§3 向量组的秩

课本P. 88定理4：

- 向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ **线性相关**的充要条件是矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 的秩**小于**向量的个数 m $\Leftrightarrow R(A)<m$

- 向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ **线性无关**的充要条件是矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 的秩**等于**向量的个数 m $\Leftrightarrow R(A)=m$

复习：矩阵的秩

定义：设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

结论： 矩阵的秩

= 矩阵中非零子式的最高阶数

= 矩阵对应的行阶梯形矩阵的非零行的行数

向量组的秩的概念

定义：设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$，满足

① 向量组 A_0 ：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有$r+1$个向量的话）都线性相关；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大线性无关向量组**，简称**最大无关组（或称极大无关组）**．

最大无关组所含向量个数 r 称为**向量组 A 的秩**，记作R_A ．

当$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$时，记$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R_A$

定理：矩阵的秩=它的列向量组的秩=它的行向量组的秩．

（复习 P.84 定理2 、P.85 定理3 ）

向量组 B：$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$（ P.84 定理2 ）

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$（ P.85 定理3 ）

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$$

P.92 定理2’ 、P.92 定理3’

向量组 B：$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$$

$$\Rightarrow R(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

例 (P.94): 向量组 B：$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示，且它们的秩相等，则向量组 A 和向量组 B 等价.

例 1　设有向量组

$$\alpha_1^T=(2,-1,3,1),\ \alpha_2^T=(4,-2,5,4),\ \alpha_3^T=(2,-1,4,-1)$$

验证部分组α_1,α_2、α_2,α_3、α_1,α_3都是它的最大线性无关组.

解　因为两个向量构成的向量组线性相关的充要条件是它们的分量对应成比例. 而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个向量的分量都不成比例,

所以向量组 α_1,α_2、α_2,α_3、α_1,α_3都是线性无关。

又因为 $3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0,$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此：

$\alpha_1,\alpha_2;\alpha_2,\alpha_3;\alpha_1,\alpha_3$都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的最大线性无关组.

结论：一个向量组的最大线性无关组不一定是唯一的.

最大无关组的等价定义（P91推论）

定义：设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$，满足

(1) 向量组 A_0 ：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有 $r+1$个向量的话）都线性相关；

(2’) 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大无关组**．

(2) $\Longleftrightarrow$ (2’)

最大线性无关组的性质：

1）一个向量组的最大无关组不是唯一的，但是它的各个最大线性无关组所含向量的个数是相同的.

（其“个数”就是这个向量组的秩）

2）一个向量组的任意一个最大线性无关组都与向量组本身等价.

3）一个向量组的任意两个最大无关组都等价.

4）一个线性无关的向量组的最大无关组是其自身.

P93例11

例2：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的列向量组的秩，并求此向量组的一个最大线性无关组．然后把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示。

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A)=3$ ．

$$
A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

第二步选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，

在此例题中就是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$
A_0=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0
$$

$R(A_0)=3$,故由**P.88定理4**知A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个线性无关的部分组.

$$A_0=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

在矩阵*A*任取 4 个列向量，根据 R(A) = 3 可知：

这4 个列向量线性相关

故*A*中任意4个列向量都是线性相关的.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$就是矩阵 *A* 的列向量组的一个最大线性无组.

所以矩阵 *A* 的列向量组的秩等于3.

- 若 $A \overset{r}{\sim} B$, 则A的列向量组与B的列向量组有相同的线性相关性，即**初等行变换**不改变矩阵的**列向量组**的线性关系.

- 向量组的最大无关组一般是不唯一的 .

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$； $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$； $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$； $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 都是矩阵A的列向量组的最大线性无关组。

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然$R(A)=3$

思考：如何把不属于最大无关组的其他列向量用最大无关组线性表示？即α_3, α_5 表示成最大无关组α_1, α_2, α_4 的线性组合？

思路1：利用P.83 定理1 的结论

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Longleftrightarrow$ **线性方程组 $Ax=b$ 有解**

令 $A_0=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$

求解 $A_0x=\alpha_3$

$A_0x=\alpha_5$

思路2：利用矩阵 A 的行最简形矩阵（这个方法最简便）.

解（续）：为把 α_3, α_5 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的线性组合，把矩阵A 再变成行最简形矩阵

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{matrix} \end{array} = B$$

于是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 是同解的，即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 + x_5\alpha_5 = 0$$

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + x_5\beta_5 = 0 \quad \text{是同解的．}$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{matrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{matrix}\end{array}=B$$

可看出：

$$\beta_3=-\beta_1-\beta_2$$
$$\beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4$$

所以：

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$$
$$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$$

最大无关组的意义

结论：向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的．

- 用 A_0 来代表 A，掌握了最大无关组，就掌握了向量组的全体．特别，当向量组 A 为无限向量组时，就能用有限个向量构成的部分组来代表全部的无限多个向量组．

例如:当方程组有无穷多解时，用<u>有限个解</u>来表示全体解.

比如：P.91 例9（注意：$n+1$个n维向量必线性相关）

- 凡是对有限向量组成立的结论，用最大无关组作过渡，立即可推广到无限向量组的情形中去．

例5：设齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2 \qquad\quad -x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$$
的通解是

P.91例9

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩．

$$S=\{x=c_1\xi_1+c_2\xi_2 \mid c_1,c_2\in R\}$$

由于ξ_1,ξ_2的四个分量不成比例，故ξ_1,ξ_2线性无关，并且$\forall\alpha\in S$，显然α能由ξ_1,ξ_2线性表示，由最大无关组定义可知，ξ_1,ξ_2就是S的一个最大无关组，从而$R_S=2$

例4： 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，称为**n维向量空间**，求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩．

解： n 阶单位矩阵 $E=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组就是 R^n 的一个最大无关组，所以R^n 的秩等于n ．

思考： 上三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个最大无关组吗？ 答：是！

$\boxed{n+1\text{个}n\text{维向量必线性相关}}$