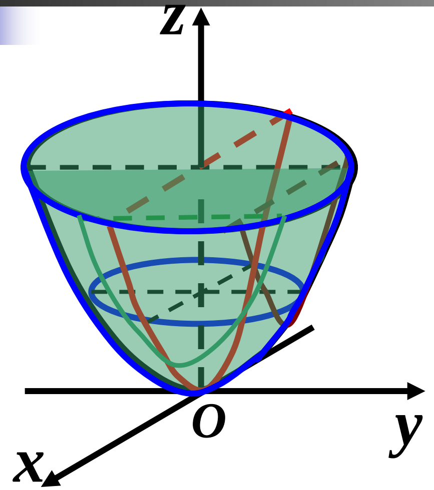
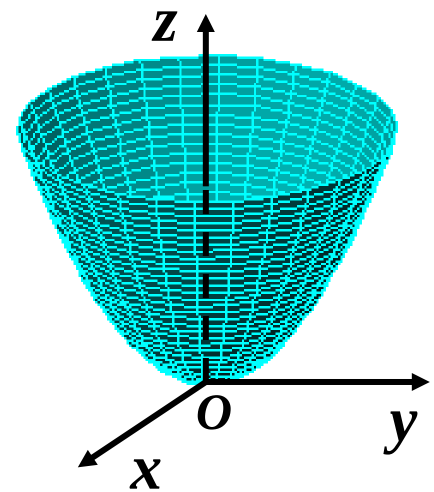
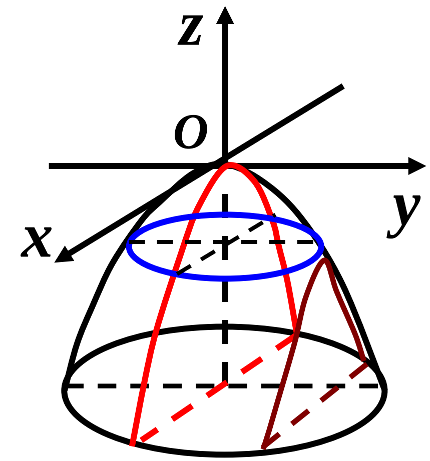
§7 正定二次型

(本节只涉及实二次型)

$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ 椭圆抛物面的图形如下：







$p>0, q>0$

$\left(\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}\right.$是正定二次型)

$p<0, q<0$

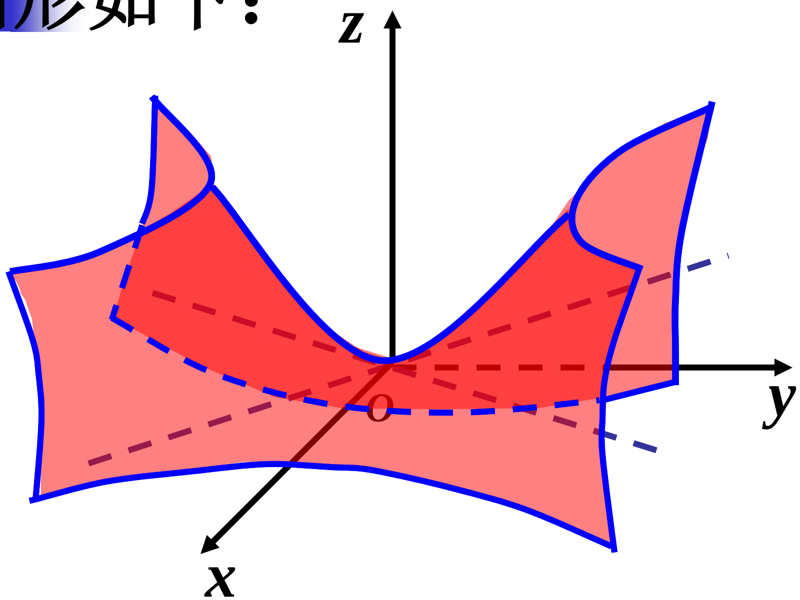
$\left(\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}\right.$是负定二次型)

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z,\ p>0,\ q>0$$

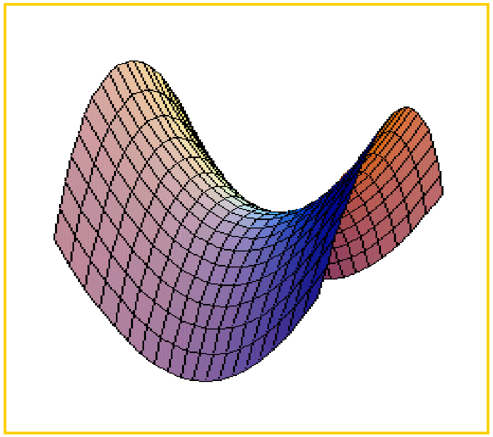
双曲抛物面
(马鞍面)

图形如下：

标准化



方程 $\boxed{z = xy}$ 表示什么曲面？



马鞍面

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

不定二次型

一、正(负)定二次型的概念

定义10：设有实二次型 $f(x)=x^TAx$，如果对任何 $x\neq 0$，都有 $f(x)>0$（显然 $f(0)=0$），则称 f 为正定二次型，并称对称矩阵 A 是正定的；

如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$，则称 f 为负顶定二次型，并称对称矩阵 A 是定负的.

