# §3 相似矩阵

**定义**：设 $A, B$ 都是 $n$ 阶矩阵，若有可逆矩阵 $P$ 满足

$$P^{-1}AP = B \;,$$

则称 $B$ 为矩阵 $A$ 的**相似矩阵**，

对 $A$ 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 $A$ 进行**相似变换**．

称可逆矩阵 $P$ 为把 $A$ 变成 $B$ 的**相似变换矩阵**．

**定理**：若 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$ 相似，则 $A$ 和 $B$ 的特征多项式相同，从而 $A$ 和 $B$ 的特征值也相同．

**证明**：根据题意，存在可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP = B$ ．

于是

$$|B-\lambda E| = |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}(A-\lambda E)P|$$

$$= |P^{-1}|\,|A-\lambda E|\,|P| = |A-\lambda E| \;.$$

**定理：**若 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$ 相似，则 $A$ 的多项式 $\varphi(A)$ 和 $B$ 的多项式 $\varphi(B)$ 相似．

**证明：**设存在可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP = B$ ，则

$$\Rightarrow B^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$$

设 $\varphi(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$，那么

$$P^{-1}\varphi(A)P$$

$$= P^{-1}(c_m A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E)P$$

$$= c_m P^{-1}A^m P + c_{m-1}P^{-1}A^{m-1}P + \ldots + c_1 P^{-1}AP + c_0 P^{-1}EP$$

$$= c_m B^m + c_{m-1}B^{m-1} + \ldots + c_1 B + c_0 E = \varphi(B).$$

**定理：**若 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$ 相似，则 $A$ 的多项式 $\varphi(A)$ 和 $B$ 的多项式 $\varphi(B)$ 相似．

若 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $n$ 阶对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似，

即$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow A = P\Lambda P^{-1}$

$$\text{则：}\quad \varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

从而通过计算$\varphi(\Lambda)$ 可方便地计算$\varphi(A)$.（最初可见书P46）

若$\varphi(\lambda) = |A-\lambda E|$，那么 $\varphi(A) = O$（零矩阵）.

## 提出的问题：

对于任意的方阵$A$，满足什么条件，$A$才会和一个对角矩阵相似呢？换句话说，就是那样的可逆矩阵$P$真的存在吗，如果真的存在，怎样求得？以下分析可逆矩阵$P$的每一个列向量具有怎样的特质？

可逆矩阵 $P$，满足 $P^{-1}AP = \Lambda$（对角阵）

矩阵 $P$ 的列向量组线性无关

$AP = P\Lambda$ ?

**P.123定理4：**

$n$ 阶矩阵 $A$ 和对角阵相似

**充分必要条件**是

$A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量

$Ap_i = \lambda_i p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ $\Longleftrightarrow$ $(A-\lambda_i E)p_i = 0$

$A$ 的特征值

对应的特征向量

其中

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**P119例7：求矩阵** $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ **的特征值和特征向量．**

**解：** $A$ **的特征值为** $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ ．

$$\lambda_1=-1\leftrightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\quad \lambda_2=\lambda_3=2\leftrightarrow p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

由定理可知：$p_1,p_2,p_3$ 线性无关

即：$Ap_1=\lambda_1 p_1$，$Ap_2=\lambda_2 p_2$，$Ap_3=\lambda_3 p_3$

$$\Leftrightarrow A(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}AP=\Lambda$$

**例 8** 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(1) 问矩阵 $A$ 是否可相似对角化, 若能, 试求可逆矩阵 $P$ 和对角矩阵 $\Lambda$, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

(2) 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 成立的 $P$ 、 $\Lambda$ 是否唯一, 举例说明.

**解** （1） 矩阵 $A$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

所以 $A$ 的三个特征值分别为:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(A-E)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$ 得基础解系为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 解方程组 $(A-2E)x = 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{得基础解系为 } p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程组 $(A-3E)x = 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 得基础解系为} p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

因为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 线性无关

即三阶矩阵 $A$ 有三个线性无关的特征向量, 所以

矩阵 $A$ 可相似对角化. 令

$$P=(p_1, p_2, p_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$ 则 $$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-1\\0&0&1/2\end{pmatrix}.$$

此时 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$, 且有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

（2） 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 成立的 $P$、 $\Lambda$ 不唯一.

若取 $P = (p_1, p_3, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{此时} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

亦有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

注意：可逆矩阵$P$中特征向量$p_i$排列的顺序，要和对角矩阵$\Lambda$中对角线上特征值的排列顺序一样

**例 9** 试证明矩阵$A$不相似于对角矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**证明:** 矩阵 $A$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,

反证法: 如果 $A$ 相似于对角矩阵$\Lambda$,

则 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=E$ 就是单位矩阵,

于是就存在可逆矩阵 $P$, 使 $P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow A=P\Lambda P^{-1}$

从而有 $A=P\Lambda P^{-1}=PEP^{-1}=E$

这显然不对, 所以说 $A$ 不相似于对角矩阵.

## 书上P123，例11

设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵$A$能对角化？

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&x\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$$

对于单根$\lambda_1=-1$,可求得线性无关的特征向量恰有一个，故矩阵$A$可对角化的充分必要条件是对应重根$\lambda_2=\lambda_3=1$，有2个线性无关的特征向量，即方程组: $(A-E)x=0$有2个线性无关的解，也即$R(A-E)=1$

$$\text{由}A-E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

要使 $R(A-E)=1$, 则必须让$x+1=0$, 即$x=-1$.

因此，当$x=-1$时，矩阵$A$能对角化.