线性代数

总复习

一、行列式 的计算

1.二、三阶行列式的计算

对二、三阶行列式，可使用行列式的展开式（即对角线法则）直接计算：也可利用行列式的性质进行计算.

2. n阶行列式的典型计算方法（n≥3）

利用性质将行列式化为三角形行列式或降阶后计算

例 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -16 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}=40$$

例　求$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

解　$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例4 求$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n \end{vmatrix}$.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\cdots+a_n & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\cdots+a_n.$$

(3) 利用范德蒙行列式的结果计算

注：范德蒙行列式非常重要，会将变形了的范德蒙行列式还原成标准的范德蒙行列式.

例　求 $p(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$ 的根.

解　$$p(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & x \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & x^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(4-2)(x-2)(4-3)(x-3)(x-4)=0.$$

故 $x=2,3,4$ 为 $p(x)=0$ 的根.

利用矩阵理论计算行列式

例　设3阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3-3\alpha_4+5\alpha_2)$，$B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$，$C=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_4,\alpha_4+5\alpha_1)$，若$|B|=-5$，$|C|=64$，求$|A|$.

解　$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3-3\alpha_4+5\alpha_2|$

$=|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|+|\alpha_1,\alpha_2,-3\alpha_4|+|\alpha_1,\alpha_2,5\alpha_2|$

$=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|-3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=-2|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|-3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|$.

由于　$C=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_4,\alpha_4+5\alpha_1)=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&5\\2&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$,

$64=|C|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|\begin{vmatrix}1&0&5\\2&2&0\\0&3&1\end{vmatrix}$，由于$\begin{vmatrix}1&0&5\\2&2&0\\0&3&1\end{vmatrix}=32$，故$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=2$.

从而　$|A|=-2|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|-3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=-2\cdot(-5)-3\cdot2=4$

例　设A为3阶方阵且$|A|=\frac{1}{8}$，求$\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|$.

解　$$\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|=\left|3A^{-1}-8|A|A^{-1}\right|=\left|(3-8|A|)A^{-1}\right|$$

$$=\left|2A^{-1}\right|=2^3\left|A^{-1}\right|=2^3\cdot\frac{1}{|A|}=64.$$

利用矩阵的特征值理论求行列式的值.

例　已知三阶方阵 A 的三个特征值为 1，-2，-3，求 $|A|$ 及 $|A-5E|$.

解　$|A| = 1\cdot(-2)\cdot(-3) = 6$;

$A-5I$ 的特征值为 -4，-7，-8，

所以 $|A-5I| = (-4)\cdot(-7)\cdot(-8) = -224$

注：关于行列式的计算，一般而言有三大类方法：一是利用行列式的理论（行列式的定义与性质等），二是利用矩阵理论，三是利用矩阵的特征值理论. 因此，要求读者做到：熟练掌握这些基本知识，牢记公式，并通过多做练习提高计算行列式的能力.

矩阵

一. 矩阵的秩及其求法

例　设 A 为 n 阶方阵且 $r(A)=n-2$，求 $r(A^*)$.

解　由 $r(A)=n-2$ 知：A的所有$n-1$阶子式全为零，

故 $A^*=0$，从而$r(A^*)=0$.

例　设$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，若$r(A)=3$，求$a$.

解　因为$r(A)=3$，所以$|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3=0$$

当$a=1$时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A)=1$;

当 $a=-3$ 时，$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

由于 A 的 3 阶子式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$,

$r(A)=3$，故 $a=-3$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & t & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，问 t 为何值时，$r(A)<3$.

解　因为 $A \xrightarrow{r_2-4r_1,\, r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & t-8 & 11 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\div 7 \leftrightarrow r_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & t-8 & 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-11r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & t+3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

欲使 $r(A)<3$，则 $t+3=0$，即 $t=-3$.

利用矩阵的初等变换求矩阵的秩，就是利用初等变换将 A 化为阶梯阵，然后由阶梯阵的秩确定 A 的秩. 这是一类非常基本的题目，必须做到会做且做对.

二. 逆阵及其求法

1. 利用伴随矩阵 A^* 求逆阵

例 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$ad-bc\neq 0$，求$A^{-1}$.

解 因为$|A|=ad\text{-}bc\neq 0$，故 A 可逆.

