第五章
相似矩阵及二次型

§1 向量的内积、长度及正交性

向量的内积

定义：设有n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

令 $$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \ ,$$

则称 $[x, y]$ 为向量 x 和 y 的**内积**．

说明：

- 内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数．
- 内积可用矩阵乘法表示：当x 和 y 都是**列向量**时，

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y \ .$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y\ .$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- **对称性：** $[x, y] = [y, x]$.
- **线性性质：** $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

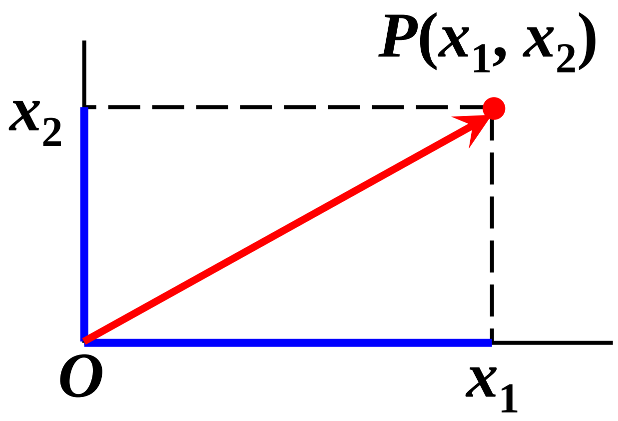
$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

- 当 $x = 0$（零向量）时，$[x, x] = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$[x, x] > 0$.
- **施瓦兹（Schwarz）不等式**

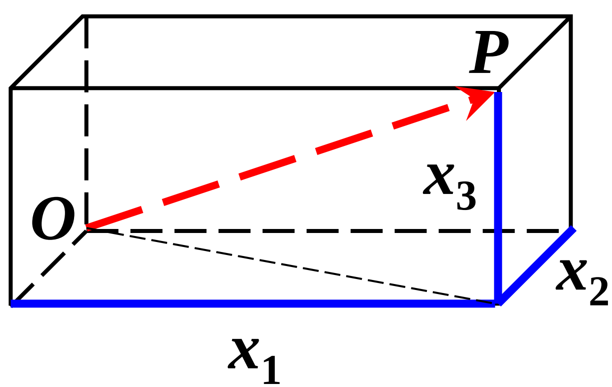
$$[x, y]^2 \leq [x, x]\,[y, y]\ .$$

回顾：向量（向径）的长度



若列向量 $x = (x_1, x_2)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



若列向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

（将向量的长度的概念推广到n维向量空间中）

向量的长度

定义：令 $\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的**长度**（或**范数**）$\Rightarrow \|x\|^2 = [x,x]$

当 $\|x\| = 1$时，称 x 为**单位向量**．

向量的长度具有下列性质：

- **非负性**：当 $x = 0$（零向量）时，$\|x\| = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$\|x\| > 0$．

  $\Rightarrow \forall x \in R^n, \Rightarrow \|x\| \geq 0$

- **齐次性**：$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$．
- **三角不等式**：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$．

向量的正交性

施瓦兹（Schwarz）不等式：$[x, y]^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$

当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，$\left|\dfrac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}\right| \le 1$

定义：当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，把 $\theta = \arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}$

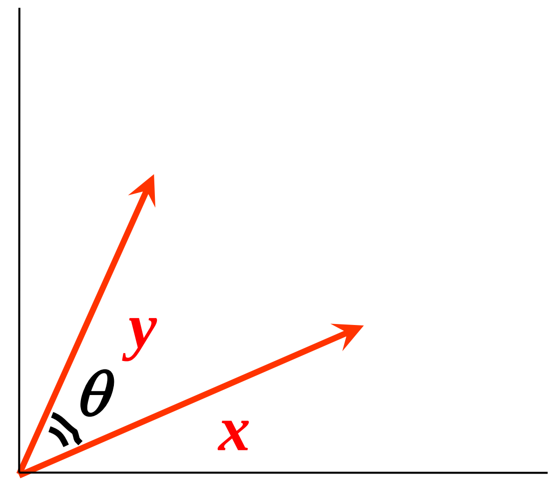
称为 n 维向量 x 和 y 的**夹角**．

$$0 \le \theta \le \pi$$

当 $[x, y] = 0$，称向量 x 和 y 正交．

显然此时：$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

结论：若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交．



定义：两两正交的**非零向量**组成的向量组成为**正交向量组**．

定理1：若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是一组两两**正交**的**非零向量**，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关．

