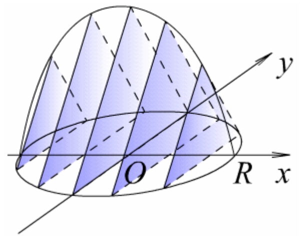


于是截锥体的体积为

$$V=\int_0^h (A-\frac{A-a}{h}y)\cdot(B-\frac{B-b}{h}y)\pi dy=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.

解 设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$，由已知条件知，它是边长为 $\sqrt{R^2-x}$ 的等边三角形的面积，其值为



$$A(x)=\sqrt{3}(R^2-x^2),$$

所以 $$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明 由平面图形 $0\le a\le x\le b$, $0\le y\le f(x)$绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

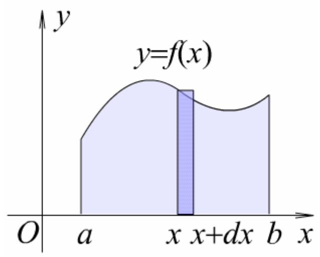
$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

证明 如图，在 x 处取一宽为 dx 的小曲边梯形，小曲边梯形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积近似为 $2\pi x\cdot f(x)dx$，这就是体积元素，即

$$dV=2\pi x\cdot f(x)dx,$$

于是平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)dx=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$



20. 利用题 19 和结论，计算曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

$$V=2\pi\int_0^\pi x\sin xdx=-2\pi\int_0^\pi xd\cos x=2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^\pi=2\pi^2.$$

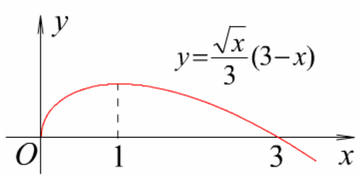
21. 计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解 $$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,$$

令 $\sqrt{1+x^2}=t$，即 $x=\sqrt{t^2-1}$，则

$$s=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3 dt+\int_2^3\frac{1}{t^2-1}dt=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

22. 计算曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\le x\le 3$ 的一段弧的长度.



解 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x\sqrt{x}$，$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}$，

$$y'^2=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x,\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}),$$

所求弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x})\Big|_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解 由 $\begin{cases} y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2=\frac{x}{3} \end{cases}$ 得两曲线的交点的坐标为 $(2,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$(2,-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

所求弧长为 $s=2\int_1^2\sqrt{1+y'^2}dx$.

因为

$$2yy'=2(x-1)^2,\quad y'=\frac{(x-1)^2}{y},\quad y'^2=\frac{(x-1)^4}{y^2}=\frac{(x-1)^4}{\frac{2}{3}(x-1)^3}=\frac{3}{2}(x-1).$$

所以

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}dx=\frac{2}{3\sqrt{2}}\int_1^2\sqrt{3x-1}d(3x-1)=\frac{8}{9}[(\frac{5}{2})^{\frac{3}{2}}-1].$$

24. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$ 的弧长.

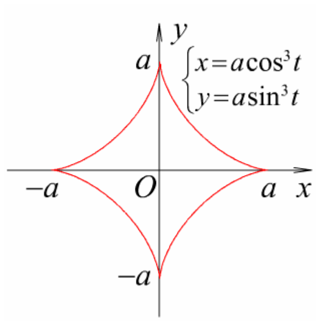
解 $s=\int_0^y\sqrt{1+x'^2(y)}dy=\int_0^y\sqrt{1+(\frac{y}{p})^2}dy=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}dy$

$$=\frac{1}{p}[\frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})]\Big|_0^y$$

$$=\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

25. 计算星形线 $x=a\cos^3 t$， $y=a\sin^3 t$ 的全长.

解 用参数方程的弧长公式.



$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cdot\cos t]^2}dt$$

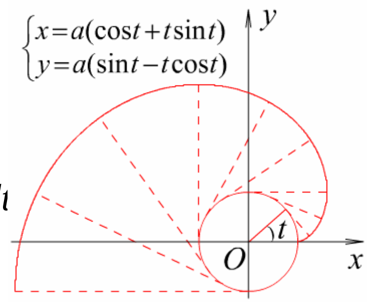
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=6a.$$

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直，使细线与圆周始终相切，细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线，它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

计算这曲线上相应于 t 从 0 变到π的一段弧的长度.

解 由参数方程弧长公式



$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt$$

$$=a\int_0^{\pi}tdt=\frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$上求分摆线第一拱成 1: 3 的点的坐标.

解 设t从 0 变化到t_0时摆线第一拱上对应的弧长为$s(t_0)$，则

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{t_0}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}dt$$

$$=2a\int_0^{t_0}\sin\frac{t}{2}dt=4a(1-\cos\frac{t_0}{2}).$$

当$t_0=2\pi$时，得第一拱弧长$s(2\pi)=8a$. 为求分摆线第一拱为 1: 3 的点为$A(x, y)$，令

$$4a(1-\cos\frac{t_0}{2})=2a\ ,$$

解得$t_0=\frac{2\pi}{3}$, 因而分点的坐标为:

横坐标 $x=a(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})a$,

纵坐标 $y=a(1-\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{2}a$,

故所求分点的坐标为 $((\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})a, \frac{3}{2}a)$.

28. 求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 相应于自θ=0 到θ=φ的一段弧长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{(e^{a\theta})^2+(ae^{a\theta})^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta}-1)\ .$$

29. 求曲线$\rho\theta$=1 相应于自 $\theta=\frac{3}{4}$ 至 $\theta=\frac{4}{3}$ 的一段弧长.

解 按极坐标公式可得所求的弧长

$$s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{(\frac{1}{\theta})^2+(-\frac{1}{\theta^2})^2}d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}\ .$$

30. 求心形线ρ=a(1+cos θ)的全长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\ .$$

习题 6–3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F(单位: N)与伸长量 s(单位: cm)成正比, 即 $F=ks$ (k 为比例常数). 如果把弹簧由原长拉伸 6cm, 计算所作的功.

解 将弹簧一端固定于 A, 另一端在自由长度时的点 O 为坐标原点, 建立坐标系. 功元素为 $dW=ksds$, 所求功为

$$W=\int_0^6 ksds=\frac{1}{2}ks^2\Big|_0^6=18\,\text{k(牛·厘米)}.$$

2. 直径为 20cm、高 80cm的圆柱体内充满压强为 10N/cm^{2}的蒸汽. 设温度保持不变, 要使蒸汽体积缩小一半, 问需要作多少功?

解 由玻–马定律知:

$$PV=k=10\cdot(\pi 10^2\cdot 80)=80000\pi\,.$$

设蒸气在圆柱体内变化时底面积不变, 高度减小x厘米时压强 为$P(x)$牛/厘米^2, 则

$$P(x)\cdot[(\pi 10^2)(80-x)]=80000\pi\,,\ P(x)=\frac{800}{80-\pi}\,.$$

功元素为 $dW=(\pi\cdot 10^2)P(x)dx$,

所求功为

$$W=\int_0^{40}(\pi\cdot 10^2)\cdot\frac{800}{80-\pi}dx=80000\pi\int_0^{40}\frac{1}{80-\pi}dx=800\pi\ln 2\,\text{(J)}.$$

3. (1)证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=\frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度, R 是地球的半径;

(2)一颗人造地球卫星的质量为 173kg, 在高于地面 630km处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知g=9.8m/s^2, 地球半径 R=6370km.

证明 (1)取地球中心为坐标原点, 把质量为 m 的物体升高的功元素为

$$dW=\frac{kMm}{y^2}dy\,,$$

所求的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{kMm}{y^2}dy=k\cdot\frac{mMh}{R(R+h)}.$$

(2) $W=6.67\times10^{-11}\cdot\dfrac{173\times5.98\times10^{24}\times630\times10^{3}}{6370\times10^{3}(6370+630)\times10^{3}}=9.75\times10^{5}$ (kJ).

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服媒质阻力所作的功.

解 因为 $x=ct^3$，所以

$$v=x'(t)=3cx^2，\text{阻力 } f=-kv^2=-9kc^2t^4. \text{ 而 } t=(\frac{x}{c})^{\frac{2}{3}}，\text{所以}$$

$$f(x)=-9kc^2(\frac{x}{c})^{\frac{4}{3}}=-9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}.$$

功元素 $dW=-f(x)dx$，所求之功为

$$W=\int_0^a[-f(x)]dx=\int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}dx=9kc^{\frac{2}{3}}\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

解 设锤击第二次时铁钉又击入 $h$cm，因木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 x(cm)成正比，即 $f=kx$，功元素 $dW=f\,dx=kxdx$，
击第一次作功为

$$W_1=\int_0^1 kxdx=\frac{1}{2}k,$$

击第二次作功为

$$W_2=\int_1^{1+h}kxdx=\frac{1}{2}k(h^2+2h).$$

因为 $W_1=W_2$，所以有

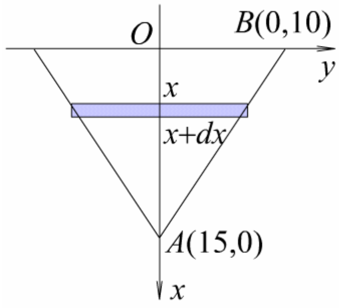
$$\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}k(h^2+2h),$$

解得 $h=\sqrt{2}-1$ (cm).

6. 设一锥形贮水池，深 15m，口径 20m，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

解 在水深 x 处, 水平截面半径为 $r=10-\frac{2}{3}x$, 功元素为

$$dW=x\cdot\pi r^2dx=\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx,$$



所求功为

$$W=\int_0^{15}\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{15}(100x-40x^2+\frac{4}{9}x^3)dx$$

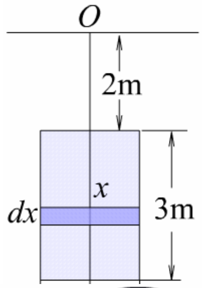
=1875(吨米)=57785.7(kJ).

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图, 水面超过门顶 2m. 求闸门上所受的水压力.

解 建立 x 轴, 方向向下, 原点在水面.

水压力元素为

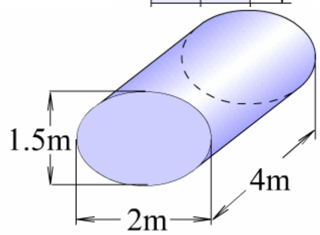
$$dP=1\cdot x\cdot 2dx=2xdx,$$



闸门上所受的水压力为

$$P=2\int_2^5 xdx=x^2\Big|_2^5=21\text{(吨)}=205.8\text{(kN)}.$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.



解 建立坐标系如图, 则椭圆的方程为

$$\frac{(x-\frac{3}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1.$$

压力元素为

$$dP=1\cdot x\cdot 2y(x)dx=x\cdot\frac{8}{3}\sqrt{(\frac{3}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^{\frac{3}{2}}x\cdot\frac{8}{3}\sqrt{(\frac{3}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}dx=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}(1+\sin t)\cdot\frac{3}{4}\cos t\cdot\frac{3}{4}\cos tdx$$

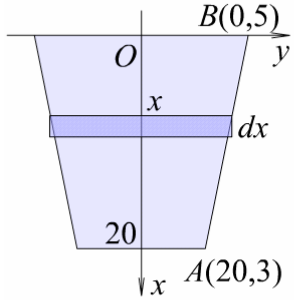
$$=\frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dx=\frac{9}{16}\pi\text{ (吨)}=17.3\text{(kN)}.$$

(提示: 积分中所作的变换为 $x-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\sin t$)

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长10m和6m, 高为20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解 建立坐标系如图. 直线 AB 的方程为

$$y=5-\frac{1}{10}x,$$



压力元素为

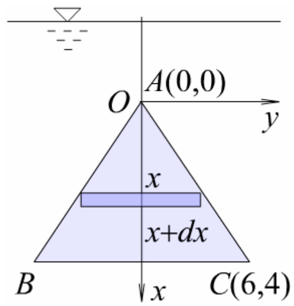
$$dP=1\cdot x\cdot 2y(x)dx=x\cdot(10-\frac{1}{5}x)dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^{20}x\cdot(10-\frac{1}{5}x)dx=1467\text{ (吨)}=14388\text{(千牛)}.$$

10. 一底为8cm、高为6cm的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面3cm, 试求它每面所受的压力.

解 建立坐标系如图.