又$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，从而有 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. 利用初等变换求逆阵

方法与原理如下：

即 $$\left(A \vdots I\right) \to \cdots \text{初等行变换} \cdots \to \left(I \vdots A^{-1}\right).$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

求逆时可用初等行变换，或初等列变换，但必须*始终如一*！！一般而言，用初等行变换。

例 $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\rightarrow\cdots\text{初等行变换}\cdots\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)$,

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

3. 利用定义求逆阵

利用定义求 n 阶方阵 A 的逆阵，即找或猜或凑一个 n 阶方阵 B，使 $AB=I$ 或 $BA=I$，从而 $A^{-1}=B$.

例　设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$，求证 A 可逆并求 A^{-1}.

证　由 $A^2 - A - 2I = 0$，得：$A(A - I) = 2I$,

即
$$A \cdot \frac{A - I}{2} = I.$$

从而 A 可逆且 $A^{-1} = \frac{A - I}{2}$.

例　已知 n 阶方阵 A 满足 $2A(A-I)=A^3$，求 $(I-A)^{-1}$.

解　由 $2A(A-I)=A^3$，得

$$A^3-2A^2+2A=0$$

所以　$$A^3-2A^2+2A-I=-I,$$

从而有　$$(I-A)(A^2-A+I)=I.$$

即　$$(I-A)^{-1}=A^2-A+I.$$

4. 利用分块矩阵求逆阵

关于分块矩阵的几个基本公式

(1) 设 A_i 为 n_i 阶方阵，$i=1,2,\cdots,s$, 则有

$$\text{(i)}\ \begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1||A_2|\cdots|A_s|;$$

(iii) 矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$可逆的充要条件为$A_i$是可逆的，

且有$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 A_{ii} 为 n_i 阶方阵，$i=1,2$，则有

(i) $\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$， $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$；

(ii) $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件为 $A_{ii}\,(i=1,2)$ 可逆且

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

(iii) $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件为 $A_{ii}\,(i=1,2)$ 可逆且，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

(3) 设 A 为 m 阶方阵，B为 n 阶方阵，则

(i) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$;

(ii) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件为 A 与 B 可逆且

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

例19 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解　将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$,

因为 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$,

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

例 $M=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，其中$a_1,\cdots,a_n \neq 0$，求 M^{-1}.

解 将 M 分块为$M=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$,

其中 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{pmatrix}$, $B=(a_n)$.

从而

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

注：1. 矩阵的逆阵是线性代数中非常重要的一个内容，主要包括：

①证明矩阵 A 可逆；

②求逆阵；

③证明矩阵 B 是矩阵A 的逆阵.

三. 矩阵方程及其求解方法

标准的矩阵方程有三种形式：

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXC = B,$$

其中 A , C 均为可逆阵.

例　求解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

解　$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2,\, r_2 - r_3,\, \cdots r_{n-1} - r_n} \left(\begin{array}{cccc:ccccc} 1 & & & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$

故

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AX=A+3X$，求 X.

解　由 $AX=A+3X$，得 $(A-3E)X=A$.

$$(A-3E \vdots A)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2&0&1&1&0&1\\0&-1&0&0&2&0\\1&0&-2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3,\,r_2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&1\\0&1&0&0&-2&0\\-2&0&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&1\\0&1&0&0&-2&0\\0&0&-3&3&0&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3\cdot(-\frac{2}{3}),\,r_3\cdot(-\frac{1}{3})}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-2&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right),$$

故　$X=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

四. 关于矩阵运算

矩阵运算有其特殊性，若能灵活地运用矩阵的运算性质及运算规律，可极大地提高运算效率.

例　设$\alpha=(1, 0, -1)^T$, $A=\alpha\alpha^T$，求 A^n.

解　由于 $\boldsymbol{\alpha^T\alpha=(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2}$，故有

$$A^n=(\alpha\alpha^T)^n=\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\cdots\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T=\alpha(\alpha^T\alpha)(\alpha^T\alpha)\cdots(\alpha^T\alpha)\alpha^T$$

$$=(\alpha^T\alpha)^{n-1}\cdot\alpha\alpha^T=2^{n-1}A.$$

由于 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$，

所以 $\boldsymbol{A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

注：对一般的 n 阶方阵 A，我们常常用归纳的方法求A^n.

例27　设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求 $A^{2004}-2A^2$.

因为 $A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

故 $A^4=I$，从而 $A^{2004}=(A^4)^{501}=I^{501}=I$.

