# 线性代数第一、二章测验（A 卷）

1．设 $D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\end{vmatrix}$，求出 $D(x)=0$ 的全部根

线性代数测验I（A卷）解释：

1. $D(x)\xlongequal{\text{转置}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & 2 & 3 & 4\\ x^2 & 4 & 9 & 16\\ x^3 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行列式 展P19}]{\text{范德蒙}}(4-3)(4-2)(4-x)(3-2)(3-x)(2-x)$

∴由 $D(x)=0 \Rightarrow x=2,\ x=3,\ x=4$ 为所求全部的根

2．$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 $A$;

2、思路：求 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right]^{-1}$　（$\because (A^{-1})^{-1}=A$）

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

这里一定要看懂这种解法，并能灵活应用

3．若方阵 **A** 满足 $A^2=A$ 且 $A\neq E$，**E** 是单位矩阵，试证明 **A** 不可逆.

3. 正确的做法是利用反证法. 若方阵A：$A^2=A$ 且 $A\neq E$，则A不可逆

证明：若A可逆，则由 $A^2=A$ 得 $A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$ 即 $A=E$（矛盾）

因此A不可逆

一般地，$AB=0 \not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

错法一：$\because A^2=A \Rightarrow A^2-A=0 \Rightarrow A(A-E)=0$

$\because A\neq E \Rightarrow A-E\neq 0$，所以 $A=0$

反例：$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A^2=A$，且 $A\neq E$，但 $A\neq 0$（显然A不可逆）

错法二：$\because A^2=A$，故 $|A|^2=|A| \Rightarrow |A|(|A|-1)=0$

$\because A\neq E$ 故 $|A|\neq 1$，于是 $|A|=0$，因此A不可逆

反例 如：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq E$，但 $|A|=1$

错法三：因为 $A^2=A$ 故 $A(A-E)=0 \Rightarrow |A||A-E|=0$

因为 $A\neq E \Rightarrow A-E\neq 0$，于是 $|A-E|\neq 0 \Rightarrow |A|=0$，∴A不可逆

反例：如 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

显然 $A-E\neq 0$，但 $|A-E|=0$

4. 已知 $A, B$ 为 4 阶方阵，且 $|A|=-2$，$|B|=3$，求

（1）$|5AB|$；

（2）$|-AB^T|$；

（3）$|(AB)^{-1}|$；

（4）$|A^{-1}B^{-1}|$；

（5）$\left|((AB)^T)^{-1}\right|$

4. 已知：A、B 4阶方阵，且 $|A|=-2$, $|B|=3$

(1) $|5AB| = 5^4|A||B| = 625\cdot(-2)\cdot 3 = -3750$

(2) $|-AB^T| = (-1)^4|A||B^T| = (-2)\cdot|B| = -6$

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B^{-1}||A^{-1}| = \frac{1}{|B|}\cdot\frac{1}{|A|}$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-2} = -\frac{1}{6}$

(4) $|A^{-1}B^{-1}| = |A^{-1}||B^{-1}| = \frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|B|} = -\frac{1}{6}$

(5) $|((AB)^T)^{-1}| = |((AB)^{-1})^T| = |(AB)^{-1}| = -\frac{1}{6}$

5．（1）设 A 是方阵且 $A^2+A-8I=0$，E 是单位矩阵，证明：$A-2I$ 可逆；

（2）对满足（1）中条件的 A，设矩阵 X 与之具有关系：

$AX+2(A+3I)^{-1}A=2X+2I$，求 X.

5. (1) A方阵且 $A^2+A-8E=0$，证明 $A-2E$ 可逆

证明：∵ $A^2+A-6E=2E \Rightarrow (A+3E)(A-2E)=2E$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}(A+3E)\right](A-2E)=E \longrightarrow (A+3E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$

∴ $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+3E)$

(2) 由 $AX+2(A+3E)^{-1}A=2X+2E$ 得，

$(A-2E)X = 2E-2(A+3E)^{-1}A$

∴ $X=(A-2E)^{-1}(2E)-2(A-2E)^{-1}(A+3E)^{-1}A$

$X=\frac{1}{2}(A+3E)(2E)-(A+3E)(A+3E)^{-1}A$

$X=A+3E-A=3E \Rightarrow X=3E$ (E是单位矩阵)

6．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1\text{阶}}$$

解 $D \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{[i]+[i+1]} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$

# 线性代数第一、二章测验（B 卷）

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，求 $|\boldsymbol{A}^*|$.

