§2　矩阵的运算

矩阵加法的引例： 某工厂生产四种货物，它在上半年和下半年向三家商店发送货物的数量可用数表表示：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示上半年工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{matrix}$$

其中c_{ij}表示工厂下半年向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

试求：工厂在一年内向各商店发送各种货物的数量.

解： 工厂在一年内向各商店发送各种货物的数量

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} & a_{14}+c_{14} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & a_{23}+c_{23} & a_{24}+c_{24} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32}+c_{32} & a_{33}+c_{33} & a_{34}+c_{34} \end{pmatrix}$$

一、矩阵的加法

定义：设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（不是任何两个行列式都能做上述的运算的）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+b_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}+b_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}+b_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

	$\forall a,b,c\in R$	设 A、B、C 是同型矩阵
交换律	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
其他	设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵. 显然 $A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B)$	

矩阵数乘的引例： 该厂所生产的货物的单价及单件重量可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中 b_{i1} 表示第 i 种货物的单价，
b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

设工厂向某家商店发送四种货物各 λ 件，试求：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量.

解： 工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量

（工厂向某家商店发送四种货物各λ 件）

$$\lambda \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} \\ \lambda b_{41} & \lambda b_{42} \end{pmatrix}$$

其中b_{i1} 表示第 i 种货物的单价，

b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

二、数与矩阵相乘

定义：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律

	$\forall a,b,c\in R$	设 A、B是同型矩阵，λ，μ是数
结合律	$(ab)c=a(bc)$	$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
分配律	$(a+b)\cdot c=ac+bc$ $c\cdot(a+b)=ca+cb$	$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
备注	矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.	

知识点比较

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例1 $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 16 & -18 \\ 12 & -10 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12-2 & 3-16 & -5+18 \\ 1-12 & -9+10 & 0-8 \\ 3-6 & 6-4 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 13 \\ -11 & 1 & -8 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

矩阵乘法引例： 某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij} 表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中$b_{i\,1}$ 表示第 i 种货物的单价，$b_{i\,2}$ 表示第 i 种货物的单件重量.

试求：工厂向三家商店所发货物的总值及总重量.

解:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}$$

其中a_{ij}表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

以 c_{i1}，c_{i2} 分别表示工厂向第 i 家商店所发货物的总值及总重量，其中 $i = 1, 2, 3$．于是

$$c_{11} = \begin{array}{ccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} \\ \times & + & \times & + & \times & + & \times \\ b_{11} & & b_{21} & & b_{31} & & b_{41} \end{array} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k}b_{k2}$$

一般地，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,3;\ j=1,2)$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

三、矩阵与矩阵相乘

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记作

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}=C$$

（注意：对于*AB*而言，*A*的列数必须等于*B*的行数）

例2：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

则

$$AB=\begin{pmatrix} -3-2 & 3-1+4 & 4+1+2 \\ 1+9 & -3+2+3 & -4+1-3 \\ 5-3-4 & 10-1+8 & 5+1+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

知识点比较

对于矩阵的乘法，只有当左侧矩阵的列数等于右侧矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad \text{有意义.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{没有意义.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例3： P. 35 例5

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

结论：

1. 矩阵乘法不一定满足交换律，所以矩阵乘法没有交换律。

   即 $AB \neq BA$

2. 例5表明矩阵 $A\neq O, B\neq O$， 却有 $AB = O$ ，

   从而 $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$

矩阵乘法的运算规律

（1）乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

（2）数乘和乘法的结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B$（其中 λ 是数）

（3）乘法对加法的分配律（有左、右之分）

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

（4）单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

纯量阵是特殊的对角阵

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

推论：矩阵乘法不一定满足交换律，但是纯量阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

(5) 矩阵的幂　若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然　$A^k A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式在什么时候成立？

$$\left.\begin{array}{l} (AB)^k = A^k B^k \\ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \end{array}\right\}$$

A、B可交换时成立

即当 $AB = BA$时

一般的：　$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$$

四、矩阵的转置

定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做的转置矩阵，记作A^{T} .

例4 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18 & 6 & -1\end{pmatrix}$, $B^{T}=\begin{pmatrix}18\\ 6\\ -1\end{pmatrix}$.

$\left(B^{T}\right)^{T}=\begin{pmatrix}18 & 6 & -1\end{pmatrix}$,

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例5：已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\text{求}(AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\text{求}(AB)^T.$$

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

定义：设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为**对称阵**.

