



§2 向量组的线性相关性

例1 : 设 $E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

若 $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 即齐次线性方程组 $Ex = 0$ 只有零解。

例2: 对于向量组

$$\alpha_1^T = (1, -2, 3), \quad \alpha_2^T = (2, 1, 0), \quad \alpha_3^T = (1, -7, 9)$$

是否存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 成立.

解: 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 即有方程组

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ -2k_1 + k_2 - 7k_3 = 0 \\ 3k_1 + 9k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = 0$$

$$\text{这里 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ -2k_1 + k_2 - 7k_3 = 0 \\ 3k_1 + 9k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3k_3 \\ k_2 = k_3 \end{cases}, \quad k_3 \text{ 为任意数}$$

令 $k_3 = 1$, 则有 $k_1 = -3, k_2 = 1, k_3 = 1$,

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 即 $-3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

也即齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 这里 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

也就是说存在不全零的 k_1, k_2, k_3 , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 成立.

观察例1与例2中的两个向量组: $E = (e_1, e_2, e_3)$ 与 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = 0$ 中的 k_1, k_2, k_3 只有零解

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$ 中的 k_1, k_2, k_3 除了零解之外, 还有非零解

向量组的线性相关性

定义1 : 给定向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 如果存在**不全为零**的实数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0 \quad (\text{零向量})$$

则称向量组 A 是**线性相关**的, 否则称它是**线性无关**的.

对于 m 个 n 维向量构成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

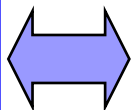
令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $x = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

向量组

$A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

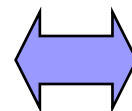
线性相关



m 元齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

有非零解



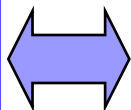
$$R(A) < m$$

P. 88 定理4

向量组

$A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

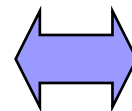
线性无关



m 元齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

只有零解



$$R(A) = m$$

线性相关的定义还可以用另一种说法

定义 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$) 称为**线性相关的**, 如果存在不全为零的实数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$.

定义1' 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 中至少有一个向量可以由其余向量线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为**线性相关的**.

定义2: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 不线性相关, 则称
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**线性无关的**.

定义2' 若在实数集中找不到不全为零的实数
 $k_1, k_2, \dots, k_s \in R$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

(即对任何不全为零的 $k_1, k_2, \dots, k_s \in R$,
总有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$)

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**线性无关的**.

或者说: 若由 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
必可推出 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**线性无关的**.

定义2' 若在实数集合中找不到不全为零的实数

$$k_1, k_2, \dots, k_s \in R,$$

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**线性无关的**.

定义2'' 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 中的每一个向量都不能由其余向量线性表示, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为**线性无关的**.

备注：

- 给定向量组 A ，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一。
- 向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形。
- 若向量组只包含一个向量：当 α 是零向量时，线性相关；当 α 不是零向量时，线性无关。
- 特别地，在空间直角坐标系下，对非零向量而言：
 - ▶ α_1, α_2 线性相关当且仅当 α_1, α_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线。
 - ▶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的几何意义是三个向量共面。
- 含有零向量的向量组必线性相关。

总结：向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

⇔ 存在不全为零的实数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0 \text{ (零向量)} .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 .

⇔ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩小于组 A 中向量的个数 m .

⇔ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示 .

总结：向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关

⇔ 如果 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ （零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0 .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解 .

⇔ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

⇔ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

例 3 证明:

n 维单位坐标向量组 $\begin{cases} e_1^T = (1, 0, \dots, 0), \\ e_2^T = (0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots \\ e_n^T = (0, 0, \dots, 1), \end{cases}$ 必线性无关。

解 设有 n 个数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = 0, \quad \text{也就是}$$

$$\begin{aligned} & k_1(1, 0, \dots, 0)^T + k_2(0, 1, \dots, 0)^T + \dots + k_n(0, 0, \dots, 1)^T \\ &= (k_1, k_2, \dots, k_n)^T = (0, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned}$$

于是就有: $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

所以 e_1, e_2, \dots, e_n 线性无关.

例4 : 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性 .

解 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2, a_3) = 2 < 3$, 故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关 ;

同时 , $R(a_1, a_2) = 2$, 故向量组 a_1, a_2 线性无关 .

例5：已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1,$$

试证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

解题思路：

- ✓ 直接利用定义证明；
- ✓ 转化为齐次线性方程组的问题；
- ✓ 转化为矩阵的秩的问题。

(P.89定理5)

(1) 若向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则向量组 $B : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关.

其逆否命题也成立, 即若向量组 B 线性无关, 则向量组 A 也线性无关.

(2) m 个 n 维向量组成的向量组, 若向量的个数 m 大于向量的维数 n , 即 $m > n$, 则向量组一定线性相关.

特别地, $n + 1$ 个 n 维向量必线性相关.

(3) 设向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $B : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则向量 β 必能由向量组 A 线性表示, 且表示式是唯一的.

向量组与其部分组的线性相关性的关系

如果一个向量组的一个非空部分组线性相关，
那么这个向量组就线性相关；

反之，如果一个向量组线性无关，那么它的任
何一个非空的部分组也线性无关。

口诀：部分相关, 全体相关； 全体无关, 部分无关

例6

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,

证明: (1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示;
(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.