所以 $A^{2004}-2A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

例　设 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，　且 $\boldsymbol{A(I-C^{-1}B)^T C^T = B}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解　由于 $\boldsymbol{A(I-C^{-1}B)^T C^T = A(C-CC^{-1}B)^T = A(C-B)^T}$，

故 $A(C-B)^T=B$. 从而

$$A=B[(C-B)^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -3 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

n元向量

一. 向量组的秩及极大线性无关组的求法

利用矩阵的初等变换求向量组的秩及极大无关组

例 λ 为何值时，向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3)$，$\alpha_3=(2,3,2,2,5)$，$\alpha_4=(1,3,-1,1,\lambda)$，线性相关？秩为多少？并求一个极大线性无关组.

解 设 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$,

经若干次初等变换后，有 $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

故当 $\lambda=4$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(A)=3<4$，向量组线性相关，秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 为极大线性无关组.

注：用初等变换求向量组的极大无关组时，一定要将向量组按**列**摆放成矩阵，并做 初等行变换，若仅仅只是求向量组的秩，作怎样的初等变换都无所谓，结果是一样的. 但一般来说，只做初等行变换。

二. 相关性的判定

1. 利用定义讨论向量组的线性相关性

利用定义讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性相关性，一般步骤为:

(1) 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$;

(2) 将向量方程转化为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 的方程组并求解;

(3) 根据解的情况判断向量组的线性相关性，即

若 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关;

若 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 不全为零，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关.

例 设 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 2),\ \alpha_2=(2,\ 0,\ -3),\ \alpha_3=(1,\ 2,\ 1).$

(1) 任一向量$\beta=(a,\ b,\ c)$ 能否由向量 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性表示？

(2) 证明你的结论.

解 (1) 任一向量 $\beta=(a,b,c)$ 都可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(2) 因为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&2\\2&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-7&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而构成R^3的一组基，因此任给向量 $\beta=(a,b,c)$ 都可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

例 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 都是线性无关的，但向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma-\beta$ 线性无关.

证 设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k(\gamma-\beta)=0,$

由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关知：β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，不妨设

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2\cdots+l_s\alpha_s,$$

则有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k(\gamma-l_1\alpha_1-l_2\alpha_2\cdots-l_s\alpha_s)=0,$

整理得 $(k_1-kl_1)\alpha_1+(k_2-kl_2)\alpha_2+\cdots+(k_s-kl_s)\alpha_s+k\gamma=0.$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$是线性无关的，故有

$$\begin{cases} k_1-kl_1=0, \\ k_2-kl_2=0, \\ \cdots\cdots \\ k_s-kl_s=0, \\ k=0. \end{cases}$$

由此方程组得$k_1=k_2=\cdots=k_s=k=0$，从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,$
$\gamma-\beta$线性无关.

2. 利用等价讨论向量组的线性相关性

例　设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关且向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$

可由其线性表示为 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_s \end{pmatrix}$,

设 $K=(k_{ij})_{s\times s}$，证明当$r(K)=s$时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

证　设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \\ \alpha_s\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}$, 则 $B=KA$; 由于 $r(K)=s$, 故

K 为 $s\times s$ 阶可逆阵，从而有 $A=K^{-1}B$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是线性无关的.

线性方程组

一. 基本概念题

例　设齐次线性方程组 $A_{5\times 3}X=0$ 仅有零解，求 $r(A)$.

解　方程组中未知量个数 $n=3$，又方程组 $AX=0$ 有惟一零解，所以 $r(A)=n$，故 $r(A)=3$.

例　若 $\begin{cases} kx+y+z=0, \\ x+ky-z=0, \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解，求 k.

解　因为 $AX=0$ 有非零解，所以 $r(A)<n=3$，又

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$ 故有 $|A|=0$，解得 $k=1$ 或 $k=4$.

例　设四元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数矩阵 A 的秩为 3， η_1,η_2,η_3 是它的三个特解，且 $\eta_1=(2,3,4,5)^T$， $\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$，求 $AX=\beta$ 的通解.

解　因为 $n=4$，$r(A)=3$，故 $AX=0$ 的基础解系含一个向量.