腰 AC 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$, 压力元素为

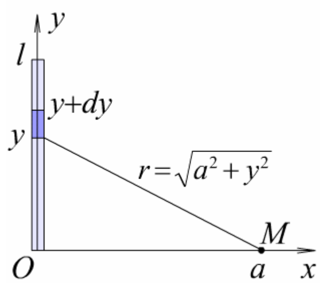
$$dP=(x+3)\cdot 2\cdot\frac{2}{3}x\cdot dx=\frac{4}{3}x(x+3)dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^6\frac{4}{3}x(x+3)dx=\frac{4}{3}(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)\Big|_0^6=168\text{ (克)}=1.65\text{(牛)}.$$

11. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 建立坐标系如图. 在细直棒上取一小段 dy, 引力元素为



$$dF = G \cdot \frac{m\mu dy}{a^2+y^2} = \frac{Gm\mu}{a^2+y^2}dy,$$

dF 在 x 轴方向和 y 轴方向上的分力分别为

$$dF_x = -\frac{a}{r}dF,\ dF_y = \frac{y}{r}dF.$$

$$F_x = \int_0^l \left(-\frac{a}{r} \cdot \frac{Gm\mu}{a^2+y^2}\right)dy = -aGm\mu\int_0^l \frac{1}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2}}dy = -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

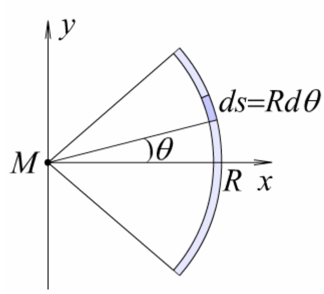
$$F_y = \int_0^l \frac{y}{r} \cdot \frac{Gm\mu}{a^2+y^2}dy = Gm\mu\int_0^l \frac{1}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2}}dy = Gm\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒, 其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 F. 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 根据对称性, $F_y=0$.

$$dF_x = \frac{G \cdot m \cdot \mu ds}{R^2} \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{Gm\mu(Rd\theta)}{R^2} \cdot \cos\theta = \frac{Gm\mu}{R}\cos\theta d\theta,$$



$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{Gm\mu}{R}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{2Gm\mu}{R}\int_0^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$, 方向自 M 点起指向圆弧中点.

总 习 题 六

1. 一金属棒长 3*m*, 离棒左端 *xm* 处的线密度为 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (kg/*m*). 问 x 为何值时, $[0, x]$一段的质量为全棒质量的一半?

解 x 应满足 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt$.

因为 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=[2\sqrt{t+1}]_0^x=2\sqrt{x+1}-2$, $\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}[2\sqrt{t+1}]_0^3=1$,

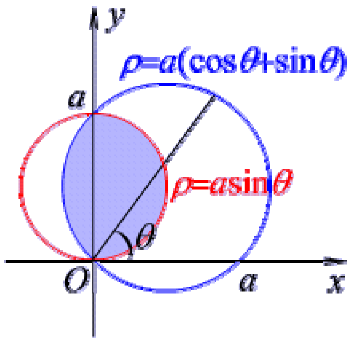
所以 $$2\sqrt{x+1}-2=1,$$

$$x=\frac{5}{4}\text{ (m)}.$$

2. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$, $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$所围图形公共部分的面积.

解 $$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} a^2(\cos\theta+\sin\theta)^2 d\theta$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)d\theta=\frac{\pi-1}{4}a^2.$$



3. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0, 0), 且当 $x\in[0, 1]$时, $y\geq 0$. 试确定 a、b、c 的值, 使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0, 0), 所以 $c=0$, 从而

$$y=ax^2+bx.$$

抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}.$$

令$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，得$b=\frac{8-6a}{9}$.

该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$$

$$=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(\frac{8-6a}{9})^2+\frac{a}{2}(\frac{8-6a}{9})].$$

令$\frac{dV}{d}=\pi[\frac{2a}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{6a-8}{81}+\frac{1}{18}(8-12a)]=0$，得$a=-\frac{5}{3}$，于是 $b=2$.

4. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$, x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

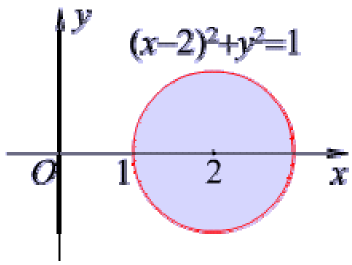
解 所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^4 x\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4=\frac{512}{7}\pi.$$

5. 求圆盘$(x-2)^2+y^2\le 1$绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 $V=2\cdot 2\pi\int_1^3 x\cdot\sqrt{1-(x-2)^2}dx$

$$\xlongequal{\text{令}x-2=\sin t} 4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)\cos^2 t dt=4\pi^2.$$



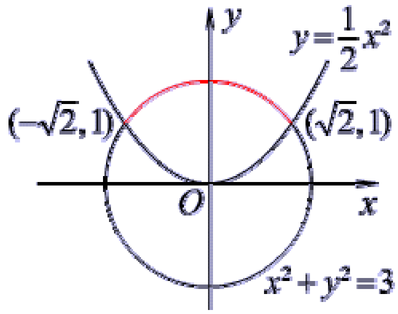
6. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所需截下的有限部分的弧长.

解 由$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$解得抛物线与圆的两个交点为$(-\sqrt{2},1)$，$(\sqrt{2},1)$，于是所求的

弧长为

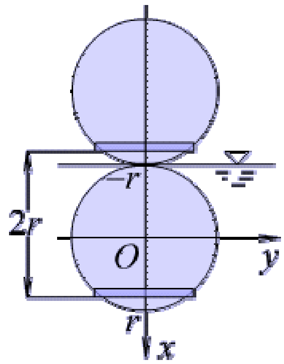
$$s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}dx=2[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})]\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$



7. 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的比重与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?

解 建立坐标系如图. 将球从水中取出时, 球的各点上升的高度均为 $2r$. 在 x 处取一厚度为 dx 的薄片, 在将球从水中取出的过程中, 薄片在水下上升的高度为 $r+x$, 在水上上升的高度为 $r-x$. 在水下对薄片所做的功为零, 在水上对薄片所做的功为



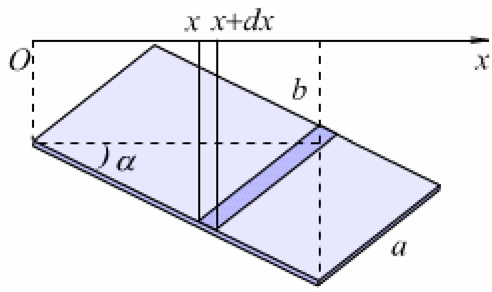
$$dW=g\pi(r-x)(r^2-x^2)dx,$$

对球所做的功为

$$W=g\pi\int_{-r}^{r}(r-x)(r^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi r^2 g.$$

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板, 与液面成 α 角斜沉于液体内, 长边平行于液面而位于深 h 处, 设 $a>b$, 液体的比重为 ρ, 试求薄板每面所受的压力.

解 在水面上建立 x 轴, 使长边与 x 轴在同一垂面上, 长边的上端点与原点对应. 长边在 x 轴上的投影区间为 $[0, b\cos\alpha]$, 在 x 处 x 轴到薄板的距离为 $h+x\tan\alpha$. 压力元素为



$$dP=\rho g\cdot(h+x\tan\alpha)\cdot a\cdot\frac{dx}{\cos\alpha}=\frac{\rho g a}{\cos\alpha}(h+x\tan\alpha)dx,$$

薄板各面所受到的压力为

$$P=\frac{\rho ga}{\cos\alpha}\int_0^{b\cos\alpha}(h+x\tan\alpha)dx=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha).$$

9. 设星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点 O 处有一单位质点, 求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取弧微分 ds 为质点, 则其质量为

$$(\sqrt{x^2+y^2})^3 ds=\sqrt{(x^2+y^2)^3}ds,$$

其中 $ds=\sqrt{[(a\cos^3 t)']^2+[(a\sin^3 t)']^2}dt=3a\sin t\cos t dt$.

设所求的引力在x轴、y轴上的投影分别为F_x、F_y, 则有

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G\cdot\frac{1\cdot\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=3Ga^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t dt=\frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G\cdot\frac{1\cdot\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=3Ga^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^4 t dt=\frac{3}{5}Ga^2,$$

所以 $\boldsymbol{F}=(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2)$.

习题 12−1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

(1)$x(y')^2-2yy'+x=0$;

解 一阶.

(2)$x^2y'-xy'+y=0$;

解 一阶.

(3)$xy'''+2y'+x^2y=0$;

解 三阶.

(4)$(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$;

解 一阶.

(5) $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}=0$;

解 二阶.

(6) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1)$xy'=2y$, $y=5x^2$;

解 $y'=10x$.

因为$xy'=10x^2=2(5x^2)=2y$, 所以$y=5x^2$是所给微分方程的解.

(2)$y'+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$;

解 $y'=3\cos x+4\sin x$.

因为 $y'+y=3\cos x+4\sin x+3\sin x-4\cos x=7\sin x-\cos x\neq 0$,
所以 $y=3\sin x-4\cos x$ 不是所给微分方程的解.

(3)$y''-2y'+y=0$, $y=x^2e^x$;

解 $y'=2xe^x+x^2e^x$, $y''=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=2e^x+4xe^x+x^2e^x$.

因为$y''-2y'+y=2e^x+4xe^x+x^2e^x-2(2xe^x+x^2e^x)+x^2e^x=2e^x\neq 0$,
所以$y=x^2e^x$不是所给微分方程的解.

(4)$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$, $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

解 $y'=C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, $y''=C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$.

因为 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y$

$$=C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2 x}-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})+\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x})$$

$=0$,

所以 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1)$(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C$;

解 将$x^2-xy+y^2=C$的两边对x求导得

$2x-y-xy'+2y\,y'=0$,

即 $(x-2y)y'=2x-y$,

所以由$x^2-xy+y^2=C$所确定的函数是所给微分方程的解.

(2)$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

解 将 $y=\ln(xy)$的两边对 x 求导得

$$y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}y',\ \text{即}\ y'=\frac{y}{xy-x}.$$

再次求导得

$$y''=\frac{y'(xy-x)-y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2}=\frac{-xy'-y^2+y}{(xy-x)^2}=\frac{1}{xy-x}\cdot(-\frac{x}{y}y'^2-yy'+y').$$

注意到由 $y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}y'$ 可得 $\frac{x}{y}y'=xy'-1$, 所以

$$y''=\frac{1}{xy-x}\cdot[-(xy'-1)y'-yy'+y']=\frac{1}{xy-x}\cdot(-xy'^2-yy'+2y'),$$

从而 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$,

即由 $y=\ln(xy)$所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

(1)$x^2-y^2=C$, $y|_{x=0}=5$;

解 由$y|_{x=0}=0$ 得 $0^2-5^2=C$, $C=-25$, 故$x^2-y^2=-25$.

(2)$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

解 $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$.

由$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases}C_1=0\\ C_2+C_1=1\end{cases},$$

解之得$C_1=0$, $C_2=1$, 故$y=xe^{2x}$.

(3)$y=C_1\sin(x-C_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

解 $y'=C_1\cos(x-C_2)$.

由$y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$ 得

$$\begin{cases}C_1\sin(\pi-C_2)=1\\ C_1\cos(\pi-C_2)=0\end{cases}, \text{即} \begin{cases}C_1\sin C_2=1\\ -C_1\cos C_2=0\end{cases},$$

解之得$C_1=1$, $C_2=\dfrac{\pi}{2}$, 故 $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$, 即$y=-\cos x$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1)曲线在点(x, y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

解 设曲线为$y=y(x)$, 则曲线上点(x, y)处的切线斜率为y', 由条件$y'=x^2$, 这便是所求微分方程.

(2)曲线上点 $P(x, y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 $P(x, y)$处的法线斜率为$-\dfrac{1}{y'}$, 由条件第 PQ 中点的横坐标为 0, 所以 Q 点的坐标为$(-x, 0)$, 从而有

$$\frac{y-0}{x+x}=-\frac{1}{y'}, \text{ 即 } yy'+2x=0.$$

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 所温度的平方成反比.

解 $\dfrac{dP}{dT}=k\dfrac{P}{T^2}$, 其中 k 为比例系数.

习题 12−11

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1)$y'-xy-x=1$;

解 设方程的解为 $y=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-a_0x-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}-x=1,$$

即 $$(a_1-1)+(2a_2-a_0-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)a_{n+2}-a_n]x^{n+1}=0\,.$$

可见 $a_1-1=0,\ 2a_2-a_0-1=0,\ (n+2)a_{n+2}-a_n=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$,

于是 $$a_1=1,\ a_2=\frac{1+a_0}{2},\ a_3=\frac{1}{3!!},\ a_4=\frac{1+a_0}{4!!},\cdots,$$

$$a_{2k-1}=\frac{1}{(2k-1)!!},\ a_{2k}=\frac{1+a_0}{(2k)!!},\cdots.$$

所以 $$y=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}+\frac{1+a_0}{(2k)!!}x^{2k}]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}+(1+a_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{x^2}{2})^k$$

$$=-1+(1+a_0)e^{\frac{x^2}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1},$$

即原方程的通解为 $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}$.

(2)$y''+xy'+y=0$;

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即 $$a_0+2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n]x^n=0,$$

于是 $$a_2=-\frac{1}{2}a_0, a_3=-\frac{1}{3}a_1, \cdots, a_{2k-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}a_1, a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!!}a_0, \cdots.$$

所以 $$y=a_0+a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!}x^{2k}+\frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!!}x^{2k+1}]$$

$$=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!!}(-\frac{x^2}{2})^k+a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1}$$

$$=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1},$$

即原方程的通解为

$$y=C_1e^{-\frac{x^2}{2}}+C_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1}.$$

(3) $xy''-(x+m)y'+my=0$(m 为自然数);

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(x+m)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即 $$m(a_0-a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n-m)a_{n+1}-(n-m)a_n]x^n=0.$$

可见 $(a_0-a_1)m=0$, $(n-m)[(n+1)a_{n+1}-a_n]=0$ $(n\neq m)$,

于是 $a_0=a_1$, $a_n=\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)}$ $(n\geq m+2)$, $a_n=\frac{1}{n!}a_1$ $(n\leq m)$.

