计算 n 阶行列式的若干方法举例

1．利用行列式的性质计算

例： 一个 n 阶行列式 $D_n=\left|a_{ij}\right|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}, i, j=1,2,\cdots,n,$ 则称 D_n 为反对称行列式， 证明：奇数阶反对称行列式为零.

证明：由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 知 $a_{ii}=-a_{ii}$，即 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$

故行列式 D_n 可表示为 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，由行列式的性质 $|A|=|A'|$，

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n D_n$$

当 n 为奇数时，得 $D_n=-D_n$，因而得 $D_n=0$.

2．化为三角形行列式

例2 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

解 这个行列式每一列的元素，除了主对角线上的外，都是相同的，且各列的结构相似，因此 n 列之和全同．将第 2，3，…，n 列都加到第一列上，就可以提出公因子且使第一列的元素全是 1．

$$D\xlongequal[i=2,\cdots,n]{[1]+[i]}\begin{vmatrix} 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n) & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n) & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(i)-(1)}\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\cdot 1=1+\sum_{i=1}^n a_i \quad .$$

例 3　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解：这个行列式的特点是每行（列）元素的和均相等，根据行列式的性质，把第 2，3，…，n 列都加到第 1 列上，行列式不变，得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 4：浙江大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第一大题第 2 小题（重庆大学 2004 年攻读硕士研究生入学考试试题第三大题第 1 小题）的解答中需要计算如下行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

[分析]显然若直接化为三角形行列式，计算很繁，所以我们要充分利用行列式的性质。注意到从第 1 列开始；每一列与它一列中有 n−1 个数是差 1 的，根据行列式的性质，先从第 n−1 列开始乘以−1 加到第 n 列，第 n−2 列乘以−1 加到第 n−1 列，一直到第一列乘以−1 加到第 2 列。然后把第 1 行乘以−1 加到各行去，再将其化为三角形行列式，计算就简单多了。

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\2&1&1&\cdots&1&1-n\\3&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_i=r_1]{(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&-n\\2&0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+\frac{1}{n}r_i]{(i=2,\cdots,n)}\frac{1}{n}\begin{vmatrix}1+\cdots+n&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&-n\\2&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&0&\cdots&0&0\\n-1&-n&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-n\\0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&0\\-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

4．降阶法（按行（列）展开法）

降阶法是按某一行（或一列）展开行列式，这样可以降低一阶，更一般地是用拉普拉斯定理，这样可以降低多阶，为了使运算更加简便，往往是根据行列式的特点，先利用列式的性质化简，使行列式中有较多的零出现，然后再展开。

例 1、计算 20 阶行列式 $D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&18&19&20\\2&1&2&\cdots&17&18&19\\3&2&1&\cdots&16&17&18\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\20&19&18&\cdots&3&2&1\end{vmatrix}$

[分析]这个行列式中没有一个零元素，若直接应用按行（列）展开法逐次降阶直至化许许多多个 2 阶行列式计算，需进行 20！*20－1 次加减法和乘法运算，这人根本是无法完成的，更何况是 n 阶。但若利用行列式的性质将其化为有很多零元素，则很快就可算出结果。

注意到此行列式的相邻两列（行）的对应元素仅差 1，因此，可按下述方法计算：

解：

$$D_{20}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&18&19&20\\2&1&2&\cdots&17&18&19\\3&2&1&\cdots&16&17&18\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\20&19&18&\cdots&3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[(i=1,\cdots19)]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\2&-1&1&\cdots&1&1&1\\3&-1&-1&\cdots&1&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\19&-1&-1&\cdots&-1&-1&1\\20&-1&-1&\cdots&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_i+r_1]{(i=2,\cdots,20)}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\3&0&2&\cdots&2&2&2\\4&0&0&\cdots&2&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\20&0&0&\cdots&0&0&2\\21&0&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}=21\times(-1)^{20+1}\times 2^{18}=-21\times 2^{18}$$

例 2　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&0\\1&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$

解　将 D_n 按第 1 行展开 $D_n=a\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0\\0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a\\1&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$

$$=a^n+(-1)^{n+1}(-1)^n a^{n-2}=a^n-a^{n-2}.$$

例3　计算 n（n≥2）阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$.