又 $\xi=\eta_1-\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}=(\dfrac{3}{2},2,\dfrac{5}{2},3)^T$ 为 $AX=0$ 的解，

从而为 $AX=0$ 的一个基础解系，

所以方程组 $AX=0$ 的通解为

$$\eta_1+k_1\xi=(2,3,4,5)^T+k_1(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3)^T,k_1\in C$$

或

$$(2,3,4,5)^T+k(3,4,5,6)^T,k\in C.$$

二. 求解线性方程组

1. 求 $AX=0$ 的通解或基础解系

步骤:

((1))写出系数矩阵 A 并对其作初等行变换化为行最简形式

（同时得到 $r(A)$，这样也就可以确定基础解系所含解向量的个数）;

(2) 由行最简形式确定自由未知量并写出与原方程组同解的方程组;

(3) 对自由未知量赋值，求出基础解系（有几个自由未知量，就应赋几组值，将其视为向量组，它们是线性无关的）.

2. 求 $AX=b$ 的通解

步骤：

(1) 写出增广矩阵 $\overline{A}$ 并用初等行变换将其化为行最简形式，求出 $r(A)$ 及 $r(\overline{A})$，判断是否有解. 当有解时，则

(2) 由行最简形式写出同解方程组，求出 $AX=0$ 的基础解系及 $AX=b$ 的一个特解；

(3) 写出通解.

例　求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -23. \end{cases}$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & \vdots & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -11 \\ 7 & 1 & 5 & -6 & \vdots & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$,

故 $r(\overline{A}) = r(A) = 2$，方程组有无穷多解且导出组的基础解系含 $4-2=2$ 个解向量. 对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 - 3, \\ x_2 = 2x_3 - x_4 - 2. \end{cases} \qquad (*)$$

取 $x_3 = x_4 = 0$，得特解 $\eta^* = (-3,-2,0,0)^T$.

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，从而导出组的基础解系为 $\xi_1 = (-1,2,1,0)^T, \xi_2 = (1,-1,0,1)^T$.

方程组的通解为 $\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2$ 为任意常数.

注：1. 在求解线性方程组时，一定要将系数矩阵或增广矩阵化为行最简形式，这样有利于求解.

2. 根据同解方程组（*）式写导出组的基础解系时，不要将常数加进去.

三. 含参数的方程组

对含参数的方程组，求解之前要先确定参数. 一般而言，有两种方法确定参数：一是行列式法，二是初等变换法.

当系数矩阵为方阵且系数中含有参数时，常考虑用行列式法，特别当阶数较小或系数行列式容易求出时更是首选行列式法. 即当系数行列式不为零时，方程组有惟一解；而当系数行列式等于零时，我们可由系数行列式等于零这一方程确定出参数值，从而将含参数的方程组化为不含参数的一般方程组.

其他情形常用初等变换法，这时依据有解的条件 $r(\overline{A})=r(A)$ 确定参数值.

例　λ 为何值时，方程组$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

有解？并在有解时求其解.

解　$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3,\, r_3-r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda^2+\lambda-2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda^2+\lambda-2\end{pmatrix},$$

当$\lambda^2+\lambda-2=0$即$\lambda=1$或$\lambda=-2$时，方程组有解.

$$\lambda=1\text{时，}\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

故通解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in C.$

$\lambda=-2$时，$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & -2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$,

故通解为 $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, k\in C.$

例　参数 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + ax_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b \end{cases}$

有惟一解、无解、有无穷多解?

解　$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & a & 15 & \vdots & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & \vdots & b \end{pmatrix}$$

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 1 & 3 & 6 & 1 & \vdots & 3\\ 3 & -1 & a & 15 & \vdots & 3\\ 1 & -5 & -10 & 12 & \vdots & b\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 0 & 2 & 4 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -4 & a-6 & 6 & \vdots & 0\\ 0 & -6 & -12 & 9 & \vdots & b-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a+2 & 2 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & b+5\end{pmatrix}.$$

故当$a\neq-2$时方程组有惟一解.

当$a=-2$时,

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & b+5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-1 \end{pmatrix},$$

故当$b \neq -1$时方程组无解；当$b = 1$时，方程组有无穷多组解.

综上所述，当$a \neq -2$时方程组有惟一解.

当$a = -2, b \neq -1$时，方程组无解；当$a = -2, b = -1$时，

方程组有无穷多组解.

例　设 $\alpha_1=(1,\ 3,\ 0,\ 5)^T, \alpha_2=(1,\ 2,\ 1,\ 4)^T, \alpha_3=(1,\ 1,\ 2,\ 3)^T,$
$\beta=(1,\ a,\ 3,\ b)^T.$

(1) a,b 取何值时，β 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并求出表示式.

