第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

本节主要概念，定理，公式和重要结论

理解多元函数的概念，会表达函数，会求定义域;

理解二重极限概念，注意 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 是点 (x,y) 以任何方式趋于 (x_0,y_0);

注意理解本节中相关概念与一元函数中相应内容的区分与联系。

习题　8－1

1. 求下列函数表达式:

(1) $f(x,y)=x^y+y^x$，求 $f(xy,x+y)$

解： $f(xy,x+y)=xy^{x+y}+(x+y)^{xy}$

(2) $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$

解： $f(x+y,x-y)=(x-y)(x+y)\Rightarrow f(x,y)=xy$

2. 求下列函数的定义域，并绘出定义域的图形:

(1) $z=\ln(x+y-1)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

解：$\begin{cases} x+y-1>0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y>1 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$

(2) $z=\ln(x^2-2y+1)$

解： $x^2-2y+1>0$

(3) $f(x,y)=\ln(1-|x|-|y|)$

解：$1-|x|-|y|>0\Rightarrow |x|+|y|<1$

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-x+xy}{x^2+y^2}$

解： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-x+xy}{x^2+y^2}=1$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解一： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=-2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+\frac{xy}{4}}-1}{xy}=-2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\frac{xy}{8}}{xy}=-\dfrac{1}{4}$

解二： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})}=-\dfrac{1}{4}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(2+x)\dfrac{\sin(xy)}{y}$　　　　　　　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

解一：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(2+x)\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}[(2+x)\dfrac{\sin(xy)}{xy}x]=3$

解二：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(2+x)\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(2+x)\dfrac{xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(2+x)x=3$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

解一：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2})=0$

解二：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=0$

4. 证明下列函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$

5. 下列函数在何处是间断的?

(1) $z=\dfrac{1}{x-y}$

解：$x=y$

(2) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$

解：$y^2=2x$

第二节　偏导数

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 偏导数：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域有定义，则

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$
$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

$f_x(x_0,y_0)$的几何意义为曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线对$x$轴的斜率.

$f(x,y)$在任意点(x,y)处的偏导数$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$称为偏导函数，简称偏导数. 求$f_x(x,y)$时，只需把y视为常数，对x求导即可.

2. 高阶偏导数

$z=f(x,y)$的偏导数$f_x(x,y),f_y(x,y)$的偏导数称为二阶偏导数，二阶偏导数的偏导数称为三阶偏导数，如此类推. 二阶偏导数依求导次序不同，有如下 4 个:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，其中后两个称为混合偏导数.

若两个混合偏导数皆为连续函数，则它们相等，即可交换求偏导数的次序. 高阶混合偏导数也有类似结果.

习题 8－2

1. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $z=\frac{x}{y}+xy$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}+y,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+x$

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

(3) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

(4) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$

(5) $u=\int_{xz}^{yz}e^{t^2}dt$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=-ze^{x^2z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=ze^{y^2z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{y^2z^2}-xe^{x^2z^2}$

(6) $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$

(7) $z=(1+xy)^{x+y}$　　(8) $u=e^{\theta+\varphi}\cos(\theta-\varphi)$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=(1+xy)^{x+y}[\ln(1+xy)+\frac{x+y}{1+xy}y],\frac{\partial u}{\partial y}=(1+xy)^{x+y}[\ln(1+xy)+\frac{x+y}{1+xy}x]$

(8) $u=e^{\theta+\varphi}\cos(\theta-\varphi)$

解：$\frac{\partial u}{\partial \theta}=e^{\theta+\varphi}[\cos(\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)],\frac{\partial u}{\partial \varphi}=e^{\theta+\varphi}[\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)]$

2. 求下列函数在指定点处的一阶偏导数：

（1） $z=x^2+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $z_x(0,1)$

解：$z_x(0,1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=0$

（2） $z=x^2e^y+(x-1)\arctan\frac{y}{x}$，求 $z_y(1,0)$

解：$z_y(1,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\Delta y}-1}{\Delta y}=-1$

3. 求下列函数的高阶偏导数：

(1) $z=x\ln(xy)$，　求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+1,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}$

(2) $z=\cos^2(x+2y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-2\cos(x+2y)\sin(x+2y)=-\sin 2(x+2y)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-4\cos(x+2y)\sin(x+2y)=-2\sin 2(x+2y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\cos 2(x+2y),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-8\cos 2(x+2y),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4\cos 2(x+2y)$

(3) $z=\int_x^{x^2+y^2}e^t dt$，　求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}-e^x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(1+2x^2)e^{x^2+y^2}-e^x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

$$f_x(x,y)=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},x^2+y^2\neq 0$$

$$f_y(x,y)=x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},x^2+y^2\neq 0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{-\Delta y^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(\Delta x,0)-f_x(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1$$

5. 设 $z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$，　　求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{x^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}+y^2\cdot\frac{1}{y^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2z$$

6. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，　　证明 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$

证明：$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\dfrac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

由轮换对称性，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{r^2-y^2}{r^3},\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}$$

第三节　　全微分

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 全微分的定义

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 Δz 表示成

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\qquad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，记作 dz.

2. 可微的必要条件：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

（1）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

（2）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导，且 $A=f_x(x_0,y_0),B=f_y(x_0,y_0)$，从而

$$dz=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

一般地，对于区域 D 内可微函数， $dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$.

3. 可微的充分条件：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内可偏导，且偏导数在 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

注：以上定义和充分条件、必要条件均可推广至多元函数。

习题 8—3

1. 求下列函数的全微分

(1) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (2) $z=\arctan\dfrac{x-y}{1-xy}$

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

(2) $z=\arctan\dfrac{x-y}{1-xy}$

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-y}{1-xy})^2}\mathrm{d}\dfrac{x-y}{1-xy}$

$$=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x-y)^2}\frac{(1-xy)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+(x-y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)}{(1-xy)^2}=\frac{(1-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-1)\mathrm{d}y}{(1-xy)^2+(x-y)^2}$$

(3) $z=y^{\sin x},\qquad y>0$

解：$\mathrm{d}z=\mathrm{d}e^{\sin x\ln y}=e^{\sin x\ln y}\mathrm{d}(\sin x\ln y)=y^{\sin x}(\cos x\ln y\mathrm{d}x+\dfrac{\sin x}{y}\mathrm{d}y)$

(4) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解：$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z-z\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z-z\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)\mathrm{d}z-z(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(5) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$

解：$\mathrm{d}u=\mathrm{d}e^{x(x^2+y^2+z^2)}=e^{x(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}[x(x^2+y^2+z^2)]$

$\mathrm{d}[x(x^2+y^2+z^2)]=(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x+x(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z)$

$=(3x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z)$

所以 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}e^{x(x^2+y^2+z^2)}=e^{x(x^2+y^2+z^2)}[=(3x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z)]$

(6) $u=x^{yz}$

解：$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x^{yz}=\mathrm{d}e^{yz\ln x}=e^{yz\ln x}(\frac{yz}{x}\mathrm{d}x+z\ln x\mathrm{d}y+y\ln x\mathrm{d}z)$

$=x^{yz}(\frac{yz}{x}\mathrm{d}x+z\ln x\mathrm{d}y+y\ln x\mathrm{d}z)$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{1+x^2+y^2}$

$\mathrm{d}z|_{(1,2)}=\dfrac{2(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)}{1+1+4}=\dfrac{2}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$，当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量与全微分.

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\Rightarrow \mathrm{d}z|_{(2,1)}=\dfrac{-2\times0.2-0.1}{4}=-0.125$

$\Delta z=\dfrac{y}{x}|_{(2+0.1,1-0.2)}-\dfrac{y}{x}|_{(2,1)}=\dfrac{0.8}{2.1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1.6-2.1}{4.2}=\dfrac{-0.5}{4.2}=-0.119$

4. 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

解：由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，

又 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y^2\sin\dfrac{1}{\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y\sin\dfrac{1}{\Delta y^2}=0$

又 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

所以 $\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

5. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解：令 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$，则 $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{3}{2}\dfrac{x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{x^3+y^3}}$，

再设 $(x_0,y_0)=(1,2),\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$

则 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f$

$$=\sqrt{1^3+2^3}+\frac{3\times 0.02+12\times(-0.03)}{2\sqrt{1^3+2^3}}=3+\frac{0.06-0.36}{6}=2.95$$

6. 已知边长 $x=6\mathrm{m},\ y=8\mathrm{m}$ 的矩形，如果 x 边增加 5cm，而 y 边减少 10cm，求这个矩形的对角线的长度变化的近似值.

解：对角线长为 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

所以 $f(6.05,7.9)\approx f(6,8)+\mathrm{d}f\,|_{(6,8)}=\sqrt{6^2+8^2}+\dfrac{6\times 0.05-8\times 0.1}{\sqrt{6^2+8^2}}=10-\dfrac{0.5}{10}=9.95$

第四节 多元复合函数的求导法则

本节主要概念，定理，公式和重要结论

复合函数的求导法则（链式法则）如下:

1. 设 $u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$ 在 (x,y) 可偏导，$z=f(u,v)$ 在相应点有连续偏导数，则 $z=f\left[\varphi(x,y),\psi(x,y)\right]$ 在 (x,y) 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 推广:

(1) 多个中间变量: 设 $u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y),\quad w=\omega(x,y),\quad z=f(u,v,w)$ 则 $z=f\left[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)\right]$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(2) 只有一个中间变量: 设 $u=\varphi(x,y),\quad z=f(x,y,u)$ 则 $z=f\left[x,y,\varphi(x,y)\right]$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

(3) 只有一个自变量: 设 $u=\varphi(t),v=\psi(t),\quad w=\omega(t)$ 则 $z=f\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]$ 且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

习题 8－4

1. 求下列复合函数的一阶导数

(1) $z=e^{x-2y},\qquad x=\sin t,\qquad y=t^3$

解：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}3t^2=(\cos t-6t^2)e^{\sin t-2t^3}$

(2) $z=\arcsin(x-y),\qquad x=3t,\qquad y=4t^3$

解：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}}-\dfrac{12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}=\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-t^2(3-4t^2)^2}}$

(3) $z=\arctan(xy),\qquad y=e^x$

解：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xe^x}{1+(xy)^2}+\dfrac{y}{1+(xy)^2}=\dfrac{(x+1)e^x}{1+x^2e^{2x}}$

(4) $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1},\qquad y=a\sin x,\qquad z=\cos x$

解：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ae^{ax}(y-z)}{1+a^2}+\dfrac{e^{ax}a\cos x}{1+a^2}+\dfrac{e^{ax}\sin x}{1+a^2}$

$=\dfrac{e^{ax}}{1+a^2}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)=\dfrac{e^{ax}}{1+a^2}(a^2+1)\sin x=e^{ax}\sin x$

2. 求下列复合函数的一阶偏导数

(1) $z=u^2+v^2,\qquad u=x+y,\qquad v=x-y$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2u+2v=2(u+v)=4x$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u-2v=2(u-v)=4y$

(2) $z=x^2\ln y,\qquad x=\dfrac{s}{t},\qquad y=3s-2t$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial s}=2x\dfrac{1}{t}\ln y+3\dfrac{x^2}{y}=2\dfrac{s}{t^2}\ln(3s-2t)+3\dfrac{s^2}{t^2(3s-2t)}=\dfrac{s}{t^2}[2\ln(3s-2t)+\dfrac{3s}{3s-2t}]$

$\dfrac{\partial z}{\partial t}=2x\dfrac{-s}{t^2}\ln y-2\dfrac{x^2}{y}=-2\dfrac{s^2}{t^3}\ln(3s-2t)-2\dfrac{s^2}{t^2(3s-2t)}=-\dfrac{2s^2}{t^2}[\dfrac{\ln(3s-2t)}{t}+\dfrac{1}{3s-2t}]$

3. 求下列复合函数的一阶偏导数（f 是 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 类函数）

(1) $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$

(2) $z=f(xy,y)$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+f_2'$

(3) $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2xyf'}{f^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f+2y^2f'}{f^2}$

(4) $u = xy + zf(\frac{y}{x})$

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = y + zf' \cdot \frac{-y}{x^2} = y - \frac{yzf'}{x^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = x + zf' \cdot \frac{1}{x} = x + \frac{zf'}{x}$，$\frac{\partial u}{\partial z} = f$

4. 设 $u = f(x, xy, xyz)$ 且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + yf_2' + xzf_3'$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xf_{12}'' + zxf_{13}'' + f_2' + y[xf_{22}'' + zxf_{23}''] + zf_3' + yz[xf_{32}'' + zxf_{33}'']$$

5. 已知 $z = xf(\frac{y}{x}) + 2y\varphi(\frac{x}{y})$，其中 f, φ 有二阶连续导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f + xf' \cdot \frac{-y}{x^2} + 2y\varphi' \cdot \frac{1}{y} = f - \frac{y}{x} f' \cdot + 2\varphi'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} f' - \frac{y}{x} f'' \cdot \frac{1}{x} + 2\varphi'' \frac{-x}{y^2} = -\frac{y}{x^2} f'' - \frac{2x}{y^2} \varphi''$$

6. 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$，其中 f, g 有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + \frac{1}{y} f_2' + g' \cdot \frac{-y}{x^2} = yf_1' + \frac{1}{y} f_2' - \frac{y}{x^2} g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + xyf_{11}'' - \frac{x}{y} f_{12}'' - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{x}{y} f_{21}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''$$

第五节　隐函数的求导公式

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 一个方程的情形

（1）若方程 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$，　则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$.

（2）若方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$；$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$.

2. 方程组的情形

（1）若 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 确定 $y = y(x)$，$z = z(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

（2）若$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

习题 8—5

1．求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$

(1) $x^2+xy-e^y=0$

解：$2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-e^y\mathrm{d}y=0\Rightarrow(e^y-x)\mathrm{d}y=(2x+y)\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y}{e^y-x}$

(2) $\sin y+e^x-xy^2=0$

解：$\sin y\mathrm{d}y+e^x\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0\Rightarrow(\sin y-2xy)\mathrm{d}y=(y^2-e^x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-e^x}{\sin y-2xy}$

(3) $x^y=y^x$

解：$y\ln x=x\ln y\Rightarrow\ln x\mathrm{d}y+\frac{y}{x}\mathrm{d}x=\ln y\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y\Rightarrow xy\ln x\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=xy\ln y\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$

$x(y\ln x-x)\mathrm{d}y=y(x\ln y-y)\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$

(4) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$

解：$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$

2．求下列方程所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

(1) $z^3-2xz+y=0$

解：$z^3-2xz+y=0\Rightarrow3z^2\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}z+\mathrm{d}y=0\Rightarrow(3z^2-2x)\mathrm{d}z=2z\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{3z^2-2x}$

(2) $3\sin(x+2y+z)=x+2y+z$

解：$3\sin(x+2y+z)=x+2y+z \Rightarrow 3\cos(x+2y+z)(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$

$\Rightarrow [3\cos(x+2y+z)-1]\mathrm{d}z=[1-3\cos(x+2y+z)](\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-2$

(3) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$

解：$x=z\ln z-z\ln y \Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\ln z)\mathrm{d}z-\ln y\mathrm{d}z-\frac{z}{y}\mathrm{d}y$

$\Rightarrow y(1+\ln z-\ln y)\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\ln z-\ln y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(1+\ln z-\ln y)}$

(4) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$

解：$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0 \Rightarrow \mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0$

$\Rightarrow (\sqrt{xyz}-xy)\mathrm{d}z=(yz-\sqrt{xyz})\mathrm{d}x+(xz-\sqrt{xyz})\mathrm{d}y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$

3．求下列方程所确定的隐函数的指定偏导数

(1)设 $e^z-xyz=0$， 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解：$e^z-xyz=0 \Rightarrow e^z\mathrm{d}z-yz\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z=0 \Rightarrow (e^z-xy)\mathrm{d}z=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\frac{\frac{\partial z}{\partial x}-z(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(e^z-xy)^2}=y\frac{(1-ze^z)\frac{\partial z}{\partial x}+zy}{(e^z-xy)^2}=y\frac{(1-ze^z)\frac{xz}{e^z-xy}+zy}{(e^z-xy)^2}$$

$$=yz\frac{x-xze^z+ye^z-xy^2}{(e^z-xy)^3}=\frac{z(1-xyz^2+y^2z-y^2)}{x^2y^2(z-1)^3}$$