所以 $$y=a_0+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_0}{n!}x^n+a_{m+1}x^{m+1}+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)}x^n$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+a_{m+1}x^{n+1}+(m+1)!a_{m+1}\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+(m+1)!a_{m+1}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+(m+1)!a_{m+1}(e^x-\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!})$$

$$=(m+1)!a_{m+1}e^x+[a_0-(m+1)!a_{m+1}]\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!},$$

即原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\ (\text{其中}C_1,\ C_2\text{为任意常数}).$$

(4) $(1-x)y'=x^2-y$;

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即 $$a_1+a_0+2a_2x+(3a_3-a_2-1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n+a_n]x^n=0.$$

可见 $a_1+a_0=0$, $2a_2=0$, $3a_3-a_2-1=0$, $(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0(n\geq3)$,

于是 $a_1=-a_0$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$ $(n\geq4)$.

因此原方程的通解为

$$y=C(1-x)+\frac{1}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}x^n\ (C=a_0\text{为任意常数}).\ .$$

(5) $(x+1)y'=x^2-2x+y$.

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-2x+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即 $$-a_0+a_1+2(1+a_2)x+(a_2+3a_3-1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}]x^n=0.$$

于是 $a_1=a_0$, $a_2=-1$, $a_3=\frac{2}{3}$, $a_n=-\frac{n-2}{n}a_{n-1}=(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}(n\geq 4)$.

因此原方程的通解为

$$y=C(1+x)-x^2+\frac{2}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}x^n\ (C=a_0\text{为任意常数}).$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的解:

(1)$y'=y^2+x^3$, $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$;

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n)^2+x^3,$$

即 $$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots.$$

比较两边同次幂的系数得

$$a_1=\frac{1}{4},\ 2a_2=a_1,\ 3a_3=a_2+a_1^2,\ 4a_4=a_3+2a_1a_2+1,\ \cdots,$$

于是 $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{8}$, $a_3=\frac{1}{16}$, $a_4=\frac{9}{32}$, $\cdots$.

因此所求特解为

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

(2)$(1-x)y'+y=1+x$, $y|_{x=0}=0$;

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=1+x,$$

即 $$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数得

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\ (n\geq 3).$$

因此所求特解为

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ 的和函数为$(1-x)\ln(1-x)+x$，所以特解还可以写成

$y=2x+(1-x)\ln(1-x)+x.$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0$, $x|_{t=0}=a$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

解 根据初始条件，可设方程的解为 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^n$.

将 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^n$，$\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}$ 和 $\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}+(a+\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^n)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=0.$$

将级数展开、整理合并同次项，并比较系数得

$$a_0=a,\ a_1=0,\ a_2=-\frac{a}{2!},\ a_3=0,\ a_4=\frac{2a}{4!},$$

$$a_5=0,\ a_6=-\frac{9a}{6!},\ a_7=0,\ a_8=\frac{55a}{8!},\cdots.$$

故所求特解为

$$x=a(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8+\cdots.$$

习题 12−2

1. 求下列微分方程的通解:

(1)$xy'-y\ln y=0$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{x}dx,$$

即 $\ln(\ln y)=\ln x+\ln C$,

故通解为$y=e^{Cx}$.

(2)$3x^2+5x-5y'=0$;

解 分离变量得

$5dy=(3x^2+5x)dx$,

两边积分得

$$\int 5dy=\int(3x^2+5x)dx,$$

即 $5y=x^3+\frac{5}{2}x^2+C_1$,

故通解为 $y=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$, 其中 $C=\frac{1}{5}C_1$为任意常数.

(3) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$;

解 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边积分得

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $\arcsin y=\arcsin x+C$,

故通解为 $y=\sin(\arcsin x+C)$.

(4)$y'-xy'=a(y^2+y')$;

解 方程变形为$(1-x-a)y'=ay^2$,

分离变量得

$$\frac{1}{y^2}dy=\frac{a}{1-a-x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int\frac{a}{1-a-x}dx,$$

即 $$-\frac{1}{y}=-a\ln(1-a-x)-C_1,$$

故通解为 $y=\dfrac{1}{C+a\ln(1-a-x)}$，其中$C=aC_1$为任意常数.

(5)$\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$;

解 分离变量得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}y=-\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}y=-\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx,$$

即 $\ln(\tan y)=-\ln(\tan x)+\ln C$,

故通解为 $\tan x\tan y=C$.

(6)$\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$;

解 分离变量得

$10^{-y}dy=10^x dx$,

两边积分得

$$\int 10^{-y}dy=\int 10^x dx,$$

即 $$-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}+\frac{C}{\ln 10},$$

或 $10^{-y}=10^x+C$,

故通解为$y=-\lg(C-10^x)$.

(7)$(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

解 方程变形为$e^y(e^x+1)dy=e^x(1-e^y)dx$,

分离变量得

$$\frac{e^y}{1-e^y}dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

即　　$-\ln(e^y)=\ln(e^x+1)-\ln C$,

故通解为$(e^x+1)(e^y-1)=C$.

(8)$\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$;

解　分离变量得

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

即　　$\ln(\sin y)=-\ln(\sin x)+\ln C$,

故通解为 $\sin x\sin y=C$.

(9) $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0$;

解　分离变量得

$(y+1)^2dy=-x^3dx$,

两边积分得

$$\int(y+1)^2dy=-\int x^3dx,$$

即　　$\frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{4}x^4+C_1$,

故通解为 $4(y+1)^3+3x^4=C$ ($C=12C_1$).

(10)$ydx+(x^2-4x)dy=0$.

解　分离变量得

$$\frac{4}{y}dy=(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x})dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{4}{y}dy=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x})dx,$$

即　　$\ln y^4=\ln x-\ln(4-x)+\ln C$,

故通解为$y^4(4-x)=Cx$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y'=e^{2x-y}$, $y|_{x=0}=0$;

解　分离变量得

$e^ydy=e^{2x}dx$,

两边积分得

$$\int e^y dy=\int e^{2x}dx,$$

即 $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$,

或 $y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$.

由$y|_{x=0}=0$得$\ln(\frac{1}{2}+C)=0$, $C=\frac{1}{2}$,

所以特解 $y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2})$.

(2)$\cos x\sin ydy=\cos y\sin xdx$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

解 分离变量得

$\tan y\,dy=\tan x\,dx$,

两边积分得

$$\int\tan ydy=\int\tan xdx,$$

即 $-\ln(\cos y)=-\ln(\cos x)-\ln C$,

或 $\cos y=C\cos x$.

由 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 得 $\cos\frac{\pi}{4}=C\cos 0=C$, $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以特解为 $\sqrt{2}\cos y=\cos x$.

(3)$y'\sin x=y\ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{\sin x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{\sin x}dx,$$

即 $\ln(\ln y)=\ln(\tan\frac{x}{2})+\ln C$,

或 $y=e^{C\tan\frac{x}{2}}$.

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 得 $e=e^{C\tan\frac{\pi}{4}}$, $C=1$,

所以特解为 $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$.

(4)$\cos ydx+(1+e^{-x})\sin ydy=0$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

解 分离变量得

$$-\frac{\sin y}{\cos y}dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

两边积分得

$$-\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

即 $\ln|\cos y|=\ln(e^x+1)+\ln|C|$,

或 $\cos y=C(e^x+1)$.

由 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 得 $\cos\frac{\pi}{4}=C(e^{\frac{\pi}{4}}+1)$, $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以特解为 $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1)$.

(5)$xdy+2ydx=0$, $y|_{x=2}=1$.

解 分离变量得

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{2}{x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{2}{x}dx,$$

即 $\ln y=-2\ln x+\ln C$,

或 $y=Cx^{-2}$.

由$y|_{x=2}=1$ 得$C\cdot 2^{-2}=1$, $C=4$,

所以特解为 $y=\frac{4}{x^2}$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏漏斗, 高为 10cm, 顶角为 60°, 漏斗下面有面积为 0. 5cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 设 t 时该已流出的水的体积为 V, 高度为 x, 则由水力学有

$$\frac{dV}{dt}=0.62\times0.5\times\sqrt{(2\times980)x}\text{, 即 } dV=0.62\times0.5\times\sqrt{(2\times980)x}dt.$$

又因为 $r=x\tan30^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}$,

故 $V=-\pi r^2dx=-\dfrac{\pi}{3}x^2dx$,

从而 $0.62\times0.5\times\sqrt{(2\times980)x}dt=-\dfrac{\pi}{3}x^2dx$,

即 $dt=\dfrac{\pi}{3\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}x^{\frac{3}{2}}dx$,

因此 $t=\dfrac{-2\pi}{3\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}x^{\frac{5}{2}}+C$.

又因为当 t=0 时, x=10, 所以 $C=\dfrac{\pi}{3\times5\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}10^{\frac{5}{2}}$,

故水从小孔流出的规律为

$$t=\frac{2\pi}{3\times5\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}(10^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}})=-0.0305x^{\frac{5}{2}}+9.645.$$

令 x=0, 得水流完所需时间约为 10s.

4. 质量为 1g(克)的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在t=10s时, 速度等于50cm/s, 外力为4g cm/s^2, 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 已知$F=k\dfrac{t}{v}$, 并且法t=10s时, v=50cm/s, F=4g cm/s^2, 故$4=k\dfrac{10}{50}$, 从而k=20, 因此

$F=20\dfrac{t}{v}$.

又由牛顿定律, F=ma, 即$1\cdot\dfrac{dv}{dt}=20\dfrac{t}{v}$, 故 v dv=20tdt . 这就是速度与时间应满足的微分方程. 解之得

$\dfrac{1}{2}v^2=10t^2+C$, 即 $v=\sqrt{20t^2+2C}$.

由初始条件有 $\dfrac{1}{2}\times50^2=10\times10^2+C$, C=250. 因此

$$v=\sqrt{20t^2+500}.$$

当 t=60s 时, $v=\sqrt{20\times60^2+500}=269.3\text{cm/s}$.

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速度与它的现存量R成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1600 年后, 只余原始量R_0的一半. 试求镭的量R与时间t的函数关系.

解 由题设知,

$$\frac{dR}{dt}=-\lambda R\text{, 即}\frac{dR}{R}=-\lambda dt\text{,}$$

两边积分得

$$\ln R=-\lambda t+C_1,$$

从而 $R=Ce^{-\lambda t}\ (C=e^{C_1})$.

因为当t=0 时, $R=R_0$, 故$R_0=Ce^0=C$, 即$R=R_0e^{-\lambda t}$.

又由于当 t=1600 时, $R=\frac{1}{2}R_0$, 故$\frac{1}{2}R_0=R_0e^{-1600\lambda}$, 从而$\lambda=\frac{\ln 2}{1600}$.

因此 $R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1000}t}=R_0e^{-0.000433\,t}$.

6. 一曲线通过点(2, 3), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

解 设切点为 $P(x, y)$, 则切线在 x 轴, y 轴的截距分别为 $2x$, $2y$, 切线斜率为

$$\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x},$$

故曲线满足微分方程: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, 即$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$,

从而 $\ln y+\ln x=\ln C$, $xy=C$.

因为曲线经过点(2, 3), 所以 $C=2\times3=6$, 曲线方程为 $xy=6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a, 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h, 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 建立坐标系如图. 设 t 时刻船的位置为(x, y), 此时水速为$v=\frac{dx}{dt}=ky(h-y)$, 故 $dx=ky(h-y)dt$.

又由已知, $y=at$, 代入上式得

$$dx=kat(h-at)dt,$$

积分得

$$x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3+C.$$

由初始条件$x|_{t=0}=0$, 得$C=0$, 故$x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3$.

因此船运动路线的函数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}kaht^2 - \dfrac{1}{3}ka^2t^3 \\ y = ay \end{cases},$$

从而一般方程为 $x = \dfrac{k}{a}(\dfrac{h}{2}y^2 - \dfrac{1}{3}y^3)$.

习题 12−3

1. 求下列齐次方程的通解:

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{u^2-1}\text{, 即 }\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C\text{, 即 }u+\sqrt{u^2-1}=Cx,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\frac{y}{x}+\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}=Cx\text{, 即 }y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2.$$

(2) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u\text{, 即 }\frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C\text{, 即}u=e^{Cx+1},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y=xe^{Cx+1}.$$

(3)$(x^2+y^2)dx-xydy=0$;

解 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, 则原方程化为

$$(x^2+x^2u^2)dx-x^2u(udx+xdu)=0\text{, 即 }udu=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$u^2=\ln x^2+C,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2=x^2(\ln x^2+C).$$

(4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$;

解 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, 则原方程化为

$$(x^3+x^3u^3)dx-3x^3u^2(udx+xdu)=0, \text{ 即 } \frac{3u^2}{1-2u^3}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u^3)=\ln x+\ln C, \text{ 即 } 2u^3=1-\frac{C}{x^2},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x^3-2y^3=Cx.$$

(5) $(2x\mathrm{sh}\frac{y}{x}+3y\mathrm{ch}\frac{y}{x})dx-3x\mathrm{ch}\frac{y}{x}dy=0$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\mathrm{th}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2}{3}\mathrm{th}u+u, \text{ 即 } \frac{3\mathrm{ch}u}{\mathrm{sh}u}du=\frac{2}{x}dx,$$

两边积分得

$$3\ln(\mathrm{sh}u)=2\ln x+\ln C, \text{ 即 } \mathrm{sh}^3u=Cx^2,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\mathrm{sh}^2\frac{y}{x}=Cx^2.$$

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$.

