§5 向量空间

封闭的概念

定义：所谓**封闭**，是指集合中任意两个元素作某一运算得到的结果仍属于该集合．

例：试讨论下列数集对四则运算是否封闭？

- 整数集 Z
- 有理数集 Q
- 实数集 R

向量空间的概念

定义：设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的**加法**和**乘数**两种运算封闭，

具体地说，就是：

✓ 若 $\alpha \in V$，$\beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$.（对加法封闭）

✓ 若 $\alpha \in V$，$\lambda \in R$，则 $\lambda\alpha \in V$.（对乘数封闭）

那么就称集合 V 为**向量空间**.

例1：下列哪些向量组构成向量空间？

1. n 维向量的全体R^n

2. 集合 $V_1 = \{ (0, a_2, \ldots, a_n)^T \mid a_2, \ldots, a_n \in R \}$

3. 集合 $V_2 = \{ (1, a_2, \ldots, a_n)^T \mid a_2, \ldots, a_n \in R \}$

4. 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

5. 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$

解：集合 R^n，V_1，S_1 是向量空间，

集合 V_2，S_2 不是向量空间．（均破坏了封闭性）

定义：齐次线性方程组的解集称为齐次线性方程组的解空间.

例2：设 α, β 为两个已知的 n 维向量，集合

$$L = \{\lambda\,\alpha + \mu\,\beta \mid \lambda, \mu \in R\}$$

是一个向量空间吗？

解：设 $\xi_1, \xi_2 \in L$， $k \in R$，因为

- $\xi_1 + \xi_2 = (\lambda_1\alpha + \mu_1\beta) + (\lambda_2\alpha + \mu_2\beta)$

  $= (\lambda_1 + \lambda_2)\,\alpha + (\mu_1 + \mu_2)\,\beta \in L$

- $k\,\xi_1 = k\,(\lambda_1\alpha + \mu_1\beta) = (k\lambda_1)\,\alpha + (k\mu_1)\,\beta \in L$

所以，L 是一个向量空间．

定义：把集合

$$L = \{\lambda \alpha + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$$

称为由向量 α, β 所生成的向量空间 .

一般地，把集合

$$L = \{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R\}$$

称为由向量$\alpha_1 , \alpha_2 , ..., \alpha_m$ 所生成的向量空间 .

例3：设向量组$\alpha_1 , \alpha_2 , ..., \alpha_m$ 和 $\beta_1 , \beta_2 , ..., \beta_s$ 等价，记

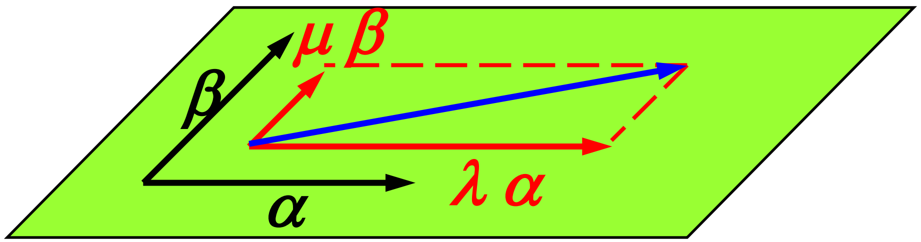
$$L_1 = \{ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R\},$$

$$L_2 = \{ \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \ldots + \mu_s\beta_s \mid \mu_1, \mu_2, ..., \mu_s \in R\},$$