(2) a,b 取何值时，β 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解　设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则有

$$\beta=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=AX,$$

从而β能否用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示转化为方程组$AX=\beta$是否有解的问题.

因为 $$\overline{A}=(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\3&2&1&\vdots&a\\0&1&2&\vdots&3\\5&4&3&\vdots&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&-1&-2&\vdots&a-3\\0&1&2&\vdots&3\\0&-1&-2&\vdots&b-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&2&\vdots&-a+3\\0&0&0&\vdots&a\\0&0&0&\vdots&b-a-2\end{pmatrix}.$$

故当$a\neq 0$或$b-a\neq 2$时，方程组无解，从而β不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

当$a=0$，且$b=2$时，方程组有解，从而β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示. 此时

$$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&2&\vdots&3\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&\vdots&-2\\0&1&2&\vdots&3\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

方程组的通解为 $(-2,3,0)^T + k(1,-2,1)^T$.

从而 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示为

$$\beta = (-2+k)\alpha_1 + (3-2k)\alpha_2 + k\alpha_3,\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

注：讨论向量 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，并进一步求出表示式，实际上就是方程组是否有解并在有解时求出其通解的问题.

矩阵的特征值与特征向量

一. 特征值与特征向量的求法

1.利用定义求特征值与特征向量

步骤：

(1) 由 $|A-\lambda E|=0$ 求出 λ;

(2)对 λ 求 $(A-\lambda E)X=0$ 的非零解.

例 已知$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$, $r(A)=2$，求 c 及 A 的特征值.

解 由于 $|A|=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix}=24c-72$,

又 $r(A)=2$，所以 $|A|=0$，故 $c=3$.

由 $|A-\lambda E|=0$，得 A 的特征值$\lambda_1=0, \lambda_2=4, \lambda_3=9$.

注：用定义求特征值与特征向量，最重要的是求出特征值．为此，首先求出矩阵的特征多项式，并将它按降幂排列，然后通过试根或因式分解将其化为一次式的乘积，从而求出特征值．求特征向量即求齐次方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的基础解系．

2.利用公式求特征值与特征向量

非常重要的公式，一定要记住。

设λ为A的特征值，则

(i) $k\lambda$为kA的特征值；

(ii) λ^m为A^m的特征值；

(iii) $f(\lambda)$为$f(A)$的特征值；其中$f(x)$为x的多项式.

(iv) λ^{-1}为A^{-1}的特征值；

(v) $\dfrac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值；

$\rangle A$可逆。

(vi) λ为A^T的特征值.

特征值与矩阵的关系公式：

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值，则

$$(i)\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|;$$

$$(ii)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

例　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，求：a,b

解　由于 $A\sim B$，故 A 与 B 有相同的特征值．又 B 的特征值是 $2,2,b$，所以 A 的特征值也是 $2,2,b$.

因此　$1+4+a=2+2+b$，　$|A|=2\times 2\times b$

由于 $|A|=6(a-1)$，　所以 $a=5, b=6$

例　已知三阶方阵 A 的三个特征值为 1，-2，-3，

求：$|A|$ 及 A^{-1}, A^*, A^2+2A+E 的特征值．

解　$|A| = 1\cdot(-2)\cdot(-3) = 6;$

A^{-1} 的特征值为 $:1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3};$　　A^* 的特征值为 $:6, -3, -2;$

A^2+2A+E 的特征值为 $:1^2+2\cdot 1+1, (-2)^2+2\cdot(-2)+1,$

$(-3)^2+2\cdot(-3)+1$，即 $4, 1, 4.$

例　设 $\lambda=2$ 是 A 的特征值，求:$2A-\left(\frac{1}{4}A^3\right)^{-1}$ 的一个特征值.

解　$2A-\left(\frac{1}{4}A^3\right)^{-1}$ 的一个特征值为

$$2\cdot 2-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^3\right)^{-1}=\frac{7}{2}.$$

例　设 n 阶可逆阵 A 的每行元素之和均为 $a(a\neq 0)$，求 $2A^{-1}+3E$ 的一个特征值及对应的特征向量.

解　由题设知 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, 所以 a 为 A 的一个特征值且 $a\neq 0$,

从而 $\dfrac{2}{a}+3$ 为 $2A^{-1}+3E$ 的一个特征值，

对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

例　设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$，求：$A, A^*$ 及 $E+A^{-1}$ 的特征值.