解 原方程变为 $\frac{dx}{dy}=\frac{2(\frac{x}{y}-1)e^{\frac{x}{y}}}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$.

令 $u=\frac{x}{y}$，则原方程化为

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{2(u-1)e^u}{1+2e^u}，即 y\frac{du}{dy}=-\frac{u+2e^u}{1+2e^u},$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du=-\frac{1}{y}dy,$$

两边积分得

$$\ln(u+2e^u)=-\ln y+\ln C，即 y(u+2e^u)=C,$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入上式得原方程的通解

$$y(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}})=C，即 x+2ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

(1)$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0,\ y|_{x=0}=1$;

解 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，则原方程化为

$$(x^2u^2-3x^2)(udx+xdu)+2x^2udx=0,$$

即 $$\frac{u^2-3}{u-u^3}du=\frac{1}{x}dx，或 (-\frac{3}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1})du=\frac{1}{x}dx$$

两边积分得

$$-3\ln|u|+\ln|u+1|+\ln|u-1|=\ln|x|+\ln|C|，即 u^2-1=Cxu^3,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2-x^2=Cy^3.$$

由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=1$，故所求特解为 $y^2-x^2=y^3$.

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ y|_{x=1}=2$;

解 令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u，即 udu=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln x+C,$$

将$u=\frac{y}{x}$代入上式得原方程的通解

$$y^2=2x^2(\ln x+C).$$

由$y|_{x=1}=2$得$C=2$，故所求特解为$y^2=2x^2(\ln x+2)$.

(3)$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$, $y|_{x=1}=1$.

解 这是齐次方程. 令$u=\frac{y}{x}$，即$y=xu$，则原方程化为

$$(x^2+2x^2u-x^2u^2)dx+(x^2u^2+2x^2u-x^2)(udx+xdu)=0,$$

即 $$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=-\frac{1}{x}dx,$$

或 $$(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1})du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln|u+1|-\ln(u^2+1)=\ln|x|+\ln|C|,\ \text{即}\ u+1=Cx(u^2+1),$$

将$u=\frac{y}{x}$代入上式得原方程的通解

$$x+y=C(x^2+y^2).$$

由$y|_{x=1}=1$得$C=1$，故所求特解为$x+y=(x^2+y^2)$.

3. 设有连结点$O(0, 0)$和$A(1, 1)$的一段向上凸的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$，对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点$P(x, y)$，曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为x^2，求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

解 设曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程为$y=y(x)$. 由题意得

$$\int_0^x y(x)dx-\frac{1}{2}xy(x)=x^2,$$

两边求导得

$$y(x)-\frac{1}{2}y(x)-\frac{1}{2}xy'(x)=2x,$$

即 $$y'=\frac{y}{x}-4.$$

令$u=\frac{y}{x}$，则有

$$u+x\frac{du}{dx}=u-4,\ \text{即}\ \frac{1}{u}du=-\frac{4}{x}dx,$$

两边积分得

$$u=-4\ln x+C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得方程的通解

$$y=-4x\ln x+Cx.$$

由于 $A(1, 1)$在曲线上，即 $y(1)=1$，因而 $C=1$，从则所求方程为 $y=-4x\ln x+x$.

习题 12–4

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$;

解 $y=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cdot e^{\int dx}dx+C)=e^{-x}(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+C)=e^{-x}(x+C)$.

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

解 原方程变为 $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$.

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int(x+3+\frac{2}{x})\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x}[\int(x+3+\frac{2}{x})xdx+C]=\frac{1}{x}[\int(x^2+3x+2)dx+C]$$

$$=\frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C)=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}.$$

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

解 $y=e^{-\int\cos dx}(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx+C)$

$$=e^{-\sin x}(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx+C)=e^{-\sin x}(x+C).$$

(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

解 $y=e^{-\int\tan x dx}(\int\sin 2x\cdot e^{\int\tan x dx}dx+C)$

$$=e^{\ln\cos x}(\int\sin 2x\cdot e^{-\ln\cos x}dx+C)$$

$$=\cos x(\int 2\sin x\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+C)$$

$$=\cos x(-2\cos x+C)=C\cos x-2\cos^2 x.$$

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

解 原方程变形为 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$.

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}(\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)dx+C]=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C).$$

(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$;

解 $\rho=e^{-\int 3d\theta}(\int 2\cdot e^{\int 3d\theta}d\theta+C)$

$=e^{-3\theta}(\int 2e^{3\theta}d\theta+C)$

$=e^{-3\theta}(\frac{2}{3}e^{3\theta}+C)=\frac{2}{3}+Ce^{-3\theta}$.

(7) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$;

解 $y=e^{-\int 2xdx}(\int 4x\cdot e^{\int 2xdx}dx+C)$

$=e^{-x^2}(\int 4x\cdot e^{x^2}dx+C)$

$=e^{-x^2}(2e^{x^2}+C)=2+Ce^{-x^2}$.

(8) $y\ln ydx+(x-\ln y)dy=0$;

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$.

$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}(\int\frac{1}{y}\cdot e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C)$

$=\frac{1}{\ln y}(\int\frac{1}{y}\cdot\ln ydy+C)$

$=\frac{1}{\ln y}(\frac{1}{2}\ln^2 y+C)=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$.

(9) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$;

解 原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$.

$y=e^{\int\frac{1}{x-2}dx}[\int 2(x-2)^2\cdot e^{-\int\frac{1}{x-2}dx}dx+C]$

$=(x-2)[\int 2(x-2)^2\cdot\frac{1}{x-2}dx+C]$

$=(x-2)[(x-2)^2+C]=(x-2)^3+C(x-2)$.

(10) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$.

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$.

$$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}[\int(-\frac{1}{2}y)\cdot e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C]$$

$$=y^3(-\frac{1}{2}\int y\cdot\frac{1}{y^3}dy+C)$$

$$=y^3(\frac{1}{2y}+C)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x$, $y|_{x=0}=0$;

解 $y=e^{\int\tan xdx}(\int\sec x\cdot e^{-\int\tan xdx}dx+C)$

$$=\frac{1}{\cos x}(\int\sec x\cdot\cos xdx+C)=\frac{1}{\cos x}(x+C).$$

由$y|_{x=0}=0$，得$C=0$，故所求特解为$y=x\sec x$.

(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi}=1$;

解 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$

$$=\frac{1}{x}(\int\frac{\sin x}{x}\cdot xdx+C)=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

由$y|_{x=\pi}=1$，得$C=\pi-1$，故所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$， $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

解 $y=e^{-\int\cot xdx}(\int 5e^{\cos x}\cdot e^{\int\cot xdx}dx+C)$

$$=\frac{1}{\sin x}(\int 5e^{\cos x}\cdot\sin xdx+C)=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+C).$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$，得 $C=1$，故所求特解为 $y=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+1)$.

(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8$, $y|_{x=0}=2$;

解 $y=e^{-\int 3dx}(\int 8\cdot e^{\int 3dx}dx+C)$

$$=e^{-3x}(8\int e^{3x}dx+C)=e^{-3x}(\frac{8}{3}e^{3x}+C)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x}.$$

由$y|_{x=0}=2$, 得$C=-\frac{2}{3}$, 故所求特解为 $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1$, $y|_{x=1}=0$.

解 $y=e^{-\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}(\int 1\cdot e^{\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}dx+C)$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}(\int\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}dx+C)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C).$$

由$y|_{x=1}=0$, 得$C=-\frac{1}{2e}$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{2}x^3(1-e^{\frac{1}{x^2}-1})$.

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点(x, y)处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 由题意知$y'=2x+y$, 并且$y|_{x=0}=0$.

由通解公式得

$$y=e^{\int dx}(\int 2xe^{-\int dx}dx+C)=e^x(2\int xe^{-x}dx+C)$$

$$=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2.$$

由$y|_{x=0}=0$, 得$C=2$, 故所求曲线的方程为$y=2(e^x-x-1)$.

4. 设有一质量为m的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一至、大小与时间成正比(比例系数为k_1)的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 由牛顿定律 $F=ma$, 得$m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$, 即$\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$.

由通解公式得

$$v=e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+C)=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\frac{k_2}{m}t}dt+C)$$

$$=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+C).$$

由题意，当 t=0 时 v=0，于是得 $C=\frac{k_1 m}{k_2^2}$. 因此

$$v=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1 m}{k_2^2})$$

即 $$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

5. 设有一个由电阻 R=10Ω、电感 L=2h(亨)和电源电压 E=20sin5t V(伏)串联组成的电路. 开关 K 合上后，电路中有电源通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 由回路电压定律知

$$20\sin 5t-2\frac{di}{dt}-10i=0, \text{ 即 } \frac{di}{dt}+5i=10\sin 5t.$$

由通解公式得

$$i=e^{-\int 5dt}(\int 10\sin 5t\cdot e^{\int 5dt}dt+C)=\sin 5t-\cos 5t+Ce^{-5t}.$$

因为当 t=0 时 i=0，所以 C=1. 因此

$$i=\sin 5t-\cos 5t+e^{-5t}=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin(5t-\frac{\pi}{4})\text{ (A)}.$$

6. 设曲 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面(x>0)内与路径无关，其中 $f(x)$可导，且 $f(1)$=1，求 $f(x)$.

解 因为当 x>0 时，所给积分与路径无关，所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[2xf(x)-x^2],$$

即 $$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x,$$

或 $$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1.$$

因此 $$f(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}(\int 1e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\int\sqrt{x}dx+C)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

由 $f(1)$=1 可得 $C=\frac{1}{3}$，故 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

7. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=\cos x-\sin x\text{，即}\frac{d(y^{-1})}{dx}-y^{-1}=\sin x-\cos x.$$

$$y^{-1}=e^{\int dx}[\int(\sin x-\cos x)\cdot e^{-\int dx}dx+C]$$

$$=e^{-x}[\int(\cos x-\sin x)e^{x}dx+C]=Ce^{x}-\sin x,$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y}=Ce^{x}-\sin x$.

(2) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-3x\frac{1}{y}=x\text{，即}\frac{d(y^{-1})}{dx}+3xy^{-1}=-x.$$

$$y^{-1}=e^{-\int 3xdx}[\int(-x)\cdot e^{\int 3xdx}dx+C]$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}(-\int xe^{\frac{3}{2}x^2}dx+C)$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C)=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3},$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y}=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}$.

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}\frac{1}{y^3}=\frac{1}{3}(1-2x)\text{，即}\frac{d(y^{-3})}{dx}-y^{-3}=2x-1.$$

$$y^{-3}=e^{\int dx}[\int(2x-1)\cdot e^{-\int dx}dx+C]$$

$$=e^{x}[\int(2x-1)e^{-x}dx+C]=-2x-1+Ce^{x},$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^3}=Ce^{x}-2x-1$.

(4) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y^4}=x\text{，即 }\frac{d(y^{-4})}{dx}+4y^{-4}=-4x\,.$$

$$y^{-4}=e^{-\int 4dx}[\int(-4x)\cdot e^{\int 4dx}dx+C]$$

$$=e^{-4}(-4\int xe^{4x}dx+C)$$

$$=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}\,,$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}$.

(5) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$.

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2}=(1+\ln x)\text{，即 }\frac{d(y^{-2})}{dx}+\frac{2}{x}y^{-2}=-2(1+\ln x)\,.$$

$$y^{-2}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[-2\int(1+\ln x)\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}[-2\int(1+\ln x)x^2dx+C]$$

$$=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x\,,$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^2}=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x$.

8. 验证形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的微分方程，可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

解 原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-yf(xy)}{xg(xy)}\,.$$

在代换 $v=xy$ 下原方程化为

$$\frac{x\frac{dv}{dx}-v}{x^2}=-\frac{vf(v)}{x^2g(v)}\,,$$

即 $$\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du=\frac{1}{x}dx,$$

积分得 $$\int\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du=\ln x+C,$$

对上式求出积分后, 将 $v=xy$ 代回, 即得通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

(1) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$;

解 令 $u=x+y$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-1=u^2, \text{ 即 } dx=\frac{du}{1+u^2}.$$

两边积分得

$$x=\arctan u+C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x=\arctan(x+y)+C, \text{ 即 } y=-x+\tan(x-C).$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$;

解 令 $u=x-y$, 则原方程化为

$$1-\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1, \text{ 即 } dx=-udu.$$

两边积分得

$$x=-\frac{1}{2}u^2+C_1.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x=-\frac{1}{2}(x-y)^2+C_1, \text{ 即} (x-y)^2=-2x+C(C=2C_1).$$

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;

解 令 $u=xy$, 则原方程化为

$$x(\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2})+\frac{u}{x}=\frac{u}{x}\ln u, \text{ 即 } \frac{1}{x}dx=\frac{1}{u\ln u}du.$$

两边积分得

$$\ln x+\ln C=\ln\ln u, \text{ 即} u=e^{Cx}.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$xy=e^{Cx}, \text{ 即 } y=\frac{1}{x}e^{Cx}.$$

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2 x-2\sin x-\cos x+1$;

解 原方程变形为

$$y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x.$$

令 $u=y+\sin x-1$，则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-\cos x=u^2-\cos x\text{，即 }\frac{1}{u^2}du=dx.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{u}=x+C.$$

将 $u=y+\sin x-1$ 代入上式得原方程的通解

$$-\frac{1}{y+\sin x-1}=x+C\text{，即 }y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

(5)$y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$.