(2)设 $z^3-3xyz=a^3$， 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$z^3-3xyz=a^3 \Rightarrow 3z^2\mathrm{d}z-3(yz\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z)=0 \Rightarrow (z^2-xy)\mathrm{d}z=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(z^2-xy)-yz(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x)}{(z^2-xy)^2}=\frac{(z+y\frac{xz}{z^2-xy})(z^2-xy)-yz(2z\frac{xz}{z^2-xy}-x)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{[z(z^2-xy)+yxz](z^2-xy)-yz[(2zxz-x(z^2-xy)]}{(z^2-xy)^3}=\frac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}$$

(3)设 $e^{x+y}\sin(x+z)=1$， 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$e^{x+y}\sin(x+z)=1 \Rightarrow e^{x+y}\sin(x+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+e^{x+y}\cos(x+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)=0$

$\Rightarrow \cos(x+z)\mathrm{d}z=-[\sin(x+z)+\cos(x+z)]\mathrm{d}x-\sin(x+z)\mathrm{d}y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\tan(x+z)-1, \frac{\partial z}{\partial y}=-\tan(x+z)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sec^2(x+z)\frac{\partial z}{\partial y}=\sec^2(x+z)\tan(x+z)=\frac{\sin(x+z)}{\cos^3(x+z)}$$

(4)设 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$， 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解： $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0 \Rightarrow (1+\frac{1}{z})\mathrm{d}z-e^{-x^2}\mathrm{d}x+e^{-y^2}\mathrm{d}y=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{1+z}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ze^{-y^2}}{1+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2}\frac{(1+z)\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}=e^{-x^2}\frac{\frac{ze^{-y^2}}{1+z}}{(1+z)^2}=\frac{ze^{-x^2-y^2}}{(1+z)^3}$$

4．设 $u=xy^2z^3$，而 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}$

解：$u=xy^2z^3 \Rightarrow \mathrm{d}u=y^2z^3\mathrm{d}x+2xyz^3\mathrm{d}y+3xy^2z^2\mathrm{d}z$

又 $x^2+y^2+z^2=3xyz \Rightarrow 2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=3(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)$

$\mathrm{d}z|_{(1,1,1)}=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$， $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z|_{(1,1,1)}$

$\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z|_{(1,1,1)}=-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=-2$

5.求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数

（1）设 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$， 求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$

解： $\begin{cases} \mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y \\ 2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}z-2y\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x \\ 3z\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}z=\frac{x}{1+3z}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y=-\frac{x(1+6z)}{2y(1+3z)}\mathrm{d}x \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{1+3z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x(1+6z)}{2y(1+3z)}$$

(2)设 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$， 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$

解： $\begin{cases} \mathrm{d}x=(e^u+\sin v)\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y=(e^u-\cos v)\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{u\sin v\mathrm{d}x-u\cos v\mathrm{d}y}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}\\ \mathrm{d}v=\dfrac{-u\cos v\mathrm{d}x+u\sin v\mathrm{d}y}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}\end{cases}$$

6.设 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：$\begin{cases}\mathrm{d}x=e^u\cos v\mathrm{d}u-e^u\sin v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=e^u\sin v\mathrm{d}u+e^u\cos v\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=e^{-u}(\cos v\mathrm{d}x-\sin v\mathrm{d}y)\\ \mathrm{d}v=e^{-u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)\end{cases}$

又 $\mathrm{d}z=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v=ve^{-u}(\cos v\mathrm{d}x-\sin v\mathrm{d}y)+ue^{-u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)$

$=e^{-u}(v\cos v-u\sin v)\mathrm{d}x+e^{-u}(u\cos v-v\sin v)\mathrm{d}y$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v),\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(u\cos v-v\sin v)$

7.设 $y=f(x,t)$ ，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数.试证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$$

解：由 $y=f(x,t)$ ， $\mathrm{d}y=f_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}t$

又 $F(x,y,t)=0\Rightarrow F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y+F_3'\mathrm{d}t=0\Rightarrow\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{F_3'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$

$$\mathrm{d}y=f_1'\mathrm{d}x-\frac{f_2'F_1'}{F_3'}\mathrm{d}x-\frac{f_2'F_2'}{F_3'}\mathrm{d}y\Rightarrow(F_3'+f_2'F_2')\mathrm{d}y=(F_3'f_1'-f_2'F_1')\mathrm{d}x$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{F_3'f_1'-f_2'F_1'}{F_3'+f_2'F_2'}$

第六节 多元函数微分学的几何应用

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 空间曲线的切线与法平面　　设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\varGamma$ ，

(1) 参数方程情形:　　若 $\varGamma:x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ ，

则切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ ；其中 $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)\neq0$;

切线方程为　$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$;

法平面方程为　　$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2) 一般方程情形：若　　$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，

则切向量为 $\boldsymbol{\tau}=\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{M(x_0,y_0,z_0)}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{M(x_0,y_0,z_0)}$　　$(\neq 0)$；

切线方程为　　$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}$；

法平面方程为　　$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0$.

2. 空间曲面的切平面与法线　　设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$.

(1) 隐式方程情形　　若 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，

则法向量为 $\boldsymbol{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}=\nabla F(M_0)(\neq 0)$；

切平面为　　$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$；

法线为　　$\dfrac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(M_0)}$.

(2) 显式方程情形　　若 $\Sigma:z=f(x,y)$，

则法向量为 $\boldsymbol{n}=\{z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1\}$，

切平面为　　$z-z_0=z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$；

法线为　　$\dfrac{x-x_0}{z_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{z_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

(3) 参数方程情形　　若 $\Sigma:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$，

则法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)_{(u_0,v_0)}$　$(\neq 0)$　，

切平面为　　$\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0$；

法线为　　$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}+\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}+\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=0$.

习题 8—6

1．求曲线 $x=\dfrac{1+t}{t},y=\dfrac{t}{1+t},z=t^2$　对应 $t=1$ 的点处的切线和法平面方程.

解：$\vec{\tau}=(-\dfrac{1}{t^2},\dfrac{1}{(1+t)^2},2t)|_{t=1}=(-1,\dfrac{1}{4},2)$

切线：$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{z-1}{8}$

法平面：$-4(x-2)+y-\dfrac{1}{2}+8(z-1)=0\Rightarrow -4x+y+8z=\dfrac{1}{2}$

2．求下列曲面在指定点处的切平面与法线方程

（1）$e^z-z+xy=3$，点$(2,1,0)$

解：$\vec{n}=(y,x,e^z-1)|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$

切平面：$x-2+2(y-1)=0\Rightarrow x+2y=4$

法线：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$

（2）$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$，点$(x_0,y_0,z_0)$

解：$\vec{n}=(\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2},-\dfrac{1}{c})|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},-\dfrac{1}{c})$

切平面：$\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\dfrac{1}{c}(z-z_0)=0$

$\Rightarrow \dfrac{2xx_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2yy_0}{b^2}(y-y_0)-\dfrac{z}{c}=\dfrac{2x_0^2}{a^2}+\dfrac{2y_0^2}{b^2}-\dfrac{z_0}{c}$

即$\dfrac{2xx_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2yy_0}{b^2}(y-y_0)-\dfrac{z}{c}=\dfrac{z_0}{c}$

法线：$\dfrac{x-x_0}{\frac{2x_0}{a^2}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{2y_0}{b^2}}=\dfrac{z-z_0}{-\frac{1}{c}}\Rightarrow \dfrac{a^2(x-x_0)}{2x_0}=\dfrac{b^2(y-y_0)}{2y_0}=\dfrac{c(z-z_0)}{-1}$

3．求出曲线$x=t^3,y=t^2,z=t$上的点，使在该点的切线平行于平面$x+2y+z=6$.

解：设曲线$x=t^3,y=t^2,z=t$在点$(x,y,z)|_t$的切向量为$\vec{\tau}=(3t^2,2t,1)$

平面$x+2y+z=6$的法向量为$\vec{n}=(1,2,1)$，由题意可知

$\vec{\tau}\cdot\vec{n}=(3t^2,2t,1)\cdot(1,2,1)=3t^2+4t+1=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3},t=-1$

所以，该点为$(-\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{3}),(-1,1,-1)$

4．求椭球面$3x^2+y^2+z^2=9$上平行于平面$x-2y+z=0$的切平面方程.

解：设曲面$3x^2+y^2+z^2=9$在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为$\vec{n}$，则

$\vec{n}=(3x_0,y_0,z_0)$，由题意可知，$\dfrac{3x_0}{1}=\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{1}$

令$\dfrac{3x_0}{1}=\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{1}=t\Rightarrow x_0=\dfrac{t}{3},y_0=-2t,z_0=t$，又$3x_0^2+y_0^2+z_0^2=9$，所以

$\dfrac{t^2}{3}+4t^2+t^2=9\Rightarrow 16t^2=27\Rightarrow t=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$，代入得

$x_0=\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}, y_0=\mp\frac{3}{2}\sqrt{3}, z_0=\pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$

所以切平面方程为 $\frac{3}{4}\sqrt{3}(x-\frac{1}{4}\sqrt{3})-\frac{3}{2}\sqrt{3}(y+\frac{3}{2}\sqrt{3})+\frac{3}{4}\sqrt{3}(z-\frac{3}{4}\sqrt{3})=0$

或 $-\frac{3}{4}\sqrt{3}(x+\frac{1}{4}\sqrt{3})+\frac{3}{2}\sqrt{3}(y-\frac{3}{2}\sqrt{3})-\frac{3}{4}\sqrt{3}(z+\frac{3}{4}\sqrt{3})=0$

即 $x-2y+z-4\sqrt{3}=0$ 或 $x-2y+z+4\sqrt{3}=0$

5．试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 1.

证明：设 $P(x,y,z)$ 为曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上任一点，则曲面在该点处的法向量为 $\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{\sqrt{y}},\frac{1}{\sqrt{z}})$，那么切平面的方程为 $\frac{1}{\sqrt{x}}(X-x)+\frac{1}{\sqrt{y}}(Y-y)+\frac{1}{\sqrt{z}}(Z-z)=0$

即 $\frac{1}{\sqrt{x}}X+\frac{1}{\sqrt{y}}Y+\frac{1}{\sqrt{z}}Z=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$，该平面在三个坐标轴上的截距为 $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$，故 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$

6．求曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线和法平面方程.

解：曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为 $\vec{\tau}=(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0})$

所以切线的方程为 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y_0(y-y_0)}{m}=\frac{2z_0(z-z_0)}{-1}$

法平面为 $x-x_0+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$，即 $x+\frac{m}{y_0}y-\frac{1}{2z_0}z=x_0+m-\frac{1}{2}$

第七节　方向导数与梯度

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 方向导数

(1) 定义　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，$\boldsymbol{l}$ 是任一非零向量，$\boldsymbol{e}_l=(a,b)$，则 $f(x,y)$ 在点 P 处沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+at,y+bt)-f(x,y)}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial l}$ 表示函数 $f(x,y)$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

(2) 计算公式

若 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，则对任一单位向量 $\boldsymbol{e}_l=(a,b)$，有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x,y)a+f_y(x,y)b$$（此也为方向导数存在的充分条件）.

2. 梯度

(1) 定义　设 $f(x,y)\in C^{(1)}$，则梯度 $\mathrm{grad}\, f(x,y)$ 为下式定义的向量:

$$\mathrm{grad}\, f(x,y)\ (\text{或}\ \nabla f(x,y)\ )=(f_x(x,y),f_y(x,y)).$$

⑵ 方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f(x,y)\cdot \boldsymbol{e}_l$$

⑶ 梯度的特征刻画

梯度是这样的一个向量，其方向为 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处增长率最大的一个方向；其模等于最大增长率的值.

习题 8—7

1．求下列函数在指定点 M_0 处沿指定方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数

⑴ $z=x^2+y^2$ ， $M_0(1,2)$ ， $\boldsymbol{l}$ 为从点（1，2）到点（2，2+$\sqrt{3}$）的方向

解：方向 $\boldsymbol{l}$ 为 $\vec{l}=(1,\sqrt{3})=2(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，而 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)}=2,\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2)}=4$

所以 $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2)}\cos\beta=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$

⑵ $u=x\arctan\frac{y}{z}$, $M_0(1,2,-2)$ ， $\boldsymbol{l}=(1,1,-1)$

解：$\boldsymbol{l}=(1,1,-1)=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{(1,2,-2)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2,-2)}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2,-2)}\cos\beta+\frac{\partial z}{\partial z}|_{(1,2,-2)}\cos\gamma$$

而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\arctan\frac{y}{z},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz}{z^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-xy}{z^2+y^2}$

所以 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{(1,2,-2)}=-\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos\beta-\frac{1}{4}\cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

2．求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点（1，2）处，沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解：抛物线 $y^2=4x$ 在点 $(1,2)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{l}=(1,\frac{2x}{y})|_{(1,2)}=(1,1)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2)}\cos\beta=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

3．求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解：$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{(1,1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1,2)}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1,2)}\cos\beta+\frac{\partial z}{\partial z}|_{(1,1,2)}\cos\gamma$

$$=(y^2-yz)|_{(1,1,2)}\cos\frac{\pi}{3}+(2xy-xz)|_{(1,1,2)}\cos\frac{\pi}{4}+(3z^2-xy)|_{(1,1,2)}\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{11}{2}=5$$

4．设 $f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，已给四个点 $A(1,3),B(3,3),C(1,7),D(6,15)$，若 $f(x,y)$

在点 A 处沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数等于 3，而沿 $\overrightarrow{AC}$ 方向的方向导数等于 26，求 $f(x,y)$ 在点 A 处沿 $\overrightarrow{AD}$ 方向的方向导数.

解：$\overrightarrow{AB}=(2,0)=2(1,0),\overrightarrow{AC}=(0,4)=4(0,1),\overrightarrow{AD}=(5,12)=13(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overrightarrow{AB}}|_A=\frac{\partial f}{\partial x}|_A\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_A\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}|_A=3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overrightarrow{AC}}|_A=\frac{\partial f}{\partial x}|_A\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_A\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial y}|_A=26$$

所以 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overrightarrow{AD}}|_A=\frac{\partial f}{\partial x}|_A\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_A\cos\beta=3\cdot\frac{5}{13}+26\cdot\frac{12}{13}=25+\frac{2}{13}$

5．设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}\, f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\, f(1,1,1)$

解：$\mathrm{grad}f(0,0,0)=(2x+y+3,4y+x-2,6z-6)|_{(0,0,0)}=(3,-2,-6)$

$\mathrm{grad}f(1,1,1)=(2x+y+3,4y+x-2,6z-6)|_{(1,1,1)}=(6,3,0)$

6．问函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值.

解：沿梯度方向的方向的方向导数最大

$$\mathrm{grad}u(1,-2,2)=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})|_{(1,-2,2)}=(y^2z,2xyz,xy^2)|_{(1,-2,2)}=(8,-8,4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{max}=|\mathrm{grad}u(1,-2,2)|=\sqrt{64+64+16}=12$$

第八节　多元函数的极值及其求法

本节主要概念，定理，公式和重要结论

1. 极大（小）值问题

必要条件.　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极值且可偏导，则

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0.$$

使偏导数等于零的点 (x_0,y_0) 称为 f 的驻点（或稳定点）. 驻点与不可偏导点都是可疑极值点，还须用充分条件检验.

充分条件.　设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内是 $C^{(2)}$ 类函数，驻点 $(x_0,y_0)\in D$，记

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0),$$

（1）当 $\Delta=AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极值，且 $A>0\,(<0)$ 是极小（大）值;

（2）当 $\Delta<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值;

（3）当 $\Delta=0$ 时，还需另作判别.

2. 最大（小）值问题

首先找出 $f(x,y)$ 在 D 上的全部可疑极值点（设为有限个），算出它们的函数值，并与 D 的边界上 f 的最大. 最小值进行比较，其中最大、最小者即为 f 在 D 上的最大、最小值.

对于应用问题，若根据问题的实际意义，知目标函数 $f(x,y)$ 在 D 内一定达到最大（小）值，而在 D 内 $f(x,y)$ 的可疑极值点唯一时，无须判别，可直接下结论：该点的函数值即为 f 在 D

内的最大（小）值.

3. 条件极值（拉格朗日乘子法）

求目标函数$z=f(x,y)$在约束方程$\varphi(x,y)=0$下的条件极值，先作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

然后解方程组$L_x=0$, $L_y=0$, $L_\lambda=0$，则可求得可疑极值点(x_0,y_0).