解　按第一行展开，得 $D=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

再将上式等号右边的第二个行列式按第一列展开，则可得到

$$D=a^n+\left(-1\right)^{1+n}\left(-1\right)^{(n-1)+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}\left(a^2-1\right).$$

5．递（逆）推公式法

递推法是根据行列式的构造特点，建立起 D_n 与 D_{n+1} 的递推关系式，逐步推下去，从而求出 D_n 的值。 有时也可以找到 D_n 与 D_{n+1} ， D_n 的递推关系，最后利用 D_1 ， D_2 得到 D_n 的值。

［注意］用此方法一定要看行列式是否具有较低阶的相同结构如果没有的话，即很难找出递推关系式，从而不能使用此方法。

例 1 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

解：将行列式按第 n 列展开, 有 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$,

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}),$$

得　$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n$ 。

同理得　$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n$,　　$D_n=\begin{cases}(n+1)\alpha^n\ , & \alpha=\beta; \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\ , & \alpha\neq\beta.\end{cases}$

例 2　计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a-y & x & x & \cdots & x \\ 0 & a & x & \cdots & x \\ 0 & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a-y)D_{n-1}+y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y-x & a-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y-x & y-x & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$

$$=(a-y)D_{n-1}+y(a-x)^{n-1}$$

同理 $D_n=(a-x)D_{n-1}+x(a-y)^{n-1}$

联立解得 $D_n=\dfrac{x(a-y)^n-y(a-x)^n}{x-y},(x\neq y)$

当 $x=y$ 时,

$$D_n=(a-x)D_{n-1}+x(a-x)^{n-1}=(a-x)^2D_{n-2}+2x(a-x)^{n-1}$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots=(a-x)^{n-2}D_2+(n-2)x(a-x)^{n-1}=(a-x)^{n-1}\left[a+(n-1)x\right]$$

例 3　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$.

解　首先建立递推关系式．按第一列展开，得：

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot a_n\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n\ ,$$

这里 D_{n-1} 与 D_n 有相同的结构，但阶数是 $n-1$ 的行列式．

现在，利用递推关系式计算结果．对此，只需反复进行代换，得：

$$D_n=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n=x^2(xD_{n-3}+a_{n-2})+a_{n-1}x+a_n=\cdots\cdots=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n\ ,$$

因 $D_1=\left|x+a_1\right|=x+a_1$，故 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$．

最后，用数学归纳法证明这样得到的结果是正确的．

当 $n=1$ 时，显然成立．设对 $n-1$ 阶的情形结果正确，往证对 n 阶的情形也正确．由

$D_n=xD_{n-1}+a_n=x\left(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}\right)+a_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ，、

可知，对 n 阶的行列式结果也成立．根据归纳法原理，对任意的正整数 n，结论成立．

例4 证明 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}=n+1$．

证明　按第一列展开，得 $D_n=2\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}$．

其中，等号右边的第一个行列式是与 D_n 有相同结构但阶数为 $n-1$ 的行列式，记作 D_{n-1}；第二个行列式，若将它按第一列展开就得到一个也与 D_n 有相同结构但阶数为 $n-2$ 的行列式，记作 D_{n-2}．

这样，就有递推关系式：$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$．

因为已将原行列式的结果给出，我们可根据得到的递推关系式来证明这个结果是正确的．

当 $n=1$ 时，$D_1=2$，结论正确．当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3$，结论正确．

设对 $k\leqslant n-1$ 的情形结论正确，往证 $k=n$ 时结论也正确．

由 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}=2n-\left(n-1\right)=n+1$　可知，对 n 阶行列式结果也成立．

根据归纳法原理，对任意的正整数 n，结论成立．

例 5、2003 年福州大学研究生入学考试试题第二大题第 10 小题要证如下行列式等式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$$

证明　：$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，其中 $\alpha\neq\beta$

（虽然这是一道证明题，但我们可以直接求出其值，从而证之。）

［分析］此行列式的特点是：除主对角线及其上下两条对角线的元素外，其余的元素都为零，这种行列式称“三对角”行列式[1]。从行列式的左上方往右下方看，即知 D_{n-1} 与 D_n 具有相同的结构。