解 原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(xy+1)}{x(1+xy+x^2y^2)}.$$

令 $u=xy$，则原方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}=-\frac{u(u+1)}{x^2(1+u+u^2)}\text{，即 }\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{x^2(1+u+u^2)}.$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}dx=(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u})du.$$

两边积分得

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln u.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln xy,$$

即 $2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2(C=2C_1)$.

习题 12−5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程, 并求全微分方程的通解:

(1)$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$;

解 这里$P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+4y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(6x^2y+4y^2)dy=C,$$

即 $$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

(2)$(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$;

解 这里$P=a^2-2xy-y^2$, $Q=-(x+y)^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x a^2dx-\int_0^y(x+y)^2dy=C,$$

即 $a^2x-x^2y-xy^2=C$.

(3)$e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$;

解 这里$P=e^y$, $Q=xe^y-2y$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x e^0dx+\int_0^y(xe^y-2y)dy=C,$$

即 $xe^y-y^2=C$.

(4)$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

解 原方程变形为$(x\cos y+\cos x)dy-(y\sin x+\sin y)dx=0$.

这里 $P=-(y\sin x+\sin y)$, $Q=x\cos y+\cos x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 0dx+\int_0^y (x\cos y+\cos x)dy=C,$$

即 $x\sin y+y\cos x=C$.

解

(5)$(x^2-y)dx-xdy=0$;

解 这里$P=x^2-y$, $Q=-x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x x^2dx-\int_0^y xdy=C,$$

即 $$\frac{1}{3}x^3-xy=C.$$

(6)$y(x-2y)dx-x^2dy=0$;

解 这里$P=y(x-2y)$, $Q=-x^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x-4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x,$$

所以此方程不是全微分方程.

(7)$(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$;

解 这里$P=1+e^{2\theta}$, $Q=2\rho e^{2\theta}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2e^{2\theta}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^\rho 2d\rho+\int_0^\theta 2\rho e^{2\theta}d\theta=C,$$

即 $\rho(e^{2\theta}+1)=C$.

(8)$(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

解 这里$P=x^2+y^2$, $Q=xy$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=y,$$

所以此方程不是全微分方程.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子, 并求其通解:

(1)$(x+y)(dx-dy)=dx+dy$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{x+y}$得

$$dx-dy=\frac{dx+dy}{x+y},\text{ 即 } d(x-y)=d\ln(x+y),$$

所以$\frac{1}{x+y}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x-y=\ln(x+y)+C.$$

(2)$ydx-xdy+y^2xdx=0$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0,\text{ 即 } d(\frac{x}{y})+d(\frac{x^2}{2})=0,$$

所以$\frac{1}{y^2}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

(3)$y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$;

解 原方程变形为

$$xy^2dx-3y^3dx+dy-3x^2dy=0,$$

两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$并整理得

$$xdx+\frac{dy}{y^2}-(3ydx+3xdy)=0,\text{ 即 } d(\frac{x^2}{2})-d(\frac{1}{y})-3d(xy)=0,$$

所以$\frac{1}{y^2}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C.$$

(4)$xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{x^2+y^2}$得

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-dx=0\text{，即 }d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)]-dx=0\text{，}$$

所以$\frac{1}{x^2+y^2}$为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$x^2+y^2=Ce^{2x}.$$

(5)$(x-y^2)dx+2xydy=0$;

解 原方程变形为

$$xdx-y^2dx+2xydy=0,$$

两边同时乘以$\frac{1}{x^2}$得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0\text{，即 }d(\ln x)+d(\frac{y^2}{x})=0\text{，}$$

所以$\frac{1}{x^2}$为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$\ln x+\frac{y^2}{x}=C\text{，即}x\ln x+y^2=Cx.$$

(6)$2ydx-3xy^2dx-xdy=0$.

解 方程两边同时乘以x得

$$2xydx-x^2dy-3x^2y^2dx=0\text{，即}yd(x^2)-x^2dy-3x^2y^2dx=0,$$

再除以y^2得

$$\frac{yd(x^2)-x^2dy}{y^2}-3x^2dx=0\text{，即 }d(\frac{x^2}{y}-x^3)=0$$

所以$\frac{x}{y^2}$为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{y}-x^3=0.$$

3. 验证$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$是微分方程$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$的积分因子，并求下列方程的通解:

解　方程两边乘以 $\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 得

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}[yf(xy)dx+xg(xy)dy]=0,$$

这里 $P=\dfrac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}$，$Q=\dfrac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}$.

因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{f(xy)g'(xy)-f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

所以 $\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是原方程的一个积分因子.

(1) $y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0$;

解　这里 $f(xy)=x^2y^2+2$, $g(xy)=2-2x^2y^2$，所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\dfrac{1}{3x^3y^3}$ 得全微分方程

$$\frac{x^2+2}{3x^3y^2}dx+\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x\frac{x^2+2}{3x^3}dx+\int_1^y\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=C,$$

即　$\dfrac{1}{3}(\ln x-\ln y^2+1-\dfrac{1}{x^2y^2})=C$，或 $x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$.

(2) $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$.

解　这里 $f(xy)=2xy+1$, $g(xy)=1+2xy-x^3y^3$，所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\dfrac{1}{x^4y^4}$ 得全微分方程

$$\frac{2xy+1}{x^4y^3}dx+\frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{2x+1}{x^4}dx+\int_1^y \frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=C\,,$$

即 $$\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{3x^3y^3}+\ln|y|=C\,.$$

4. 用积分因子法解下列一阶线性方程:

(1) $xy'+2y=4\ln x$;

解 原方程变为 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{4}{x}\ln x$, 其积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2\,,$$

在方程 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{4}{x}\ln x$ 的两边乘以 x^2 得

$x^2y'+2xy=4x\ln x$, 即 $(x^2y)'=4x\ln x$,

两边积分得

$$x^2y=\int 4x\ln x dx=2x^2\ln x-x^2+C\,,$$

原方程的通解为 $y=2\ln x-1+\frac{C}{x^2}$.

(2) $y'-\tan x\cdot y=x$.

解 积分因子为 $\mu(x)=e^{-\int\tan x dx}=\cos x$,

在方程的两边乘以 $\cos x$ 得

$\cos x\cdot y'-\sin x\cdot y=x\cos x$, 即 $(\cos x\cdot y)'=x\cos x$,

两边积分得

$$\cos x\cdot y=\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+C\,,$$

方程的通解为 $y=x\tan x+1+\frac{C}{\cos x}$.

习题 12−6

1. 求下列各微分方程的通解:

(1)$y''=x+\sin x$;

解 $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$,

$$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

(2)$y'''=xe^x$;

解 $y''=\int xe^x dx=xe^x-e^x+2C_1$,

$$y'=\int(xe^x-e^x+2C_1)dx=xe^x-2e^x+2C_1x+C_2,$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+2C_1x+C_2)dx=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3,$$

原方程的通解为

$$y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$;

解 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2.$$

(4)$y''=1+y'^2$;

解 令 $p=y'$，则原方程化为

$p'=1+p^2$，即 $\frac{1}{1+p^2}dp=dx$,

两边积分得

$\arctan p=x+C_1$，即$y'=p=\tan(x+C_1)$,

$$y=\int\tan(x+C_1)dx=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

(5)$y''=y'+x$;

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$p'-p=x$,

由一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$p=e^{\int dx}(\int x\cdot e^{-\int dx}dx+C_1)=e^x(\int xe^{-x}dx+C_1)=C_1e^x-x-1,$$

即 $y'=C_1e^x-x-1$,

于是 $$y=\int(C_1e^x-x-1)dx=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2.$$

(6)$xy''+y'=0$;

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$x\,p'+p=0$, 即 $p'+\frac{1}{x}p=0$,

由一阶线性齐次方程的通解公式得

$$p=C_1e^{-\int\frac{1}{x}dx}=C_1e^{-\ln x}=\frac{C_1}{x},$$

即 $$y'=\frac{C_1}{x},$$

于是 $$y=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln x+C_2,$$

原方程的通解为

$y=C_1\ln x+C_2$.

(7)$yy''+'=y'^2$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}+1=p^2, \text{ 即 } \frac{p}{p^2-1}dp=\frac{1}{y}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+\ln|C_1|，即 p^2-1\pm C_1^2y^2.$$

当$|y'|=|p|>1$时，方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2}，即\frac{1}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}dy=\pm dx，$$

两边积分得

$$\operatorname{arcsh}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_2\pm C_1x).$$

当$|y'|=|p|<1$时，方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1-C_1^2y^2}，即\frac{1}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}dy=\pm dx，$$

两边积分得

$$\arcsin(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\sin(C_2\pm C_1x).$$

(8)$y^3y''-1=0$;

解　令$p=y'$，则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为

$$y^3p\frac{dp}{dy}-1=0，即 pdp=y^{-3}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1，即 p^2=-y^{-2}+C_1,$$

故　$$y'=\pm\sqrt{C_1-y^{-2}}，即\frac{1}{\sqrt{C_1-y^{-2}}}dy=\pm dx，$$

两边积分得

$$\sqrt{C_1y^2-1}=\pm(C_1x+C_2),$$

即原方程的通解为

$$C_1y^2=(C_1x+C_2)^2.$$

(9) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ 即 } pdp=\frac{1}{\sqrt{y}}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=2\sqrt{y}+2C_1, \text{ 即 } p^2=4\sqrt{y}+4C_1,$$

故 $$y'=\pm 2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}dy=\pm dx,$$

两边积分得原方程的通

$$x=\pm[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}]+C_2.$$

(10)$y''=y'^3+y'$.

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=p^3+p, \text{ 即 } p[\frac{dp}{dy}-(1+p^2)]=0.$$

由 $p=0$ 得 $y=C$, 这是原方程的一个解.

由 $\dfrac{dp}{dy}-(1+p^2)=0$ 得

$$\arctan p=y-C_1, \text{ 即} y'=p=\tan(y-C_1),$$

从而 $$x+C_2=\int\frac{1}{\tan(y-C_1)}dy=\ln\sin(y-C_1),$$

故原方程的通解为

$$y=\arcsin e^{x+C_2}+C_1.$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y^3y''+1=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3 p\frac{dp}{dy}+1=0\text{，即 } pdp=-\frac{1}{y^3}dy\text{，}$$

两边积分得

$$p^2=\frac{1}{y^2}+C_1\text{，即 } y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}\text{.}$$

由 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$ 得 $C_1=-1$，从而 $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$，

分离变量得

$$\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=dx\text{，}$$

两边积分得

$$\pm\sqrt{1-y^2}=x+C_2\text{，即 } y=\pm\sqrt{1-(x+C_2)^2}\text{.}$$

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C_2=-1$，$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$，从而原方程的通解为

$$y=\sqrt{2x-x^2}\text{.}$$

(2) $y''-ay'^2=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$;

解　令 $p=y'$，则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0\text{，即 } \frac{1}{p^2}dp=adx\text{，}$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1\text{，即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}\text{.}$$

由 $y'|_{x=0}=-1$ 得 $C_1=1$，$y'=-\frac{1}{ax+1}$，两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$，故所求特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) $y'''=e^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$;

解　$y''=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C_1$.

由$y''|_{x=1}=0$ 得 $C_1=-\frac{1}{a}e^a$.

$$y'=\int(\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a)dx=\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a x+C_2 .$$

由$y'|_{x=1}=0$ 得 $C_2=\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{a^2}e^a$.

$$y=\int(\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a x+\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{a^2}e^a)dx$$

$$=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{1}{2a}e^a x^2+\frac{1}{a}e^a x-\frac{1}{a^2}e^a x+C_3 .$$

由$y|_{x=1}=0$ 得 $C_3=\frac{1}{a^2}e^a-\frac{1}{a}e^a+\frac{1}{2a}e^a-\frac{1}{a^3}e^a$，故所求特解为

$$y=\frac{e^{ax}}{a^3}-\frac{e^a x^2}{2a}+\frac{e^a(a-1)x}{a^2}-\frac{e^a(2a-a^2-2)}{2a^3} .$$

(4)$y''=e^{2y}$, $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

解　令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=e^{2y}\text{，即}pdp=e^{2y}dy,$$

积分得

$$p^2=e^{2y}+C_1\text{，即 } y'=\pm\sqrt{e^{2y}+C_1} .$$

由$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$ 得$C_1=-1$，故 $y'=\pm\sqrt{e^{2y}-1}$，从而

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2y}-1}}dy=\pm dx ,$$

积分得

$$-\arcsin e^{-y}=\pm x+C_2.$$

由$y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{2}$，故

$$e^{-y}=\sin(\mp x-\frac{\pi}{2})=\cos x ,$$

从而所求特解为 $y=-\ln\cos x$.

(5) $y''=3\sqrt{y}$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解　令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=3\sqrt{y}\text{，即 }pdp=3\sqrt{y}dy\text{，}$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+2C_1\text{，即 }y'=\pm2\sqrt{y^{\frac{3}{2}}+C_1}\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$ 得 $C_1=0$, $y'=2y^{\frac{3}{4}}$，从而 $y^{-\frac{3}{4}}dy=2dx$，

两边积分得

$$4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2\text{，即 }y=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}C_2)^4\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=4$，故原方程的特解为 $y=(\frac{1}{2}x+1)^4$.

(6) $y''+y'^2=1$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$.