对于二元以上的函数和多个约束条件，方法是类似的。

习题　8—8

1．求下列函数的极值

（1）$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

解：$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$

$$A=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=e^{2x}(4x+4y^2+8y+3)=e, B=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=4e^{2x}(y+1)=0,$$

$$C=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=2e^{2x}=2e，\ B^2-AC=-2e^2<0, A=e>0$$

故$f(x,y)$在$(\frac{1}{2},-1)$处取得极大值$f(\frac{1}{2},-1)=e(\frac{1}{2}+1-2)=-\frac{1}{2}e$

（2）$f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$

解：$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy-6x=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2+3y^2-6y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(y-1)=0\\ x^2+y^2-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0,2\end{cases},\begin{cases}x=1,-1\\ y=1\end{cases}$

可疑极值点有四个，即$O(0,0), A(0,2), B(1,1), C(-1,1)$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=6y-6,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=6x,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=6y-6$$

点	$O(0,0)$	$A(0,2)$	$B(1,1)$	$C(-1,1)$
A	-6	6	0	0
B	0	0	6	-6
C	-6	6	0	0
B^2-AC	-36	-36	36	36
是否极值点	极大值点	极小值点	不是	不是

$f(0,0)=2, f(0,2)=8-12+2=-2$

2．求下列函数在约束方程下的最大值与最小值

（1）$f(x,y)=2x+y,\quad x^2+4y^2=1$

解：令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+4y^2-1)=2x+y+\lambda(x^2+4y^2-1)$

$$\begin{cases}F_x(x,y,\lambda)=2+2\lambda x=0\\F_y(x,y,\lambda)=1+8\lambda y=0\\F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8y\\x^2+4y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8y\\68y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\\y=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{34}\end{cases}$$

$f(\dfrac{4\sqrt{17}}{17},\dfrac{\sqrt{17}}{34})=\dfrac{8\sqrt{17}}{17}+\dfrac{\sqrt{17}}{34}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 最大值

$f(-\dfrac{4\sqrt{17}}{17},-\dfrac{\sqrt{17}}{34})=-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}-\dfrac{\sqrt{17}}{34}=-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 最小值

（2） $f(x,y,z)=xyz,\quad x^2+2y^2+3z^2=6$

解：令 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+2y^2+3z^2-6)$

$$\begin{cases}F_x(x,y,z,\lambda)=yz+2\lambda x=0\\F_y(x,y,z,\lambda)=xz+4\lambda y=0\\F_z(x,y,z,\lambda)=xy+6\lambda z=0\\F_\lambda(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2y^2=3z^2\\x^2+2y^2+3z^2-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2\\y^2=1\\z^2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

最大值 $f(x,y,z)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，最小值 $f(x,y,z)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

3．从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解：令 $F(x,y,\lambda)=x+y+l+\lambda(l^2-x^2-y^2)$

$$\begin{cases}F_x(x,y,\lambda)=1-2\lambda x=0\\F_y(x,y,\lambda)=1-2\lambda y=0\\F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-l^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x^2+y^2-l^2=0\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}l$$

所以当直角三角形的两直角边 $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$ 时，该直角三角形的周长最大，且为

$s=x+y+l=(1+\sqrt{2})l$

4．求两曲面 $z=x^2+2y^2,\ z=6-2x^2-y^2$ 交线上的点与 xoy 面距离最小值.

解：设两曲面 $z=x^2+2y^2,\ z=6-2x^2-y^2$ 交线上的点为 $P(x,y,z)$，由题意可得

$\min d=|z|$

s.t. $z=x^2+2y^2$

$\quad z=6-2x^2-y^2$

令 $F(x,y,z,\lambda,u)=z^2+\lambda(z-x^2-2y^2)+u(z+2x^2+y^2-6)$

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda,u) = -2\lambda x + 4ux = 0 \\ F_y(x,y,z,\lambda,u) = -4\lambda y + 2uy = 0 \\ F_z(x,y,z,\lambda,u) = 2z + \lambda + u = 0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u) = z - x^2 - 2y^2 = 0 \\ F_u(x,y,z,\lambda,u) = z + 2x^2 + y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 2u)x = 0 \\ (2\lambda - u)y = 0 \\ F_z(x,y,z,\lambda,u) = 2z + \lambda + u = 0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u) = z - x^2 - 2y^2 = 0 \\ F_u(x,y,z,\lambda,u) = z + 2x^2 + y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$当x=0时,\begin{cases} (2\lambda - u)y = 0 \\ 2z + \lambda + u = 0 \\ z = y^2 \\ z = 6 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}，当\lambda = 2u \neq 0时,\begin{cases} y = 0 \\ 2z + 3u = 0 \\ z = x^2 \\ z = 6 - 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ z = 2 \end{cases},$$

$$当\lambda = 2u = 0时,\begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases} 与z = 6 - 2x^2 - y^2矛盾$$

$$当y=0时,\Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 2u)x = 0 \\ 2z + \lambda + u = 0 \\ z = x^2 \\ z = 6 - 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ z = 2 \end{cases}，当2\lambda = u \neq 0时,\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = 4 \end{cases}$$

$$当2\lambda = u = 0时,\begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases} 与z + 2x^2 + y^2 - 6 = 0矛盾$$

所以当 $x = \pm\sqrt{2}, y = 0, z = 2$ 时，$P(x,y,z)$ 到 xoy 面的距离最短。

5．求抛物线 $y = x^2$ 到直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

解：设抛物线 $y = x^2$ 上任一点 $P(x,y)$ 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为 d，则

$$\min d = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}} \quad \text{s.t. } y = x^2$$

令 $F(x,y,\lambda) = (x - y - 2)^2 + \lambda(y - x^2)$

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2(x - y - 2) - 2\lambda x = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = -2(x - y - 2) + \lambda = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

所以，点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为 d 为最小，且 $d = \dfrac{7\sqrt{2}}{8}$

6．求表面积为 1500cm^2，全部棱长之和为 200cm 的长方体体积的最大值和最小值.

解：设长方体的三条棱长分别为 x, y, z，由题意可知， $x + y + z = 50, xy + yz + zx = 750$

$V = xyz$

令 $F(x,y,z,\lambda,u) = xyz + \lambda(x + y + z - 50) + u(xy + yz + zx - 750)$

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda,u)=yz+\lambda+u(y+z)=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda,u)=xz+\lambda+u(x+z)=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda,u)=xy+\lambda+u(x+y)=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u)=x+y+z-50=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u)=xy+yz+zx-750=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)(z+u)=0 \\ (z-y)(x+u)=0 \\ xy+\lambda+u(x+y)=0 \\ x+y+z-50=0 \\ xy+yz+zx-750=0 \end{cases}$$

当 $y=x$ 时，

$$\begin{cases} (z-y)(x+u)=0 \\ x^2+\lambda+2ux=0 \\ 2x+z-50=0 \\ x^2+2zx-750=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z-y)(x+u)=0 \\ x^2+\lambda+2ux=0 \\ z=50-2x \\ 3x^2-100x+750=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z-y)(x+u)=0 \\ x^2+\lambda+2ux=0 \\ z=50-2x \\ x=\dfrac{100\pm10\sqrt{10}}{6}=\dfrac{50\pm5\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

所以当 $\begin{cases} x=y=\dfrac{50\pm5\sqrt{10}}{3} \\ z=\dfrac{50\mp10\sqrt{10}}{3} \end{cases}$ 时，V 有最大和最小值，即

$$V=(\frac{50\pm5\sqrt{10}}{3})^2\frac{50\mp10\sqrt{10}}{3}=\frac{250}{27}(10\pm\sqrt{10})^2(5\mp\sqrt{10})=\frac{250}{27}(350\mp10\sqrt{10})$$

7．抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解：曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 上任一点 $P(x,y,z)$ 到坐标原点的距离为 d，则

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{s.t.}\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

令 $F(x,y,z,\lambda,u)=(x^2+y^2+z^2)+\lambda(x^2+y^2-z)+u(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda,u)=2x+2\lambda x+u=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda,u)=2y+2\lambda y+u=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda,u)=2z-\lambda+u=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u)=x^2+y^2-z=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda,u)=x+y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\lambda)(x-y)=0 \\ 2y+2\lambda y+u=0 \\ 2z-\lambda+u=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

当 $\lambda=-1$ 时，$\begin{cases} u=0 \\ z=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2=-\dfrac{1}{2} \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ 矛盾，所以 $\lambda\neq-1$，即 $x=y$，代入得

$$\begin{cases} 2x^2 = z \\ 2x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

所以 $x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}$，即

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z + z^2} = \sqrt{2 \mp \sqrt{3} + (2 \mp \sqrt{3})^2} = \sqrt{9 \mp 5\sqrt{3}}$$

习题 9−1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D, 薄板上分布有密度为$\mu=\mu(x, y)$的电荷, 且$\mu(x, y)$在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上全部电荷 Q.

解 板上的全部电荷应等于电荷的面密度$\mu(x, y)$在该板所占闭区域 D 上的二重积分

$$Q=\iint_D \mu(x,y)d\sigma .$$

2. 设$I_1=\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, -2\leq y\leq 2\}$;

又$I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2=\{(x, y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 的关系.

解 I_1 表示由曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 与平面 $x=\pm1, y=\pm2$ 以及 $z=0$ 围成的立体 V 的体积.

I_2 表示由曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 与平面 $x=0, x=1, y=0, y=2$ 以及 $z=0$ 围成的立体 V_1 的体积.

显然立体 V 关于 yOz 面、xOz 面对称, 因此 V_1 是 V 位于第一卦限中的部分, 故

$$V=4V_1，即 I_1=4I_2.$$

3. 利用二重积分的定义证明:

(1) $\iint\limits_D d\sigma=\sigma$ (其中σ为 D 的面积);

证明　由二重积分的定义可知,

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第 i 个小闭区域的面积.

此处 $f(x, y)=1$，因而 $f(\xi, \eta)=1$，所以,

$$\iint\limits_D d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\sigma .$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ (其中 k 为常数);

证明 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}k\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma .$$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$,

其中 $D=D_1\cup D_2$, D_1、D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证明 将 D_1 和 D_2 分别任意分为 n_1 和 n_2 个小闭区域$\Delta\sigma_{i_1}$和$\Delta\sigma_{i_2}$, $n_1+n_2=n$，作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{i_1=1}^{n_1}f(\xi_{i_1},\eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1}+\sum_{i_2=1}^{n_2}f(\xi_{i_2},\eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2} .$$

令各$\Delta\sigma_{i_1}$和$\Delta\sigma_{i_2}$的直径中最大值分别为λ_1和λ_2，又

λ=max$(\lambda_1\lambda_2)$，则有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i_1=1}^{n_1} f(\xi_{i_1},\eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1}+\lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i_2=1}^{n_2} f(\xi_{i_2},\eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2},$$

即
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质，比较下列积分大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴, y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

解　区域 D 为: $D=\{(x, y)|0\le x, 0\le y, x+y\le 1\}$，因此当 $(x, y)\in D$ 时，有 $(x+y)^3\le(x+y)^2$，从而

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma\le\iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成;

解　区域 D 如图所示，由于 D 位于直线 $x+y=1$ 的上方，所以当 $(x, y)\in D$ 时, $x+y\ge 1$，从而 $(x+y)^3\ge(x+y)^2$，因而

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma\le\iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三角顶点分别为(1, 0), (1, 1), (2, 0);

解　区域 D 如图所示，显然当 $(x, y)\in D$ 时, $1\le x+y\le 2$，从而 $0\le\ln(x+y)\le 1$，故有

$$[\ln(x+y)]^2\le \ln(x+y),$$

因而 $$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \ge \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)|3\le x\le 5. 0\le y\le 1\}$.

解 区域 D 如图所示，显然 D 位于直线 $x+y=e$ 的上方，故当$(x, y)\in D$ 时, $x+y\ge e$，从而

$$\ln(x+y)\ge 1,$$

因而 $$[\ln(x+y)]^2\ge \ln(x+y),$$

故 $$\iint_D \ln(x+y) d\sigma \le \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma.$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint_D xy(x+y) d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$;

解 因为在区域 D 上 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，所以

$$0\le xy\le 1, 0\le x+y\le 2,$$

进一步可得

$$0\le xy(x+y)\le 2,$$

于是 $$\iint_D 0 d\sigma \le \iint_D xy(x+y) d\sigma \le \iint_D 2 d\sigma,$$

即 $$0\le \iint_D xy(x+y) d\sigma \le 2.$$

(2) $I=\iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$;

解 因为 $0\le \sin^2 x\le 1, 0\le \sin^2 y\le 1$，所以 $0\le \sin^2 x\sin^2 y\le 1$. 于是

$$\iint_D 0 d\sigma \le \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \le \iint_D 1 d\sigma,$$

即 $$0\le\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma\le\pi^2.$$

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$;

解 因为在区域 D 上, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, 所以 $1\le x+y+1\le 4$, 于是

$$\iint\limits_D d\sigma\le\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma\le\iint\limits_D 4d\sigma,$$

即 $$2\le\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma\le 8.$$

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ x^2+y^2\le 4\}$.

解 在 D 上, 因为 $0\le x^2+y^2\le 4$, 所以

$$9\le x^2+4y^2+9\le 4(x^2+y^2)+9\le 25.$$

于是 $$\iint\limits_D 9d\sigma\le\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma\le\iint\limits_D 25d\sigma,$$

$$9\pi 2^2\le\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma\le 25\cdot\pi\cdot 2^2,$$

即 $$36\pi\le\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma\le 100\pi.$$

习题 9−2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ |x|\le 1, |y|\le 1\}$;

解 积分区域可表示为 D: $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$. 于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dy=\int_{-1}^{1}[x^2y+\frac{1}{3}y^3]_{-1}^{1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{1}{3})dx=[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域:

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2-x$. 于是

$$\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}dx$$

$$=\int_0^2(4+2x-2x^2)dx=[4x+x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^2=\frac{20}{3}.$$

(3) $\iint\limits_D(x^3+3x^2y+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$;

解 $\iint\limits_D(x^3+3x^2y+y^3)d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx=\int_0^1[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x]_0^1dy$

$$=\int_0^1(\frac{1}{4}+y+y^3)dy=[\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中 D 是顶点分别为(0, 0), (π, 0), 和(π, π)的三角形闭区域.

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le\pi$, $0\le y\le x$. 于是,

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^\pi xdx\int_0^x\cos(x+y)dy=\int_0^\pi x[\sin(x+y)]_0^x dx$$

$$=\int_0^\pi x(\sin 2x-\sin x)dx=-\int_0^\pi xd(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)$$

$$=-x(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)|_0^\pi+\int_0^\pi(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)dx=-\frac{3}{2}\pi.$$

.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}dy=\int_0^1 x[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1(\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}-\frac{2}{3}x^4)dx=\frac{6}{55}.$$

(2) $\iint\limits_D xy^2d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ -2\le y\le 2,\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\iint\limits_D xy^2d\sigma\int_{-2}^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}xy^2dx=\int_{-2}^2[\frac{1}{2}x^2y^2]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$=\int_{-2}^2(2y^2-\frac{1}{2}y^4)dy=[\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{10}y^5]_{-2}^2=\frac{64}{15}.$$

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)|\ |x|+|y|\le 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y)|\ -1\le x\le 0,\ -x-1\le y\le x+1\}\cup\{(x, y)|\ 0\le x\le 1,\ x-1\le y\le -x+1\}.$$

于是

$$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma=\int_{-1}^0 e^xdx\int_{-x-1}^{x+1}e^ydy+\int_0^1 e^xdx\int_{x-1}^{-x+1}e^ydy$$

$$=\int_{-1}^{0}e^x[e^y]_{-x-1}^{x+1}dx+\int_{0}^{1}e^x[e^y]_{x-1}^{-x+1}dy=\int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})dx+\int_{0}^{1}(e-e^{2x-1})dx$$

$$=[\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x]_{-1}^{0}+[ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}]_{0}^{1}=e-e^{-1}.$$

(4) $\iint\limits_D(x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le y\le 2,\ \frac{1}{2}y\le x\le y\}$. 于是

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)d\sigma=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx=\int_0^2[\frac{1}{3}x^3+y^2x-\frac{1}{2}x^2]_{\frac{y}{2}}^{y}dy$$

$$=\int_0^2(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2)dy=\frac{13}{6}.$$

3. 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的被积函数 $f(x, y)$是两个函数 $f_1(x)$及 $f_2(y)$的乘积, 即 $f(x, y)= f_1(x)\cdot f_2(y)$, 积分区域 $D=\{(x, y)|\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy]$$

证明 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=\int_a^b[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy]dx$,

而 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy$,

故 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b[f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy]dx$.

