线性代数 练习七

一、填空题(每小题 3 分，共 30 分)

1、排列 24135 的逆序数为______。

2、设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 5$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$，则$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 - 2c_1 \\ a_2 & b_2 - 2c_2 \end{vmatrix} =$ ______。

3、设 $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 的取值范围是 ______

4、矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，且 $AB = BA$，则 $x = 1$, $y = 2$。

5、设三阶矩阵 A 的特征值为 0，1，2，则 $\left|(A-3I)^{-1}\right| =$ ________。

6、设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} =$ __________。

7、已知向量 $\alpha = (2, a+1, 1)^T$，$\beta = (a, 2, -6)^T$ 正交，则 $a =$ _____.。

8、 若 n 元线性方程组有无穷多解，且其系数矩阵的秩为 r，则 r 与 n 的关系必为 _____.

9、设有一个四元非齐次线性方程组 $Ax = b, r(A) = 3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为其解向量，且 $\alpha_1 = [1,2,3,1]^T, \alpha_2 + \alpha_3 = [4,4,8,2]^T$，则此方程组的一般解为 ________________。

10、m 个 n 维向量组成的向量组，当 n _____ m 时一定线性相关。

二、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1、对任意 n 阶矩阵 A 和 B，总有（ ）。

(A) $|AB| = |BA|$ (B) $AB = BA$ (C) $(AB)^T = A^T B^T$ (D) $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

2、设 A 是 3 阶方阵，且 $|A| = 4$，则 $|A^*| =$（ ）。

(A) 4 (B) 16 (C) 8 (D) 12

3、若 α, β, γ 线性无关，α, β, δ 线性相关，则（ ）。

(A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示； (B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示；

(C) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示； (D) δ 必可由 α, β, γ 线性表示；

4、已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + a x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则常数 a 为（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4)^T$，$\alpha_2 = (2,3,4,5)^T$，$\alpha_3 = (3,4,5,6)^T$，$\alpha_4 = (4,5,6,7)^T$ 的秩是（ ）。

(A) 4 (B) 1 (C) 2 (D) 3

三、（9分）计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_n$

四、（10分）已知 $AX-B=X$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 X.

五、（10分）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，并将其余的向量用它线性表示。

六、（10 分. 设有线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=-2 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ kx_1+x_2+x_3=k-3 \end{cases}$，问 k 取何值时，

此方程组 (1)有唯一解； (2)无解； (3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

七、求一个正交变换 $x=Py$，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$$

化为标准型。

八、证明题（每题 3 分）：

1. 已知方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，其中 E 是单位矩阵，证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$。

2. 设实对称矩阵 A 和 B 是相似矩阵，证明：存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=B$.