§2 矩阵的秩

一、矩阵的秩的概念

定义：在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k \le m$ ，$k \le n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式．

显然，$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

又如选第1, 2, 3行和第1, 2, 4列，得到一个3阶子式就是

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=10.$$

概念辨析： k **阶子式、矩阵的子块、余子式、代数余子式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

与元素a_{12}相对应的余子式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

相应的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子块

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 2 阶子式

矩阵 A 的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

如果矩阵 A 中所有 2 阶子式都等于零，那么这个 3 阶子式也等于零 .

- 根据行列式按行（列）展开法则可知，矩阵 A 中任何一个 $r+2$ 阶子式（如果存在的话）都可以用 $r+1$ 阶子式来表示．
- 如果矩阵 A 中所有 $r+1$ 阶子式都等于零，那么所有 $r+2$ 阶子式也都等于零．事实上，所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也都等于零．

定义：设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$．

规定：零矩阵的秩等于零．所以： $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$

矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数．

- **若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geq s$ ；**
  若矩阵 A 中所有 t 阶子式等于零，则 $R(A) < t$ ．
- **若 A 为 n 阶方阵，则 A 的 n 阶子式只有一个，即$|A|$ ．**
  当$|A|\neq 0$ 时， $R(A) = n$;
  可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为满秩矩阵．
  当$|A| = 0$ 时， $R(A) < n$;
  不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为降秩矩阵．
- **若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min(m, n)$ ．**
  所以方程组系数矩阵的秩一定小于等于未知量的个数。
- **$R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$ ．**

$R(A^T) = R(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

矩阵 A^T 的一个 2 阶子式

$D =$ $\qquad = \qquad$ $D^T =$

A^T 的子式与 A 的子式对应相等，从而 $R(A^T) = R(A)$.

如何利用矩阵秩的定义，求矩阵的秩？

例1 ： $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $H=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\because |A| = 27 \neq 0, \quad \Rightarrow R(A)=3;$

$\because B$的两列成比例, $\therefore R(B)=1;$ 显然， $R(H)=2$

$R(C)=1;$ $R(F)=0$

例2：求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解：在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$.

A 的 3 阶子式只有一个，即$|A|$，而且$|A|=0$，因此 $R(A)=2$.

求矩阵 B 的秩 $$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解（续）：B 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，显然根据子式的定义，其 4 阶子式全为零．

以非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$ **，因此 $R(B)=3$．**

还存在其它3 阶非零子式吗？

欲求矩阵B的其它3阶非零子式

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解（续）：B 还有其它 3 阶非零子式，例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-18 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6$$

结论：行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数．

目的：对非阶梯形矩阵如何用较简便的方法求出它的秩

二、矩阵的秩的计算

例3：求矩阵 A 的秩，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

分析：在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12\neq 0$.

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3C_5^3=40$（个），

要从40个子式中找出一个非零子式是比较麻烦的．

一般的矩阵，当行数和列数较高时，按定义求秩是很麻烦的．

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

一个自然的想法是用初等变换将一般的矩阵化为行阶梯形矩阵.

两个等价的矩阵的秩是否相等？

定理2：若 $A \sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

(i) 设A是$m\times n$的矩阵，　则$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, m$阶可逆矩阵$P$，　使$PA=B$

推论1： 若$\exists\, m$阶可逆矩阵P，　使$PA=B$，则$R(A)=R(B)$

(ii) 设A是$m\times n$的矩阵，　则$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, n$阶可逆矩阵$Q$，　使$AQ=B$

推论2： 若$\exists\, n$阶可逆矩阵Q，　使$AQ=B$，　则$R(A)=R(B)$

(iii) $A_{m\times n} \sim B_{m\times n} \Leftrightarrow \exists$可逆矩矩$P_{m\times m}$与$Q_{n\times n}$，使$PAQ=B$

推论3： 若$\exists\, m$阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，　使$PAQ=B$，
则$R(A)=R(B)$

定理3：若 $R(A)=R(B)$，则 $A \sim B$.

定理2： 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

应用： 根据这一定理，为求矩阵的秩，只要用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩 .

例5： 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式 .

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵．

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A)=3$．

第二步求 A 的最高阶非零子式．选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列．

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$R(A_0) = 3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式．

例6：设 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_4 = 4 \end{cases}$ **，求系数矩阵** A **及增广矩阵** $B = (A, b)$ **的秩．**

P68

分析：对 B **作初等行变换变为行阶梯形矩阵，设** B **的行阶梯形矩阵为** $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$ **，则** $\tilde{A}$ **就是** A **的行阶梯形矩阵**

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2$

$R(B) = 3$

因为行阶梯形矩阵的第三行表示一个矛盾方程 $0 = 1$，所以原方程组 $Ax = b$ 无解

例7：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & t & 5\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$，已知 $r(A)=2$,求 t.

