§4 矩阵分块法

定义：用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为**对矩阵进行分块**；

每一个小块称为**矩阵的子块**；

矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是一个分块矩阵

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\quad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix};\quad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

对矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$分块方法不是唯一的，

可以有很多种， 比如

$$\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

思考题

伴随矩阵是分块矩阵吗？

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

答：不是．伴随矩阵的元素是代数余子式（一个数），而不是矩阵．

问题：为什么提出矩阵分块法？

答：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时采用分块法，可以使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，简化计算.

体现了**化整为零**的思想.

分块矩阵的加法

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

形式上看成
是普通矩阵
的加法！

分块矩阵的数乘

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

$$\lambda A=\left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{array}\right)$$

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

形式上看成是普通的数乘运算！

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m$$

分块矩阵的乘法

一般地，设 A为$m\times l$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, \quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}$$

$$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

按行分块以及按列分块

$m \times n$ 矩阵 A 有m 行 n 列，

若将第 j 列记作 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$,

$\because \alpha_i$是列矩阵（列向量）

$\because \alpha_i^T$是行矩阵（行向量）

则 $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$

于是设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，

若把 A 按行分块，把 B 按列块，则

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n\\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n\end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\alpha_i^T\beta_j=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}\right)\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

分块矩阵的转置

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

例如：$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=$

$A^T=$ $=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{pmatrix}$

分块矩阵不仅形式上进行转置，
而且每一个子块也进行转置．

分块对角矩阵

定义：设 A 是 n 阶方阵，若

1. A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，
2. 其余子块都为零矩阵，
3. 对角线上的子块都是方阵，

那么称 A 为**分块对角矩阵**(或称准对角矩阵)．

例如：
$$A=\left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

分块对角矩阵的性质

性质1

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

- $|A| = |A_1||A_2|\dots|A_s|$
- 若$|A_i|\neq 0$，$i=1,2,\dots,s$, 则$|A|\neq 0$，并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

证明：$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_1^{-1} & & & \\ & A_2A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sA_s^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix}=E$$

性质2

若 $|A_i| \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, s,$ 则 $A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$ 可逆，

且 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix} = E$$

例1 判断矩阵A是否可逆，若可逆，求其逆.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

解 $\Rightarrow \quad |A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n,$ （P7 例5）

$\because a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \Rightarrow |A| \neq 0, \quad \Rightarrow A$ 可逆

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\because \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例2:设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1} .

解：

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

例3 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

用矩阵分块的方法：(1) 计算 A^2，AB；

(2) 求 A^{-1} .

解 把矩阵 A，B 进行如下分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

并令 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$

其中

$$B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

则 1) $A^2=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1{}^2 & O\\ O & A_2{}^2\end{pmatrix}$

其中 $A_1{}^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 12 & 29\end{pmatrix},$

$$A_2{}^2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$A_1^{\ 2} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 29 \end{pmatrix}, \quad A_2^{\ 2} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_1^{\ 2} & O \\ O & A_2^{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_{11} & A_1B_{12} \\ A_2B_{21} & A_2B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $$A_1B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_{21}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_{22}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix},$$

所以

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_{11} & A_1B_{12} \\ A_2B_{21} & A_2B_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} -1 & 4 & 7 & 0 \\ -3 & 10 & 17 & 0 \\ \hdashline -2 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right).$$

2)

$$A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

由 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

由 $A_2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A_2^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&2&1\\0&4&2\\0&0&4\end{pmatrix}.$

$$\boxed{A_1^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\\0&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例4： 试证实矩阵 $A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 的充分必要条件是方阵 $A^TA=O_{n\times n}$.

证明： 把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

于是

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=O$$

那么

$$\alpha_j^T\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^{\ 2}+a_{2j}^{\ 2}+\cdots+a_{mj}^{\ 2}=0$$

$$\boxed{\begin{gathered}a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\\ j=1,2,\cdots,n\end{gathered}}$$

即 $A=O$.

例5 设 $D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$,

其中 A, B 分别为 k 阶和 r 阶可逆矩阵，C为 $r\times k$

证明：D 可逆，并求其逆.

证 $\because$ $|D| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \neq 0,$

$\therefore$ D 可逆. 设逆阵 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$,

于是 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix}$,

即 $\Rightarrow \begin{cases} AX_{11}=E_k \\ AX_{12}=O \\ CX_{11}+BX_{21}=O \\ CX_{12}+BX_{22}=E_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{11}=A^{-1} \\ X_{12}=O \\ X_{21}=-B^{-1}CA^{-1} \\ X_{22}=B^{-1} \end{cases}$

$$\therefore \quad D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$