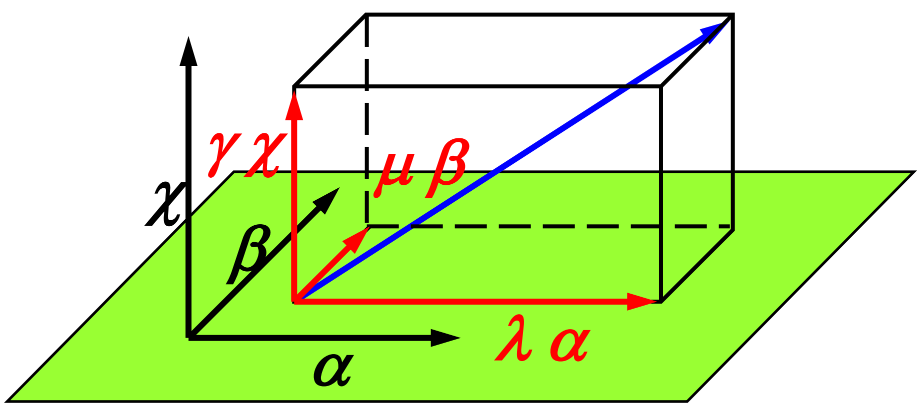
试证 $L_1 = L_2$.

结论：等价的向量组所生成的空间相等 .

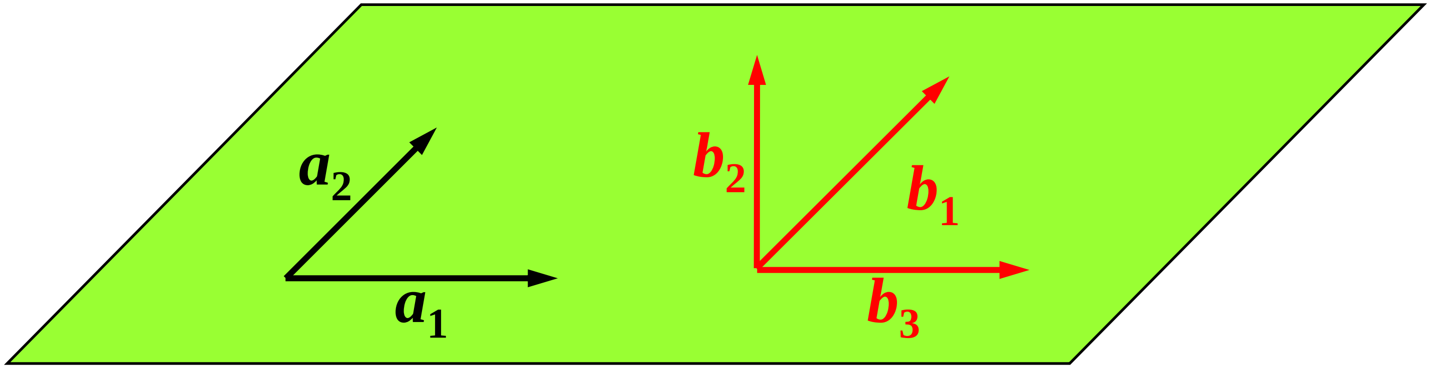
$$L = \{\lambda\,\alpha \mid \lambda \in R\}$$



$$L = \{\lambda\,\alpha + \mu\,\beta \mid \lambda, \mu \in R\}$$



$$L = \{\lambda\,\alpha + \mu\,\beta + \gamma\,\chi \mid \lambda, \mu, \gamma \in R\}$$



$$L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$$

$$L_2 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in R \}$$

则 $L_1 = L_2$

$$L_3 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R \}$$

问题：$L_1 = L_2 = L_3$?

子空间的概念

定义：如果向量空间 V 的非空子集合 V_1 对于 V 中所定义的加法及乘数两种运算是封闭的，则称 V_1 是 V 的子空间．

例4：

1. n 维向量的全体R^n
2. 集合 $V_1 = \{ (0, a_2, \dots, a_n)^T \mid a_2, \dots, a_n \in R \}$
3. 集合 $V_2 = \{ (1, a_2, \dots, a_n)^T \mid a_2, \dots, a_n \in R \}$

解：V_1 是 R^n 的子空间，V_2 不是 R^n 的子空间．

向量空间的基的概念

定义：设有向量空间 V ，如果在 V 中能选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ，满足

① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关；

② V 中任意一个向量都能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示；

那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个**基**．

r 称为**向量空间 V 的维数**，并称 V 为 **r 维向量空间**．

向量空间	→	向量组
向量空间的基	→	向量组的最大无关组
向量空间的维数	→	向量组的秩

1. n 维向量的全体 R^n

$\boxed{n+1\text{个}n\text{维向量必线性相关}}$

解：E_n 的列向量组是 R^n 的一个基，故R^n 的维数等于 n .