因此可考虑利用递推关系式计算。

证明：D_n按第 1 列展开，再将展开后的第二项中 n-1 阶行列式按第一行展开有：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

这是由 D_{n-1} 和 D_{n-2}表示 D_n的递推关系式。若由上面的递推关系式从 n 阶逐阶往低阶递推，计算较繁，注意到上面的递推关系式是由 n-1 阶和 n-2 阶行列式表示 n 阶行列式，因此，可考虑将其变形为：

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

或 $$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$$

现可反复用低阶代替高阶，有：

$$\begin{aligned}D_n-\alpha D_{n-1}&=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\beta^3(D_{n-3}-\alpha D_{n-4})\\&=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

同样有：

$$\begin{aligned}D_n-\beta D_{n-1}&=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})=\alpha^3(D_{n-3}-\beta D_{n-4})\\&=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\beta(\alpha+\beta)]=\alpha^n\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

因此当$\alpha\neq\beta$时

由（1）（2）式可解得：$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，证毕。

6．利用范德蒙行列式

根据行列式的特点，适当变形（利用行列式的性质——如：提取公因式；互换两行（列）；一行乘以适当的数加到另一行（列）去； ...）把所求行列式化成已知的或简单的形式。其中范德蒙行列式就是一种。这种变形法是计算行列式最常用的方法。

例 1 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1+1&x_2+1&\cdots&x_n+1\\x_1^2+x_1&x_2^2+x_2&\cdots&x_n^2+x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^{n-2}&x_2^{n-1}+x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}$

解 把第 1 行的－1 倍加到第 2 行，把新的第 2 行的－1 倍加到第 3 行，以此类推直到把新的第 n－1 行的－1 倍加到第 n 行，便得范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq1}(x_i-x_j)$$

例 2　计算 $n+1$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$. 其中 $a_1a_2\cdots a_{n+1}\neq 0$.

解　这个行列式的每一行元素的形状都是 $a_i^{n-k}b_i^k$，$k=0$，1，2，…，n．即 a_i 按降幂排列，b_i 按升幂排列，且次数之和都是 n，又因 $a_i\neq 0$，若在第 i 行（$i=1$，2，…，n）提出公因子 a_i^n，则 D 可化为一个转置的范德蒙行列式，即

$$D=a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(b_ia_j-a_ib_j\right).$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$.

解：

$$D\overset{(3)+(y+z)(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ xy+xz+yz & y^2+yz+xz & yz+z^2+xy \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)+x(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2+xy+yz+xz & y^2+xy+yz+xz & z^2+xy+yz+xz \end{vmatrix}$$

$$=(xy+yz+xz)(y-x)(z-x)(z-y)$$

例 4 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

解　　作如下行列式, 使之配成范德蒙行列式

$$P(y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n\end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

易知 D_n 等于 $P(y)$ 中 y^{n-1} 的系数的相反数，而 $P(y)$ 中 y^{n-1} 的系数为 $-\sum_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$ ，因此，$D_n=\sum_{k==1}^{n}x_k\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$

例 5、 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}(a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

解：显然该题与范德蒙行列式很相似，但还是有所不同，所以先利用行列式的性质把它化为范德蒙行列式的类型。

先将的第 n 行依次与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行，1 行对换，再将得到到的新的行列式的第 n 行与第 n-1 行，n-2 行，…, 2 行对换，继续仿此作法，直到最后将第 n 行与第 n-1 行对换，这样，共经过（n-1）+（n-2）+…+2+1=n（n−1）/2 次行对换后，得到

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2}\\ (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\end{vmatrix}$$

上式右端的行列式已是范德蒙行列式，故利用范德蒙行列式的结果得：

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}[(a-n+i)-(a-n+j)]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(i-j)$$

7．加边法（升阶法）

加边法（又称升阶法）是在原行列式中增加一行一列，且保持原行列式不变的方法。

它要求：1 保持原行列式的值不变； 2 新行列式的值容易计算。根据需要和原行列式的特点选取所加的行和列。加边法适用于某一行（列）有一个相同的字母外，也可用于其第 列（行）的元素分别为 n-1 个元素的倍数的情况。

例 1 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_n & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{\text{第}i\text{行减第}1\text{行}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=x^n\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x}\right)$$

例 2　计算 n（n≥2）阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解　先将 D_n 添上一行一列，变成下面的 $n+1$ 阶行列式：

$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$. 显然，$D_{n+1}=D_n$.