由于 $\int_c^d f_2(y)dy$ 的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy]$$

4. 化二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1)由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)|\,0\le x\le 4,\, x\le y\le 2\sqrt{x}\},\ 或\ D=\{(x, y)|\ \ 0\le y\le 4,\,\frac{1}{4}y^2\le x\le y\},$$

所以 $I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)dy$ 或 $I=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)dx$.

(2)由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\ge 0)$所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)|-r\le x\le r, 0\le y\le \sqrt{r^2-x^2}\},$$

或 $D=\{(x, y)|\ 0\le y\le r, -\sqrt{r^2-y^2}\le x\le \sqrt{r^2-y^2}\}$,

所以 $I=\int_{-r}^{r}dx\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy$, 或 $I=\int_{0}^{r}dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$.

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)|1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le x\},$$

或 $D=\{(x, y)|\ \frac{1}{2}\le y\le 1, -\frac{1}{y}\le x\le 2\}\cup\{(x, y)|1\le y\le 2, y\le x\le 2\}$,

所以 $I=\int_{1}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy$, 或 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx$.

(4)环形闭区域$\{(x, y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解 如图所示, 用直线$x=-1$和$x=1$可将积分区域D分成四部分, 分别记做D_1, D_2, D_3, D_4. 于是

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_3}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_4}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4,

如图所示. 于是

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_3}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_4}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

5. 设 $f(x, y)$在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b(b>a)$围成的闭区域, 证明: $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$D=\{(x, y)|a\le x\le b, a\le y\le x\}$, 或 $D=\{(x, y)|a\le y\le b, y\le x\le b\}$.

于是 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy$, 或 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

因此 $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$, 如图.
因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy.$$

(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 2, y^2\le x\le 2y\}$, 如图.
因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 4, \frac{x}{2}\le y\le\sqrt{x}\}$, 所以

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

(3) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$, 如图.
因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$, 所以

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

(4) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$;

解 由根据积分限可得积分区域$D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 2-x\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}\}$，所以

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$;

解 由根据积分限可得积分区域$D=\{(x, y)|1\le x\le e, 0\le y\le \ln x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为$D=\{(x, y)|0\le y\le 1, e^y\le x\le e\}$，所以

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$$

(6) $\int_0^\pi dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$ (其中$a\ge 0$).

解 由根据积分限可得积分区域$D=\{(x,y)|0\le x\le \pi, -\sin\frac{x}{2}\le y\le \sin x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x,y)|-1\le y\le 0, -2\arcsin y\le x\le \pi\}$$
$$\cup\{(x,y)|0\le y\le 1, \arcsin y\le x\le \pi-\arcsin y\},$$

所以 $$\int_0^\pi dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy=\int_{-1}^0 dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域D由直线$x+y=2$, $y=x$和x轴所围成，它的面密度为$\mu(x, y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

解 如图，该薄片的质量为

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$
$$=\int_0^1[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3]dy=\frac{4}{3}.$$

8. 计算由四个平面$x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$所围成的柱体被平面$z=0$及$2x+3y+z=6$截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图，所求体积为

$$V=\iint_D (6-2x-3y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy$$
$$=\int_0^1[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2]_0^1 dx=\int_0^1(\frac{9}{2}-2x)dx=\frac{7}{2}.$$

9. 求由平面$x=0$, $y=0$, $x+y=1$所围成的柱体被平面$z=0$及抛物面$x^2+y^2=6-z$截得的立体的体积.

解 立体在xOy面上的投影区域为$D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$，所求立体的体积为以曲面$z=6-x^2-y^2$为顶，以区域$D$为底的曲顶柱体的体积，即

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)dy=\frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z, 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\le 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V=\iint\limits_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=\iint\limits_D(6-3x^2-3y^2)d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dy=8\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(2-x^2)^3}dx=6\pi\,.$$

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

(1) $\{(x, y)|\ x^2+y^2\le a^2\}(a>0)$;

解积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

(2) $\{(x, y)|x^2+y^2\le 2x\}$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\cos\theta\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

(3) $\{(x, y)|\ a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$, 其中 $0<a<b$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

(4) $\{(x, y)|\ 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$.

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le\sec\theta\}\cup\{(\rho,\theta)|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le\csc\theta\},$$

所以 $$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$;

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},0\le\rho\le 2\sec\theta\},$$

所示 $$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\iint_D f(\rho)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho d\rho.$$

(3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le\rho\le 1\},$$

所以 $$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$.

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\sec\theta\tan\theta\le\rho\le\sec\theta\},$$

所以 $$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2a\cos\theta\}$, 所以

$$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=\iint_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

(2) $\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le a\sec\theta\}$, 所以

$$\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy=\iint_D \rho\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta=\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le\sec\theta\tan\theta\}$, 所以

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=\iint_D \rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan\theta d\theta=\sqrt{2}-1.$$

(4) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=\iint_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2\}$, 所以

$$\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\iint_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho=2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^4-1)=\pi(e^4-1).$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le1\}$, 所以

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \iint_D \ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\frac{1}{4}(2\ln 2-1).$$

(3) $\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 1\le\rho\le 2\}$，所以

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma = \iint_D \arctan(\tan\theta)\cdot\rho d\rho d\theta = \iint_D \theta\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta\cdot\rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi^3}{64}.$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le x\}$，所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}dy = \int_1^2 (x^3-x)dx = \frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 1\}$，所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho = \frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a(a>0)$所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x, y)|a\le y\le 3a, y-a\le x\le y\}$，所以

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx = \int_a^{3a} (2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3)dy = 14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域$\{(x, y)|\ a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$，所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线$\rho=2\theta$上一段弧$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$与直线$\theta=\frac{\pi}{2}$所围成, 它的面密度为$\mu(x, y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\theta\}$, 所以所求质量

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4 d\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0$, $y=kx(k>0)$, $z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x, y)|0\le\theta\le\arctan k, 0\le\rho\le R\}$.

$$V=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\arctan k}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{1}{3}R^3\arctan k.$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le ax\}$.

在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a\cos\theta\}$, 所以

$$V=\iint_{x^2+y^2\le ax}(x^2+y^2)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{32}a^4\pi.$$

习题 9−3

1. 化三重积分$I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$为三次积分, 其中积分区域$\Omega$分别是:

(1)由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)| 0\le z\le xy, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$.

(2)由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le z\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\}$,

于是 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$.

(3)由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+2y^2\le z\le 2-x^2, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\}$,

于是 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$.

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4)由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解　曲积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le\frac{xy}{c},0\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a\},$$

于是　$$I=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)dz.$$

提示: 区域Ω的上边界曲面为曲面 $cz=xy$，下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域$\Omega=\{(x, y, z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$, 在点$(x, y, z)$处的密度为$\rho(x, y, z)=x+y+z$, 计算该物体的质量.

解　$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})dy$$

$$=\int_0^1[xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y]\Big|_0^1 dx=\int_0^1(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$的被积函数$f(x, y, z)$是三个函数$f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$的乘积, 即$f(x, y, z)= f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, 积分区域$\Omega=\{(x, y, z)|a\le x\le b, c\le y\le d, l\le z\le m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz.$$

证明　$$\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b[\int_c^d(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)dz)dy]dx$$

$$=\int_a^b[\int_c^d(f_1(x)f_2(y)\int_l^m f_3(z)dz)dy]dx=\int_a^b[(f_1(x)\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)]dx$$

$$=\int_a^b[(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)f_1(x)]dx=(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)\int_a^b f_1(x)dx$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz.$$

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3dxdydz$, 其中Ω是由曲面$z=xy$, 与平面$y=x$, $x=1$和$z=0$所围成的闭区域.

解　积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le xy, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$,

于是　$$\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2[\frac{z^4}{4}]_0^{xy}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^5dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}.$$

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中Ω为平面$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$所围成的四面体.

解　积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$

$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$.

提示: $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}]_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy$

$=\int_0^1[\frac{1}{-2(1+x+y)}-\frac{1}{8}y]_0^{1-x}dx=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$

$=[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$.

6. 计算$\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz$, 其中$\Omega$为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1\}$

于是 $\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyzdz$

$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy=\int_0^1\frac{1}{8}x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}$.

7. 计算$\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz$, 其中$\Omega$是由平面$z=0$, $z=y$, $y=1$以及抛物柱面$y=x^2$所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le y, x^2\le y\le 1, -1\le x\le 1\}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz=\int_{-1}^1 xdx\int_{x^2}^1 dy\int_0^y zdz=\int_{-1}^1 xdx\int_{x^2}^1\frac{1}{2}y^2dy$

$=\frac{1}{6}\int_{-1}^1 x(1-x^6)dx=0$.

8. 计算$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$, 其中$\Omega$是由锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$与平面 $z=h$($R>0$, $h>0$)所围成的闭区域.

解 当 $0\le z\le h$ 时, 过$(0, 0, z)$作平行于 xOy 面的平面, 截得立体Ω的截面为圆 D_z:

$x^2+y^2=(\frac{R}{h}z)^2$，故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h}z$，面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^h zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3dz=\frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中Ω是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le1,\ \rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$
$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$
$$=\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^5)d\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中Ω是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le2,\ \frac{\rho^2}{2}\le z\le2,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2dz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta=\frac{16}{3}\pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le1,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^4\cdot\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1r^4dr=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中闭区域Ω由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$, $x^2+y^2\le z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le2a\cos\varphi,$$

于 是
$$\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4d\varphi$$

$$=8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xydv$, 其中Ω为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le1, 0\le z\le1,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}xydv=\iiint\limits_{\Omega}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^1dz=\frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega}xydv=\int_0^1xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy\int_0^1dz=\int_0^1xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\int_0^1(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2})dx$$

$$=[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}]_0^1=\frac{1}{8}.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$, 其中Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\cos\varphi,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{\pi}{10}.$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中Ω是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2, \frac{5}{2}\rho\le z\le5,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5dz$$

$$=2\pi\int_0^2\rho^3(5-\frac{5}{2}\rho)d\rho=8\pi.$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中闭区域Ω由不等式 $0<a\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le A$, $z\ge0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, a\le r\le A,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_a^A r^4dr=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1)$z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \rho\le z\le 6-\rho^2,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^2(6\rho-\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{32}{3}\pi.$$

(2)$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$及 $x^2+y^2=z^2$(含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 2a\cos\varphi,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\pi a^3.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 1, \rho^2\le z\le\rho,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}dz=2\pi\int_0^1(\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{\pi}{6}.$$

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \frac{1}{4}\rho^2\le z\le\sqrt{5-\rho^2},$$

于是 $$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^2\rho(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4})d\rho=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

解　密度函数为 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le R,$$

于是 $$M=\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R kr\cdot r^2dr=k\pi R^4 .$$

习题 9−4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解　位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

由曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

于是 $$A=2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta=2a^2(\pi-2) .$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分的曲面的面积.

解　由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z^2=2x$ 两式消 z 得 $x^2+y^2=2x$, 于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\le 2x$.

由曲面方程 $\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

于是 $$A=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}dxdy=\sqrt{2}\pi .$$

3. 求底面半径相同的两个直交柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解　设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应于区域 D: $x^2+y^2\le R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A=4A_1$.

$$A=4\iint\limits_{D}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=4\iint\limits_{D}\sqrt{1+(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}})^2+0^2}dxdy$$

$$=4\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=4R\int_{-R}^{-R}dx\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dy=8R\int_{-R}^{-R}dx=16R^2 .$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1)D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

解　令密度为$\mu=1$.

因为区域 D 可表示为 $0\le x\le x_0, 0\le y\le\sqrt{2px}$, 所以

$$A=\iint\limits_{D}dxdy=\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}dx=\frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3} ,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}xdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}x\sqrt{2px}dx=\frac{3}{5}x_0,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}ydy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}pxdx=\frac{3}{8}y_0,$$

所求质心为$(\frac{3}{5}x_0,\frac{3}{8}y_0)$

(2)D 是半椭圆形闭区域$\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1, y\geq 0\}$;

解 令密度为$\mu=1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以$\bar{x}=0$.

$$A=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\pi ab \text{ (椭圆的面积)},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}ydy=\frac{1}{A}\cdot\frac{b^2}{2a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为$(0,\frac{4b}{3\pi})$.

(3)D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta(0<a<b)$之间的闭区域.

解 令密度为$\mu=1$. 由对称性可知$\bar{y}=0$.

$$A=\iint\limits_D dxdy=\pi(\frac{b}{2})^2-\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2) \text{ (两圆面积的差)},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xdxdy=\frac{2}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot dr=\frac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)},$$

所求质心是$(\frac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)},0)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成, 它在点(x, y)处的面密度$\mu(x, y)=x^2y$, 求该薄片的质心.

解 $M=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}x^2ydy=\int_0^1\frac{1}{2}(x^4-x^6)dx=\frac{1}{35}$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}x^3ydy=\frac{1}{M}\int_0^1\frac{1}{2}(x^5-x^7)dx=\frac{35}{48},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}x^2y^2dy=\frac{1}{M}\int_0^1\frac{1}{3}(x^5-x^8)dx=\frac{35}{54},$$

质心坐标为$(\frac{35}{48},\frac{35}{54})$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a, 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 建立坐标系, 使薄片在第一象限, 且直角边在坐标轴上. 薄片上点(x, y)处的函数为$\mu=x^2+y^2$. 由对称性可知$\bar{x}=\bar{y}$.

$$M=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{6}a^4,$$

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D x\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy=\frac{2}{5}a\,,$$

薄片的质心坐标为$(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心(设密度ρ=1):

(1)$z^2=x^2+y^2$, z=1;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故$\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V=\iiint_\Omega dv=\frac{1}{3}\pi \text{ (圆锥的体积)},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega zdv=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz=\frac{3}{4}\,,$$

所求立体的质心为$(0, 0, \frac{3}{4})$.

(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (A>a>0), z=0;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故$\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V=\iiint_\Omega dv=\frac{2}{3}\pi A^3-\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi(A^3-a^3) \text{ (两个半球体体积的差)},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega r^3\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi d\theta=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^A r^3dr=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\,,$$

所求立体的质心为$(0, 0, \frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)})$.

(3)$z=x^2+y^2$, $x+y=a$, x=0, y=0, z=0.

解 $$V=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^a[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]dx=\frac{1}{6}a^4\,,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega xdv=\frac{1}{V}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4}=\frac{2}{5}a\,,$$

$$\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a\,,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega zdv=\frac{1}{V}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\frac{7}{30}a^2\,,$$

所以立体的重心为$(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2)$.

8. 设球体占有闭区域$\Omega=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\leq 2Rz\}$, 它在内部各点的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

解 球体密度为$\rho=x^2+y^2+z^2$. 由对称性可知质心在 z 轴上, 即$\bar{x}=\bar{y}=0$.

在球面坐标下Ω可表示为：$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 2R\cos\varphi$，于是

$$M=\iiint_{\Omega}\rho dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}R^5\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho z dv=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5dr$$

$$=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}R^6\sin\varphi\cos^7\varphi d\varphi=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi r^5}=\frac{5}{4}R,$$

故球体的质心为$(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量:

(1) $D=\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$，求 I_y;

解 积分区域 D 可表示为

$$-a\le x\le a, -\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2}\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2},$$

于是 $$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_{-a}^a x^2dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=\frac{2b}{a}\int_{-a}^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^3b.$$

提示: $\int_{-a}^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{\pi}{8}a^4$.

(2)D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 x=2 所围成，求 I_x 和 I_y;

解 积分区域可表示为

$$0\le x\le 2, -3\sqrt{x/2}\le y\le 3\sqrt{x/2},$$

于是 $$I_x=\iint_D y^2dxdy=\int_0^2 dx\int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}}y^2dy=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{72}{5},$$

$$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_0^2 x^2dx\int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}}dy=\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^2 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{96}{7}.$$

(3)D 为矩形闭区域$\{(x, y)|0\le x\le a, 0\le y\le b\}$，求 I_x 和 I_y.