证明：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = 0$（零向量），那么

$$
\begin{aligned}
0 = [\alpha_1, 0] &= [\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r] \\
&= k_1[\alpha_1, \alpha_1] + k_2[\alpha_1, \alpha_2] + \ldots + k_r[\alpha_1, \alpha_r] \\
&= k_1[\alpha_1, \alpha_1] + 0 + \ldots + 0 \\
&= k_1 ||\alpha_1||^2
\end{aligned}
$$

因为 α_1 是非零向量，所以 $||\alpha_1|| \neq 0$，从而 $k_1 = 0$．

同理可证，$k_2 = k_3 = \ldots = k_r = 0$．

综上所述，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关．

■ **线性无关向量组未必是正交向量组：**

$$\text{例如：}\ \varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

■ n维向量空间R^n中正交向量组所含向量个数$\leqslant n$

分析：假如正交向量组中含有n+1个n维向量，由P.112定理1得它们必定是线性无关的，但是又根据P.89定理5（2）可知：n+1个n维向量必线性相关，产生矛盾。

例1：已知 3 维向量空间R^3中两个向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量α_3 ，使$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$两两正交．

分析：显然$\alpha_1\perp\alpha_2$ ．

解：设$\alpha_3=(x_1, x_2, x_3)^T$ ，若$\alpha_1\perp\alpha_3$ ，$\alpha_2\perp\alpha_3$ ，则

$$[\alpha_1, \alpha_3]=\alpha_1^T\alpha_3=x_1+x_2+x_3=0$$

$$[\alpha_2, \alpha_3]=\alpha_2^T\alpha_3=x_1-2x_2+x_3=0$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

得 $:\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\\x_3=\ \ x_3\end{cases}\Rightarrow$ 通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$c$ 任意常数

从而有基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $c=1$， 得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

注意 α_3 不唯一

定义： n 维向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$是向量空间 $V \subset R^n$中的向量，满足

- ✓ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$是向量空间 V 中的一个基（最大无关组）；
- ✓ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$是一个正交向量组 （称为$V$ 的一个**正交基**）；
- ✓ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$都是单位向量，

则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ 是V 的一个**规范正交基**（或标准正交基）．

例2： $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

是 R^4 的一个规范正交基．

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

也是 R^4 的一个规范正交基．

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个基，但不是规范正交基．

问题： 向量空间 V 中的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 怎样转化成

⇓

向量空间 V 中的一个规范正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^n$的一组基，

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化，得一正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$

做法: 取$\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-k_1\beta_1$,令$[\beta_1,\beta_2]=0$（正交）

