§5 二次型及其标准形

- 解析几何中，二次曲线的一般形式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

通过选择适当的旋转变换 $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$

使得二次曲线标准化为：$mx'^2 + ny'^2 = 1$ ．

定义：含有 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$$+2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为**二次型**．

令 $a_{ij} = a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j$ ，于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$$+2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$
$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$

令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

对称矩阵

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^TAx$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^TAx$$

对称矩阵的二次型

二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义: 对称矩阵 A 的秩也叫做二次型 f 的秩．

例 1 已知二次型 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$,

写出二次型的矩阵 A.

解 设 $f=x^T Ax$,则 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

例 2 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-3x_2^2+x_3^2-4x_4^2$$
$$-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_1x_4-8x_2x_3-4x_2x_4$$

写出二次型的矩阵 A.

解 设 $f=x^T Ax$, 则 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ -1 & -3 & -4 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

对于二次型 $f = x^T Ax$ ，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

记作: $x = Cy$, C是可逆矩阵

使二次型只含平方项，即 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2$

定义：只含平方项的二次型称为二次型的标准形（或法式）.

如果标准形的系数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 只在$-1, 0, 1$三个数中取值,

即 $f = z_1^2 + \ldots + z_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$

则上式称为二次型的规范形.

说明：这里只讨论实二次型，所求线性变换也限于实数范围.

对于二次型 $f = x^T Ax$，寻找可逆的线性变换

$x = Cy$， C是可逆矩阵

将可逆的线性变 $x = Cy$ 代入 $f = x^T Ax$ 之中， 则

$$f = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T (\boxed{C^T AC})y$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^n$$

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有**可逆**矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B \;,$$

则称矩阵A 和 B **相似**．（P.121定义7）

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有**可逆**矩阵 C 满足

$$C^{T}AC = B \;,$$

则称矩阵A 和 B **合同**.（P.129定义9）

显然，

- $B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$

  即若 A 为对称阵，且 A 和 B 合同，则 B 也为对称阵．

- $R(B) = R(A)$ ．（P67 推论）

经过可逆变换后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC = B$，且二次型的秩不变.

若二次型 f 经过可逆变换 $x = C y$ 变为标准形，即

$$f = x^T Ax$$

$$C^T AC^T = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

问题：对于对称阵 A，寻找可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角阵,

（即寻找可逆矩阵C, 使对称矩阵A合同于一个对角矩阵）

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{T}A = E$，即 $A^{-1} = A^{T}$，则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**．(P115定义4)

定理7：设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有**正交阵** P，使得

$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$，即$A$与$B$既相似又合同

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵（不唯一）.

（P.124定理7）

定理8：任给二次型 $f(x) = x^{T}Ax$ （其中$A = A^{T}$），总存在**正交变换** $x = Py$，使 f 化为**标准形**

$$f(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值．

推论：任给二次型 $f(x) = x^{T}Ax$ （其中$A = A^{T}$），总存在**可逆变换** $x = Cz$，使 $f(Cz)$ 为**规范形**.

推论：任给二次型 $f(x) = x^TAx$（其中$A = A^T$），总存在**可逆变换** $x = Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

证明： $f(x) = f(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

若$R(A) = r$，不妨设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 不等于零，$\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$,

$$\text{令}\quad K = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}, \text{其中} k_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i \le r, \\ 1, & i > r. \end{cases}$$

则 K 可逆，变换 $y = Kz$ 把 $f(Py)$ 化为

$f(x) = f(Py) = f(PKz) = (PKz)^{\mathrm{T}} A (PKz) = z^TK^TP^TAPKz = z^TK^T\Lambda Kz$

其中

$$K^T \Lambda K = diag\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}, \cdots, \frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}, 0, \cdots, 0\right)$$

例3：求一个正交变换 $x = Py$，把二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形．

解：二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

根据P.125例12的结果，有正交阵 $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是正交变换 $x = Py$ 把二次型化为标准形

$$f = -2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

注意：这里是一个正交变换，所以几何上没有变形(P116)

$$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2 \quad \Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果要把 f 化为规范形，

$$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2=-(\sqrt{2}y_1)^2+y_2^2+y_3^2$$

令：$\begin{cases} z_1=y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=\sqrt{2}y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_1 \end{cases} \Rightarrow K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由 $y=Kz$ 可得 f 的规范形：$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$ (书上有错)

注意：现在的规范性不是正交变换得来的，所以几何上已经发生了变形。

例 用正交线性替换化下列二次型为标准形，并求出所作的正交线性替换：

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$；

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(1) 解 二次型 f 的矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

A 为特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1+\lambda)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2.$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$时, 解方程组 $(A+E)X = 0,$

即 $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3=2$ 时, 解方程组$(2E-A)X=0$,

即 $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$, 得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

则 p_1、p_2、p_3 为 A 的三个线性无关的特征向量且这三个向量两两正交. 令

$$e_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{p_3}{\|p_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $$P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则 $$P^{-1}=P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

且 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$,

令 $x = Py$, 则 f 的标准形为

$$f = x^T Ax = y^T (P^T AP) y = y^T \Lambda y$$

$$= -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2 \ .$$

所作的正交替换为 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad -\dfrac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{cases}$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(2) 解 二次型 f 的矩阵 A 为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$,

A 为特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-5)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$, $\lambda_3=-4$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时, 解方程组 $(5E-A)X=0$,

即 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$, 得 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3=-4$ 时, 解方程组 $(4E+A)X=0$,

即 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$, 得 $p_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

令
$$e_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$e_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

令 $P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}=P^{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

且 $$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix},$$

令 $X=PY$，则 f 的标准形为

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)y=y^{\mathrm{T}}\Lambda y$$

$$=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2\ .$$

所作的正交替换为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} y_2 + \dfrac{2}{3} y_3 \\ x_2 = -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} y_2 + \dfrac{1}{3} y_3 \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} y_2 + \dfrac{2}{3} y_3 \end{cases}$$

正交变换的好处在于，保持向量的长度不变，保持向量间的夹角不变，保持向量间的内积不变，即保持变换前后的刚体不变。