解 $$I_x=\iint_D y^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^b y^2dy=a\cdot\frac{1}{3}b^3=\frac{ab^3}{3},$$

$$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_0^a x^2dx\int_0^b dy=\frac{1}{3}a^3\cdot b=\frac{a^3b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量μ)的长和宽分别为 b 和 h, 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x=\iint_D y^2\mu dxdy=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2dy=\frac{1}{12}\mu bh^3,$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu dxdy=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}dy=\frac{1}{12}\mu hb^3.$$

11. 一均匀物体(密度ρ为常量)占有的闭区域Ω由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成,

(1)求物体的体积;

解 由对称可知

$$V=4\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}dz$$
$$=4\int_0^a dx\int_0^a(x^2+y^2)dy=4\int_0^a(ax^2+\frac{a^3}{3})dx=\frac{8}{3}a^4.$$

(2)求物体的质心;

解 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega \rho z dv=\frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}zdz$$
$$=\frac{2}{V}\int_0^a dx\int_0^a(x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$
$$=\frac{2}{V}\int_0^a(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{a^5}{5})dx=\frac{7}{15}a^2.$$

(3)求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 $$I_z=\iiint_\Omega \rho(x^2+y^2)dv=4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$$
$$=4\rho\int_0^a dx\int_0^a(x^4+2x^2y^2+y^4)dy=4\rho\frac{28}{45}a^6=\frac{112}{45}\rho a^6.$$

12. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度ρ=1).

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho dv=\iiint_\Omega r^3drd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr\int_0^h dz=\frac{1}{2}\pi ha^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)|R_1\le\sqrt{x^2+y^2}\le R_2, x\ge 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)(a>0)$处单位质量

的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

解 引力 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_y=0$, 而

$$F_x=G\iint\limits_D\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\cdot\rho d\rho$$

$$=2G\mu[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}],$$

$$F_z=-Ga\iint\limits_D\frac{\mu d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=-Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=\pi Ga\mu[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}].$$

14. 设均匀柱体密度为ρ, 占有闭区域$\Omega=\{(x, y, z)|x^2+y^2\leq R^2, 0\leq z\leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)(a>h)$处单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知, 沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故 $F_x=F_y=0$, 而

$$F_z=\iiint\limits_\Omega G\rho\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}dv$$

$$=G\rho\int_0^h(a-z)dz\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{dxdy}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_0^h(a-z)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{rdr}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi G\rho\int_0^h(a-z)[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}]dz$$

$$=2\pi G\rho[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

总习题九

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1)设有空间闭区域

$\Omega_1=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\leq R^2, z\geq 0\}$,

$\Omega_2=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$,

则有________.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}xdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}xdv$; (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}ydv=4\iiint\limits_{\Omega_2}ydv$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}zdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}zdv$; (D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyzdv$.

解 (C).

提示: $f(x, y, z)=x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域Ω_1上的三重积分为零, 而在Ω_2上的三重积分不为零, 所以(A)是错的. 类似地, (B)和(D)也是错的.

$f(x, y, z)=z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域Ω_1上的三重积分可以化为Ω_1在第一卦部分Ω_2上的三重积分的四倍.

(2)设有平面闭区域 $D=\{(x, y)|-a\le x\le a, x\le y\le a\}$, $D_1=\{(x, y)|0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$________.

$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$; $(B)\ 2\iint\limits_{D_1}xydxdy$; $(C)\ 4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$; $(D)0$.

解 (A).

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(1+x)\sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为(0, 0), (1, 0), (1, 2)和(0, 1)的梯形闭区域;

解 积分区域可表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x+1\}$, 于是

$$\iint\limits_D(1+x)\sin y d\sigma=\int_0^1(1+x)dx\int_0^{x+1}\sin y dy=\int_0^1(1+x)[1-\cos(x+1)]dx$$

$$=\frac{3}{2}+\cos 1+\sin 1-\cos 2-2\sin 2.$$

(2) $\iint\limits_D(x^2-y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi\}$;

解 $$\iint\limits_D(x^2-y^2)d\sigma=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)dy=\int_0^\pi(x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)dx$$

$$=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

(3) $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le R\cos\theta,$$

于是 $$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{r\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)d\theta=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{1}{9}(3\pi-4)R^3.$$

(4) $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le R^2\}$.

解 因为积分区域 D 关于 x 轴、y 轴对称, 所以

$$\iint\limits_D 3xd\sigma=\iint\limits_D 6yd\sigma=0.$$

$$\iint\limits_D 9d\sigma=9\iint\limits_D d\sigma=9\pi R^2.$$

因为 $$\iint\limits_D y^2d\sigma=\iint\limits_D x^2d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma,$$

所以 $$\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma=9\pi R^2+\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$$

$$=9\pi R^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2\cdot\rho d\rho=9\pi R^2+\frac{\pi}{4}R^4.$$

3. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx$;

解 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 4,-\sqrt{4-y}\le x\le\frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x, y)|-2\le x\le 0,\ 2x+4\le y\le -x^2+4\},$$

所以 $$\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx=\int_{-2}^0 dx\int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x,y)dy.$$

(2) $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$;

解 积分区域为

$$D=\{(x, y)|0\le y\le 1,\ 0\le x\le 2y\}\cup\{(x, y)|1\le y\le 3,\ 0\le x\le 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\frac{1}{2}x\le y\le 3-x\},$$

所以 $$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy.$$

(3) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

解 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,0\le x\le y^2\}\cup\{(x,y)\,|\,1\le y\le 2,0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\},$$

所以 $$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx.$$

4. 证明:

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx.$$

证明 积分区域为

$$D=\{(x, y)|0\le y\le a,\ 0\le x\le y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x, y)|0\le x\le a,\ x\le y\le a\},$$

所以 $$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx.$$

5. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D=\{(x,\ y)|x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1\}$.

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D=D_1+D_2+D_3$,

其中 $D_1: 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le\tan\theta\sec\theta$,

$D_2: \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}, 0\le\rho\le\csc\theta$,

$D_3: \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi, 0\le\rho\le\tan\theta\sec\theta$,

所以 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

6. 把积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 化为三次积分, 其中积分区域Ω是由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

Ω: $0\le z\le x^2+y^2$, $x^2\le y\le 1$, $-1\le x\le 1$,

所以 $$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz\,.$$

7. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$, 其中Ω是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分;

解 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2\le(\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2$,

在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}R, R-\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le R\sqrt{R^2-\rho^2}\,,$$

所以 $$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}d\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z^2\rho dz$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3]\rho d\rho=\frac{59}{480}\pi R^5\,.$$

(2) $\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv$, 其中Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域Ω关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数,

所以 $$\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv=0\,.$$

(3) $\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)dv$, 其中Ω是由 xOy 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2+z^2=2x$. 由曲面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域Ω在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}: y^2+z^2\leq(\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}: 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\rho\leq\sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2\leq x\leq 5,$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{5}\rho^2\cdot\rho dx$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3(5-\frac{1}{2}\rho^2)d\rho=\frac{250}{3}\pi.$$

8. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\},$$

于是 $$A=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}ab\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}.$$

9. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设所求矩形另一边的长度为 H, 建立坐标系, 使半圆的直径在 x 轴上, 圆心在原点. 不妨设密度为 $\rho=1\text{g/cm}^3$.

由对称性及已知条件可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$, 即

$$\iint\limits_D ydxdy=0,$$

从而 $$\int_{-R}^{R}dx\int_{-H}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=0,$$

即 $$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}[(R^3-x^2)-H^2]dx=0,$$

亦即 $$R^3-\frac{1}{3}R^2-RH^2=0,$$

从而 $$H=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

因此, 接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为 $\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

10. 求曲抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解 抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成区域可表示为

$D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq 1\}$,

所求转动惯量为

$$I=\iint_D \mu(y+1)^2dxdy=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y+1)^2dy=\frac{1}{3}\mu\int_{-1}^{1}[8-(x^2+1)^3]dx=\frac{368}{105}\mu\ .$$

11. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le R^2, y\ge 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P, $OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 设 P 点的坐标为$(0, 0, a)$. 薄片的面密度为 $\mu=\frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于 y 轴对称, 所以引力在 x 轴上的分量 $F_x=0$, 而

$$F_y=G\iint_D\frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma=m\mu G\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho^2\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$=m\mu G\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho=2m\mu G\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$=\frac{4GmM}{\pi R^2}(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}})\ ,$$

$$F_z=-G\iint_D\frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma=-m\mu Ga\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$=-\pi m\mu Ga\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho=-\frac{2GmM}{R^2}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}})\ .$$

习题 10–1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L, 在点(x, y)处它的线密度为 $\mu(x, y)$, 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1)这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y;

(2)这曲线弧的重心坐标 $\bar{x}$, $\bar{y}$.

解 在曲线弧 L 上任取一长度很短的小弧段 ds(它的长度也记做 ds), 设(x, y)为小弧段 ds 上任一点.

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素分别为

$$dI_x=y^2\mu(x, y)ds,\ dI_y=x^2\mu(x, y)ds\ .$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\int_L y^2\mu(x,y)ds\ ,\quad I_y=\int_L x^2\mu(x,y)ds\ .$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的静矩元素分别为

$$dM_x=y\mu(x, y)ds,\ dM_y=x\mu(x, y)ds\ .$$

曲线 L 的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L\mu(x,y)ds},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L\mu(x,y)ds}\ .$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明: 如果曲线弧 L 分为两段光滑曲线 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds\,.$$

证明 划分 L, 使得 L_1 和 L_2 的连接点永远作为一个分点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\sum_{i=n_1+1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\,.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$, 上式两边同时取极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=n_1+1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\,,$$

即得 $$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds\,.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$;

解 $$\oint_L (x^2+y^2)^n ds=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} a^{2n+1}dt=2\pi a^{2n+1}\,.$$

(2) $\int_L (x+y)ds$, 其中 L 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段;

解 L 的方程为 $y=1-x$ $(0\le x\le 1)$;

$$\int_L (x+y)ds=\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+[(1-x)']^2}\,dx=\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\,.$$

(3) $\oint_L x dx$, 其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

解 L_1: $y=x^2(0\le x\le 1)$, L_2: $y=x(0\le x\le 1)$.

$$\oint_L xdx=\int_{L_1} xdx+\int_{L_2} xdx$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx+\int_0^1 \sqrt{2}x dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)\,.$$

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

解 $L=L_1+L_2+L_3$, 其中

L_1: $x=x$, $y=0(0\le x\le a)$,

L_2: $x=a\cos t, y=a\sin t\ \ (0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$,

L_3: $x=x, y=x\ \ (0\le x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$,

因而 $$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds,$$

$$=\int_0^a e^x\sqrt{1^2+0^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1^2+1^2}dx$$

$$=e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2.$$

(5) $\int_\Gamma\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中$\Gamma$为曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

解 $$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt$$

$$=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+e^{2t}}dt=\sqrt{3}e^t dt,$$

$$\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^2\frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt$$

$$=\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}dt=[-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).$$

(6) $\int_\Gamma x^2yzds$, 其中Γ为折线 $ABCD$, 这里 A、B、C、D 依次为点(0, 0, 0)、(0, 0, 2)、(1, 0, 2)、(1, 3, 2);

解 $\Gamma=AB+BC+CD$, 其中

AB: $x=0, y=0, z=t\ (0\le t\le 1)$,

BC: $x=t, y=0, z=2(0\le t\le 3)$,

CD: $x=1, y=t, z=2(0\le t\le 3)$,

故 $$\int_\Gamma x^2yzds=\int_{AB}x^2yzds+\int_{BC}x^2yzds+\int_{CD}x^2yzds$$

$$=\int_0^1 0dt+\int_0^3 0dt+\int_0^3 2t\sqrt{0^2+1^2+0^2}dt=9.$$

(7) $\int_L y^2ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$;

解 $$\int_L y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{[a(t-\sin t)']^2+[a(\cos t)']^2}dt$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}dt=\frac{256}{15}a^3.$$

(8) $\int_L(x^2+y^2)ds$, 其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)(0\le t\le 2\pi)$.

解 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=atdt$

$$\int_L(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a, 中心角为 2φ的均匀圆弧(线密度μ=1)的重心.

解 建立坐标系如图 10−4 所示, 由对称性可知 $\bar{y}=0$, 又

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{2\varphi a}\int_L xds=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos\theta\cdot ad\theta=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

所以圆弧的重心为 $(\frac{a\sin\varphi}{\varphi},0)$

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$, 其中 $0\le 1\le 2\pi$, 它的线密度$\rho(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, 求:

(1)它关于 z 轴的转动惯量 I_z; (2)它的重心.

解 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\sqrt{a^2+k^2}dt$.

(1) $I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds=\int_L(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) $M=\int_L\rho(x,y,z)ds=\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

故重心坐标为 $(\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},-\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2})$.

习题 10−2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段, 证明: $\int_L P(x,y)dx=0$.

证明 设 L 是直线 $x=a$ 上由(a, b_1)到(a, b_2)的一段,
则 L: $x=a$, $y=t$, t 从 b_1 变到 b_2. 于是

$$\int_L P(x,y)dx=\int_{b_1}^{b_2} P(a,t)(\frac{da}{dt})dt=\int_{b_1}^{b_2} P(a,t)\cdot 0dt=0.$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点$(a, 0)$到$(b, 0)$的一段直线,
证明$\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x,0)dx$.

证明 L: $x=x$, $y=0$, t 从 a 变到 b, 所以

$$\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x,0)(x)'dx=\int_a^b P(x,0)dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1)$\int_L (x^2-y^2)dx$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点$(0, 0)$到点$(2, 4)$的一段弧;

解 L: $y=x^2$, x 从 0 变到 2, 所以

$$\int_L (x^2-y^2)dx=\int_0^2 (x^2-x^4)dx=-\frac{56}{15}.$$

(2)$\oint_L xydx$, 其中 L 为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

解 $L=L_1+L_2$, 其中

L_1: $x=a+a\cos t$, $y=a\sin t$, t 从 0 变到π,

L_2: $x=x$, $y=0$, x 从 0 变到 $2a$,

因此 $\oint_L xydx=\int_{L_1} xydx+\int_{L_2} xydx$

$$=\int_0^\pi a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'dt+\int_0^{2a} 0dx$$

$$=-a^3(\int_0^\pi \sin^2 tdt+\int_0^\pi \sin^2 td\sin t)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3)$\int_L ydx+xdy$, 其中 L 为圆周 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$的一段弧;

解 $\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t(-R\sin t)+R\cos tR\cos t]dt$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=0.$$

(4) $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行);

解 圆周的参数方程为: $x=a\cos t, y=a\sin t$, t 从 0 变到 2π, 所以

$$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)(a\cos t)]dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}-a^2dt=-2\pi .$$

(5) $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz$, 其中$\Gamma$为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$上对应$\theta$从 0 到$\pi$的一段弧;

解 $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz=\int_0^\pi[(k\theta)^2k+a\sin\theta(-a\sin\theta)-a\cos\theta a\cos\theta]d\theta$

$$=\int_0^\pi(k^3\theta^2-a^2)d\theta=\frac{1}{3}\pi^3k^3-\pi a^2 .$$

(6) $\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$, 其中$\Gamma$是从点(1, 1, 1)到点(2, 3, 4)的一段直线;

解 Γ的参数方程为 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t$, t 从 0 变到 1.

$$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+t+1+2t-1)]dt$$

$$=\int_0^1(6+14t)dt=13 .$$

(7) $\oint_\Gamma dx-dy+ydz$, 其中Γ为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);

解 $\Gamma=AB+BC+CA$, 其中

AB: $x=x, y=1-x, z=0$, x 从 1 变到 0,

BC: $x=0, y=1-z, z=z$, z 从 0 变到 1,

CA: $x=x, y=0, z=1-x$, x 从 0 变到 1,

故 $\oint_\Gamma dx-dy+ydz=\int_{AB}dx-dy+ydz+\int_{BC}dx-dy+ydz+\int_{CA}dx-dy+ydz$

$$=\int_0^1[1-(1-x)']dx+\int_0^1[-(1-z)'+(1-z)]dt+\int_0^1dx=\frac{1}{2} .$$

(8) $\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从(−1, 1)到(1, 1)的一段弧.

解 L: $x=x, y=x^2$, x 从−1 变到 1, 故

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]dx$$

$$=2\int_0^1 (x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}$$

4. 计算$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$, 其中 L 是:

(1)抛物线 $y=x^2$ 上从点(1, 1)到点(4, 2)的一段弧;

解 L: $x=y^2$, $y=y$, y 从 1 变到 2, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2 [(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]dy=\frac{34}{3}.$$

(2)从点(1, 1)到点(4, 2)的直线段;

解 L: $x=3y-2$, $y=y$, y 从 1 变到 2, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2 [(3y-2+y)\cdot y+(y-3y+2)\cdot 1]dy=11$$

(3)先沿直线从点(1, 1)到(1, 2), 然后再沿直线到点(4, 2)的折线;

解 $L=L_1+L_2$, 其中

L_1: $x=1$, $y=y$, y 从 1 变到 2,

L_2: $x=x$, $y=2$, x 从 1 变到 4,

故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_{L_1} (x+y)dx+(y-x)dy+\int_{L_2} (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2 (y-1)dy+\int_1^4 (x+2)dx=14.$$

(4)沿曲线 $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$ 上从点(1, 1)到(4, 2)的一段弧.

