§4　对称矩阵的对角化

定义： 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为**对称矩阵.**

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

实数域上的对称矩阵简称为实对称矩阵.

定理： 设 A 是实对称矩阵，则 A 的特征值都是实数.

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关. （P.120定理2）

定理： 设 λ_1 和 λ_2 是实对称阵 A 的特征值， p_1, p_2 是对应的特征向量，如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 p_1, p_2 正交. （P.124定理6）

证明： $A p_1 = \lambda_1 p_1$， $A p_2 = \lambda_2 p_2$， $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (A p_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A$ （A 是对称阵）

$\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A p_2 = p_1^T (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^T p_2$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\ p_1^T p_2 = 0$，因$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $p_1^T p_2 = 0$，即 p_1, p_2 正交

定理： n 阶矩阵 A 和对角矩阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量. （P.123定理4）

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似.

说明： 当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化. （P.118例6）

定理： 设 A 为 n 阶实对称阵，则必有正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda,$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵（不唯一）.

（P.124定理7）

定理： n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量．（P.123定理4）

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似．

说明： 当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化．（P.118例6）

推论： 设 A 为 n 阶对称阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则

- 矩阵 $A-\lambda E$ 的秩等于 $n-k$，
- 即恰有 k 个线性无关的特征向量与特征值 λ 对应．

例： 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求正交阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$对角阵.

解： 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$时，解方程组 $(A+2E)\,x=0$.

$$A+2E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \text{得}\ \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{令}\ P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A\xi_i=\lambda_i\xi_i\Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\text{则}\ P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

问题：这样的解法对吗？P 是正交矩阵吗？

答案：显然P 不是正交矩阵, 因为其列向量不是单位向量.

- 当 $\lambda_1 = -2$时，对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，对应的特征向量为$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

显然，必有$\xi_1 \perp \xi_2$， $\xi_1 \perp \xi_3$，但$\xi_2 \perp \xi_3$ 未必成立.

于是把 ξ_2, ξ_3 正交化：**(P114施密特正交化方法)**

$$\eta_2 = \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \xi_3 - \frac{[\xi_3, \eta_2]}{[\eta_2, \eta_2]}\eta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

此时$\xi_1 \perp \eta_2$， $\xi_1 \perp \eta_3$， $\eta_2 \perp \eta_3$.

单位化：

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

$$\Rightarrow\quad p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow\quad p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；
- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

于是 p_1, p_2, p_3 构成正交阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

从而 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

把对称阵 A 正交对角化的步骤为:

1. 求出 A 的所有各不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，它们的重数依次为$k_1, k_2, \ldots, k_s$（$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$）.

2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求方程组$(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量.

   把这 k_i 个线性无关的特征向量正交化、单位化，得到 k_i 个两两正交的单位特征向量.

   因为$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$，总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

3. 这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 P，便有

$$P^{-1}AP = \Lambda .$$

Λ 中对角元的排列次序应于中列向量的排列次序相对应.

例：设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 A^n .

分析：

解法一：数学归纳法

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -13\\ -13 & 14\end{pmatrix}$$

$$A^n=A^{n-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^{n-1} & 1-3^{n-1}\\ 1+3^{n-1} & 1+3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 A^n .

解法二：

- 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2+1=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

$$\Rightarrow \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \Lambda^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的可逆矩阵 P .

下面求满足 $P^{-1}AP = \Lambda$ 的可逆矩阵 P .

当 $\lambda_1 = 1$ 时， 解方程组 $(A-E)x = 0$.

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 3$ 时， 解方程组 $(A-3E)x = 0$.

$$A-3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

于是 $Ap_1 = p_1$， $Ap_2 = 3p_2$， 即 $A(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}(p_1, p_2)$.

取 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$， 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

于是 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\Lambda$， 即 $A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1+3^n & 1+3^n\end{pmatrix}$$