(B卷)解释

1. A可逆三阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^{3-1}=|A|^2=9$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&0&-1&2\\5&1&-1&6\end{vmatrix}$，求 $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}$ 其中 $A_{ij}$ 是 $A$ 的代数余子式. $i=1,2,3,4;\quad j=1,2,3,4$

2、 $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}=$ 第二行的元素与第四行的代数余子式的乘积之和 $=0$ (居)P10、性质7

3. 设方阵 $\mathbf{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$，$\mathbf{E}$ 是单位矩阵, 试证明：$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$ 可逆，并求出其逆.

3. 由 $A^2-A-7I=0 \Rightarrow A^2-A-6I=I$
$\Rightarrow (A-3I)(A+2I)=I \Rightarrow A-3I$ 与 $A+2I$ 均可逆
且它们互为逆矩阵，所以 $(A-3I)^{-1}=A+2I$

4. 求方程 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}=0$ 的全部解.

4. 求方程 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}=0$ 的全部解

解：方程的左边 $=(-1)^2\begin{vmatrix}a_1+x&a_2&a_3&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2&a_3&a_4+x\end{vmatrix}$ ①⟷④ ②⟷③

$$=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^4 a_i+x&a_2&a_3&a_4\\\sum_{i=1}^4 a_i+x&a_2+x&a_3&a_4\\\sum_{i=1}^4 a_i+x&a_2&a_3+x&a_4\\\sum_{i=1}^4 a_i+x&a_2&a_3&a_4+x\end{vmatrix}=\left[\sum_{i=1}^4 a_i+x\right]\begin{vmatrix}1&a_2&a_3&a_4\\1&a_2+x&a_3&a_4\\1&a_2&a_3+x&a_4\\1&a_2&a_3&a_4+x\end{vmatrix}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^4 a_i+x\right]\begin{vmatrix}1&a_2&a_3&a_4\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=x^3\left[\sum_{i=1}^4 a_i+x\right]=0$$

得 $x_1=x_2=x_3=0$； $x_4=-\sum_{i=1}^4 a_i$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，B 是非零的3×5的矩阵，且 $AB=0$，求 $t$ 的值.

5、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，B是非零的3×5矩阵，且 $AB=0$

求t的值　（居）P85 例2

解：由已知条件 $AB=0$ 知：B的每一列是方程组 $Ax=0$ 的解，又已知 $B\neq 0$，所以方程组 $Ax=0$ 有非零解．由(居) $P_{25}$ 推论2 $|A|=0$，所以有：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & t-8 & 11\\ 0 & -7 & 7\end{vmatrix}=7(t-8)+77=7t+21=0$$

$$\Longrightarrow t=-3$$

6. 已知 $A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，E 是单位矩阵，求 B.

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，求B

解：$\because A(A-B)=I$ $\therefore A$ 可逆［居P67，推论］，且A与A-B互逆

$\Longrightarrow A-B=A^{-1} \Longrightarrow B=A-A^{-1}$

$$\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -5 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[②+③]{(-1)②+①}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ -5 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 0\\ 4 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

7. 设 $A,B,C$ 为三阶可逆方阵，化简：$(BC^T-I)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

7. 设A、B、C为三阶可逆方阵，化简运算如下：

$(BC^T-I)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

$=[(AB^{-1})(BC^T-I)]^T+[(BA^{-1})^{-1}]^T$

$=[AB^{-1}BC^T-AB^{-1}]^T+[(A^{-1})^{-1}B^{-1}]^T=[AC^T-AB^{-1}]^T+(AB^{-1})^T$

$=[AC^T-AB^{-1}+AB^{-1}]^T=(AC^T)^T=(C^T)^TA^T=CA^T$

# 线性代数测验Ⅱ（A 卷）

1. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有三个线性无关的特解 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$，且 $R(A)=2$，则方程组的通解 $x=C_1(\eta_1-\eta_2)+C_2(\eta_2-\eta_3)+\eta_3,\ \ C_1,C_2$为任意常数

证明：$\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$，线性无关，$\therefore$ 它各互不相同

且 $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$ 是 $Ax=0$ 的非零解.

