第四章
向量组的线性相关性

§1 向量组及其线性组合

定义： n 个有次序的数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的**数组**称为 **n 维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个**分量**，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量． 记作 $\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- 分量全为实数的向量称为**实向量**．
- 分量全为复数的向量称为**复向量**．

备注：

- ✓ **本书一般只讨论实向量**（特别说明的除外）．
- ✓ 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量．

例1　点的坐标

在解析几何中我们已经看到，有些事物的性质不能用一个数来刻画. 例如，为了刻画一点在平面上的位置需要两个数，一点在空间中的位置需要三个数，**即点的坐标是n元有序数组.**

例2　力、速度、加速度

又如力学中的力、速度、加速度等，由于它们既有大小，又有方向，用一个数也不能刻画它们，在取定坐标系之后，它们可以用三个数来刻画. 几何中向量的概念正是它们的抽象.

力、速度、加速度要用 3 元有序数组来表示.

例 3　n 元方程组的解

一个 n 元方程组的解是由 n 个数组成，而这 n 个数作为方程组的解是一个整体，分开来谈是没有意义的. 即 n 元方程组的解是一个 n 元有序数组.

例 4　球的大小和位置

为了刻画一个球的大小和位置，需要知道它中心的坐标 (三个数) 以及它的半径，也就是说，球的大小和位置需要 4 个数来刻画.

即球的大小和位置要用 4 元有序数组来表示.

定义：若干个同维数的**列**向量（行向量）所组成的集合称为**向量组**．例如：α_1, α_2, ……, α_s（称为有限向量组）

例5： $R(A) < n$ 时，n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解，所以全体解组成的**向量组**含有无穷多个 n 维向量．

例6：

$$A_{34} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

定义：给定向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，对于任何一组实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**．

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个**线性组合的系数**．

定义：给定向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 和向量 β，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，使得

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m$$

则向量 β 是向量组 A 的线性组合，这时称**向量 β 能由向量组 A 的线性表示**．

例7：设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

e_1, e_2, e_3的线性组合

那么 $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2e_1+3e_2+7e_3$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量b ，必有

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量．

（或称 n 维单位向量组）

例8：判断 $\beta^T=(1,2)$是否可由 $\alpha_1^T=(1,0),\ \alpha_2^T=(2,0)$ 线性表示.

解：令 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1+2k_2=1\\0=2\end{cases}$$ 无解

则 β 不能由 α_1,α_2 线性表出.

例9 判断向量α能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出. 若能，写出它的一个线性组合.

$$\alpha^T = (2,-1,3,4)$$

$$\alpha_1^T = (1,2,-3,1),\ \alpha_2^T = (5,-5,12,11),\ \alpha_3^T = (1,-3,6,3)$$

解：设$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，即有方程组

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + k_3 = 2 \\ 2k_1 - 5k_2 - 3k_3 = -1 \\ -3k_1 + 12k_2 + 6k_3 = 3 \\ k_1 + 11k_2 + 3k_3 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

对方程组(1)的增广矩阵作初等行变换化阶梯阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组(1)有解．它的一般解为

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

k_3是自由未知量

所以：

α能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，但表法不唯一

令 $k_3 = 1$， 得(1)的一个解 (1,0,1) 从而有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \alpha_3$$

回顾：线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=5 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 矩阵方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Ax=b}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=b}$$

方程组有解？$\Leftrightarrow$ 向量 $\underset{b}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$ 可用 $\underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\alpha_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ 线性表示？

设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是m个n维列向量

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

向量b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A,b)$

此时，向量组A和系数矩阵A被认为是等同的

例10：设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，并求出表示式．

解：b 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在$\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$，使得$\boldsymbol{k}_1\alpha_1 + \boldsymbol{k}_2\alpha_2 + \boldsymbol{k}_3\alpha_3 = \boldsymbol{b}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{R(A)} = \boldsymbol{R(A,b)}$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为$R(A) = R(A, b) = 2$，所以向量 b 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示．

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \qquad +3x_3=2\\ \qquad x_2-2x_3=-1\end{cases}$

通解为 $x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$， c是任意常数

所以 $b=(-3c+2)\,a_1+(2c-1)\,a_2+c\,a_3$.

注意：表法不唯一

两个向量组等价的定义

书P83

定义 3 如果向量组B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$中每一个向量$\beta_i\ (i=1, 2, \dots, t)$都能由向量组$A$: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性表出，那么就称向量组$B$: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$可由向量组$A$: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$**线性表示**.

如果两个向量组可以相互线性表示，则称它们是**等价**的.

以下介绍怎样用分块矩阵的乘法来表示一个向量组可由另一个向量组线性表示.

设有向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 及 B：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$，若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

$$\beta_1 = \boldsymbol{k}_{11}\alpha_1 + \boldsymbol{k}_{21}\alpha_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_{m1}\alpha_m$$

$$\beta_2 = \boldsymbol{k}_{12}\alpha_1 + \boldsymbol{k}_{22}\alpha_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_{m2}\alpha_m$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_l = \boldsymbol{k}_{1l}\alpha_1 + \boldsymbol{k}_{2l}\alpha_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_{ml}\alpha_m$$

线性表示的系数矩阵

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1l} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{m1} & \boldsymbol{k}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ml} \end{pmatrix}$$

换一个角度看，若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$ ，即

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{array}\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则 $$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{\ln} \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，

B 为这一线性表示的系数矩阵．

注意：都是列向量

（P.84 定理2、P.85 定理3）

向量组 B：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

线性表示　设：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$

$\Leftrightarrow$ 存在系数矩阵 K，使得 $AK = B$

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解

$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$（P.77 定理6；P.84 定理2）

因为 $R(B) \le R(A, B)$（根据P.69⑤）

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$（P.85 定理3）

推论1：向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 及 B：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ 等价

$\Rightarrow R(A) = R(B)$

推论2：向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 及 B：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ 等价

$\Leftrightarrow R(A) = R(B) = R(A, B)$．（P.84 推论）

证明：向量组 A 和 B 等价

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{向量组 } B \text{ 能由向量组 } A \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \\ \text{向量组 } A \text{ 能由向量组 } B \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(B) = R(B, A) \end{cases}$$

显然有$R(A, B) = R(B, A)$，从而有$R(A) = R(B) = R(A, B)$．

例11 设：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$

证明：向量组$\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2$与$\boldsymbol{B}:\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价。

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(A)=R(A,B)=2 \qquad R(B)=2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R(A)=R(A,B)=R(B)}$$

所以向量组 A 与 B 等价。

回忆定义：n 阶单位矩阵的列向量叫做 n 维单位坐标向量

因为，对于任意的 n 维向量 b，必有

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵$E_n=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$的列向量组称为单位坐标向量组

由上面的表示式，可以看出任何的n维列向量组A均可由单位坐标向量组$e_1, e_2, \cdots, e_n$线性表示。

由P85推论3得：$R(A) \le R(e_1, e_2, \cdots, e_n) = R(E) = n, \Rightarrow R(A) \le n.$

例：设有$n \times m$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$，试证：$n$ 维单位坐标向量组与矩阵 A 的列向量组等价的充分必要条件是 $R(A) = n$

（即A是行满秩的，n 是向量的维 ）

小结

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ **线性方程组** $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A,b)$

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ **矩阵方程组** $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A,B)$ $\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A,B)$ $\Rightarrow$ $R(A) = R(B)$