§2 向量组的线性相关性

例1：设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

若 $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

则 $k_1=k_2=k_3=0$ ．即齐次线性方程组 $Ex=0$ 只有零解。

例2： 对于向量组

$$\alpha_1^T=(1,-2,3),\quad \alpha_2^T=(2,1,0),\quad \alpha_3^T=(1,-7,9)$$

是否存在不全为零的k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

解： 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 即有方程组

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0 \\ -2k_1+k_2-7k_3=0 \\ 3k_1+\qquad 9k_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=0$$

这里 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; $x=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$; $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -7\\ 3 & 0 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0\\ -2k_1+k_2-7k_3=0\\ 3k_1+\quad 9k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-3k_3\\ k_2=k_3\end{cases},\quad k_3\text{ 为任意数}$$

令$k_3=1$，　则有$k_1=-3,k_2=1,k_3=1,$

使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 即$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$

也即齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，这里$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

也就是说存在不全零的k_1,k_2,k_3, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

观察例1与例2中的两个向量组：$E=(e_1,e_2,e_3)$与$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=0$ 中的k_1,k_2,k_3只有零解

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$中的$k_1,k_2,k_3$除了零解之外，还有非零解

向量组的线性相关性

定义1：给定向量组 A ：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ，**如果存在不全为零的实数** $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ，**使得**

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0$$ （**零向量**）

则称向量组 A **是线性相关的，否则称它是线性无关的．**

对于m个n维向量构成的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

令$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $x = (k_1, k_2, \cdots, k_m)^T$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关	$\Leftrightarrow$	m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解	$\Leftrightarrow$	$R(A) < m$

P. 88定理4

向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关	$\Leftrightarrow$	m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解	$\Leftrightarrow$	$R(A) = m$

线性相关的定义还可以用另一种说法

定义 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (s ≥ 1) 称为**线性相关的**，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0.$

定义1' 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (s ≥ 2)中至少有一个向量可以由其余向量线性表示，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 称为**线性相关的**.

定义2： 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 不线性相关，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为**线性无关的**.

定义2' 若在实数集中找不到不全为零的实数

$k_1,k_2,\cdots,k_s\in R$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

（即对任何不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in R$, 总有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$)

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为**线性无关的**.

或者说： 若由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

必可推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为**线性无关的**.

定义2' 若在实数集合中找不到不全为零的实数

$$k_1, k_2, \cdots, k_s \in R,$$

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 成立

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为**线性无关的**.

定义2'' 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$中的每一个向量都不能由其余向量线性表示，那么向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 称为**线性无关的**.

备注：

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一．
- 向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 α 是零向量时，线性相关；当 α 不是零向量时，线性无关．
- 特别地，在空间直角坐标系下，对非零向量而言：
  - α_1, α_2 线性相关当且仅当 α_1, α_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线．
  - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的几何意义是三个向量共面．
- 含有零向量的向量组必线性相关.

总结：向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$$（零向量）．

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解．

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 的秩小于组 A 中向量的个数 m ．

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示．

总结：向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 如果 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0 .$$

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解．

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 的秩等于向量的个数 m ．

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

例 3 证明：

n 维单位坐标向量组 $\begin{cases} e_1^T = (1,0,\cdots,0), \\ e_2^T = (0,1,\cdots,0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n^T = (0,0,\cdots,1), \end{cases}$ 必线性无关。

解 设有 n 个数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n = 0,$$ 也就是

$$k_1(1,0,\ldots,0)^T + k_2(0,1,\ldots,0)^T + \ldots + k_n(0,0,\ldots,1)^T$$

$$= (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T.$$

于是就有： $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$

所以 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 线性无关.

例4：已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$

试讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **及向量组** α_1, α_2 **的线性相关性．**

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$**，故向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **线性相关；**

同时，$R(\alpha_1, \alpha_2) = 2$**，故向量组** α_1, α_2 **线性无关．**

例5：已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且

$$\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2，\beta_2 = \alpha_2+\alpha_3，\beta_3 = \alpha_3+\alpha_1，$$

试证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关．

解题思路：

- ✓ **直接利用定义证明；**
- ✓ **转化为齐次线性方程组的问题；**
- ✓ **转化为矩阵的秩的问题．**

（P.89定理5）

（1）若向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性相关， 则向量组 B： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$也线性相关.

其逆否命题也成立，即若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

（2）m 个 n 维向量组成的向量组，若向量的个数m大于向量的维数 n , 即$m>n$，则向量组一定线性相关.

特别地， $n+1$个 n 维向量必线性相关.

（3）设向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关， 而向量组 B： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量 β 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

向量组与其部分组的线性相关性的关系

如果一个向量组的一个非空部分组线性相关，那么这个向量组就线性相关；

反之，如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.

口诀：部分相关，全体相关；全体无关，部分无关

例6

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，

证明：（1） α_1能由α_2, α_3线性表示；

（2） α_4不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.