§3 逆矩阵

问题：

- 在什么条件下，方阵 A 是可以做除法？

- 如果 A 可做除法，怎样求 $\frac{1}{A}$ (A^{-1})？

定义： n 阶方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵.

- 根据矩阵的乘法法则，只有**方阵**才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是**唯一**的（如果有的话）.

定义： 如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}.

下面要解决的问题是：

•在什么条件下，方阵 A 是可逆的？或说何时 A^{-1}是存在的？

•如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ？

由前面的结论知： $AA^* = A^*A = |A|E$, A^*是A的伴随矩阵

定理: **若 $|A| \neq 0$，则方阵A可逆，而且**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

P43定理2

推论：若 $|A| \neq 0$，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

例 1 设 A 为 n 阶方阵($n \geq 2$) , 证明 **P56,24**

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

证明: 由于 $AA^* = A^*A = |A|E$, 所以

$$|A||A^*| = ||A|E|^n = |A|^n|E| = |A|^n$$

下面分三种情形讨论:

(1) $|A| \neq 0$, 即 A 可逆, 参见上页定理证明.

(2) $|A| = 0$, 且 $A = O$, 则 $A^* = O$, 则$|A^*|=0$, 故结论成立.

(3) $|A| = 0$, 但 $A \neq O$, 以下要证: $|A^*|=0$

反证法: 假设 $|A^*| \neq 0$, 则 A^* 可逆, 故$(A^*)^{-1}$存在,

因而 $A = (AA^*)(A^*)^{-1} = (|A|E)(A^*)^{-1} = |A|(A^*)^{-1} = O$,

故 $A = O$, 这与 $A \neq O$ 相矛盾, 所以, $|A^*|=0$,故结论成立.

例2：求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **的逆矩阵.** 其中 $ad-bc\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc, \qquad A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

P44例10

例3： 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $|A|=1$，$M_{11}=-7,\ M_{12}=-6,\ M_{13}=3,\ M_{21}=4,$

$M_{22}=3,\ M_{23}=-2,\ M_{31}=9,\ M_{32}=7,\ M_{33}=-4,$

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0$ $\rightleftarrows$ 方阵A可逆

此时，称矩阵A为**非奇异矩阵**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$$

定理2：若方阵A可逆，则 $|A| \neq 0$ ． **P43定理1**

推论1：对于n 阶方阵A、B，如果$AB = E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵。

推论2： 如果 n 阶方阵A、B可逆，那么 A^{-1}、A^T、$\lambda A(\lambda \neq 0)$ 与AB也可逆，且

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

P44

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}; \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

- 如果A可逆，则 A^* 亦可逆，且 $\left(A^*\right)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

- 如果A可逆，则 A^k 亦可逆，且 $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

关于矩阵的多项式

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式， A 为 n 阶矩阵， 记

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

$\varphi(A)$ 称为矩阵 A 的 m 次多项式.

因为 A^k, A^l 和 E 都是乘法可交换的，所以矩阵 A 的两个多项式 $\varphi(A)$ 和 $f(A)$ 总是可交换的，即总有： $\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A)$， 从而矩阵 A 的几个多项式可以像数 x 的多项式一样的相乘或因式分解. 例如： $A^2-3A-4E=(A+E)(A-4E)$

例5 设方阵 A 满足 $A^2-3A-10E=0$,

证明： A 与 $A-4E$ 皆可逆，并求其逆.

证： 由 $A^2-3A-10E=0$, 得 $A(A-3E)=10E$,

即 $A\left[\frac{1}{10}(A-3E)\right]=E$, 故 A 可逆,

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{10}(A-3E)$$

$\boxed{\text{P43推论}}$

还是因为$A^2-3A-10E=0$, $\Rightarrow A^2-3A-4E=6E$

$(A+E)(A-4E)=6E$, $\Rightarrow \frac{1}{6}(A+E)(A-4E)=E$,

$$\Rightarrow A-4E \text{ 可逆} \Rightarrow (A-4E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+E)$$

矩阵多项式的计算

(1) 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$， 且 Λ 是对角矩阵，

即 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$， 则

$A^k = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^k P^{-1}$（P45例13）

$\Rightarrow \varphi(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$

$= Pa_0 EP^{-1} + Pa_1 \Lambda P^{-1} + Pa_2 \Lambda^2 P^{-1} + \cdots + Pa_m \Lambda^m P^{-1}$

$= P(a_0 E + a_1 \Lambda + a_2 \Lambda^2 + \cdots + a_m \Lambda^m) P^{-1} = P\varphi(\Lambda) P^{-1}$

(2) $\varphi(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m$

$$=a_0\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}\lambda_1^2&&&\\&\lambda_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^2\end{pmatrix}$$

$$+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

注意：利用公式 $\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$ 可以化简运算，

其前提是有 $A=P\Lambda P^{-1}$ 成立.

P46 例14

设 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}, AP=P\Lambda$

求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$

解: $|P|=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\1&1&-1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}0&2&0\\1&0&2\\1&1&-1\end{vmatrix}=6, \Rightarrow P$可逆

$\because AP=P\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$\Rightarrow \varphi(x)=x^3+2x^2-3x$，从而有

$\varphi(1)=0, \varphi(2)=10, \varphi(-3)=0, \Rightarrow \varphi(\Lambda)=diaf(0,10,0)$

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 10 & \\ & & 0\end{pmatrix}\frac{1}{|P|}P^{*}$$

$$\boxed{\because |P|=6}$$

$$=\frac{10}{6}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ 0 & 0 & 0\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\end{pmatrix}$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$\Rightarrow\varphi(A)=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

关于解矩阵方程

① 矩阵方程 $A_{n\times n}X_{n\times s}=B_{n\times s}$,

若A为可逆矩阵，则 $X=A^{-1}B$.

② 矩阵方程 $X_{m\times n}A_{n\times n}=B_{m\times n}$,

若A为可逆矩阵，则 $X=BA^{-1}$.

③ 矩阵方程 $A_{n\times n}X_{n\times s}B_{s\times s}=C_{n\times s}$,

若A,B 为可逆矩阵，则 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

例6、解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解: $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

例 7 解下列矩阵方程

$$AXB = C, \quad \text{其中}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 由已知易得 $X = A^{-1}CB^{-1}$,

下面求 A 和 B 的逆阵.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&-4&3\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

例 8 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$,

求 B.

类似P56, 15

解 由已知方程变形得 $AB-2B=A$,

分解因式 得 $(A-2E)B=A$,

两边左乘 $(A-2E)^{-1}$ 得:

$$B=(A-2E)^{-1}A=(A-2E)^{-1}(A-2E+2E)$$

$$\therefore B=E+2(A-2E)^{-1},$$

$$\therefore B = E + 2(A-2E)^{-1},$$

而 $$A-2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

用伴随矩阵法求逆，得

$$(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$B = E + 2(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$