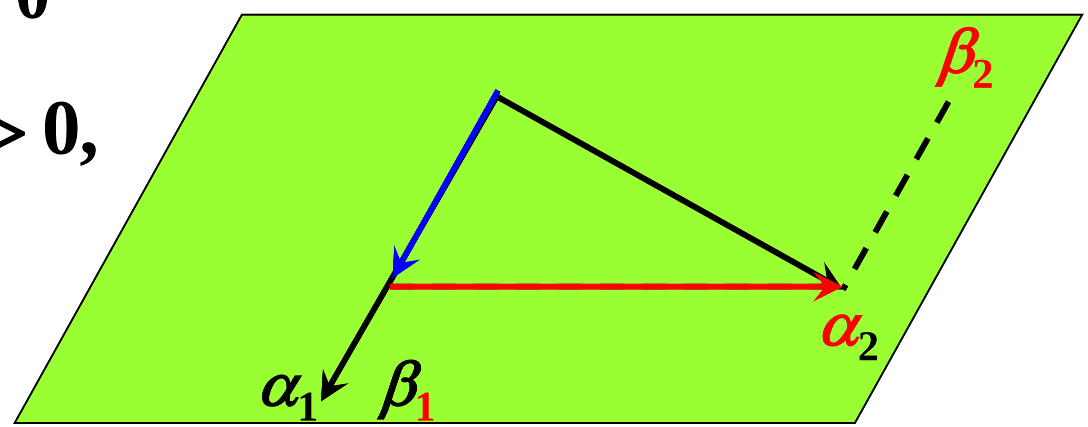
即 $[\beta_1,\alpha_2-k_1\beta_1]=[\beta_1,\alpha_2]-[\beta_1,k_1\beta_1]$

$=[\beta_1,\alpha_2]-k_1[\beta_1,\beta_1]=0$

因为$\beta_1\neq 0$, $[\beta_1,\beta_1]>0$,

所以 $k_1=\dfrac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}$

得$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$



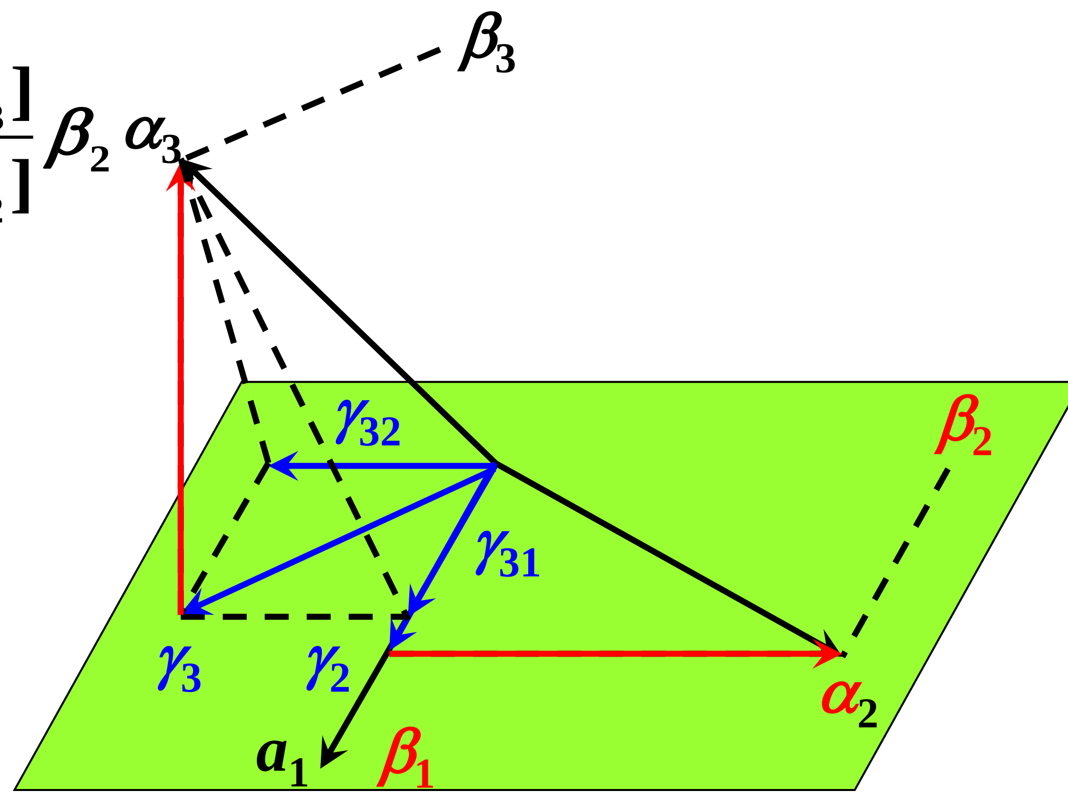
取 $\beta_3=\alpha_3-k_1\beta_1-k_2\beta_2$ 令 $[\beta_1,\beta_3]=0$（正交），