解 L: $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$, t 从 0 变到 1, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_0^1 [(3t^2+t+2)(4t+1)+(-t^2-t)\cdot 2t]dt=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成, 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段时场力所作的功.

解 已知场力为 $\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|, 0)$, 曲线 L 的参数方程为

$x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$,

θ从 0 变到$\frac{\pi}{2}$，于是场力所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L |F|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\cdot(-R\sin\theta)d\theta=-|F|R.$$

6. 设 z 轴与力方向一致，求质量为 m 的质点从位置(x_1, y_1, z_1)沿直线移到(x_2, y_2, z_2)时重力作的功.

解 已知 $\boldsymbol{F}=(0, 0, mg)$. 设$\Gamma$为从$(x_1, y_1, z_1)$到$(x_2, y_2, z_2)$的直线，则重力所作的功为

$$W=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\Gamma 0dx+0dy+mgdz=mg\int_{z_1}^{z_2}dz=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的曲线积分，其中 L 为:

(1)在 xOy 面内沿直线从点(0, 0)到(1, 1);

解 L 的方向余弦$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

故
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$
$$=\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds.$$

(2)沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到(1, 1);

解 曲线 L 上点(x, y)处的切向量为$\boldsymbol{\tau}=(1, 2x)$，单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}),$$

故
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$
$$=\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds.$$

(3)沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点(0, 0)到(1, 1).

解 L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$，其上任一点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(1,\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}),$$

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=(\sqrt{2x-x^2},1-x),$$

故 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]ds\,.$$

8. 设Γ为曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧, 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 曲线Γ上任一点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(1,\ 2t,\ 3t^2)=(1,\ 2x,\ 3y),$$

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+9y^2}}(1,2x,3y)\,,$$

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma [P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]ds$$

$$=\int_L \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds\,.$$

习题 10−3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_l (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

解 $L=L_1+L_2$, 故

$$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_{L_1} (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy+\int_{L_2} (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)2x]dx+\int_1^0[(2y^3-y^4)2y+(y^2+y^2)]dy$$

$$=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)dx-\int_0^1(-2y^5+4y^4+2y^2)dy=\frac{1}{30}\,,$$

而 $$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D(1-2x)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)dx$$

$$=\int_0^1(y^{\frac{1}{2}}-y-y^2+y^4)dy=\frac{1}{30}\,,$$

所以 $$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_l Pdx+Qdy\,.$$

(2) $\oint_l (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中 L 是四个顶点分别为(0, 0)、

(2, 0)、(2, 2)、和(0, 2)的正方形区域的正向边界.

解 $L=L_1+L_2+L_3+L_4$, 故

$$\oint_L (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$$
$$=(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4})(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$$
$$=\int_0^2 x^2dx+\int_0^2(y^2-4y)dy+\int_2^0(x^2-8x)dx+\int_2^0 y^2dy$$
$$=\int_0^2 8xdx+\int_0^2 -4ydy=8,$$

而 $$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(-2y+3xy^2)dxdy$$
$$=\int_0^2 dx\int_0^2(-2y+3xy^2)dy=\int_0^2(8x-4)dx=8,$$

所以 $$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_l Pdx+Qdy.$$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1)星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

解 $$A=\oint_L -ydx=\int_0^{2\pi}-a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt$$
$$=3a^2\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2)椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

解 椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的参数方程为

$x=4\cos\theta$, $y=3\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$, 故

$$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos\theta\cdot 3\cos\theta-3\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)]d\theta$$
$$=6\int_0^{2\pi}d\theta=12\pi.$$

(3)圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 圆 $x^2+y^2=2ax$ 的参数方程为 $x=a+a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$,

故 $$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\theta)\cdot a\cos\theta-a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)]d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)d\theta=\pi a^2.$$

3. 计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周$(x-1)^2+y^2=2$, L 的方向为逆时针方向.

解 $P=\frac{y}{2(x^2+y^2)}$，$Q=\frac{-x}{2(x^2+y^2)}$. 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}=0\,.$$

在 L 内作逆时针方向的ε小圆周

$$l: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta(0\leq\theta\leq 2\pi),$$

在以 L 和 l 为边界的闭区域 D_ε上利用格林公式得

$$\oint\limits_{L+l^-} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D_\varepsilon}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0\,,$$

即 $$\oint_L Pdx+Qdy=-\oint_{l^-} Pdx+Qdy=\oint_l Pdx+dy\,.$$

因此 $$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\oint_l \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{2\varepsilon^2}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=-\pi\,.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$;

解 $P=x+y$, $Q=x-y$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 而且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1\,,$$

故在整个 xOy 面内, 积分与路径无关.

取 L 为点(1, 1)到(2, 3)的直线 $y=2x-1$, x 从 1 变到 2, 则

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_1^2[(3x-1)+2(1-x)]dx$$

$$=\int_1^2(1+x)dx=\frac{5}{2}\,.$$

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$;

解 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$, 故积分与路径无关, 取路径 $(1, 2)\to(1, 4)\to(3, 4)$的折线, 则

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$$

$$=\int_2^4 6y-3y^2)dy+\int_1^3(96x-64)dx=236.$$

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

解 $P=2xy-y^4+3$, $Q=x^2-4xy^3$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3$, 所以在整个 xOy 面内积分与路径无关, 选取路径为从$(1, 0)\to(1, 2)\to(2, 1)$的折线, 则

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$$

$$=\int_0^1(1-4y^3)dy+\int_1^2 2(x+1)dx=5.$$

5. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为$(0, 0)$、$(3, 0)$和$(3, 2)$的三角形正向边界;

解 L 所围区域 D 如图所示, $P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-(-1)=4,$$

故由格林公式,得

$$\oint_L(2x-y+4)dx+(15y+3x-6)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\iint_D 4dxdy=12.$$

(2) $\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$;

解 $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$, $Q=x^2\sin x-2ye^x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)-(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)=0,$$

由格林公式

$$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$$

$$=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0.$$

(3) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0, 0)到$(\frac{\pi}{2},1)$的一段弧;

解 $P=2xy^3-y^2\cos x$，$Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0,$$

所以由格林公式

$$\int_{L^-+OA+OB} Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

其中 L、OA、OB、及 D 如图所示.

故 $$\int_L Pdx+Qdy=\int_{OA+AB} Pdx+Qdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx+\int_0^1 (1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

(4) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧.

解 $P=x^2-y$, $Q=-x-\sin^2 y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-(-1)=0$,

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=-\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

其中 L、AB、BO 及 D 如图所示.

故 $$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_{BA+OB} (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\int_0^1 -(1+\sin^2 y)dy+\int_0^1 x^2dx=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2.$$

6. 验证下列 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$的全微分，并求这样的一个 $u(x, y)$:

(1)$(x+2y)dx+(2x+y)dy$;

证明 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)dx+(2x+y)dy+C=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+C\ .$$

(2)$2xydx+x^2dy$;

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xydx+x^2dy+C=\int_0^y 0dy+\int_0^y 2xydx+C=x^2y+C\ .$$

(3)$4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy$

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy+C$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y -3\cos 3y\cos 2xdy+C=-\cos 2x\sin 3y+C\ .$$

(4) $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3xh2iy+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy+C$$

$$=\int_0^y 12ye^ydy+\int_0^x (3x^2y+8xy^2)dx+C$$

$$=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y)+C\ .$$

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$的全微分

$$u(x,y)=\int_0^x 2xdx+\int_0^y (2y\sin x-x^2\sin y)dy+C$$

$$=y^2\sin x+x^2\cos y+C\ .$$

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$， $Y=2xy-8$，这变力确

定了一个力场, 证明质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关.

解 场力所作的功为 $W=\int_{\Gamma}(x+y^2)dx+(2xy-8)dy$.

由于 $\frac{\partial Y}{\partial x}=2y=\frac{\partial X}{\partial y}$, 故以上曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

习题 10−4

1. 设有一分布着质量的曲面Σ, 在点(x, y, z)处它的面密度为$\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解. 假设$\mu(x, y, z)$在曲面Σ上连续, 应用元素法, 在曲面Σ上任意一点(x, y, z)处取包含该点的一直径很小的曲面块 dS(它的面积也记做 dS), 则对于 x 轴的转动惯量元素为

$$dI_x=(y^2+z^2)\mu(x, y, z)dS,$$

对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS .$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS ,$$

其中Σ是由Σ_1和Σ_2组成的.

证明 划分Σ_1为 m 部分, $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_m$;

划分Σ_2为 n 部分, $\Delta S_{m+1}, \Delta S_{m+2}, \cdots, \Delta S_{m+n}$,

则$\Delta S_1, \cdots, \Delta S_m, \Delta S_{m+1}, \cdots, \Delta S_{m+n}$为Σ的一个划分, 并且

$$\sum_{i=1}^{m+n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i+\sum_{i=m+1}^{m+n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i .$$

令 $\lambda_1=\max\limits_{1\le i\le m}\{\Delta S_i\}$, $\lambda_2=\max\limits_{m+1\le i\le m+n}\{\Delta S_i\}$, $\lambda=\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则当$\lambda\to 0$ 时, 有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS .$$

3. 当Σ是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 与

二重积分有什么关系?

解 Σ的方程为 $z=0$, $(x, y)\in D$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=dxdy,$$

故 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f(x,y,z)dxdy.$$

4. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$, 其中Σ为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$在 xOy 面上方的部分, $f(x, y, z)$分别如下:

(1) $f(x, y, z)=1$;

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\leq 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

(2) $f(x, y, z)=x^2+y^2$;

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\leq 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{149}{30}\pi.$$

(3) $f(x, y, z)=3z$.

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\leq 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}3[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}rdr$$

$$=6\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中Σ是:

(1)锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面;

解 将Σ分解为$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

Σ_1: $z=1$, D_1: $x^2+y^2\leq1$, $dS=dxdy$;

Σ_1: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, D_2: $x^2+y^2\leq1$, $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$.

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

提示: $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$.

(2)锥面$z^2=3(x^2+y^2)$被平面$z=0$及$z=3$所截得的部分.

解 Σ: $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\leq3$,

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2dxdy$,

因而 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^2 2rdr=9\pi$.

提示: $dS=\sqrt{1+[\frac{6x}{2\sqrt{3(x^2+y^2)}}]^2+[\frac{6y}{2\sqrt{3(x^2+y^2)}}]^2}dxdy=2dxdy$.

6. 计算下面对面积的曲面积分:

(1)$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$，其中Σ为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z=4-2x-\frac{4}{3}y$, $D_{xy}: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1-\frac{3}{2}x$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=4\sqrt{61}.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$，其中$\Sigma$为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一象限中的部分;

解 Σ: $z=6-2x-2y$, D_{xy}: $0\le y\le 3-x$, $0\le x\le 3$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=3dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)3dxdy$$

$$=3\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)dy$$

$$=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)dx=-\frac{27}{4}.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h$ ($0<h<a$)的部分;

解 Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2-h^2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$=\iint\limits_{D_{xy}}adxdy=a|D_{xy}|=\pi a(a^2-h^2)$(根据区域的对称性及函数的奇偶性).

提示:

$$dS=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}})^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2ax$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\cos q+\sin\theta)]rdr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

提示: $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$.

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\mu=z$.

解 Σ: $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

故 $$M=\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\sqrt{1+r^2}rdr=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ 对于z轴的转动惯量.

解 Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0 dS=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\mu_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-y^2}}dr$$

$$=\frac{4}{3}\pi\mu_0 a^4.$$

提示:

$$dS=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

习题 10−5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式:

$$\iint\limits_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz=\iint\limits_{\Sigma}P_1(x,y,z)dydz\pm\iint\limits_{\Sigma}P_2(x,y,z)]dydz.$$

解 证明把Σ分成 n 块小曲面ΔS_i(ΔS_i同时又表示第 i 块小曲面的面积), ΔS_i在 yOz 面上的投影为$(\Delta S_i)_{yz}$, (ξ_i, η_i, ζ_i)是ΔS_i上任意取定的一点, λ是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}P_1(x,y,z)dydz\pm\iint\limits_{\Sigma}P_2(x,y,z)]dydz.$$

2. 当Σ为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$ 与二重积分有什么关系?

解 因为Σ: $z=0$, $(x, y)\in D_{xy}$, 故

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z)dxdy,$$

当Σ取的是上侧时为正号, Σ取的是下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy$ 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

解 Σ的方程为 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le R$, 于是

$$\iint_{\Sigma} x^2y^2zdxdy=-\iint_{D_{xy}} x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\cdot\sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}r^5dr=\frac{2}{105}\pi R^7 .$$

(2) $\iint_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx$, 其中 z 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧;

解 Σ在 xOy 面的投影为零, 故 $\iint_{\Sigma} zdxdy=0$.

Σ可表示为 $x=\sqrt{1-y^2}$, $(y, z)\in D_{yz}=\{(y, z)|0\le y\le 1, 0\le z\le 3\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} xdyz=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}dydz=\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy=3\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy$$

Σ可表示为 $y=\sqrt{1-x^2}$, $(z, x)\in D_{zx}=\{(z, x)|0\le z\le 3, 0\le x\le 1\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} ydzdx=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}dzdx=\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=3\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx .$$

因此 $\iint_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx=2(3\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx)=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$.

解法二 Σ前侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x, 2y, 0)$, 单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0),$$

由两种曲面积分之间的关系,

$$\iint_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dS=\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}dS=\iint_{\Sigma}dS=\frac{3}{2}\pi .$$

提示: $\iint_{\Sigma} dS$ 表示曲面的面积.

(3) $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x, y, z)$为连续函数, Σ是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧;

解 曲面Σ可表示为 $z=1-x+y$, $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x-1\}$,

Σ上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 1)$, 单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

由两类曲面积分之间的联系可得

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(f+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})+(f+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2}.$$

(4) $\oiint_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx$, 其中$\Sigma$是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$, 其中

Σ_1: $x=0$, D_{yz}: $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1-y$,

Σ_2: $y=0$, D_{zx}: $0\le z1$, $0\le x\le 1-z$,

Σ_3: $z=0$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

于是 $$\oiint_{\Sigma}xzdxdy=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}=0+0+0+\iint_{\Sigma_4}xzdxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}x(1-x-y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{24}.$$

由积分变元的轮换对称性可知

$$\oiint_{\Sigma}xydydz=\oiint_{\Sigma}yzdzdx=\frac{1}{24}.$$

因此 $$\oiint_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$, 其中$\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 是位于坐标面上的三块;

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$.

显然在Σ_1、Σ_2、Σ_3 上的曲面积分均为零, 于是

$$\oiint_{\Sigma} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$$

$$=\iint_{\Sigma_4} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$$

$$=\iint_{\Sigma_4}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+xz\cos\gamma)dS$$

$$=\sqrt{3}\iint_{\Sigma_4}(xy+yz+xz)dS=3\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)(1-x-y)]dxdy=\frac{1}{8}.$$

4. 把对坐标的曲面积分

$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化成对面积的曲面积分:

(1)Σ为平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限的部分的上侧;

解 令$F(x,y,z)=3x+2y+2\sqrt{3}z-6$, Σ上侧的法向量为:

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(3,2,2\sqrt{3}),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{5}(3,2,2\sqrt{3}),$$

于是 $\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{5}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)dS.$$

(2)Σ是抛物面$z=8-(x^2+y^2)$在xOy面上方的部分的上侧.

解 令$F(x, y, z)=z+x^2+y^2-8$, Σ上侧的法向量

$$n=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 2y, 1),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,2y,1),$$

于是 $\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2xP+2yQ+R)dS.$$

10−6

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中Σ为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a,$ $y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$$

$$=6\iiint_{\Omega}xdv=6\int_0^a xdx\int_0^a dy\int_0^a dz=3a^4 \text{ (这里用了对称性)}.$$

(2) $\oiint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, 其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) $\oiint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$, 其中Σ为上半球体 $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})d=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) $\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$ 其中Σ界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 9$ 的整个表面的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint_{\Omega}3dv=81\pi.$$

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xzdydz-y^2dzdx+yzdxdy$,其中Σ为平面 x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1 所围成的立体的全表面的外侧.