解　令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=1\text{，即 }\frac{dp^2}{dy}+2p^2=2\text{，}$$

于是　$$p^2=e^{-\int 2dy}(\int 2\cdot e^{\int 2dy}dy+C_1)=C_1e^{-2y}+1\text{，}$$

即　$$y'=\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+1}\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$, $y'=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$.

故　$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2y}}}dy=\pm dx\text{，}$$

两边积分得

$$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x+C_2\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$, $\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x$，

从而得原方程的特解 $y=\ln\mathrm{ch}\, x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 相切的积分曲线.

解　$y'=\frac{1}{2}x^2+C_1$，

$$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2.$$

由题意得$y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

由 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$, 再由$y|_{x=0}=1$ 得$C_2=1$, 因此所求曲线为

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1.$$

4. 设有一质量为m的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为$R=c^2v^2$(其中c为常数, v为物体运动的速度), 试求物体下落的距离s与时间t的函数关系.

解 以 $t=0$ 对应的物体位置为原点, 垂直向下的直线为 s 正轴, 建立坐标系.

由题设得

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt}=mg-c^2v^2 \\ s|_{t=0}=v|_{t=0}=0 \end{cases}.$$

将方程分离变量得

$$\frac{mdv}{mg-c^2v^2}=dt,$$

两边积分得

$$\ln|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}|=kt+C_1\text{(其中 }k=\frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}}\text{)}$$

由$v|_{t=0}=0$ 得$C_1=0$, $\ln|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}|=kt$, 即 $\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}=e^{kt}$.

因为$mg>c^2v^2$, 故 $cv+\sqrt{mg}=(\sqrt{mg}-cv)e^{kt}$, 即

$$cv(1+e^{kt})=\sqrt{mg}(1-e^{kt}),$$

或 $$\frac{ds}{dt}=-\frac{\sqrt{mg}}{c}\cdot\frac{1-e^{kt}}{1+e^{kt}},$$

分离变量并积分得

$$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}+C_2.$$

由$s|_{t=0}=0$ 得$C_2=0$, 故所求函数关系为

$$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}，即\ s=\frac{m}{c^2}\ln \mathrm{ch}(c\sqrt{\frac{g}{m}}t)\ .$$

习题 12−7

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1)x, x^2;

解 因为 $\frac{x^2}{x}=x$ 不恒为常数, 所以x, x^2是线性无关的.

(2)$x, 2x$;

解 因为 $\frac{2x}{x}=2$, 所以 $x, 2x$ 是线性相关的.

(3)$e^{2x}, 3e^{2x}$;

解 因为 $\frac{3e^{2x}}{e^{x}}=3$, 所以$e^{2x}, 3e^{2x}$是线性相关的.

(4)$e^{-x}; e^{x}$;

解 因为 $\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$ 不恒为常数, 所以$e^{-x}; e^{x}$是线性无关的.

(5)$\cos2x, \sin2x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$ 不恒为常数, 所以 $\cos2x, \sin2x$ 是线性无关的.

(6) e^{x^2}, $2xe^{x^2}$;

解 因为 $\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}}=2x$ 不恒为常数, 所以 e^{x^2}, $2xe^{x^2}$ 是线性无关的.

(7)$\sin2x, \cos x\cdot\sin x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}=2$, 所以 $\sin2x, \cos x\cdot\sin x$ 是线性相关的.

(8)$e^x\cos2x, e^x\sin2x$;

解 因为 $\frac{e^x\sin 2x}{e^x\cos 2x}=\tan 2x$ 不恒为常数, 所以$e^x\cos2x, e^x\sin2x$是线性无关的.

(9)$\ln x, x\ln x$;

解 因为 $\frac{x\ln x}{\ln x}=x$ 不恒为常数, 所以 $\ln x, x\ln x$ 是线性无关的.

(10)$e^{ax}, e^{bx}(a\neq b)$.

解 因为 $\frac{e^{bx}}{e^{ax}}=e^{(b-a)x}$ 不恒为常数, 所以e^{ax}, e^{bx}是线性无关的.

2. 验证$y_1=\cos\omega x$及$y_2=\sin\omega x$都是方程$y''+\omega^2 y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''+\omega^2 y_1=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0,$$

$$y_2''+\omega^2 y_2=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0,$$

并且$\frac{y_1}{y_2}=\cot\omega x$ 不恒为常数，所以$y_1=\cos\omega x$与$y_2=\sin\omega x$是方程的线性无关解，从而方程的通解为$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

提示: $y_1'=-\omega\sin\omega x$, $y_1''=-\omega^2\cos\omega x$; $y_2'=\omega\cos\omega x$, $y_1''=-\omega^2\sin\omega x$.

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-4x\cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2)\cdot e^{x^2}=0,$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}-4x\cdot(e^{x^2}+2x^2e^{x^2})+(4x^2-2)\cdot xe^{x^2}=0,$$

并且$\frac{y_2}{y_1}=x$ 不恒为常数，所以 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=2xe^{x^2}$ 是方程的线性无关解，从而方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_2 2xe^{x^2}$.

提示: $y_1'=2xe^{x^2}$, $y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$;

$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$, $y_2''=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}$.

4. 验证:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1、C_2是任意常数)是方程

$$y''-3y'+2y=e^{5x}$$

的通解;

解 令$y_1=e^x, y_2=e^{2x}$, $y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$. 因为

$y_1''-3y_1'+2y_1'=e^x-3e^x+2e^x=0$,

$y_2''-3y_2'+2y_2'=4e^{2x}-3(2e^{2x}+2e^{2x}=0$,

且$\frac{y_2}{y_1}=e^x$不恒为常数, 所以y_1与y_2是齐次方程$y''-3y'+2y=0$的线性无关解, 从而$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-3\cdot\frac{5}{12}e^{5x}+2\cdot\frac{1}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

所以y^*是方程$y''-3y'+2y=e^{5x}$的特解.

因此$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$是方程$y''-3y'+2y=e^{5x}$的通解.

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ (C_1、C_2是任意常数)是方程$y''+9y=x\cos x$的通解;

解 令$y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x$, $y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$. 因为

$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0$,

$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0$,

且$\frac{y_2}{y_1}=\tan 3x$不恒为常数, 所以y_1与y_2是齐次方程$y''+9y=0$的线性无关解, 从而$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*\prime\prime}+9y^*=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x)+9\cdot\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以y^*是方程$y''+9y=x\cos x$的特解.

因此$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$是方程$y''+9y=x\cos x$的通解.

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$(C_1、C_2是任意常数)是方程$x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解;

解 令$y_1=x^2$, $y_2=x^2\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4\cdot x^2=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2\cdot(2\ln x+3)-3x\cdot(2x\ln x+x)+4\cdot x^2\ln x=0,$$

且$\frac{y_2}{y_1}=\ln x$不恒为常数, 所以y_1与y_2是方程$x^2y''-3xy'+4y=0$ 的线性无关解, 从而$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$是方程的通解.

(4) $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ (C_1、C_2是任意常数)是方程

$$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$$

的通解;

解 令$y_1=x^5$, $y_2=\frac{1}{x}$, $y^*=-\frac{x^2}{9}\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5\cdot x^5=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\cdot\frac{2}{x^3}-3x\cdot(-\frac{1}{x^2})-5\cdot\frac{1}{x}=0,$$

且$\frac{y_1}{y_2}=x^6$不恒为常数, 所以y_1与y_2是齐次方程$x^2y''-3xy'-5y=0$ 的线性无关解, 从而$Y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}$是齐次方程的通解.

又因为

$$x^2y^{*\prime\prime}-3xy^{*\prime}-5y^*$$

$$=x^2\cdot(-\frac{2}{9}\ln x-\frac{1}{3})-3x\cdot(-\frac{2x}{9}\ln x-\frac{x}{9})-5\cdot(-\frac{x^2}{9}\ln x)=x^2\ln x,$$

所以y^*是方程$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$的特解.

因此$y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$是方程$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$的通解.

(5) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$ (C_1、C_2是任意常数)是方程

$$xy''+2y'-xy=e^x$$

的通解;

解 令 $y_1=\frac{1}{x}e^x$, $y_2=\frac{1}{x}e^{-x}$, $y^*=\frac{e^x}{2}$. 因为

$$xy_1''+2y_1'-xy_1=x\cdot(\frac{2e^x}{x^3}-\frac{2e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x})+2\cdot(-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x})-x\cdot\frac{e^x}{x}=0,$$

$$xy_2''+2y_2'-xy_2=x\cdot(\frac{2e^{-x}}{x^3}+\frac{2e^{-x}}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x})+2\cdot(-\frac{e^{-x}}{x^2}-\frac{e^{-x}}{x})-x\cdot\frac{e^{-x}}{x}=0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2}=e^{2x}$ 不恒为常数, 所以y_1与y_2是齐次方程$xy''+2y'-xy=0$ 的

线性无关解, 从而 $Y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$xy^{*}{}''+2y^{*}{}'-xy^*=x\cdot\frac{e^x}{2}+2\cdot\frac{e^x}{2}-x\cdot\frac{e^x}{2}=e^x,$$

所以y^*是方程$xy''+2y'-xy=e^x$的特解.

因此 $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$ 是方程$xy''+2y'-xy=e^x$的通解.

(6)$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$($C_1$、$C_2$、$C_3$、$C_4$是任意常数)是方程$y^{(4)}-y=x^2$的通解.

解 令$y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$, $y^*=-x^2$. 因为

$y_1^{(4)}-y_1=e^x-e^x=0$,

$y_2^{(4)}-y_2=e^{-x}-e^{-x}=0$,

$y_3^{(4)}-y_3=\cos x-\cos x=0$,

$y_4^{(4)}-y_4=\sin x-\sin x=0$,

并且

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以$y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$是方程$y^{(4)}-y=0$ 的线性无关解,

从而$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$是方程的通解.

又因为

$y^{*(4)}-y^*=0-(-x^2)=x^2$,

所以$y^*=-x^2$是方程$y^{(4)}-y=x^2$的特解.

因此$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$是方程$y^{(4)}-y=x^2$的通解.

提示:

令$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x=0$,

则 $k_1e^x-k_2e^{-x}-k_3\sin x+k_4\cos x=0$,

$k_1e^x+k_2e^{-x}-k_3\cos x-k_4\sin x=0$,

$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\sin x-k_4\cos x=0$.

上术等式构成的齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以方程组只有零解, 即$y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$线性无关.

习题 12−8

1. 求下列微分方程的通解:

(1)$y''+y'-2y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+r-2=0,\text{ 即}(r+2)(r-1)=0,$$

其根为$r_1=1$, $r_2=-2$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2)$y''-4y'=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,\text{ 即}r(r-4)=0,$$

其根为$r_1=0$, $r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3)$y''+y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为$r_1=i$, $r_2=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4)$y''+6y'+13y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+6r+13=0,$$

其根为$r_1=-3-2i$, $r_2=-3+2i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2-20r+25=0,\text{ 即}(2x-5)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2xe^{\frac{5}{2}t},\text{ 即 } x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6)$y''-4y'+5y=0$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+5=0,$$

其根为$r_1=2-i$, $r_2=2+i$，故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(7)$y^{(4)}-y=0$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^4-1=0,\text{ 即}(r-1)(r+1)(r^2+1)=0$$

其根为$r_1=1$, $r_2=-1$, $r_1=-i$, $r_2=i$，故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(8)$y^{(4)}+2y''+y=0$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^4+r^2+1=0,\text{ 即}(r^2+1)^2=0,$$

其根为$r_1=r_2=-i$, $r_3=r_4=i$，故微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

(9)$y^{(4)}-2y'''+y''=0$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+r^2=0,\text{ 即}r^2(r-1)^2=0,$$

其根为$r_1=r_2=0$, $r_3=r_4=1$，故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x.$$

(10)$y^{(4)}+5y''-36=0$.

解　微分方程的特征方程为

$$r^4+5r^2-36=0,$$

其根为$r_1=2$, $r_2=-2$, $r_3=3i$, $r_4=-3i$，故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y''-4y'+3y=0$, $y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+3=0,\text{ 即}(r-1)(r-3)=0,$$

其根为$r_1=1$, $r_2=3$，故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

由$y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=6\\C_1+3C_2=10\end{cases},$$

解之得$C_1=4$, $C_2=2$．因此所求特解为

$$y=4e^x+2e^{3x}.$$

(2)$4y''+4y'+y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$;

解　微分方程的特征方程为

$$4r^2+4r+1=0,\text{ 即}(2r+1)^2=0,$$

其根为$r_1=r_2=-\frac{1}{2}$，故微分方程的通解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x).$$

由$y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$，得

$$\begin{cases}C_1=2\\-\frac{1}{2}C_1+C_2=0\end{cases},$$

解之得$C_1=2$, $C_2=1$．因此所求特解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x).$$

(3)$y''-3y'-4y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-5$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^2-3r-4=0,\text{ 即}(r-4)(r+1)=0,$$

其根为$r_1=-1$, $r_2=4$，故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

由$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-5$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\-C_1+4C_2=-5\end{cases},$$

解之得$C_1=1$, $C_2=-1$．因此所求特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

(4)$y''+4y'+29y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=15$;

解　微分方程的特征方程为

$$r^2+4r+29=0,$$

其根为$r_{1,\,2}=-2\pm5i$，故微分方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x).$$

由$y|_{x=0}=0$，得$C_1=0$, $y=C_2e^{-2x}\sin5x$.

由$y'|_{x=0}=15$，得$C_2=3$.

因此所求特解为$y=3e^{-2x}\sin5x$.