$[\beta_1,\beta_3]=[\beta_1,\alpha_3-k_1\beta_1-k_2\beta_2]$ $\qquad$ $[\beta_2,\beta_3]=0$（正交）

$=[\beta_1,\alpha_3]-k_1[\beta_1,\beta_1]=0$ $\qquad$ 解得 $k_1=\dfrac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}$,

同理解得 $\quad k_2=\dfrac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}$,

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$



于是β_1,β_2,β_3是一个正交向量组

将上述结果推广到向量空间中的基向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

求规范正交基的方法 基 ⇨ 正交基 ⇨ 规范正交基

第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \beta_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

……

$$b_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$

于是 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 两两正交，并且与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 等价，即 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 是向量空间 V 中的一个**正交基**．

特别地，$\beta_1, \ldots, \beta_k$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 等价（$1 \le k \le r$）．

第二步：单位化

设 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 是向量空间 V 中的一个**正交基**，那么令

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2, \cdots,\ \varepsilon_r = \frac{1}{\|\beta_r\|}\beta_r$$

从而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ 是向量空间 V 中的一个**规范正交基**．

例3：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化．

解：第一步正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例3：设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化．

解：第二步单位化，令

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例4、 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，试求非零向量 α_2, α_3，使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

解： 若 $\alpha_1 \perp \alpha_2$，$\alpha_1 \perp \alpha_3$，则

$$[\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1^T \alpha_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$[\alpha_1, \alpha_3] = \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= \xi_1 \\ a_3 &= \xi_2 - \frac{[\xi_1, \xi_2]}{[\xi_1, \xi_1]}\xi_1 \end{aligned}}$$

即 α_2, α_3 应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\text{正交化}}{\Rightarrow} \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

然后把基础解系正交化即为所求．（以保证 $\alpha_2 \perp \alpha_3$ 成立）

注意齐次线性方程组解的线性组合还是解

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，（即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，）则称矩阵 A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**．

$$A^T A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

于是

$$\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

从而可得

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的**列向量**都是单位向量，且两两正交．即 A 的**列向量组**构成R^n 的规范正交基．

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**．

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

又因为 $A^{\mathrm{T}}A=E$ <=> $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$ <=> $AA^{\mathrm{T}}=E$ ，所以

$$AA^T=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\left(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_n^T\right)=\begin{pmatrix}\beta_1\beta_1^T & \beta_1\beta_2^T & \cdots & \beta_1\beta_n^T\\ \beta_2\beta_1^T & \beta_2\beta_2^T & \cdots & \beta_2\beta_n^T\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \beta_n\beta_1^T & \beta_n\beta_2^T & \cdots & \beta_n\beta_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$[\beta_i,\beta_j]=\beta_i\beta_j^T=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

这里$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是正交矩阵$A$的行向量组

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，

则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**．

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基．

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的行向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的行向量组构成R^n 的规范正交基.

例：正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

显然，P 的列向量组是 R^4 的一个规范正交基

$$e_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

例4：验证矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

证明：P 的每个列向量都是单位向量，且两两正交，

所以 P 是正交阵.

正交矩阵具有下列性质：

- ✓ **若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且$A^{-1}=A^{T}$，**
- ✓ 若 A 是正交阵，**则 $|A| = 1$ 或 -1．**
- ✓ **若 A 和B是正交阵，则 AB 也是正交阵．**

定义：若 P 是正交阵，则线性变换 $y = Px$ 称为正交变换．

$$\| y \|$$

结论：经过正交变换，线段的长度保持不变（从而三角形的形状保持不变），这就是正交变换的优良特性．

$$[P\alpha, P\beta] = (P\alpha)^T P\beta = \alpha^T P^T P\beta = \alpha^T \beta$$

结论：经过正交变换，向量的内积保持不变.