解 由高斯公式

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(4z-y)dz=\frac{3}{2}.$$

2. 求下列向量 A 穿过曲面Σ流向指定侧的通量:

(1)$\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$, Σ为圆柱 $x+y^2\le a^2(0\le z\le h)$的全表面, 流向外侧;

解 $P=yz$, $Q=xz$, $R=xy$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma} yzdydz+xzdzdx+xydxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}0dv=0.$$

(2)$\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$, Σ为立方体 $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$, 的全表面, 流向外侧;

解 $P=2x-z$, $Q=x^2y$, $R=-xz^2$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)dv$$

$$=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(2+x^2-2xz)dz=a^3(2-\frac{a^2}{6}).$$

(3)$\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$, Σ是以点(3, −1, 2)为球心, 半径 R =3 的球面, 流向外侧.

解 $P=2x+3z$, $Q=-(xz+y)$, $R=y^2+2z$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=108\pi.$$

3. 求下列向量 A 的散度:

(1)$\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$;

解 $P=x^2+yz$, $Q=y^2+xz$, $R=-z^2+xy$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z).$$

(2)$\boldsymbol{A}=e^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

解 $P=e^{xy}$, $Q=\cos(xy)$, $R=\cos(xz^2)$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin xy-2xz\sin(xz^2).$$

(3)$\boldsymbol{A}=y^2z\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$;

解 $P=y^2$, $Q=xy$, $R=xz$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+x+x=2x.$$

4. 设 $u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$是两个定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$依次表示 $u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$沿Σ的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz=\oiint\limits_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS,$$

其中Σ是空间闭区间Ω的整个边界曲面, 这个公式叫作林第二公式.

证明 由第一格林公式(见书中例 3)知

$$\iiint\limits_{\Omega}u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})dxdydz$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz.$$

将上面两个式子相减, 即得

$$\iiint\limits_{\Omega}[u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})-v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})]dxdyd$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS.$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 取液面为 xOy 面, z 轴沿铅直向下, 设液体的密度为ρ, 在物

体表面Σ上取元素 dS 上一点, 并设Σ在点(x, y, z)处的外法线的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则 dS 所受液体的压力在坐标轴 x, y, z 上的分量分别为

$$-\rho z\cos\alpha dS, -\rho z\cos\beta\, dS, -\rho z\cos\gamma\, dS,$$

Σ所受的压力利用高斯公式进行计算得

$$F_x=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}-\rho z\cos\alpha dS=\iiint_{\Omega}0dv=0\,,$$

$$F_y=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}-\rho z\cos\beta dS=\iiint_{\Omega}0dv=0\,,$$

$$F_z=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}-\rho z\cos\gamma dS=\iiint_{\Omega}-\rho dv=-\rho\iiint_{\Omega}dv=-\rho|\Omega|,$$

其中$|\Omega|$为物体的体积. 因此在液体中的物体所受液体的压力的合力, 其方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体所受的重力, 即阿基米德原理得证.

习题 10−7

1. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$, 其中Γ为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, , 若从 z 轴的正向看去, 这圆周取逆时针方向;

解 设Σ为平面 $x+y+z=0$ 上Γ所围成的部分, 则Σ上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\,.$$

于是 $$\oint_{\Gamma}ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)dS=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS=-\sqrt{3}\pi a^2\,.$$

提示: $\iint_{\Sigma}dS$ 表示Σ的面积, Σ是半径为 a 的圆.

(2) $\oint_{\Gamma}(y-z)dz+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中Γ为椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ $(a>0, b>0)$, 若从 x 轴正向看去, 这椭圆取逆时针方向;

解 设Σ为平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$上Γ所围成的部分, 则Σ上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

于是 $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS$

$$=\iint_{\Sigma}(-2\cos\alpha-2\cos\beta-2\cos\gamma)dS=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{\Sigma}dS$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy=\frac{-2(a+b)}{a}\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\pi a(a+b).$$

提示: Σ(即$z=b-\frac{b}{a}x$)的面积元素为$dS=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$.

(3)$\oint_{\Gamma}3ydx-xzdy+yz^2dz$, 其中Γ为圆周$x^2+y^2=2z$, $z=2$, 若从z轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

解 设Σ为平面$z=2$上Γ所围成的部分的上侧, 则

$$\oint_{\Gamma}3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y & -xz & yz^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-(z+3)dxdy=-5\pi\times 2^2=-20\pi.$$

(4)$\oint_{\Gamma}2ydx+3xdy-z^2dz$, 其中Γ为圆周$x^2+y^2+z^2=9$, $z=0$, 若从z轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 设Σ为xOy面上的圆$x^2+y^2\le 9$的上侧, 则

$$\oint_{\Gamma}2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & -z^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=9\pi.$$

2. 求下列向量场A的旋度:

(1)$\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(-2x)\boldsymbol{k}$;

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

(2)$\boldsymbol{A}=(\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{k}$;

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

(3)$\boldsymbol{A}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$

$=[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}+[y^2z\cos(xz)-x^2\cos y]\boldsymbol{k}$.

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ 化为曲线积分, 并计算积分值, 其中 $\boldsymbol{A}$、Σ及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下:

(1)$\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$, Σ为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 的上侧, $\boldsymbol{n}$ 是Σ的单位法向量;

解 设Σ的边界Γ : $x^2+y^2=1$, $z=0$, 取逆时针方向, 其参数方程为

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=0(0\le\theta\le2\pi$,

由托斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}y^2dx+xydy+xzdz$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2\theta(-\sin\theta)+\cos^2\theta\sin\theta]d\theta=0.$$

(2)$\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$, Σ为立方体 $0\le x\le2$, $0\le y\le2$, $0\le z\le2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, $\boldsymbol{n}$ 是Σ的单位法向量.

解 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\oint_{\Gamma}(y-x)dx+yzdy+(-xz)dz=\oint_{\Gamma}ydx=\int_2^0 2dx=-4.$$

4. 求下列向量场 A 沿闭曲线Γ(从 z 轴正向看依逆时针方向)的环流量:

(1)$\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$ 为常量), Γ为圆周 $x^2+y^2=1$, $z=0$;

解 $\oint_L -ydx+xdy+cdz=\int_0^{2\pi}[(-\sin\theta)((-\sin\theta)+\cos\theta\cos\theta]d\theta$

$=\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$, 其中Γ为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

解 有向闭曲线Γ的参数方程为 $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$, $z=0(0\le\pi\le 2\pi)$.

向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线Γ的环流量为

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L (x-z)dx+(x^2+yz)dy-3xy^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta 2\cos\theta]d\theta=12\pi .$$

5. 证明 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$.

解 令 $\boldsymbol{a}=P_1(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q_1(x, y, z)\boldsymbol{j}+R_1(x, y, z)\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{b}=P_2(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q_2(x, y, z)\boldsymbol{j}+R_2(x, y, z)\boldsymbol{k}$,

由行列式的性质, 有

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1+P_2 & Q_1+Q_2 & R_1+R_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}\,.$$

6. 设 $u=u(x, y, z)$具有二阶连续偏导数, 求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)$

解 因为 $\mathbf{grad}\,u=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}$, 故

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}=(u_{zy}-u_{yz})\boldsymbol{i}+(u_{zx}-u_{xz})\boldsymbol{j}+(u_{yx}-u_{xy})\boldsymbol{k}=0.$$

*7. 证明:

(1) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

解 $\nabla(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}i+\frac{\partial(uv)}{\partial y}j+\frac{\partial(uv)}{\partial z}k$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x})i+(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y})j+(\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z})k$$

$$=v(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k)+u(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k)=u\nabla v+v\nabla u.$$

(2) $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla u$

解　$\Delta(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})+v(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})$

$$+2(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z})==u\,\Delta v+v\,\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla u.$$

(3) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$

解　$B=P_2 i+Q_2 j+R_2 k$,

$$\nabla\cdot(A\times B)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}=\frac{\partial(Q_1R_2-Q_2R_1)}{\partial x}-\frac{\partial(P_1R_2-P_2R_1)}{\partial y}+\frac{\partial(P_1Q_2-P_2Q_1)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial Q_1}{\partial x}R_2+Q_1\frac{\partial R_2}{\partial x}-\frac{\partial Q_2}{\partial x}R_1-Q_2\frac{\partial R_1}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial x}R_2-P_1\frac{\partial R_2}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial P_2}{\partial y}R_1+P_2\frac{\partial R_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_2+P_1\frac{\partial Q_2}{\partial z}-\frac{\partial P_2}{\partial z}Q_1-P_2\frac{\partial Q0_1}{\partial z}$$

$$=R_2(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y})+Q_1(\frac{\partial R_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial z})+R_1(\frac{\partial P_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial x})$$

$$+Q_2(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})+P_1(\frac{\partial Q_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial y})+P_2(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z})$$

而 $B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)=\begin{vmatrix}P_2 & Q_2 & R_2\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}P_1 & Q_2 & R_1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$

$$=P_2(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z})+Q_2(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})+R_2(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y})$$

$$-P_1(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z})+Q_1(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})-R_1(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y})$$

所以$\nabla\times(A\times B)=B\times(\nabla\times A)-A\times(\nabla\times B)$

(4) $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 a$

解　令 $A=Pi+Q\,j++R\,k$,则

$$\nabla\times A=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\,j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial})k$$

从而$\nabla\times(\nabla\times A)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix}$

$$=(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z})i+(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y})j$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y})k$$

$$=(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z})i-(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2})i$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z})j-(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2})j$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}-+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})k-(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})k$$

$$=[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot A)i+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot A)j+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot A)k]$$

$$-[\nabla^2 Pi+\nabla^2 Qj+\nabla^2 Rk]=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$$

命题地证

总习题十

1. 填空:

(1)第二类曲线积分$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$化成第一类曲线积分是____________, 其中α、β、γ为有向曲线弧Γ上点(x, y, z)处的_____________的方向角.

解 $\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$, 切向量.

(2)第二类曲面积分$\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$化成第一类曲面积分是_______, 其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为有向曲面$\Sigma$上点$(x, y, z)$处的________的方向角.

解 $\iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$, 法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面Σ是上半球面: $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$, 曲面Σ_1是曲面Σ在第一卦限中的部分, 则有________.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} xdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$; (B) $\iint\limits_{\Sigma} ydS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma} zdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$; (D) $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$.

解 (C).

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$;

解 L 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta$, $y=\frac{a}{2}\sin\theta$ $(0\le\theta\le2\pi)$, 故

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds=\oint_L \sqrt{ax}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{ax(\theta)}\cdot\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\cdot d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}|2\cos\frac{\theta}{2}|d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}|\cos t|dt=a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos tdt)=2a^2\text{ (这里令}t=\frac{\theta}{2}\text{)}.$$

(2) $\int_\Gamma zds$, 其中Γ为曲线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t(0\le t\le t_0)$;

解 $\int_\Gamma zds=\int_0^{t_0}t\cdot\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}dt$

$$=\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}dt=\frac{\sqrt{(2+t_0^2)^3}-2\sqrt{2}}{3}.$$

(3) $\int_L(2a-y)dx+xdy$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$上对应 t 从 0 到 2π的一段弧;

解 $\int_L(2a-y)dx+xdy=\int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\cdot a\sin t]dt$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin tdt=-2\pi a^2.$$

(4) $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, 其中Γ是曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上由听 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

解 $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz=\int_0^1[(t^4-t^6)\cdot1+2t^2\cdot t^3\cdot2t-t^2\cdot3t^2]dt$

$$=\int_0^1(-2t^4+3t^6)dt=\frac{1}{35}.$$

(5) $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$, 其中 L 为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$, $y\ge0$, 沿逆时针方向;

解 这里 $P=e^x\sin y-2y$, $Q=e^x\cos y-2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-e^x\cos y+2=2$.

令 L_1 为 x 轴上由原点到$(2a, 0)$点的有向直线段, D 为 L 和 L_1 所围成的区域, 则由格林公式

$$\oint_{L+L_1}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=2\iint_D dxdy=\pi a^2,$$

$$\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\pi a^2-\int_{L_1}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\pi a^2-\int_0^{2a}0dx=\pi a^2.$$

(6) $\oint_\Gamma xyzdz$, 其中Γ是用平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得的截痕, 从z轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 曲线Γ的一般方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$, 其参数方程为

$$x=\cos t,\ y=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t,\ t\text{ 从 }0\text{ 变到 }2\pi.$$

于是 $$\oint_\Gamma xyzdz=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos tdt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi.$$

4. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_\Sigma\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, 其中$\Sigma$是界于平面$z=0$及$z=H$之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2$;

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2},\ D_{xy}: -R\le y\le R,\ 0\le z\le H,\ \ dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz;$$

$$\Sigma_1: x=-\sqrt{R^2-y^2},\ D_{xy}: -R\le y\le R,\ 0\le z\le H,\ \ dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz,$$

于是 $$\iint_\Sigma\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint_{D_{xt}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2R\int_{-R}^R\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}dz$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) $\iint_\Sigma(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$, 其中$\Sigma$为锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h)$ 的外侧;

解 这里 $P=y^2-z$, $Q=z^2-x$, $R=x^2-y$, $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

设Σ_1为 $z=h(x^2+y^2\le h^2)$的上侧, Ω为由Σ与Σ_1所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=0,$$

而 $$\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2\cos^2\theta-r\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}h^4,$$

所以 $$\iint_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

(3) $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中$\Sigma$为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

解 设Σ_1为 xOy 面上圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 的下侧, Ω为由Σ与Σ_1所围成的空间区域, 则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint_\Omega 3dv=3(\frac{2}{3}\pi R^3)=2\pi R^3,$$

而 $$\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_1}zdxdy=\iint_{D_{xy}}0dxdy=0=0,$$

所以 $$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3-0=2\pi R^3.$$

(4) $\iint_\Sigma\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, 其中$\Sigma$为曲面$1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}$ $(z\ge0)$的上侧;

解 这里 $P=\frac{x}{r^3}$, $Q=\frac{y}{r^3}$, $R=\frac{z}{r^3}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\frac{3}{r^3}-\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

设Σ_1为 $z=0$ $(\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\le1)$ 的下侧, Ω是由Σ和Σ_1所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=0,$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=-\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{0}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy=0.$$

(5) $\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geq 0, y\geq 0)$的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

Σ_1 是 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0)$的上侧;

Σ_2 是 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0)$的下侧,

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy=\iint_{\Sigma_1} xyzdxdy+\iint_{\Sigma_2} xyzdxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\rho^3d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho^3d\rho=\frac{2}{15}.$$

5. 证明 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

解 这里 $P=\frac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{y}{x^2+y^2}$. 显然，区域 G 是单连通的, P 和 Q 在 G 内具有一阶连续偏导数，并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在开区域 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{1}{x}dx+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $F=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 场力沿路径 L 所作的功为

$$W=\int_L -\frac{kx}{\rho^3}dx-\frac{ky}{\rho^3}dy.$$

令 $P=-\frac{kx}{\rho^3}$，$Q=-\frac{ky}{\rho^3}$. 因为 P 和 Q 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续的偏导数, 并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3k}{\rho^5}xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以上述曲线积分所路径无关, 即力场所作的功与路径无关.

7. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 这里Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|x^2+y^2\le a^2\}$.

设曲面Σ的面密度为ρ=1, 由曲面的对称性可知, $\bar{x}=\bar{y}=0$. 因为

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi a^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{1}{2}\cdot 4\pi a^2=2\pi a^2,$$

所以 $$\bar{z}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

因此该曲面的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

8. 设 $u(x, y)$、$v(x, y)$在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1)\iint\limits_D v\Delta u dxdy=-\iint\limits_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)dxdy+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds;$$

$$(2)\iint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

证明 设 L 上的单位切向量为 $\boldsymbol{T}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, 则 $\boldsymbol{n}=(\sin\alpha, -\cos\alpha)$.

$$(1)\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_L v(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)ds=\int_L[-v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha+v\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha]ds$$

$$=\iint\limits_D[\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-v\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$=\iint\limits_D(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y})dxdy+\iint_D v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint_D \mathbf{grad}v\cdot\mathbf{grad}u dxdy+\iint_D v\Delta u dxdy\,,$$

所以 $$\iint_D v\Delta u dxdy=-\iint_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)dxdy+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds\,.$$

(2) $$\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=\int_L[u(\frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha)-v(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)]dxdy$$

$$=\int_L[(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y})\cos\alpha+(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})\sin\alpha]dxdy$$

$$=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint_D[u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})-v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})]dxdy=\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy\,.$$

9. 求向量$\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$通过闭区域$\Omega=\{(x, y, z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$的边界曲面流向外侧的通量.

