# §3  线性方程组的解

# 一、线性方程组的表达式

## 1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

## 2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

## 3. 矩阵方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**方程组可简化为** $Ax = b$ .

## 4. 向量组线性组合的形式

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组可表示成：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$$

# 二、线性方程组的解的判定

m、n 不一定相等！

设有 $n$ 个未知数 $m$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

**定义**：线性方程组如果有解，就称它是**相容的**；如果无解，就称它是**不相容的**．

**问题1**：方程组是否有解？

**问题2**：若方程组有解，则解是否唯一？

**问题3**：若方程组有解且不唯一，则如何表达或描述解的全体？

**定理3：** $n$ 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$ ；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$ ．

其自由未知数为$n - R(A)$

**分析：** 首先证明条件的充分性，即

- $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解；
- $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解；
- $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解．

必要性由逆否命题推出。

**例1：求解非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

**解：** $(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = R(A, b) = 3 < 4$，**故原线性方程组有无穷多解．**

解（续）：$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

即得与原方程组同解的方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

$\boxed{\text{为什么不能选 } x_4 \text{ 为自由变量?}}$

令 $x_3$ 做自由变量，则 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

方程组的通解可表示为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

**例2：求解非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

**解：** $(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2$，$R(A, b) = 3$ ，故原线性方程组无解．

**例3** 解线性方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad = 1. \end{cases}$$

**解** 首先我们来判别方程组是否有解. 把方程组的增广矩阵化为行阶梯形

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$$

$$(A,b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0\\0&0&3&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(A,b)=2$

所以方程组有解．它的一个同解方程组是

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0\,,\\ \qquad\qquad 3x_3+2x_4-x_5=1.\end{cases}$$

把 $x_1\,,x_5$ 取作非自由未知量，$x_2\,,x_3\,,x_4$ 当作自由未知量，并把方程组变形成

把 $x_1, x_5$ 取作非自由未知量，$x_2, x_3, x_4$ 当作自由未知量

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = -1 \quad + 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

选择 $x_2, x_3, x_4$ 作为自由未知量

同解方程组: $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4, \\ x_5 = -1 \quad + 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

令 $x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_4 = c_3$

则方程组的一般解（或通解）可以表示成为:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 - 2c_2 - c_3, \\ x_5 = -1 + 3c_2 + 2c_3. \end{cases}$$

其 $c_1, c_2, c_3$ 是任意常数

或将 $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_5 = -1 \quad + 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$ 表示成为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = -1 + 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = -1 + 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$\therefore$ 方程组的通解是：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

令 $x_2 = c_1, \quad x_3 = c_2, \quad x_4 = c_3$

**定理3**：$n$ 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$ ；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$ ．

**定理4**：$n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 不会出现无解的情况，因为 $R(A) = R(A, 0)$；

② 只有零解的充分必要条件是 $R(A) = n$ ；

③ 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$ ．

$\boxed{\text{定理4：} n \text{ 元齐次线性方程组 } Ax = 0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow R(A) < n}$

**例4：求解齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**解：** 对方程组的系数矩阵作初等行变换化阶梯阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行阶梯形矩阵}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行最简形矩阵}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

是原方程组的同解方程组，其中 $x_3, x_4$ 为自由变量

故原方程的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2$ 是任意常数

**例5：设有线性方程组**

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda.\end{cases}$$

问 $\lambda$ 取何值时，此方程组有(1) 唯一解；(2) 无解；(3) 有无限多个解？并在有无限多解时求其通解．

**回忆定理3**：$n$ 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$ ；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$ ．