将 D_{n+1} 的第一行乘以 -1 后加到其余各行，得 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

因 $a_i\neq 0$，将上面这个行列式第一列加第 i（$i=2$，…，$n+1$）列的 $\frac{1}{a_{i-1}}$ 倍，得：

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-1&a_1&0&\cdots&0\\-1&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&1&1&\cdots&1\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

8．数学归纳法

当 D_n 与 D_{n+1} 是同型的行列式时，可考虑用数学归纳法求之。 一般是利用不完全归纳法寻找出行列式的猜想值，再用数学归纳法给出猜想的证明。因此，数学归纳法一般是用来证明行列式等式。因为给定一个行列式，要猜想其值是比较难的，所以是先给定其值，然后再去证明。（数学归纳法的步骤大家都比较熟悉，这里就不再说了）

例 1　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$

解：用数学归纳法. 当 n = 2 时， $D_2=\begin{vmatrix}x&-1\\a_2&x+a_1\end{vmatrix}=x(x+a_1)+a_2=x^2+a_1x+a_2$

假设 n = k 时，有　$D_k=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$

则当 n = k+1 时，把 D_{k+1} 按第一列展开，得

$$D_{k+1}=xD_k+a_{k+1}=x(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)+a_{k+1}=x^{k+1}+a_1x^k+\cdots+a_{k-1}x^2+a_kx+a_{k+1}$$

由此，对任意的正整数 n，有 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$

例 2　　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\alpha&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos\alpha&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\alpha&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}$.

解：$D_1=\cos\alpha$，　$D_2=\cos 2\alpha$，于是猜想　$D_n=\cos n\alpha$.

证明：对级数用第二数学归纳法证明.

$n=1$时，结论成立. 假设对级数小于n时，结论成立. 将n级行列式按第n行展开，有

$$D_n=2\cos\alpha\cdot D_{n-1}+(-1)^{2n-1}\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\begin{aligned}&=2\cos\alpha\cdot D_{n-1}+(-1)^{2n-1}D_{n-2}\\&=2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha+(-1)^{2n-1}\cos(n-2)\alpha\\&=2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha\\&=\cos[(n-1)\alpha+\alpha]=\cos n\alpha\end{aligned}$$

例 3 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y\end{vmatrix}$$

解：

$D_1=x+y$

$D_2=x^2+xy+y^2$

$D_3=x^3+x^2y+xy^2+y^3$

猜测：$D_n=x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n$

证明

（1）n = 1, 2, 3 时，命题成立。假设 n≤k – 1 时命题成立,考察 n=k 的情形：

$$D_k=\begin{vmatrix}x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y\end{vmatrix}$$

$$=(x+y)D_{k-1}-xy\begin{vmatrix}1 & xy & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x+y & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x+y & xy\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y\end{vmatrix}$$

$$=(x+y)D_{k-1}-xyD_{k-2}$$

$$D_{k-1}=x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1}$$
$$D_{k-2}=x^{k-2}+x^{k-3}y+\cdots+xy^{k-3}+y^{k-2}$$
$$D_k=(x+y)D_{k-1}-xyD_{k-2}$$
$$=(x+y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1})$$
$$\quad -xy(x^{k-2}+x^{k-3}y+\cdots+xy^{k-3}+y^{k-2})$$
$$=x^k+x^{k-1}y+\cdots+xy^{k-1}+y^k$$
故命题对一切自然数 n 成立。

9．拆开法

拆项法是将给定的行列式的某一行（列）的元素写成两数和的形式，再利用行列式的性质将原行列式写成两行列式之和，把一个复杂的行列式简化成两个较为简单的。使问题简化以利计算。

例 1　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}+\lambda_1 D_{n-1}$

$$=a_1\lambda_2\cdots\lambda_n+\lambda_1 D_{n-1}=\cdots\cdots=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)$$

．

例2　计算 n（n⩾2）阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$.

