§6 用配方法化二次型成标准形

一、拉格朗日配方法的具体步骤

用正交变换化二次型为标准形，其特点是**保持几何形状不变.**

问题：是否还有其它方法，也可以把二次型化为标准形？

问题的回答是肯定的。下面介绍一种行之有效的方法——**拉格朗日配方法.**

拉格朗日配方法的缺点是，往往会发生几何上的变形.

例 1 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形，并求所用的线性变换及变换矩阵.

解: 先按 x_1^2 及含有 x_1 的混合项配成完全平方

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(x_1^2+2x_1(x_2-x_3))+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3\\&=2(x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2)\\&\quad-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\end{aligned}$$

在上式中，再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3$$
$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2-5x_3^2$$
$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

这是一个非退化的线性变换吗？

则得二次型的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

由 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad\ \ x_2 - 2x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad\ x_3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = \qquad\ \ y_2 + 2y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad\ y_3 \end{cases}$

即为所求的线性变换为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

显然有 $|C| = 1 \neq 0$，所以这是一个非退化的线性变换，但不是正交变换.

变换矩阵为： $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

例2、求 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 的标准形.

解：作可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \quad 即, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则 $$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-6(y_1-y_2)y_3 +2(y_1+y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$=2y_1^2-4y_1y_3+2y_3^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1-y_3)^2-2y_3{}^2-2y_2{}^2+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2y_2{}^2+8y_2y_3-8y_3^2+8y_3^2-2y_3{}^2$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

然后令 $\begin{cases} z_1=y_1 \qquad -y_3 \\ z_2= \qquad y_2-2y_3 \\ z_3= \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1 \qquad +z_3 \\ y_2= \qquad z_2+2z_3 \\ y_3= \qquad\qquad z_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=2z_1{}^2-2z_2{}^2+6z_3{}^2$

所作的可逆（非退化）线性变换是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 = 2z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 6z_3{}^2$$

$$= (\sqrt{2}z_1)^2 - (\sqrt{2}z_2)^2 + (\sqrt{6}z_3)^2$$

可以继续作可逆的线性变换

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}z_1 \\ w_2 = \sqrt{6}z_3 \\ w_3 = \sqrt{2}z_2 \end{cases} \Rightarrow f = 2z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 6z_3{}^2 = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$$

∴二次型的标准形不唯一！但规范形唯一

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}; \begin{cases} w_1 = \sqrt{2} z_1 \\ w_2 = \sqrt{6} z_3 \\ w_3 = \sqrt{2} z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

所以作可逆（非退化）线性变换：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$$

这是 f 的规范形

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$, 则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n \text{且} k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

练习题： 化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

$$=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2$$

$$+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+2x_3\right)^2.$$

令 $$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + 2x_3\right)^2.$$

$$= y_1^2 + y_2^2. \quad (\text{不显含有} y_3, \text{是一个柱面})$$

所用线性变换的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

二、小结

将一个二次型化为标准形，可以用**正交变换法**，也可以用**拉格朗日配方法**，或者其它方法，这取决于问题的要求．如若要求使用正交变换求标准形,无疑应该使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用．正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单．需要注意的是，**使用不同的方法,所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的系数非零的项数一定是相同的，其项数等于所给二次型的秩．因此非退化的(可逆的)线性变换不改变二次型的秩.**

思考题

化二次型

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

思考题解答

解 由于所给二次型不含平方项,故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

有 $$f = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2,$$

再令 $$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$ 或 $$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

得标准形 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$,

所用可逆线性变换为

$$
\begin{cases}
x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\
x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\
x_3 = z_3
\end{cases}
$$

和正交变换比较，配方法不能保证变换前后刚体是不变的，可能会产生变形，配方法的变换是可逆的，只能保证变换前后二次型的秩不变