(5)$y''+25y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+25=0,$$

其根为$r_{1,\,2}=\pm5i$，故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos5x+C_2\sin5x.$$

由$y|_{x=0}=2$，得$C_1=2$, $y=2\cos5x+C_2\sin5x$.

由$y'|_{x=0}=5$，得$C_2=1$.

因此所求特解为 $y=2\cos5x+\sin5x$.

(6)$y''-4y'+13y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=3$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+13=0,$$

其根为$r_{1,\,2}=2\pm3i$，故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).$$

由$y|_{x=0}=0$，得$C_1=0$, $y=C_2e^{2x}\sin3x$.

由$y'|_{x=0}=3$，得$C_2=1$.

因此所求特解为$y=e^{2x}\sin3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点O处且速度为v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数$k_1>0$)而方向与初速一至．又介质的阻力与速度成正比(比例系数$k_2>0$)．求反映这质点的运动规律的函数.

解 设数轴为x轴, v_0方向为正轴方向．由题意得微分方程

$$x''=k_1x-k_2x'，即x''+k_2x'-k_1x=0,$$

其初始条件为$x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$.

微分方程的特征方程为

$$r^2+k_2r-k_1=0,$$

其根为 $r_1=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$, $r_2=\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$ ，故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}+C_2e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}.$$

由 $x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\C_1r_1+C_2r_2=v_0\end{cases}$ ，解之得

$$C_1=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}},\quad C_2=-\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}.$$

因此质点的运动规律为

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}(e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}-e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}).$$

4. 在如图所示的电路中先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B，求电压 $u_c(t)$ 及电流 $i(t)$．已知 E=20V, C=0.5×10^{-6}F(法), L=0.1H(亨), R=2000Ω.

解 由回路电压定律得

$$E=L\frac{di}{dt}-\frac{q}{C}-Ri=0.$$

由于 $q=Cu_c$，故 $i=\frac{dq}{dt}=Cu_c'$ ， $\frac{di}{dt}=Cu_c''$ ，所以

$$-LCu_c''-u_c-RCu_c'=0,\ 即\ u_c''+\frac{R}{L}u_c'+\frac{1}{LC}u_c=0.$$

已知 $\frac{R}{L}=\frac{2000}{0.1}=2\times10^4$ ， $\frac{1}{LC}=\frac{1}{0.1\times0.5\times10^{-6}}=\frac{1}{5}\times10^8$ ，故

$$u_c''+2\times10^4u_c'+\frac{1}{5}\times10^8u_c=0.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2+2\times10^4r+\frac{1}{5}\times10^8=0,$$

其根为 $r_1=-1.9\times10^4$, $r_2=-10^3$，故微分方程的通解为

$$u_c = C_1 e^{-1.9\times10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}.$$

由初始条件t=0 时, u_c=20, u_c'=0 可得$C_1 = -\frac{10}{9}$, $C_2 = \frac{190}{9}$.

因此所求电压为

$$u_c(t) = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9\times10^4 t})\ (\mathrm{V}).$$

所求电流为

$$i(t) = \frac{19}{18}\times10^{-2}(e^{-1.9\times10^4 t} - e^{-10^3 t})\ (\mathrm{A}).$$

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2s, 求浮筒的质量.

解 设ρ为水的密度, S为浮筒的横截面积, D为浮筒的直径, 且设压下的位移为x(如图所示), 则

$$f = -\rho gS\cdot x.$$

又 $f = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$, 因而

$$-\rho gS\cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ 即 } m\frac{d^2x}{dt^2} + \rho gSx = 0.$$

微分方程的特征方程为$mr^2+\rho gS$=0, 其根为

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}i,$$

故微分方程的通解为

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t,$$

即 $$x = A\sin(\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t + \varphi).$$

由此得浮筒的振动的频率为$\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$.

因为周期为 T=2, 故$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}} = 2$, $m = \frac{\rho gS}{\pi^2}$.

由ρ=1000kg/m^3, g=9.8m/s^2, D=0.5m，得

$$m=\frac{\rho g S}{\pi^2}=\frac{1000\times 9.8\times 0.5^2}{4\pi}=195\text{km}\,.$$

习题 12−9

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $2y''+y'-y=2e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2+r-1=0,$$

其根为 $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}.$$

因为 $f(x)=2e^x$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x,$$

代入原方程得

$$2Ae^x+Ae^x-Ae^x=2e^x,$$

解得 $A=1$, 从而 $y^*=e^x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(2) $y''+a^2y=e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+a^2=0,$$

其根为 $r=\pm ai$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

因为 $f(x)=e^x$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x,$$

代入原方程得

$$Ae^x+a^2Ae^x=e^x,$$

解得 $A=\frac{1}{1+a^2}$, 从而 $y^*=\frac{e^x}{1+a^2}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2+5r=0,$$

其根为$r_1=0$, $r_2=-\frac{5}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因为$f(x)=5x^2-2x-1$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax^2+Bx+C),$$

代入原方程并整理得

$$15Ax^2+(12A+10B)x+(4B+5C)=5x^2-2x-1,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{3}{5}$, $C=\frac{7}{25}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(4)$y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+3r+2=0,$$

其根为$r_1=-1$, $r_2=-2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因为$f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax+B)e^{-x},$$

代入原方程并整理得

$$2Ax+(2A+B)=3x,$$

比较系数得 $A=\frac{3}{2}$, $B=-3$, 从而 $y^*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x).$$

(5)$y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根为$r_{1,2}=1\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因为$f(x)=e^x\sin 2x$, $\lambda+i\omega=1+2i$是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

代入原方程得

$$e^x[4B\cos 2x-4A\sin 2x]=e^x\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6)$y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-6r+9=0,$$

其根为$r_1=r_2=3$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因为$f(x)=(x+1)e^{3x}$, $\lambda=3$ 是特征方程的重根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x^2e^{3x}(Ax+B),$$

代入原方程得

$$e^{3x}(6Ax+2B)=e^{3x}(x+1),$$

比较系数得 $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^{3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2).$$

(7)$y''+5y'+4y=3-2x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+5r+4=0,$$

其根为$r_1=-1$, $r_2=-4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

因为$f(x)=3-2x=(3-2x)e^{0x}$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^*=Ax+B,$$

代入原方程得

$$4Ax+(5A+4B)=-2x+3,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{11}{8}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}.$$

(8)$y''+4y=x\cos x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r=\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为$f(x)= x\cos x=e^{0x}(x\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$, $\lambda+i\omega=i$不是特征方程的根, 故原方程的特解设为

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

代入原方程得

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx-2A+3D)\sin x=x\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=0$, $C=0$, $D=\frac{2}{9}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x.$$

(9)$y''+y=e^x+\cos x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=\cos x$, 而

方程$y''+y=e^x$具有Ae^x形式的特解;

方程 $y''+y=\cos x$ 具有 $x(B\cos x+C\sin x)$形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x),$$

代入原方程得

$$2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x.$$

(10)$y''-y=\sin^2 x$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为$r_1=-1$, $r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 而

方程 $y''-y=\frac{1}{2}$ 的特解为常数 A;

方程 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ 具有 $B\cos2x+C\sin2x$ 形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=A+B\cos2x+C\sin2x,$$

代入原方程得

$$-A-5B\cos 2x-5C\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{10}$, $C=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1) $y''+y+\sin x=0$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为$f(x)=-\sin2x=e^{0x}(0\cdot\cos2x-\sin2x)$, $\lambda+i\omega=i$是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=A\cos2x+B\sin2x,$$

代入原方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin2x=-\sin2x,$$

解得 $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}\sin 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

由$y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$ 得$C_1=-1$, $C_2=-\frac{1}{3}$,

故满足初始条件的特解为

$$y=-\cos x+-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) $y''-3y'+2y=5$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r+2=0,$$

其根为$r_1=1$, $r_2=2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

容易看出 $y^*=\frac{5}{2}$ 为非齐次方程的一个特解,

故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

由$y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2+\frac{5}{2}=1 \\ C_1+2C_2=2 \end{cases},$$

解之得$C_1=-5$, $C_2=\frac{7}{2}$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=-5_1e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

(3)$y''-10y'+9y=e^{2x}$, $y|_{x=0}=\frac{6}{7}$, $y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-10r+9=0,$$

其根为$r_1=1$, $r_2=9$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

因为$f(x)=e^{2x}$, $\lambda=2$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^{2x},$$

代入原方程得

$$(4A-20A+9A)e^{2x}=e^{2x},$$

解得 $A=-\frac{1}{7}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

由 $y|_{x=0}=\frac{6}{7}$, $y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4)$y''-y=4xe^x$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为$r_1=-1$, $r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为$f(x)=4xe^x$, $\lambda=1$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(Ax+B),$$

代入原方程得

$$(4Ax+2A+2B)e^x=4xe^x,$$

比较系数得$A=1$, $B=-1$, 从而$y^*=xe^x(x-1)$.

因此, 原方程的通解为

$$y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x(x-1).$$

由$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2-1=1 \end{cases},$$

解之得$C_1=1$, $C_2=-1$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=e^{-x}-e^x+xe^x(x-1).$$

(5)$y''-4y'=5$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,$$

其根为$r_1=0$, $r_2=4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}.$$

因为$f(x)=5=5e^{0\cdot x}$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ax,$$

代入原方程得

$$-4A=5,\quad A=-\frac{5}{4},$$

从而 $y^*=-\dfrac{5}{4}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

由$y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=\dfrac{11}{16}$, $C_2=\dfrac{5}{16}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角α、初速度v_0发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 弹道运动的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g\\ \dfrac{dx}{dt}=0\end{cases},$$

且满足初始条件

$$\begin{cases}y|_{t=0}=0,\ y'|_{t=0}=v_0\sin\alpha\\ x|_{t=0}=0,\ x'|_{t=0}=v_0\cos\alpha\end{cases}.$$

易得满足方程和初始条件的解(弹道曲线)为

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}.$$

4. 在R、L、C含源串联电路中, 电动势为E的电源对电容器C充电. 已知E=20V, C=0.2μF(微法), L=0.1H(亨), R=1000Ω, 试求合上开关K后电流$i(t)$及电压$u_c(t)$.

解 (1)列方程. 由回路定律可知

$$L\cdot C\cdot u_c''+R\cdot C\cdot u_c'+u_c=E,$$

即 $$u_c''+\frac{R}{L}u_c'+\frac{1}{LC}u_c=\frac{E}{LC},$$

且当t=0 时, u_c=0, u_c'=0.

已知 R=1000Ω, L=0.1H, C=0.2μF, 故

$$\frac{R}{L}=\frac{1000}{0.1}=10^4,$$

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{0.1\times0.2\times10^{-6}}=5\times10^7,$$

$$\frac{E}{LC}=5\times10^7E=5\times10^7\times20=10^9.$$

因此微分方程为$u_c''+10^4u_c'+5\times10^7u_c=10^9$.

(2)解方程. 微分方程的特征方程为$r^2+10^4r+5\cdot10^7=0$,
其根为$r_{1,2}=-5\times10^3\pm5\times10^3i$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$u_c=e^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3)t+C_2\sin(5\times10^3)t].$$

由观察法易知 $y^*=20$ 为非齐次方程的一个特解.

因此非齐次方程的通解为

$$u_c=e^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3)t+C_2\sin(5\times10^3)t]+20.$$

由$t=0$ 时, $u_c=0$, $u_c'=0$, 得$C_1=-20$, $C_2=-20$. 因此

$$u_c=20-20e^{-5\times10^3t}[\cos(5\times10^3)t+\sin(5\times10^3)t]\,(\mathrm{V}),$$

$$i(t)=Cu_c'=0.2\times10^{-6}u_c'=4\times10^{-2}e^{-5\times10^3t}\sin(5\times10^3t)]\,(\mathrm{A}).$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间:

(1)若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

解 设在时刻 t 时, 链条上较长的一段垂下 xm, 且设链条的密度为 ρ, 则向下拉链条下滑的作用力

$$F=x\rho g-(20-x)\rho g=2\rho g(x-10).$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x''=2\rho g(x-10), \text{ 即 } x''-\frac{g}{10}x=-g.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2-\frac{g}{10}=0,$$

其根为 $r_1=-\sqrt{\frac{g}{10}}$, $r_2=\sqrt{\frac{g}{10}}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}.$$

由观察法易知 $x^*=10$ 为非齐次方程的一个特解, 故通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.$$

由$x(0)=12$ 及$x'(0)=0$ 得$C_1=C_2=1$. 因此特解为

$$x=e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}=10$,

解之得所需时间

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})\text{ s}.$$

(2)若摩擦力为 1m 长的链条的重量.

解 此时向下拉链条的作用力变为

$$F=x\rho g-(20-x)\rho g-1\rho g=2\rho gx-21\rho g$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x''=2\rho gx-21\rho g, \text{ 即 } x''-\frac{g}{10}x=-1.05g\ .$$

微分方程的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5\,.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{3}{4}$. 因此特解为

$$x=\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})+10.5\,.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})=9.5$,

解之得所需时间

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(\frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{22}}{3})\text{ s}.$$

6. 设函数$\varphi(x)$连续, 且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt\ ,$$

求$\varphi(x)$.

