线性代数 练习七 答案

一、填空题(每小题3分，共 30 分)

1、排列24135的逆序数为__3__。

2、设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=5$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & b_2-2c_2 \end{vmatrix}=$__1__。

3、设$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型，则$a$的取值范围是$(-\frac{4}{5},0)$。

4、矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，且$AB=BA$，则$x=1$，$y=2$。

5、设三阶矩阵A的特征值为0，1，2，则$\left|(A-3I)^{-1}\right|=$__-1/6__。

6、设$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，求$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$__6__。

7、已知向量$\alpha=(2,a+1,1)^T,\beta=(a,2,-6)^T$正交，则$a=$__1__.。

8、若n元线性方程组有无穷多解，且其系数矩阵的秩为r，则r与n的关系必为__$r<$n__.

9、设有一个四元非齐次线性方程组$Ax=b, r(A)=3, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其解向量，且$\alpha_1=[1,2,3,1]^T, \alpha_2+\alpha_3=[4,4,8,2]^T$，则此方程组的一般解为$[1,2,3,1]^T+k[1,0,1,0]^T$。

10、m个n维向量组成的向量组，当n__<__m时一定线性相关。

二、单选题（每小题3分，共15分）

1、对任意n阶矩阵A和B，总有（A）。

(A) $|AB|=|BA|$　(B) $AB=BA$　(C) $(AB)^T=A^TB^T$　(D) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

2、设A是3阶方阵，且$|A|=4$，则$|A^*|=$(B)。

(A)4　(B)16　(C)8　(D)12

3、若α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则(D)。

(A) α必可由β,γ,δ线性表示；　(B) β必不可由α,γ,δ线性表示；

(C) δ必不可由α,β,γ线性表示；　(D) δ必可由α,β,γ线性表示；

4、已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=0 \end{cases}$有非零解，则常数$a$为(D)

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5、向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_3=(3,4,5,6)^T$，$\alpha_4=(4,5,6,7)^T$的秩是（C）。

(A) 4　(B)1　(C)2　(D)3

三、（9 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}_n$

解：

$$D=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}_n \overset{c_n+\dots+c_2+c_1}{=} \begin{vmatrix}2n+1&2&2&\cdots&2\\2n+1&3&2&\cdots&2\\2n+1&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2n+1&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}_n$$

$$\overset{-r_1+r_i}{=}\begin{vmatrix}2n+1&2&2&\cdots&2\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}_n=2n+1$$

四、（10 分）已知 $AX-B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&2\\2&0\\1&0\end{pmatrix}$，求 X.

解：有条件知，$(A-E)X=B$，即 $X=(A-E)^{-1}B$；

$A\text{-}E=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 由初等行变换，有

$$(A-E\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&2&5&2\\0&1&1&2&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}2&0&1&3&2\\0&1&1&2&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}2&0&0&2&2\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right)\quad 即 X=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

五、（10 分）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\4\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，并将其余的向量用它线性表示。

解：$\begin{pmatrix}1&1&5&5\\2&-1&4&1\\3&-3&3&-3\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5&5\\0&-3&-6&-9\\0&-6&-12&-18\\0&2&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5&5\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2$是一个极大线性无关组， $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2$

六、（10 分. 设有线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=-2\\x_1+kx_2+x_3=-2\\kx_1+x_2+x_3=k-3\end{cases}$，问 k 取何值时，

此方程组 (1)有唯一解； (2)无解； (3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解法一：系数矩阵行列式为$|A|=\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=-(k-1)^2(k+2)$

当$|A|\neq0$时，即$k\neq1$且$k\neq-2$，有唯一解；

当$k=-2$时，$\begin{pmatrix}1&1&-2&-2\\1&-2&1&-2\\-2&1&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,r_3+2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&3&-3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$，无解；

当$k=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

方程组有无穷多解，其全部解为：$x_1=-3k,x_2=4-k,x_3=k,k$为任意常数.

所以解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

解法二：

$\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\1&k&1&-2\\k&1&1&k-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-kr_1}\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\0&k-1&1-k&0\\0&1-k&1-k^2&3k-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\0&k-1&1-k&0\\0&0&2-k-k^2&3k-3\end{pmatrix}$

当即$k\neq1$且$k\neq-2$，$r(A)=r(A,b)=3$有唯一解；

当$k=-2$，$r(A)<r(A,b)$无解

当$k=1$，$r(A)=r(A,b)=1$有无穷多解；

解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

七、求一个正交变换$x=Py$，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$$

化为标准型。

解：记$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$，

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=0$$，解得特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=9,\lambda_3=0.$

对于特征值$\lambda_1=-1$，由$(\lambda I-A)x=0$，解得：$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

对于特征值$\lambda_2=9$，由$(\lambda I-A)x=0$，解得：$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

特征值$\lambda_3=0$，由$(\lambda I-A)x=0$，解得：$p_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

单位化后，得

令$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&9&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\Lambda.$

八、证明题（每题3分）：

1. 已知方阵A满足$A^2-A-2E=O$，其中E是单位矩阵，证明$A+2E$可逆，并求$(A+2E)^{-1}$。

解：由 $(3E-A)(A+2E)=4E$，得$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$，.

2. 设实对称矩阵A和B是相似矩阵，证明：存在正交矩阵T，使得$T^{-1}AT=B$.

证：设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，因为$A\sim B$，所以$A$和$B$有相同的特征值，因此$B$的特征值也是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，又因为$A,B$为实对称矩阵，故存在正交矩阵$T_1,T_2$，使得

$T_1^{-1}AT_1=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

$T_2^{-1}BT_2=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

令$T=T_1T_2^{-1}$，则T为正交矩阵，且$T^{-1}AT=B$。