解　将 D_n 按第一列拆成两个行列式的和，即

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

再将上式等号右端的第一个行列式第 i 列（$i=2$，3，…，n）减去第一列的 i 倍；第二个行列式提出第一列的公因子 y_1，则可得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}=y_2\cdots y_n\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

当 n≥3 时，$D_n=0$．当 $n=2$ 时，$D_2=(x_2-x_1)(y_2-2y_1)$．

例3计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$，（$a\neq 0$）.

解　将第一行的元素都表成两项的和，使 D_n 变成两个行列式的和，即

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将等号右端的第一个行列式按第一行展开，得：$\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}$．

这里 D_{n-1} 是一个与 D_n 有相同结构的 $n-1$ 阶行列式；将第二个行列式的第一行加到其余各行，得：

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix}=a(x+a)^{n-1}.$$

于是有　　$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$　　（1）

另一方面，如果将 D_n 的第一行元素用另一方式表成两项之和：

$(x+a)-a\quad 0+a\quad 0+a\quad \cdots\quad 0+a$　　仿上可得：$D_n=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$　　（2）

将（1）式两边乘以 $(x+a)$，（2）式两边乘以 $(x-a)$，然后相减以消去 D_{n-1}，得：$D_n=\dfrac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$．

5.消去法求三对角线型行列式的值

例 6 求 n 阶三对角线型行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} \qquad (1)$$

D_n 的构造是：主对角线元全为 2，主对角线上方第一条次对角线与下方第一条次对角线的元全为 1，其余的元全为 0。

解 用消去法，把 D_n 中主对角线下方第一条次对角线的元 1 全部消成 0：首先从第二行减去第一行的 $\frac{1}{2}$ 倍，于是第二行变为

$0,\ 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1,\cdots,0$

其次从第三行减去第二行（指新的第二行，以下同）的 $\frac{2}{3}$ 倍，则第三行变为

$0,\ ,0,\ 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3},\ 1,\ 0,\cdots,0$

再从第四行减去第三行的 $\frac{3}{4}$ 倍，则第四行变为

$0,\ 0,\ 0,\ 2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\ 1,\ 0,\cdots,0$

类似地做下去，直到第 n 行减去第 n – 1 行的 $\frac{n-1}{n}$ 倍，则第 n 行变为

$0,\ 0,\cdots,0,\ 2-\frac{n-1}{n}=\frac{n+1}{n}$

最后所得的行列式为

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n+1}{n}\end{vmatrix} \qquad (2)$$

上面的行列式是三角型行列式，它的主对角线元顺次为

$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n}$ 93）

又主对角线下方的元全为 0。故 D_n 的值等于（3）中各数的连乘积，即 $D_n=n+1$。

注 3 一般的三对角线型行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0\\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & 0\\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix} \qquad (4)$$

也可以按上述消去法把次对角线元$b_2,b_3,\cdots,b_n$全部消去，得到一个三角型行列式，它的值等于该三角型行列式的主对角线元的连乘积。

10. 因式分解法

如果行列式D是某个变数x的多项式$f(x)$，可对行列式施行某些变换，求出$f(x)$的互不相同的一次因式，设这些一次因式的乘积为$g(x)$，则$D=f(x)=cg(x)$，再比较$f(x)$与$g(x)$的某一项的系数，求出c值.

例 8　计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}$.

解:注意$x=1$时，$D_n=0$,所以，$x-1\,|\,D_n$.　同理$x-2,\cdots,x-(n-1)$均为D_n的因式

又$x-i$与$x-j\ (i\neq j)$各不相同　所以　$(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\,|\,D_n$

但D_n的展开式中最高次项x^{n-1}的系数为 1，所以$D_n=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$

注：此题也可将的第行减去第一行化为三角形行列式计算.