解　因为 $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+5)$,

所以 A 的特征值为 $-5,1,1$ 且 $|A|=-5$,

从而 A^* 的特征值为 $1,-5,-5$;

$E+A^{-1}$ 的特征值为 $\frac{4}{5},2,2.$

二. A 与对角阵相似的解题方法

例54　判断下列矩阵能否与对角阵相似.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解　A的特征值为$1,1,2,$

$$\text{因为 } A-E=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $r(A-E)=2\neq 3-2$，所以 A 不能与对角阵相似.

B 的特征值为 $1, 1, -1$,

$$\text{因为} B-E=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $r(B-E)=1=3-2$，所以 B 能与对角阵相似.

注：当矩阵有重特征值时，我们用定理“A 与对角阵相似的充要条件为 $r(A-\lambda_i E)=n-r_i$”来判定 A 能否与对角阵相似，其中 r_i 为特征值 λ_i 的重数，n 为矩阵 A 的阶数.

矩阵相似对角化的步骤：

(1) 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$，若 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ 互异，则 A 与对角阵相似；若$\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$中互异的为 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m$，每个$\lambda_i$ 的重数为 r_i，当 $r(A- \lambda_i E)=n- r_i$时 $(i=1,2,\ldots m)$，A 与对角阵相似；否则 A 不能与对角阵相似.

(2) 当 A 与对角阵相似时，求出 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$，并令 $P=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=\Lambda$.

例　设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值分别为-2, 1,4，记$\Lambda=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 求：可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$;

(2)求：正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

解　(1) 对特征值 $\lambda_1=-2$，求其对应的特征向量：

$$A-\lambda_1 E=A+2E=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ 故特征向量为 $\xi_1=(1,2,2)^T$；

同理求得特征值 $\lambda_2=1$ 所对应的特征向量 $\xi_2=(2,1,-2)^T$ 及特征值 $\lambda_3=4$ 所对应的特征向量 $\xi_3=(2,-2,1)^T$，

令 $P=\begin{pmatrix}\xi_1, & \xi_2, & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，则 P 为可逆阵且 $P^{-1}AP=\Lambda$.

(2) 因为 A 为实对称阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 两两正交，将它们单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{3}\xi_1,\eta_2=\frac{1}{3}\xi_2,\eta_3=\frac{1}{3}\xi_3.$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\eta_1, & \eta_2, & \eta_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵且

$Q^{-1}AQ=\Lambda$.

注：对于实对称矩阵 A，一定有可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$为对角阵，P的列向量为 A 的特征向量，对角阵中主对角线上的元素为 A 的特征值，而且也一定有正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵. 当 A 的特征值互异时，其特征向量两两正交，只需将特征向量单位化，即可求得正交阵 Q；当 A 有 k 重特征值时，这个k 重特征值一定对应有 k 个线性无关的特征向量，用施密特正交化方法将其化为两两正交的向量并单位化，就求出正交阵 Q 来了.

例　设 $1,1,-1$ 是三阶实对称方阵 A 的 3 个特征值，$\xi_1=(1,1,1)^T,\xi_2=(2,2,1)^T$ 是 A 的属于特征值 1 的特征向量，求 A.

解　设 A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，由于A 为实对称阵，故 ξ_3 与 ξ_1 及 ξ_2 正交，即

$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$2x_1+2x_2+x_3=0.$$

解之得 $$\xi_3=(1,-1,0)^T.$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$,

且 $$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & l\\ 1 & l & 1\end{pmatrix}$ 正交相似于 $\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，求 k,l 及正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

解　由相似矩阵的性质知：0, 1, 2 为 A 的特征值，

从而 $|A|=0, |A-E|=0, |A-2E|=0,$

由 $|A|=0$，得 $k=l$, 再由 $|A-E|=0$，得 $k=l=0.$

故 $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

A的属于特征值$0,1,2$的特征向量依次为$\xi_1=(1,0,-1)^T$，
$\xi_2=(0,1,0)^T,\xi_3=(1,0,1)^T$，它们两两正交，将其单位化，得

$$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,P_2=(0,1,0)^T,P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

令$Q=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

则Q为正交阵且$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

四. A^n 的求法

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值为 $1,5,-5$，求 A^9.

解　因为 A 是3阶方阵且有3个互异特征值，故可求得可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix},$$

从而

$$A^9=(P\Lambda P^{-1})^9=P\Lambda^9P^{-1}.$$

先求 P，即求 A 的属于特征值 $1,5,-5$ 的特征向量.