解 等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt\ ,$$

再求导得微分方程

$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x), \text{ 即 } \varphi''(x)+\varphi(x)=e^x.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为$r_{1,2}=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

易知 $\varphi^* = \frac{1}{2}e^x$ 是非齐次方程的一个特解,

故非齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x .$$

由所给等式知 $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=1$, 由此得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

因此

$$\varphi = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x) .$$

总习题十二

1. 填空:

(1)$xy'''+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$ 是______阶微分方程;

解 是 3 阶微分方程.

(2)若 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 是全微分方程, 则函数 M、N 应满足______;

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

(3)与积分方程 $y=\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ 等价的微分方程初值问题是______;

解 方程两边对x求导得$y'=f(x, y)$. 显然当$x=x_0$时, $y=0$.

因此与积分方程等价的微分方程初值问题是

$$y'=f(x, y),\quad y|_{x=x_0}=0.$$

(4)已知$y=1$、$y=x$、$y=x^2$是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为______.

解 容易证明非齐次线性微分方程的任意两个解的差是对应齐次线性微分方程的的解. 因此$y_1=x-1$ 和$y_2=x^2-1$ 都是对应齐次线性微分方程的的解. 显然y_1与y_2是线性无关. 所以非齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1.$$

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1)$(x+C)^2+y^2=1$(其中C为任意常数);

解 将等式变形

$$x+C=\pm\sqrt{1-y^2},$$

两边对 x 求导得

$$1=\pm\frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}},$$

从而 $1-y^2=y^2y'^2$, 即所求微分方程为$y^2(1+y'^2)=1$.

(2)$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$(其中C_1、C_2为任意常数).

解 两边对 x 求导得

$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}=y+C_2e^{2x},$$

即 $\quad y'=y+C_2e^{2x}, \cdots (1)$

再求导得

$$y''=y'+2C_2e^{2x}. \quad \cdots (2)$$

(2)−(1)×2 得

$$y''-2y'=y'-2y,$$

即所求微分方程为 $y''-3y'+2y=0$.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$;

解 将方程变形为

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2x}\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 即 } (\sqrt{y})'+\frac{1}{2x}\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

其通解为

$$\sqrt{y}=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}(x+C),$$

即原方程的通解为 $y=\dfrac{(x+C)^2}{x}$.

(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$;

解 将方程变形为

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=a(1+\frac{1}{\ln x}),$$

其通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}[\int a(1+\frac{1}{\ln x})e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C]=\frac{1}{\ln x}(ax\ln x+C),$$

即原方程的通解为 $y=ax+\dfrac{C}{\ln x}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$;

解 将方程变形为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y},$$

其通解为

$$x=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C)=\frac{1}{y^2}(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C),$$

即原方程的通解为 $x=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$.

(4) $\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$;

解 将方程变形为

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3,\text{ 即 }\frac{d(y^{-2})}{dx}-2xy^{-2}=-2x^3,$$

其通解为

$$y^{-2}=e^{\int 2xdx}[\int(-2x^3)e^{-\int 2xdx}dx+C)=e^{x^2}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C),$$

即原方程的通解为 $y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$.

(5) $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$;

解 因为

$$xdx+ydy=d(\frac{x^2+y^2}{2}),$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}d(\frac{x}{y})=d(\arctan\frac{x}{y}),$$

所以原方程可写成

$$d(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\arctan\frac{x}{y})=0,$$

从而原方程的通解为

$$x^2+y^2+2\arctan\frac{x}{y}=C.$$

(6) $yy''-y'^2-1=0$;

解 令 $y'=p$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2-1=0,$$

或
$$\frac{d(p^2)}{dy}-\frac{2}{y}p^2=\frac{2}{y},$$

其通解为

$$p^2=e^{\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2}{y}e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C)=y^2(-y^{-2}+C)=Cy^2-1.$$

于是 $y'=\pm\sqrt{Cy^2-1}$, 即 $\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\pm dx$ ($C=C_1^2$),

积分得

$$\ln(C_1y+\sqrt{(C_1y)^2-1})=\pm x+C_2,$$

化简得原方程的通解 $y=\frac{1}{C_1}\mathrm{ch}(\pm x+C_2)$.

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$;

解 齐次方程$y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为$r^2+2r+5=0$,
其根为$r_{1,2}=-1\pm 2i$.

因为 $f(x)=\sin 2x$, $\lambda+\omega i=2i$ 不是特征方程的根,
所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

代入原方程得

$$(A+2B)\cos 2x+(B-4A)\sin 2x=\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{4}{17}$, $B=\frac{1}{17}$, $y^*=-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$.

因此原方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$;

解 齐次方程$y'''+y''-2y'=0$的特征方程为$r^3+r^2-2r=0$,

其根为$r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=2$.

齐次方程$y'''+y''-2y'=0$的通解为$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}$.

原方程中$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中$f_1(x)=xe^x$, $f_2(x)=4x$.

对于方程$y'''+y''-2y'=xe^x$, 因为$\lambda=1$是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_1*=x(Ax+B)e^x,$$

代入$y'''+y''-2y'=xe^x$得

$$(6Ax+8A+3b)e^x=xe^x,$$

比较系数得$A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{4}{9}$, 故$y_1*=x(\frac{1}{6}x-\frac{4}{9})e^x$.

对于方程$y'''+y''-2y'=4x$, 因为$\lambda=0$是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_2*=x(Cx+D),$$

代入$y'''+y''-2y'=4x$得

$$-4Cx+2C-2D=4x,$$

比较系数得$C=-1$, $D=-1$, 故$y_2*=x(-x-1)$.

因此原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x)e^x-x^2-x .$$

(9) $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$;

解 将原方程变形为

$$x\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x^2=-y^3,\text{ 或 }\frac{d(x^2)}{dy}-\frac{6}{y}x^2=-2y^3,$$

其通解为

$$x^2=e^{\int\frac{6}{y}dy}[\int(-2y^3)e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy+C]=y^6(y^{-2}+C),$$

即原方程的通解为$x^2=y^4+Cy^6$.

(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解　令$u=\sqrt{x^2+y}$，则$y=u^2-x^2$，$\frac{dy}{dx}=2u\frac{du}{dx}-2x$，故原方程化为

$$2u\frac{du}{dx}-x=u，即\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}(\frac{x}{u})+\frac{1}{2}.$$

这是齐次方程，因此令$\frac{u}{x}=z$，则 $u=xz$，$\frac{du}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$，则上述齐次方程化为

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}，即 x\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}(2z-\frac{1}{z}-1),$$

分离变量得

$$\frac{zdz}{2z^2-z-1}=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

积分得　$\frac{1}{6}\ln(2z^3-3z^2+1)=-\frac{1}{2}\ln x+C_1$，

即　　$2z^3-3z^2+1=Cx^{-3}\ (C=e^{6C_1})$.

将$z=\frac{u}{x}$代入上式得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C,$$

再代入$u=\sqrt{x^2+y}$，得原方程的通解$2\sqrt{(x^2+y)^3}-2x^3-3xy=C$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$, $x=1$ 时$y=1$;

解　原方程变形为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2,$$

即　　$x^{-2}\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x^{-1}=-\frac{2}{y^3}$,

或　　$\frac{d(x^{-1})}{dy}+\frac{2}{y}x^{-1}=\frac{2}{y^3}$,

其通解为

$$x^{-1}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}}dy+C)=\frac{1}{y^2}(2\ln y+C),$$

即原方程的通解为

$$y^2=x(2\ln y+C).$$

由$y|_{x=1}=1$，得$C=1$．故满足所给初始条件的特解为$y^2=x(2\ln y+1)$.

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时$y=0$, $y'=-1$;

解 令 $y'=p$，则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0.$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p^2}=adx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1，\text{即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

代入初始条件$y'(0)=-1$ 得$C_1=1$,

故 $$y'=-\frac{1}{ax+1}.$$

方程两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初始条件$y(0)=0$ 得$C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

解 令 $y'=p$，则原方程化为

$$2p\frac{dp}{dy}-\sin 2y=0.$$

分离变量得

$$2pdp=\sin 2ydy,$$

两边积分得

$$p^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+C_1.$$

代入初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$,

因而 $y'^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+\frac{1}{2}=\sin^2 y$,

即 $y'=\sin y$.

分离变量得

$$\frac{dy}{\sin y}=dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=x+C_2 .$$

代入初始条件 $y(0)=\frac{\pi}{2}$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}$.

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

解 齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其根为 $r_{1, 2}=-1$.

齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因为 $f(x)=\cos x$, $\lambda+\omega i=i$ 不是特征方程的根, 所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入原方程得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x,$$

比较系数得 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$. 故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$. 从而原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x \quad .$$

将初始条件代入通解得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ -C_1+C_2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases},$$

解之得 $C_1=0$, $C_2=1$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

5. 已知某曲线经过点(1, 1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

解 设点(x, y)为曲线上任一点, 则曲线在该点的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

其在纵轴上的截距为 $y-xy'$, 因此由已知有

$$y-xy'=x, \text{ 即 } y'-\frac{1}{x}y=-1.$$

这是一个一阶线性方程, 其通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=x(-\ln x+C),$$

即方程的通解为 $y=x(C-\ln x)$.

由于曲线过点(1, 1), 所以 $C=1$.

因此所求曲线的方程为 $y=x(1-\ln x)$.

6. 已知某车间的容积为 $30\times30\times6\mathrm{m}^3$, 其中的空气含 0.12%的$CO_2$(以容积计算). 现以含$CO_2$0.04%的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在 30min后使车间空气中CO_2的含量不超过 0.06%?(假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出).

解 设每分钟应输入的空气为a m^3, t时刻车间中CO_2的浓度为$x(t)$, 则车间中CO_2的含量(以体积计算)在t时刻经过dt min的改变量为

$$30\times30\times6\, dx=0.0004a dt-ax dt,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x-0.0004}dx=-\frac{a}{5400}dt,$$

由于 $x>0.0004$, 故两边积分得

$$\ln(x-0.0004)=-\frac{a}{5400}t+\ln C,$$

即

$$x=0.0004+Ce^{-\frac{a}{5400}t}.$$

由于开始时车间中的空气含 0.12%的CO_2, 即当$t=0$ 时, $x=0.0012$, 代入上式得$C=0.0008$. 因此 $x=0.0004+0.0008e^{-\frac{a}{5400}t}$.

由上式得$a=-\frac{5400}{t}\ln\frac{x-0.004}{0.0008}$.

由于要求 30min后车间中CO_2的含量不超过 0.06%，即当t=30 时，$x\le 0.0006$，将 t=30, x=0. 0006 代入上式得 $a=180\ln 4\approx 250$.

因为$x'=-\frac{0.0008}{5400}e^{-\frac{a}{5400}t}<0$，所以 x 是 a 的减函数，考试当 $a\ge 250$ 时可保证 $x\le 0.0006$.

因此每分钟输入新鲜空气的量不得小于 250m^3.

7. 设可导函数$\varphi(x)$满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin tdt=x+1,$$

求$\varphi(x)$.

解 在等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x+2\varphi(x)\sin x=1,$$

即 $$\varphi'(x)+\tan x\varphi(x)=\sec x.$$

这是一个一阶线性方程，其通解为

$$\varphi(x)=e^{-\int\tan xdx}(\int\sec xe^{\int\tan xdx}dx+C)$$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x.$$

在已知等式中，令 x=0 得$\varphi(0)=1$，代入通解得 C=1. 故$\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

8. 设函数 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $f(r)$二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$. 试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程，并求 $f(r)$.

解 因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$,

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}f'(r)+\frac{x}{r}f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f'(r).$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f'(r),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f'(r).$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}f'(r)$$

$$=\frac{2r^2}{r^3}f'(r)+f'(r)=\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}.$$

因此拉普拉斯方程化为

$$\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}=0,\text{ 即 }\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0.$$

令 $\frac{du}{dr}=p(r)$，则以上方程进一步变成

$$\frac{2}{r}p+\frac{dp}{dr}=0,\text{ 即 }\frac{dp}{dr}+\frac{2}{r}p=0,$$

其通解为

$$p=C_1e^{-\int\frac{2}{r}dr}=\frac{C_1}{r^2},\text{ 即 }\frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r^2}.$$

由于$f'(1)=1$，即$r=1$ 时 $\frac{du}{dr}=1$，所以$C_1=1$，$\frac{du}{dr}=\frac{1}{r^2}$.

在方程 $\frac{du}{dr}=\frac{1}{r^2}$ 的两边积分得

$$u=-\frac{1}{r}+C_2.$$

又由于$f(1)=1$，即$r=1$ 时$u=1$，所以$C_2=2$,

从而 $u=-\frac{1}{r}+2$，即 $f(r)=-\frac{1}{r}+2$.

9. 设$y_1(x)$、$y_2(x)$是二阶齐次线性方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，令

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x),$$

证明:

(1)$W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$;

证明 因为$y_1(x)$、$y_2(x)$都是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解,

所以 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$, $y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0$,

从而 $W'+p(x)W=(y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2')+p(x)(y_1y_2'-y_1'y_2)$

$=y_1[y_2''+p(x)y_2']-y_2[y_1''+p(x)y_1']$

$=y_1[-q(x)y_2]-y_2[-q(x)y_1]$

$=0$,

即 $W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$.

(2)$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.

证明 已知 $W(x)$满足方程

$$W'+p(x)W=0,$$

分离变量得

$$\frac{dW}{W}=-p(x)dx.$$

将上式两边在$[x_0, x]$上积分, 得

$$\ln W(x)-\ln W(x_0)=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt,$$

即 $$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}.$$