又设 $k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_2-\eta_3)=0,\Rightarrow k_1\eta_1+k_2\eta_2-(k_1+k_2)\eta_3=0$

$\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$，线性无关，$\therefore k_1=k_2=0$，故 $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$ 线性无关

又 $\because R(A)=2,n=4,\Rightarrow n-R(A)=2,$

$\Rightarrow Ax=0$ 的基础解系中含有2个解向量

2. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，　且存在 3 阶非零方阵 **B** 使 **BA**=0，求 a

解　$\because BA=0\Rightarrow A^TB^T=0$，　令 $B^T=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$，

$A^TB^T=A^T(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=(A^T\beta_1,\ A^T\beta_2,\ A^T\beta_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow A^T\beta_1=0,\ A^T\beta_2=0,\ A^T\beta_3=0$，　又 $\because B\neq 0$，　故存在某个 $\beta_j\neq 0\ (j=1,2,3)$

使 $A^T\beta_j=0$，也即次性方程 $A^Tx=0$ 有非零解，所以 $R(A^T)<3$，

因此 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-2a \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}\Rightarrow a=1,\ R(A^T)=R(A)=1<3$

3. 讨论 $\lambda$ 取什么值时线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$ 有解，并求解.

解：方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$，系数行列式为 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

（1）　当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，方程有唯一解，此时

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

故得解为 $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$；

（2）当 $\lambda=-2$ 时，增广矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，无解；

（3）当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有无穷多组

解, 同解方程为 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$（$x_2, x_3$ 为自由未知量）, 原方程的同解是:

$\xi=(1,0,0)+c_1(-1,1,0)+c_2(-1,0,1)$， $c_1, c_2$是任意常数

4．若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$， $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$， $\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关.

证明：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

令$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3), A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B=AC$

$\because R(B)=R(AC), \Rightarrow R(B)\le R(A)$,且$R(B)\le R(C)$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关$, \Rightarrow R(A)=3$

又$\because C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow R(C)=2$

$\Rightarrow R(B)\le 2, [\because R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}] \Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关



5．已知向量空间 $R^3$ 中的四个向量：$\alpha_1=(1,1,0), \alpha_2=(1,1,1), \alpha_3=(2,2,1), \alpha_4=(-1,-1,1)$，

①求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组；

②把①中的最大线性无关组扩充为 $R^3$ 的一组基

解:（1）$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A)=2 \Rightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$

显然$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，故$\alpha_1,\alpha_2$就是一个最大线性无关组

（2）一般的方法：

制作$(A,E)=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,e_1,e_2,e_3\right), \Rightarrow R(A,E)=3$

$(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow e_1,\alpha_1^T,\alpha_2^T$是$R^3$的一组基

特别地，对这道题可以有一个更简单的方法：

制作:$(e_1,\alpha_1^T,\alpha_2^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(e_1,\alpha_1^T,\alpha_2^T)=3 \Rightarrow e_1,\alpha_1^T,\alpha_2^T$是$R^3$的一组基

以下进行正交化：取$\beta_1=(1,0,0)$，$\beta_2=\alpha_1-\dfrac{(\alpha_1,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=(0,1,0)$

$\beta_3=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2-\dfrac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=(0,0,1) \Rightarrow \|\beta_3\|=1$

$\because \beta_1,\beta_2,\beta_3$都是单位向量，无需单位化，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是一组规范正交基

6. 设 V 是 3 维向量空间, $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是 V 的一个基，令 $\begin{cases}\alpha_1=\eta_1+\eta_2+\eta_3,\\ \alpha_2=\eta_1+2\eta_2+2\eta_3,\\ \alpha_3=\eta_1+2\eta_2+3\eta_3,\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1=\eta_2+\eta_3\\ \beta_2=\eta_1+\eta_3\\ \beta_3=\eta_1+\eta_2\end{cases}$

①证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 都是 V 的基；

②求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵；

③求 $\gamma=2\eta_1-2\eta_2-3\eta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标。

**解：①令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则有**

$$k_1(\eta_1+\eta_2+\eta_3)+k_2(\eta_1+2\eta_2+2\eta_3)+k_3(\eta_1+2\eta_2+3\eta_3)=0$$

$$(k_1+k_2+k_3)\eta_1+(k_1+2k_2+2k_3)\eta_2+(k_1+2k_2+3k_3)\eta_3=0$$

因为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 线性无关，$\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+2k_2+2k_3=0\\ k_1+2k_2+3k_3=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $V$ 的一组基，

同理可证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 也是 $V$ 的一组基.

② 把上述向量组之间的关系式表示为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\quad【1】$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad【2】$$

由【1】得，$(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}$

由【2】得，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

所以从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

③$\gamma=2\eta_1-2\eta_2-3\eta_3\Rightarrow\gamma$ 在基 $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$ 的坐示 $(2,-2,-3)^T$

又因为从 $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow$

令 $\gamma$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标是 $(x_1,x_2,x_3)^T$，故有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-1\end{pmatrix}$$