对 $\lambda_1 = 1$，求得特征向量 $\xi_1 = (1,0,0)^T$；

对 $\lambda_2 = 5$，求得特征向量 $\xi_2 = (2,1,2)^T$；

对 $\lambda_3 = -5$，求得特征向量 $\xi_3 = (1,-2,1)^T$.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$A^9 = P\Lambda^9 P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^9 & \\ & & (-5)^9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4\cdot 5^9 & -5+3\cdot 5^9 \\ 0 & -3\cdot 5^9 & 4\cdot 5^9 \\ 0 & 4\cdot 5^9 & 3\cdot 5^9 \end{pmatrix}.$$

. 方阵 A 及其特征值、特征向量的互求

例　设三阶实对称 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i, i = 1,2,3$，　$\alpha_1 = (1,2,2)^T$，$\alpha_2 = (2,-2,1)^T, \alpha_3 = (-2,-1,2)^T$，求 A.

解　由 $A\alpha_i = i\alpha_i$ 知 1,2,3 为 A 的特征值，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 A 的分别属于 1,2,3 的特征向量，

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，将其单位化并取

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix},\quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (显然 Q 为正交阵),

则有 $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

例　设 $1,1,-1$ 是三阶实对称方阵 A 的 3 个特征值，$\xi_1=(1,1,1)^T$，$\xi_2=(2,2,1)^T$ 是 A 的属于特征值 1 的特征向量，求 A.

解　设 A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，

由于A 为实对称阵，故 ξ_3 与 ξ_1 及 ξ_2 正交，即

$$(\xi_1,\xi_3)=x_1+x_2+x_3=0,$$
$$(\xi_2,\xi_3)=2x_1+2x_2+x_3=0.$$

解之得　$\xi_3=(1,-1,0)^T.$

五. 证明题

例59 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=E$，求证 $A-2E$ 可逆.

证(I) 只需证明 $|A-2E|\neq 0$，即 2 不是 A 的特征值.

设 λ 为 A 的任一特征值，α 为对应的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha$.

因为 $A^2\alpha=\lambda^2\alpha$，又 $A^2=E$，故有 $\alpha=\lambda^2\alpha$，从而 $\lambda=\pm1$，所以 2 不是 A 的特征值，从而 $|A-2E|\neq 0$，即 $A-2E$ 可逆.

例　设 $A^2=A$，试证明：A 的特征值只能是 1 或 0.

证　设 λ 是 A 的一个特征值，α 是对应的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha$. 左乘 A，有 $A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$，因为 $A^2=A$，故 $A\alpha=\lambda^2\alpha$，即 $\lambda\alpha=\lambda^2\alpha$，从而有 $(\lambda^2-\lambda)\alpha=0$，由 $\alpha\neq 0$，知 $\lambda^2-\lambda=0$，也就是 $\lambda=1$ 或 0.

例　设 n 阶方阵 A 与对角阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似$(1 \le r \le n)$. 证明: $|A+E| = 2^r$.

证(I)　由 A 与对角阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似知 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{r\text{ 个}},\ \underbrace{0,\cdots,0}_{n-r\text{ 个}}$ 为 A 的特征值,

从而 $A+E$ 的特征值为 $\underbrace{2,2,\cdots,2}_{r\text{ 个}},\ \underbrace{1,\cdots,1}_{n-r\text{ 个}}$,

$$|A+E| = 2\cdots2\cdot1\cdots1 = 2^r.$$

例　设 A 为 n 阶方阵且 $AX=0$ 有非零解，证明：A 以零为一个特征值.

证　因为 $AX=0$ 有非零解，所以 $|A|=0$，故 0 是 A 的一个特征值.

正交矩阵

向量组的标准正交化

二次型

一．化二次型为标准形

化二次型为标准形的方法：正交变换法；

例　用正交变换法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2$ $-4x_2x_3$ 化为标准形，并求出所用的正交变换矩阵.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$由|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$;

其对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-2, -1, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (1, 2, 2)^T$，因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互异，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交，将它们单位化，得

$$\eta_1 = \frac{1}{3}\alpha_1, \eta_2 = \frac{1}{3}\alpha_2, \eta_3 = \frac{1}{3}\alpha_3.$$

于是所求正交变换的矩阵为 $Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

令 $X=QY$，则二次型化为标准形 $y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

注：将二次型 f 用正交变换化为标准形的一般步骤为：

((1)) 写出二次型 f 的矩阵 A；

(2) 求出 A 的全部相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，对每一个 r_i 重特征值 λ_i，求出对应的 r_i 个线性无关的特征向量，并利用施密特正交化方法将其正交单位化，将上面求得的 $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ 个两两正交的单位向量作为列向量，排成一个 n 阶方阵 Q，则 Q 为正交阵且 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$ 为对角阵；

((3))作正交变换 $X=QY$，即可将二次型化为只含平方项的标准形：　　$f = X^TAX = Y^T(Q^TAQ)Y = Y^T\Lambda Y$.