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

**解：对增广矩阵作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵．**

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

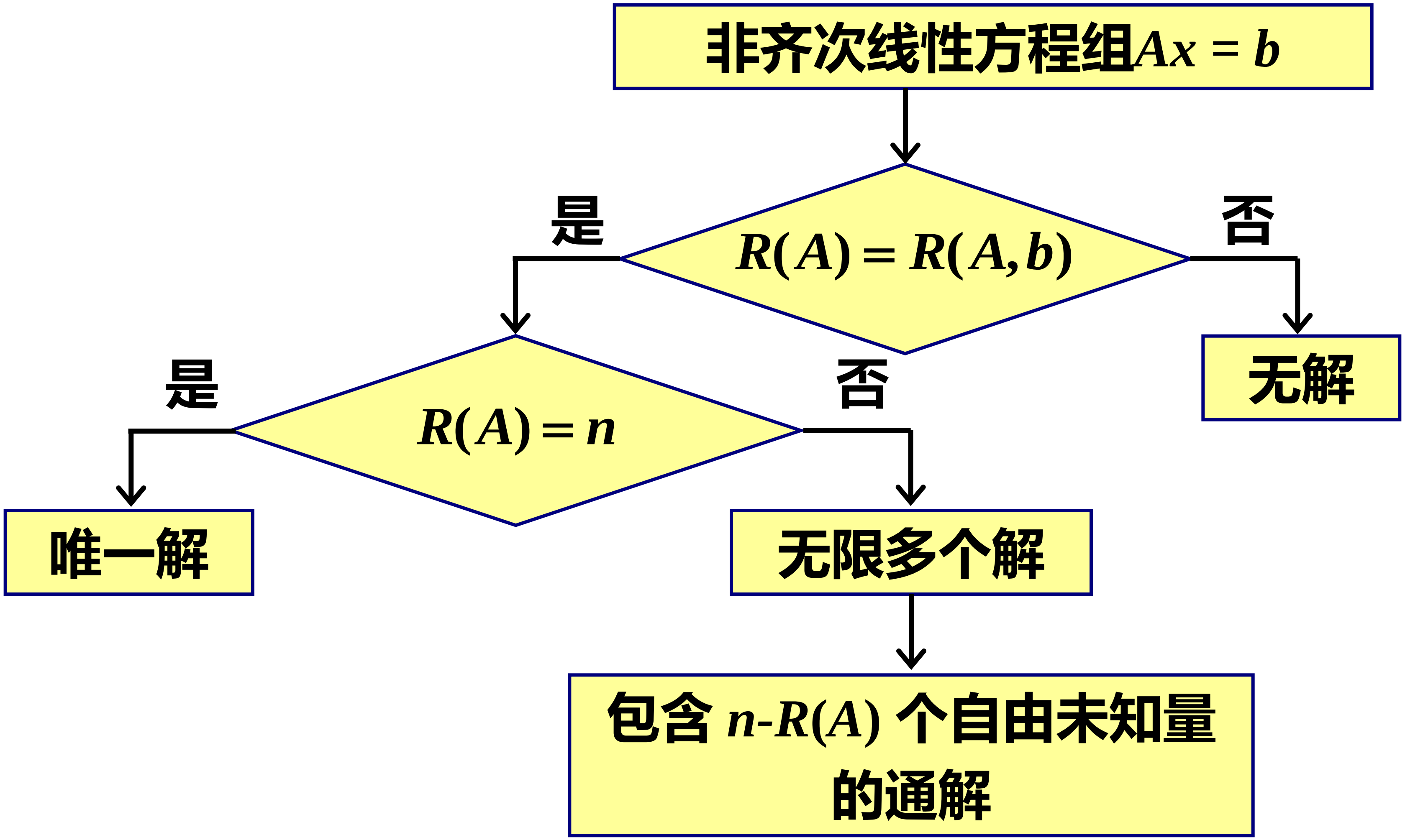
**于是，当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R(A,b)=3$ ，有唯一解．**

当 $\lambda=-3$ 时，$R(A)=R(A,b)=2$，有无限多解.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1$，$R(A,b)=2$，无解.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$



非齐次线性方程组$Ax = b$
$R(A) = R(A,b)$
是
否
无解
$R(A) = n$
是
否
唯一解
无限多个解
包含 $n$-$R(A)$ 个自由未知量的通解

**定理3**：$n$ 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

**定理4**：$n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$

**定理5**：线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b)$.

**定理6**：矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

**定理6：** 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, B) \ .$$

**定理7：** 设 $AB = C$ ，则 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$ . (P70⑦)

**证明：** 因为 $AB = C$ ，可理解为矩阵方程 $AX = C$ 有解 $X = B$ ，

于是 $R(A) = R(A, C)$ .

又因为 $R(C) \le R(A, C)$ ，故 $R(C) \le R(A)$

另一方面，由于 $AB = C$ 可推出 $(AB)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$ ，即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$ ，

可理解为矩阵方程 $B^{\mathrm{T}}X = C^{\mathrm{T}}$ 有解 $X = A^{\mathrm{T}}$ ，

于是 $R(B^T) = R(B^T, C^T)$，又因为 $R(C^T) \le R(B^T, C^T)$

$R(C) = R(C^T) \le R(B^T) = R(B)$，故 $R(C) \le R(B)$

综上所述，可知 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$

即 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$