解：对 A 作初等行变换将其化为阶梯型矩阵 B，即

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & t & 5\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 2+t & 6\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 2+t & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

由于 $r(A)=r(B)=2,$

所以，B中第二、三行成比例,即得 $\dfrac{-2}{2+t}=\dfrac{-4}{6}$， $t=1.$

矩阵的秩的性质(详细证明见书P69~70)

① 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le R(A)\le \min(m, n)$ ． √

② $R(A^T) = R(A)$. √

③ 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$ ． √

④ 若 P、Q 可逆，则 $R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) = R(A)$ ． √

⑤ $\max\{R(A), R(B)\}\le R(A, B)\le R(A) + R(B)$

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A)\le R(A, b)\le R(A) + 1 \ .$$

⑥ $R(A + B)\le R(A) + R(B)$ ．

⑦ $R(AB)\le \min\{R(A), R(B)\}$ ．

⑧ 若 $A_{m\times n} B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B)\le n$ ．

以下证明⑤ $\boxed{\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)}$

证 $\because$ A的最高阶非零子式总是(A,B)的非零子式

$\therefore R(A)\le R(A,B)$, $R(B)\le R(A,B)$

从而就有 $\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)$

设 $R(A)=r$, $R(B)=t$, 把A和B分别作列变换

化为列阶梯形矩阵$\tilde{A}$和$\tilde{B}$, 则$\tilde{A}$和$\tilde{B}$中分别含有

r个和t个非零列, 故可设

$$A\overset{c}{\sim}\tilde{A}=(\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_r,0,\cdots,0),\quad B\overset{c}{\sim}\tilde{B}=(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_t,0,\cdots,0)$$

$$\Rightarrow (A,B)\overset{c}{\sim}(\tilde{A},\tilde{B}),\quad \Rightarrow R(A,B)=R(\tilde{A},\tilde{B})$$

$\because$矩阵$(\tilde{A},\tilde{B})$中只含有$r+t$个非零列,

$$\Rightarrow R(\tilde{A},\tilde{B})\le r+t\Rightarrow R(A,B)\le R(A)+R(B)$$

以下证明⑥ $\boxed{R(A+B) \le R(A)+R(B)}$

证 设 A、B为$m \times n$矩阵， 对矩阵$(A+B, B)$作列变换 $c_i - c_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$， 即得

$$(A+B, B) \sim (A, B)$$

根据性质③ $\Rightarrow R(A+B, B) = R(A, B)$

$$\Rightarrow R(A+B) \le R(A+B, B) \overset{③}{=} R(A, B) \overset{⑤}{\le} R(A)+R(B)$$

例：设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

证明：因为 $(A+E)+(E-A)=2E$，

由性质⑥: $R(A)+R(B)\geqq R(A+B)$

从而有: $R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)=n$ $(\because 2E\sim E)$

由性质③: 若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$

显然 $(E-A)\sim(A-E)$

从而有: $R(E-A)=R(A-E)$，所以

$R(A+E)+R(A-E)\geq n$. 【证毕】

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)\ \ = R(C)$.

分析：若 $R(A)=n$，则 A 的**行最简形矩阵**应该

- 有 n 个非零行；
- 每个非零行的第一个非零元为 1 ；
- 每个非零元所在的列的其它元素都为零 .

于是 A 的行最简形中应该包含以下 n 个列向量：

$$\begin{array}{r} \text{前 } n \text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \text{后 } m-n \text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

注意：这里的矩阵A只有n列

又因为 A 是 $m\times n$ 矩阵，所以 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则 $R(B) \;=R(C)$.

解：因为 $R(A)=n$， 所以 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$ ，

因此一定存在m 阶可逆矩阵 P ，使 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$

$$\because C=AB \Rightarrow PC=PAB \Rightarrow PC=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$$

因为 P 可逆，所以 $R(C)\overset{④}{=}R(PC)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$

故 $R(B)=R(C)$

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则 $R(B)=R(C)$.

附注：

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为**列满秩矩阵**.
- 特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.

  因此，本例结论中，特别当 A 为方阵时，就是性质④ .
- 本题中，当 $C=O$，这时结论为：$R(B)=R(C)=R(O)=0$

  因为秩为零的矩阵一定是零矩阵，所以必有 $B=O$。

  本题的结论为：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，且 $R(A)=n$，则 $B=O$

  这一结论类似乘法的消去律.

  推广：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=A_{m\times n}C_{n\times l}$，且 $R(A)=n$，则 $B=C$

(但矩阵乘法没有消去律，一般 $AB=O$，不能推出 $A=O$ 或 $B=O$)