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,\cdots,0)^T, \cdots, e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

2. 集合 $V_1 = \{ (0, a_2, \ldots, a_n)^T \mid a_2, \ldots, a_n \in R \}$

解：E_n 的后 $n-1$个列向量是V_1 的一个基，故 V_1 的维数等于 $n-1$.

$$e_2=(0,1,\cdots,0)^T, e_3=(0,0,1,\cdots,0)^T, \cdots, e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

结论：若V_1 是V 的子空间，则V_1 的维数不超过V 的维数.

3. n 元齐次线性方程组的解集 $S = \{ x \mid Ax = 0 \}$

解：齐次线性方程组的基础解系是 S 的一个基，故 S 的维数等于 $n-R(A)$. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-R(A)}$是$S$的一组基

4. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 所生成的向量空间

$$L = \{ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R \}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，则

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 就是向量空间 L 的一个基．

若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则

向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

一定等价于向量组 A 的一个最大无关组 A_0 ： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$

从而 $L = L_1 = \{ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in R \}$

故向量组 A_0 就是 L 的一个基， A_0 中向量的个数就是 L 的维数.

定义：如果在向量空间 V 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$，那么$V$ 中任意一个向量可唯一表示为

$$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_r\alpha_r$$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中的**坐标**．

例5：$E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^3 的一个基，

那么 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$

b 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量组称为 R^n 的**自然基**．

上三角形矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的列向量组也是 R^3 的一个基，那么

$$\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-3\alpha_1-2\alpha_2+7\alpha_3$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2e_1+5e_2+7e_3$$

结论：同一个向量在不同基下的坐标是不同的 .

一般默认向量的坐标都是在自然基下的，除非特别说明.

例6：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一个基，并求$\beta_1, \beta_2$在这个基中的坐标.

分析：

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一个基 $\Longleftrightarrow$ $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$
- β_1, β_2在这个基中的坐标 $\Longleftrightarrow$ 用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$表示$\beta_1, \beta_2$
- 当$A \overset{r}{\sim} B$时，A的列向量组与B的列向量组有相同的线性关系．（P. 93 例11）

为此，考虑把$(A, B) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$化为行最简形矩阵．

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix},\quad B=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}$$

解：

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&2&-1&1&4\\2&-1&2&0&3\\-1&2&2&-4&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

因为矩阵的初等行变换不改变列向量组中向量之间的线性关系

于是 $\beta_1=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_2=\frac{4}{3}\alpha_1+\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3$

基变换

在 n 维向量空间中，任意 n 个线性无关的向量都可以作为n维向量空间的一组基，即n维向量空间的基不唯一．对不同的基，同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的. 以下要研究的问题是，随着基的改变，向量的坐标是怎样变化的.

【注意】：在没有特别说明的情况下，我们默认向量的坐标都是在自然基下的.

定义： 设两组基$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$和$B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$的关系可用矩阵的形式表示为:$B = AP$ (基变换公式)

用基A表示基B的表示式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

则称矩阵$P=(p_{ij})_{n\times n}$为旧基A到新基B的过渡矩阵.