例如 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型

$f(x_1,x_2)=-x_1^2-3x_2^2$ 为负定二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2$ 不是正定二次型

n元实二次型的其他分类

1. 定义

设n元二次型 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x^TAx, A^T=A,$

若对任意一组不全为零的实数$c_1,c_2,\dots,c_n$，都有

① $f(c_1,c_2,\dots,c_n)<0,$ 则 f 称为负定二次型.

② $f(c_1,c_2,\dots,c_n)\geq 0$，则 f 称为半正定二次型.

③ $f(c_1,c_2,\dots,c_n)\leq 0$，则 f 称为半负定二次型.

④ f 既不是半正定，也不是半负定，则 f 称为

不定二次型.

注意：

相应于二次型，n 阶实对称矩阵类似定义为：

①正定矩阵 （正定二次型）

②负定矩阵 （负定二次型）

③半正定矩阵（半正定二次型）

④半负定矩阵（半负定二次型）

⑤不定矩阵 （不定二次型）

二、惯性定理

定理9(惯性定理)　设有实二次型 $f = x^T Ax$, 它的秩为 r, 有两个实的可逆变换

$$x = Cy \qquad \text{及} \qquad x = Pz$$

使 $\quad f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$

及 $\quad f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

定义：二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数，负系数的个数称为负惯性指数。

三、正(负)定二次型的判别

定理10：n元实二次型 $f = x^T Ax$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的n个系数全为正，即它的规范形的n个系数全为1，亦即它的正惯性指数等于n.

证明 设可逆变换$x = Cy$使

$$f(x) = f(Cy) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 .$$

充分性： 设 $k_i > 0\,(i = 1, \cdots, n)$. 任给 $x \neq 0$,

则 $y = C^{-1}x \neq 0$,（若$y = 0, \Rightarrow x = Cy = 0$,矛盾）

故 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0, \Rightarrow f = x^T Ax$是正定二次型

定理10： n元实二次型 $f = x^T Ax$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的n个系数全为正，即它的规范形的n个系数全为1，亦即它的正惯性指数等于n.

必要性： 设可逆变换$x = Cy$使

$$f(x) = f(Cy) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 .$$

反证法：若$\exists\, k_s \le 0$，特别地取 $y = e_s$(单位坐标向量) 时，

$$f(Ce_s) = k_s \le 0.$$ 显然 $Ce_s \ne 0$，否者产生矛盾

这与 f 为正定相矛盾，$\Rightarrow k_i > 0\,(i = 1, \cdots, n)$.

推论： 对称矩阵A为正定的充分必要条件是：A的特征值全为正.

顺序主子式

设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

1) k阶方阵 $A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\in R^{k\times k}$

称为A的第k阶**顺序主子矩阵**;

2) k阶子式 $P_k=\det A_k=|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$

称为A的第k阶**顺序主子式**.

定理11：对称矩阵A为正定的充分必要条件是:A的各阶顺序主子式均为正，即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

这个定理称为霍尔维茨定理.

例1 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

是否正定.

解 $f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

它的顺序主子式

$$5>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0,$$

故上述二次型是正定的.

例2 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$$

是否正定.

解 用特征值判别法.

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

令 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=6$

即知A是正定矩阵，**故此二次型为正定二次型.**

例3 判别二次型

$$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$$

的正定性.

解 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$|A|=-80<0$, 根据定理13知 f 为负定.

四、小结

1.　正定二次型的概念，正定二次型与正定矩阵的区别与联系.

2.　**正定二次型（正定矩阵）的判别方法：**

(1) 定义法；

(2) 顺序主子式判别法；

(3) 特征值判别法.

3.　根据正定二次型的判别方法，可以得到**负定二次型（负定矩阵）**相应的判别方法，请学生自己探讨.

思考题

设A, B分别为m阶, n阶正定矩阵, 试判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

思考题解答

解 C是正定的.

因为,设$z^T=(x^T,y^T)$为$m+n$维向量,其中x,y分别是m维和n维列向量,若$z\neq 0$,则x,y不同时为零向量,于是

$$z^T Cz=(x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=x^T Ax+y^T By>0,$$

且C是实对称阵,故C为正定矩阵.