如果满足 $A = -A^T$，$a_{ij} = -a_{ji}$，那么 A 称为**反对称阵**.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

对称阵

$$a_{ij} = a_{ji}$$

反对称阵

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

想一想：若 A,B 都是对称矩阵，积AB对称吗?

正确结论：　已知 A,B 皆为 n 阶对称矩阵，证明：

$$AB\text{对称} \Leftrightarrow AB = BA.$$

证：　"$\Rightarrow$"　若AB对称，则有

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

"$\Leftarrow$"　若$AB=BA$，则有

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

所以 AB 对称.

例7：设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 满足 $X^TX = 1$，E 为 n 阶单位阵，$H = E - 2XX^T$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^T = E$.

证明：首先证明 H 的对称性

P40例8

$$H^T = (E-2XX^T)^T = E^T + (-2XX^T)^T = E - 2(XX^T)^T$$

$$= E - 2(X^T)^T X^T = E - 2XX^T = H$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T = H^2 = (E-2XX^T)^2 = E^2 - 4XX^T + (-2XX^T)^2$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^TXX^T = E - 4XX^T + 4X(X^TX)X^T$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T = E$$

例8 已知 $\alpha=(1,2,3)$, $\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, $A=\alpha^T\beta$, 求 A^n.

解: $$A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^n=(\alpha^T\beta)^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta$$

$$\because \beta\alpha^T=\begin{pmatrix}1, & 1/2, & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3,$$

$$\because \beta\alpha^T = \left(1, \quad {}^{1}\!/_{2}, \quad {}^{1}\!/_{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\therefore A^n = (\alpha^T\beta)^n = (\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta) = \alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta$$

$$= \alpha^T 3^{n-1}\beta = 3^{n-1}\alpha^T\beta$$

$$\boxed{A = \alpha^T\beta}$$

$$= 3^{n-1}A = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & {}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{3} \\ 2 & 1 & {}^{2}\!/_{3} \\ 3 & {}^{3}\!/_{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

五、方阵的行列式

回忆：由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算性质：假设 A 与 B 都是 n 阶方阵

(1) $\left|A^T\right| = |A|$; (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$; $\Rightarrow |AB| = |BA|$.

以下证明: 第(3)条

(3) $|AB| = |A||B|$;

证明：要使得 $|AB| = |A||B|$ 有意义，A、B 必为同阶方阵，

假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

我们以 $n= 3$ 为例，构造一个6 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

根据P14例10

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\
0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33}
\end{vmatrix}
\overset{\substack{c_4 + b_{11}c_1 \\ c_5 + b_{12}c_1}}{\underset{c_6 + b_{13}c_1}{=\!=\!=}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & -1 & & &
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{c_4 + b_{21}c_2 \\ c_5 + b_{22}c_2}}{\underset{c_6 + b_{32}c_2}{=\!=\!=}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & -1 & & &
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} c_4+b_{31}c_3 \\ \underline{\underline{c_5+b_{32}c_3}} \\ c_6+b_{33}c_3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

令 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$，则 $C=(c_{ij})=AB$.

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_6]{r_1 \leftrightarrow r_4,\ r_2 \leftrightarrow r_5} (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -|-E_3|\cdot|C| = |C| = |AB|$$

从而有： $|AB| = |A||B|$

例9 设方阵A满足：$AA^T = E$（正交矩阵），且$|A| < 0$,

求：(1) $|A|$； (2) $|A+E|$

解：(1) $\because AA^T = E, \Rightarrow |AA^T| = 1, \Rightarrow |A||A^T| = 1,$

$\Rightarrow |A|^2 = 1, \Rightarrow |A| = \pm 1,$ 但 $\because |A| < 0, \Rightarrow |A| = -1,$

(2) $|A+E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A||E + A^T|$

$= -|E^T + A^T| = -|(E+A)^T| = -|E+A| = -|A+E|$

$\Rightarrow 2|A+E| = 0, \Rightarrow |A+E| = 0$

定义：行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

P41例9

称为矩阵（方阵）A 的伴随矩阵.

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于 A^* 第 j 行第 i 列

性质：$AA^* = A^*A = |A|E.$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明 $$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

同理可证明：$A^*A = |A|E, \Rightarrow AA^* = A^*A = |A|E$

六、共轭矩阵（$\overline{a+bi}=a-bi\ ,a,b\in R$）

当 $A=(a_{ij})$为复矩阵时，用 $\bar{a}_{ij}$ 表示a_{ij} 的共轭复数，

记 $\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$，$\overline{A}$ 称为 A的共轭矩阵.

运算性质

（设A，B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

$$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$$

$$(2)\ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A};$$

$$(3)\ \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}.$$