解 设Σ为区域Ω的边界曲面的外侧, 则通量为

$$\Phi=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint_\Omega 3dv=3\,.$$

10. 求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线Γ所作的功, 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 设Σ为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦部分的下侧, 则力场沿其边界 L(顺时针方向)所作的功为

$$W=\oint_L ydx+zdy+xdz\,.$$

曲面Σ的的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=(\cos\alpha,\cos\beta\cos\gamma)$, 由斯托克斯公式有

$$W=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-1-1-1)dS=\sqrt{3}\iint_\Sigma dS=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\,.$$

习题 11−1

1. 写出下列级数的前五项:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=1+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{26}+\frac{6}{37}+\cdots$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{15}{48}+\frac{105}{384}+\frac{945}{3840}+\cdots$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}-\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}-\cdots$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}+\cdots$.

2. 写出下列级数的一般项:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

解 一般项为 $u_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$;

解 一般项为 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$.

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$;

解 一般项为 $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2n!}$.

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解 一般项为 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

解 因为

$$s_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})\to\infty(n\to\infty),$$

所以级数发散.

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

解 因为

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

所以级数收敛.

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解 $s_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots+(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi)]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi).$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在, 所以 $\lim_{n\to\infty}s_n$ 不存在, 因而该级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$;

解 这是一个等比级数, 公比为 $q=-\frac{8}{9}$, 于是 $|q|=\frac{8}{9}<1$, 所以此级数收敛.

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$;

解 此级数是发散的, 这是因为如此级数收敛, 则级数

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=3(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots)$$

也收敛, 矛盾.

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

解 因为级数的一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=3^{-\frac{1}{n}}\to 1\neq 0(n\to\infty)$,

所以由级数收敛的必要条件可知, 此级数发散.

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$;

解 这是一个等比级数, 公比 $q=\frac{3}{2}>1$, 所以此级数发散.

(5) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 都是收敛的等比级数, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$$

是收敛的.

习题 11–2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故所给级数发散.

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

解 因为 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

(3) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+5n+4}=1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故所给级数收敛.

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,

故所给级数收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=l=\begin{cases}0 & 0<a<1\\ \frac{1}{2} & a=1\\ 1 & a>1\end{cases},$$

而当 $a>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，当 $0<a\leq 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 发散,

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 当 $a>1$ 时收敛，当 $0<a\leq 1$ 时发散.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$;

解 级数的一般项为 $u_n=\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

所以级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(\frac{n+1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$,

所以级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=2\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{e}<1$,

所以级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$,

所以级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, 所以级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$, 所以级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$;

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{3n-1})^{\frac{2n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3-\frac{1}{n})^{2-\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2-\frac{1}{n}}\cdot(1-\frac{1}{3n})^{2-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{3^2\cdot e^3}<1,$$

所以级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$, 其中 $a_n\to a(n\to\infty)$, a_n, b, a 均为正数.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$,

所以当 $b<a$ 时级数收敛, 当 $b>a$ 时级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{4}+2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})^3+\cdots+n(\frac{3}{4})^n+\cdots$;

解 这里 $u_n=n(\frac{3}{4})^n$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{n+1}}{n(\frac{3}{4})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1,$$

所以级数收敛.

(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$;

解 这里 $u_n=\frac{n^4}{n!}$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(\frac{n+1}{n})^3=0<1,$$

所以级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$,

所以级数收敛.

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1\neq 0$,

所以级数发散.

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0, b>0)$.

解 因为 $u_n=\frac{1}{na+b}>\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛？如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

解 这是一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 其中 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

因为显然 $u_n\geq u_{n+1}$, 并且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 所以此级数是收敛的.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p<1$ 的 p 级数, 是发散的,

所以原级数是条件收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\dfrac{1}{3}<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 是收敛的，

从而原级数收敛，并且绝对收敛.

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots$;

解 这是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}$，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}$ 是收敛的，所以原级数也收敛，并且绝对收敛.

(4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots$;

解 这是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，其中 $u_n=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

因为 $u_n\geq u_{n+1}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，所以此级数是收敛的.

又因为 $\dfrac{1}{\ln(n+1)}\geq\dfrac{1}{n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ 发散，从而原级数是条件收敛的.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解 级数的一般项为 $u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^n)}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}\cdot\dfrac{2^n}{n-1}\cdot\dfrac{2^n}{n-2}\cdots\dfrac{2^n}{3}\cdot\dfrac{2^n}{2}\cdot\dfrac{2^n}{1}=\infty$，

所以级数发散.

习题 11−3

1. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，是发散的;

当 $x=-1$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，也是发散的,

所以收敛域为(−1, 1).

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$, 故收敛半径为 R=1.

因为当 x=1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, 是收敛的; 当 x=−1 时, 幂级数成为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 也是收敛的, 所以收敛域为[−1, 1].

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot 4\cdots(2n)}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$, 故收敛半径为 R=+∞, 收敛域为(−∞, +∞).

(4) $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$, 故收敛半径为 R=3.

因为当 x=3 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 是发散的; 当 x=−3 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 也是收敛的, 所以收敛域为[−3, 3).

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$, 故收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, 是收敛的; 当 x=−1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$, 也是收敛的, 所以收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

解 这里级数的一般项为 $u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}|=x^2$, 由比值审敛法, 当 x^2<1, 即|x|<1 时, 幂级数绝对收敛; 当 x^2>1, 即|x|>1 时, 幂级数发散, 故收敛半径为 R=1.

因为当 x=1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$, 是收敛的; 当 x=−1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$, 也是收敛的, 所以收敛域为[−1, 1].

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

解 这里级数的一般项为 $u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}|=\frac{1}{2}x^2$, 由比值审敛法, 当 $\frac{1}{2}x^2<1$, 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}x^2>1$, 即 $|x|>\sqrt{2}$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为 $R=\sqrt{2}$.

因为当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$, 是发散的, 所以收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$, 故收敛半径为 $R=1$, 即当 $-1<x-5<1$ 时级数收敛, 当 $|x-5|>1$ 时级数发散.

因为当 $x-5=-1$, 即 $x=4$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 是收敛的; 当 $x-5=1$, 即 $x=6$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 是发散的, 所以收敛域为[4, 6).

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, 则

$$S(x)=[\int_0^x S(x)dx]'=[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx]'=[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx]'$$

$$=[\sum_{n=1}^{\infty}x^n]'=[\frac{1}{1-x}-1]'=\frac{1}{(1-x)^2}\ (-1<x<1).$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 则

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}]'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}dx$$

$$=\int_0^x(\frac{1}{1-x^4}-1)dx=\int_0^x(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2})dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\ (-1<x<1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$ 得 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx$.

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

解 设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

则 $$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}]'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$ 得 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx$.

习题 11–4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

解 $$f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2})\quad (n=1, 2, \cdots),$$

从而得 $f(x)$在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

因为 $|R_n(x)|=|\frac{\cos[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}|\le\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0\le\theta\le1)$,

而级数 $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 总是收敛的, 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$.

因此 $$f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,\ x\in(-\infty, +\infty).$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

所以 $$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

故 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x\in(-\infty, +\infty)$.

(2)$\ln(a+x)(a>0)$;

解 因为 $\ln(a+x)=\ln a(1+\frac{x}{a})=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})$,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\le 1),$$

所以 $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(\frac{x}{a})^{n+1}=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\ (-a<x\le a)$.

(3)a^x;

解 因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty, +\infty)$,

所以 $a^x=e^{x\ln a}=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$, $x\in(-\infty, +\infty)$,

(4)$\sin^2 x$;

解 因为 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

所以 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}\quad x\in(-\infty, +\infty)$.

(5)$(1+x)\ln(1+x)$;

解 因为 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\le 1)$,

所以 $(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}]x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\le 1).$$

(6)$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 $\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ (-1\le x\le 1)$,

所以 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot(2n)!}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n+1}\ (-1\le x\le 1)$.

3. 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数，并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$;

解 因为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1).$$

所以 $\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)\cdots(\frac{3}{2}-n+1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$(-1<x-1<1),$$

即 $$\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{3\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(5-2n)}{2^n\cdot n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$(0<x<2).$$

上术级数当 x=0 和 x=2 时都是收敛的, 所以展开式成立的区间是[0, 2].

(2)lg x.

解 $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\ (-1<x-1\leq 1)$,

即 $$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\ (0<x\leq 2).$$

4. 将函数 $f(x)$=cos x 展开成 $(x+\frac{\pi}{3})$ 的幂级数.

解 $\cos x=\cos[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}]\ (-\infty<x<+\infty).$$

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成(x−3)的幂级数.

解 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n}(-1)^n(\frac{x-3}{3})^n\ (-1<\frac{x-3}{3}<1)$,

即 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n}(-1)^n(\frac{x-3}{3})^n\ (0<x<6).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成(x+4)的幂级数.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$,

而 $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n\ (|\frac{x+4}{3}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}\ (-7<x<-1);$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n\ (|\frac{x+4}{2}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}\ (-6<x<-2).$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n\ (-6<x<-2).$$

习题 11−5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1)ln3(误差不超过 0.0001);

解 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)\ (-1<x<1)$,

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)\ .$$

又 $$|r_n|=2[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\cdots]$$

$$=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}[1+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot 2^{2n+5}}+\cdots]$$

$$<\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)=\frac{1}{3(2n-1)2^{2n-2}},$$

故 $|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012$, $|r_5|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003$.

因而取 n=6, 此时

$$\ln 3=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}})\approx 1.0986.$$

(2) $\sqrt{e}$ (误差不超过 0.001);

解 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty)$,

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots\ .$$

由于 $$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n!\cdot 2^n}[1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots$$

$$<\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\cdot n!\cdot 2^{n-2}},$$

故　　$r_4=\frac{1}{3\cdot 5!\cdot 2^3}\approx 0.0003$.

因此取 n=4 得

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}\approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522}$ (误差不超过 0.00001);

解　$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1)$,

$$\sqrt[9]{522}=2(1+\frac{10}{2^9})^{1/9}$$

$$=2[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot(\frac{10}{2^9})^2+\frac{8\cdot 17}{3^2\cdot 3!}\cdot(\frac{10}{2^9})^3-\cdots].$$

由于　$\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}\approx 0.002170$, $\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot(\frac{10}{2^9})^2\approx 0.000019$,

故　$\sqrt[9]{522}=2(1+0.002170-0.000019)\approx 2.00430$.

(4) $\cos 2°$(误差不超过 0.0001).

解　$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$,

$$\cos 2°=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2+\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4-\frac{1}{6!}\cdot(\frac{\pi}{90})^6+\cdots.$$

由于　$\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\approx 6\times 10^{-4}$, $\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4\approx 10^{-8}$,

故　$\cos 2°\approx 1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\cdot\approx 1-0.0006=0.9994$.

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$ (误差不超过 0.0001);

解　$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots]dx$

$$=(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots)|_0^{0.5}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots.$$

因为　$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.00625$, $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.00028$, $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009$,

所以　$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.4940$.

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$ (误差不超过 0.0001).

解　$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots(-1<x<1)$,

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}[1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}+\cdots]dx$$

$$=(x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{25}x^5-\frac{1}{49}x^7+\cdots)|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots .$$

因为 $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139$，$\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013$，$\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002$，

所以 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.487$.

3. 将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，

$$e^x\cos x=e^x\cdot\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\frac{1}{2}[e^{x(1+i)}+e^{x(1-i)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}x^n .$$

因为 $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$，$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$，

所以 $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}[e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}]=2^{\frac{n}{2}}(2\cos\frac{n\pi}{4})=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$.

因此 $e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ (-\infty<x<+\infty)$.

习题 11−7

1. 下列周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 试将 $f(x)$展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$在$[-\pi, \pi)$上的表达式为:

(1)$f(x)=3x^2+1(-\pi\le x<\pi)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos n\pi dx=(-1)^n\frac{12}{n^2}\quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin n\pi dx=0\quad (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

(2)$f(x)=e^{2x}(-\pi\leq x<\pi)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos n\pi dx=\frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\ \ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin n\pi dx=-\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\ \ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)$$

$$(x\neq(2n+1)\pi, n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

(3) $f(x)=\begin{cases}bx & -\pi\leq x<0\\ ax & 0\leq x<\pi\end{cases}$ (a, b 为常数，且 $a>b>0$).

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}axdx=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\cos nxdx]$$

$$=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n\ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\sin nxdx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\}$$

$$(x\neq(2n+1)\pi, n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

2. 将下列函数 $f(x)$展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\ (-\pi\leq x\leq\pi)$;

解 将 $f(x)$拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$在$(-\pi, \pi)$中连续, 在 $x=\pm\pi$间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\neq f(-\pi),\ \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\neq f(\pi),$$

故 $F(x)$的傅里叶级数在$(-\pi, \pi)$中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$处 $F(x)$的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

因为 $2\sin\frac{x}{3}$ $(-\pi<x<\pi)$是奇函数, 所以 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\frac{1}{3}-n)x-\cos(\frac{1}{3}+n)x]dx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{9n^2-1}\ (-\pi<x<\pi).$$

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x & -\pi\leq x<0\\ 1 & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$.

解 将 $f(x)$拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$在$(-\pi, \pi)$中连续, 在 $x=\pm\pi$间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\neq f(-\pi),\ \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\neq f(\pi),$$

故 $F(x)$的傅里叶级数在$(-\pi, \pi)$中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$处 $F(x)$的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx]$$

$$=\frac{1}{\pi}\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}]\sin nx\}$$

$(-\pi<x<\pi)$.

3. 设周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 证明 $f(x)$的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx\ (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx\ (n=1, 2, \cdots).$$

证明 我们知道, 若 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数, 则

$\int_a^{a+l} f(x)dx$ 的值与 a 无关, 且 $\int_a^{a+l} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx$,

因为 $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ 均为以 2π为周期的函数, 所以 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ 均为以 2π为周期的函数, 从而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \ (n=1, 2, \cdots).$$

同理 $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ (n=1, 2, \cdots).$$

4. 将函数 $f(x) = \cos\frac{x}{2}\ (-\pi \le x \le \pi)$展开成傅里叶级数:

解 因为 $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ 为偶函数, 故 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$, 而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(\frac{1}{2}-n)x - \cos(\frac{1}{2}+n)x]dx$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1} \ (n=1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ 在$[-\pi, \pi]$上连续, 所以

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx \ (-\pi \le x \le \pi).$$

5. 设 $f(x)$的周期为 2π的周期函数, 它在$[-\pi, \pi)$上的表达式这

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases},$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 因为 $f(x)$为奇函数, 故 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx dx]$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \ (n=1, 2, \cdots),$$

又 $f(x)$的间断点为 $x=(2n+1)\pi$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$, 所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}]\sin nx\ (x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leq x\leq\pi)$展开成正弦级数.

解 作奇延拓得 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\leq\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases},$$

再周期延拓 $F(x)$到$(-\infty, +\infty)$, 则当 $x\in(0, \pi]$时 $F(x)=f(x)$, $F(0)=0\neq\frac{\pi}{2}=f(0)$.

因为 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$, 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}\quad(n=1, 2, \cdots),$$

故 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\ (0<x\leq\pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

7. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leq x\leq\pi)$分另别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$作奇延拓, 则 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$, 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nxdx=\frac{4}{\pi}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\ (n=1, 2, \cdots),$$

故正弦级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\sin nx\ (0\leq x<\pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

对 $f(x)$作偶延拓, 则 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$, 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad(n=1, 2, \cdots),$$

故余弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (0\leq x\leq\pi).$$

8. 设周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 证明

(1)如果 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则 $f(x)$的傅里叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\overset{令t=\pi+x}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=-a_0,$$

所以 $a_0=0$.

因为

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2kx dx \xlongequal{令 t=\pi+x} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t-\pi)\cos 2k(t-\pi)dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos 2kt dt=-a_{2k},$$

所以 $a_{2k}=0$.

同理 $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$.

(2)如果 $f(x-\pi)=f(x)$, 则 $f(x)$的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

解 因为

$$a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2k+1)x dx$$

$$\xlongequal{令 t=\pi+x} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t-\pi)\cos(2k+1)(t-\pi)dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos(2k+1)t dt=-a_{2k+1},$$

所以 $a_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

同理 $b_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.