$\because B = AP \Rightarrow P = A^{-1}B$, 又$\because A$与$B$均是可逆的, $\therefore P$可逆

所以过渡矩阵是可逆矩阵

注意：P的每一列就是基B由基A线性表示时的系数，也就是基B在基A下的坐标。

定理： 设基$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$到基$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的过渡矩阵为$P$，向量 ξ 在A,B下的坐标分别为

$$x=(x_1,\cdots,x_n)^T,\quad y=(y_1,\cdots,y_n)^T$$

则 $Py=x$ 或 $y=P^{-1}x$ (坐标变换公式)

证： 由已知条件 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

$$\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$$

$$\Leftrightarrow \xi=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

即

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

因为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

所以$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$\because$向量ξ在基A下的坐标是唯一的$\Rightarrow x=Py\Leftrightarrow y=P^{-1}x$

例 7 在 R^4 中，求由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵，并求向量 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标. 设（这些都是在自然基下的坐标）

$$\begin{cases}\beta_1=(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}}, \\ \beta_2=(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}, \\ \beta_3=(1,1,-1,2)^{\mathrm{T}}, \\ \beta_4=(3,2,0,-1)^{\mathrm{T}},\end{cases} \qquad \begin{cases}\eta_1=(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}, \\ \eta_2=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}}, \\ \eta_3=(-2,2,1,-1)^{\mathrm{T}}, \\ \eta_4=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

$$\xi=(3,-1,2,4)^{\mathrm{T}}.$$

解 设由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为 P. 则 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)P$.

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)P.$$

令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$，$A = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$，

注意：过渡矩阵P的列向量是基A在基B下的坐标

于是有 $A = BP$，解之得 $P = B^{-1}A$.

用矩阵的初等行变换求 $B^{-1}A$：

$$B^{-1}(B \mid A) = (B^{-1}B \mid B^{-1}A) = (E \mid B^{-1}A) = (E \mid P)$$

$$(B \mid A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}(B\mid A)=(B^{-1}B\mid B^{-1}A)=(E\mid B^{-1}A)=(E\mid P)$$

$$(B\mid A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{39}{14} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{20}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{17}{14} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

窍门：初等行变换不改变列向量组之间的线性关系，所以当B被变成E的同时，后面的4列恰好就是基A在基B下的坐标

即得 $P = B^{-1}A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 39 & 20 \\ 22 & -32 & 40 & 4 \\ -28 & 42 & -56 & 14 \\ 5 & 8 & -17 & -8 \end{pmatrix}$

求向量 ξ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标, 即用基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 表示向量 ξ. 用矩阵的初等行变换来求解：先构造矩阵 $M = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \xi) = (A, \xi)$

$$A^{-1}(A, \xi) = (A^{-1}A, A^{-1}\xi) = (E, A^{-1}\xi)$$

原理：矩阵的初等行变换不改变列向量组中向量之间的线性关系。相当于求向量 ξ 由基 A 线性表示的系数，并且表法唯一，所以就是 ξ 在基 A 下的坐标。

$$M=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi)=(A,\xi)$$

再对矩阵 M 实施初等行变换，使之成为行最简形矩阵即得.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{109}{85} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{85} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{20}{17} \end{pmatrix}$$

所以向量 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标为

$$\left(-\frac{109}{85},-\frac{4}{85},-\frac{8}{5},\frac{20}{17}\right)^T$$

练习1、 已知在向量空间P^4中的两组基分别是:

$$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\quad \alpha_2(1,-1,1,1)^T,$$

$$\alpha_3=(-1,2,1,1)^T,\ \alpha_4=(-1,-1,0,1)^T;$$

及 $$\beta_1=(2,1,0,1),\quad \beta_2=(0,1,2,2),$$

$$\beta_3=(-2,1,1,2)^T,\quad \beta_4=(1,3,1,2);$$

求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵和坐标变换公式.

解 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$$

令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

于是 $B=AP\Rightarrow P=A^{-1}B$

故过渡矩阵为 $A^{-1}B$，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=(A^{-1}B)^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

用矩阵的初等变换求 $B^{-1}A$：把矩阵 $(B \mid A)$ 中的 B 变成 E，则 A 即变成 $B^{-1}A$． 计算如下:

$$(B \mid A)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

即得

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$