例　设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 c;

(2) 求一可逆变换将该二次型化为标准形;

解　由 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为2知，

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&c\end{pmatrix}$ 的秩为2，故 $c=8$.

又 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2=y_1^2+y_2^2,$$

其中 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3, \\ y_1 = x_2 + 2x_3, \\ y_1 = x_3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_1. \end{cases}$

所用线性变换的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例　设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

经正交变换 $X=QY$ 化为标准形 $-2y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，求：k 及正交阵 Q.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},$$

由题设 A 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$ 相似，即 A 的特征值为 $-2,$ $1,2$，故 $|A|=-4$，由此得 $k^2-2k+1=0$，解得 $k=1.$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

求得 A 的对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,1,2)^T,\alpha_2=(1,-1,1)^T,$ $\alpha_3=(1,1,0)^T$，并将它们单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_1,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3,$$

所求正交阵$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$.

二. 正定二次型及正定矩阵的判定

主要有三种方法

(1) 利用特征值判定;

(2)利用定义判定;

(3)利用顺序主子式判定.

1. 利用特征值判定

例　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$，判定该二次型的正定性.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

易知 A 的特征值为 0,2,2，故该二次型为准正定(半正定)二次型.

注：当矩阵的特征值比较容易求时，用特征值来判定二次型或矩阵的正定性是很简便的一种方法.

例 设A为正定阵，证明A^{-1}, A^{*}都是正定阵.

证： $\because A$为正定阵$\Rightarrow A$的特征值全大于零,

$\therefore A^{-1}, A^{*}$的特征值全大于零, $\therefore A^{-1}, A^{*}$都是正定阵.

2 利用定义判定

例72 设 A,B 均为 n 阶正定阵，证明：$A+B$ 也为 n 阶正定阵.

证 因为 A,B 都为 n 阶正定阵，所以对任意的 $X_{n\times 1}\neq 0$,

都有 $X^TAX>0$, $X^TBX>0$，故

$$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0,$$

从而 $A+B$ 也为正定阵.

例　设 P 为 n 阶方阵，$A=P^TP$，讨论 A 的正定性.

解　对任意的 $X_{n\times 1}\neq 0$，我们有

$$X^TAX=X^TP^TPX=(PX)^T(PX)=\|PX\|^2.$$

当 P 可逆时，由 $X\neq 0$ 知 $PX\neq 0$，从而 $\|PX\|^2>0$，$A=P^TP$ 为正定阵.

当 P 不可逆时，显然有 $\|PX\|^2\geq 0$，因此 $A=P^TP$不是正定阵.

3. 利用顺序主子式判定

二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$正定的充要条件为矩阵$A$的各阶顺序主子式都大于零，即$\Delta_i > 0$.

例: t为何值时, 二次型正定?

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

解: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix}$ $\qquad \Delta_1=5>0,$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0, \quad \Delta_3=|A|=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix}=t-2$$

$\Rightarrow t>2$时, $\Delta_3>0$. $\quad \therefore t>2$时, 二次型正定.

三. 证明题

例　设 A 是 n 阶正定阵，证明：$|2E+A|>2^n$.

证　因为 A 是正定阵，故存在正交阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda,$$

且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的大于零的特征值，从而有

$$2E+A=QQ^{-1}+Q\Lambda Q^{-1}=Q(2E+\Lambda)Q^{-1},$$

$$|2E+A|=|2E+\Lambda|=\begin{vmatrix}2+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2+\lambda_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(2+\lambda_i)>2^n.$$

例 设 A 为 n 阶正定阵，证明存在实对称阵 B，使 $B^2 = A$.

证 因为 A 正定，故存在正交阵 Q，使

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1}, \lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

令 $B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q^{-1}$，则 B 为实对称阵且 $A = B^2$.