第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

§1 矩阵的初等变换

一、初等变换的概念
二、矩阵之间的等价关系
三、初等变换与矩阵乘法的关系
四、初等变换的应用

一、矩阵的初等变换

引例：求解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\
4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\
3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④
\end{cases}
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,
$$

$\because$ 系数行列式为零，$\therefore$ 不能用克莱姆法则，但是仍然可以考虑用消元法

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ & \\ & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③ - 2\times① \\ ④ - 3\times①}]{② - ③}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{②\div 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-2\times③]{③\leftrightarrow④}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ & \\ & \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\
x_4 = -3, & ③ \\
0 = 0. & ④
\end{cases}
$$

恒等式

$$
\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}
x_1 = x_3 + 4 \\
x_2 = x_3 + 3 \\
x_4 = -3
\end{cases}}
$$

三种变换：

✓交换方程的次序，简称**对换变换**，记作 ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ；

✓以**非零**常数 k 乘某个方程，简称**倍乘变换**，记作ⓘ$\times k$；

✓一个方程加上另一个方程的 k 倍，简称**倍加变换**，记作 ⓘ $+k$ⓙ.

其逆变换是：

ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ ⇒ ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ

ⓘ$\times k$ ⇒ ⓘ$\div k$

ⓘ$+k$ⓙ ⇒ ⓘ$-k$ⓙ

结论：

1. 在上述变换过程中，实际上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算．

定义：下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

✓对调两行，简称**对换变换**，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

✓以**非零**常数 k 乘某一行的所有元素，简称**倍乘变换**记作 $r_i \times k$ ；

✓某一行加上另一行的 k 倍，简称**倍加变换**，记作 $r_i + kr_j$.

其逆变换是：

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \Rightarrow \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \Rightarrow \quad r_i \times \frac{1}{k};$$

$$r_i + kr_j \quad \Rightarrow \quad r_i - kr_j.$$

把定义中的“行”换成“列”，就得到矩阵的**初等列变换**的定义．

定义：下列三种变换称为矩阵的**初等列变换**：

- ✓对调两列，简称**对换变换**，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$；
- ✓以非零常数 k 乘某一列的所有元素，简称**倍乘变换**
  记作 $c_i \times k$ ；
- ✓某一列加上另一列的 k 倍，简称**倍加变换**，记作 $c_i + kc_j$.

其逆变换是：

$$c_i \leftrightarrow c_j \Rightarrow c_i \leftrightarrow c_j;$$

$$c_i \times k \Rightarrow c_i \times \frac{1}{k};$$

$$c_i + kc_j \Rightarrow c_i - kc_j.$$

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**．

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

$$= B$$

原方程可用矩阵形式表示为：$Ax = b$

增广矩阵$B = (A\ \ b)$

增广矩阵

结论：

对原线性方程组施行的变换,即加减消元法,可以转化为对增广矩阵的初等行变换.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\longleftrightarrow②} \qquad \underbrace{}_{r_3 \div 2}^{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\xrightarrow[\substack{③ - 2\times① \\ ④ - 3\times①}]{② - ③} \qquad \overbrace{}^{r_2 - r_3}_{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{②\div 2} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{r_3+5r_2 \\ r_4-3r_2}}^{r_2 \div 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$\xrightarrow[④ - 2×③]{③ \longleftrightarrow ④} \qquad \underbrace{\quad r_3 \leftrightarrow r_4 \quad}_{r_4 - 2r_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 = 3 & ② \\ x_4 = -3 & ③ \\ 0 = 0 & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

B_5 对应方程组为:
(它与原方程组同解)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

二、矩阵之间的等价关系

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$$

称矩阵A与B行等价，记作 $A \overset{r}{\sim} B$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$$

称矩阵A与B列等价，记作 $A \overset{c}{\sim} B$

称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A \sim B$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$$

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反身性　$A \sim A$；

对称性　若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

传递性　若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

行阶梯形矩阵：

1. 可画出一条阶梯线，线的下方全为零；
2. 每个台阶只有一行；
3. 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵：

4. 非零行的第一个非零元为1;
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

（这也是增广矩阵的最简式）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵：

4. 非零行的第一个非零元为1;

5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4}$$

标准形矩阵：

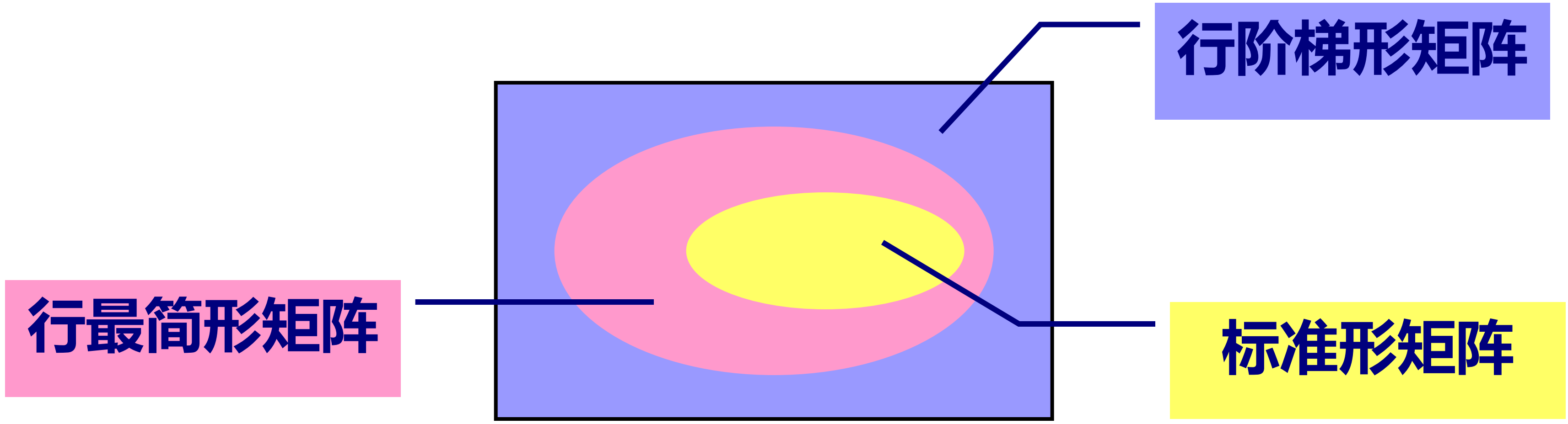
6. 左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_6 \xrightarrow[c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3]{c_4 + c_1 + c_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = F$$

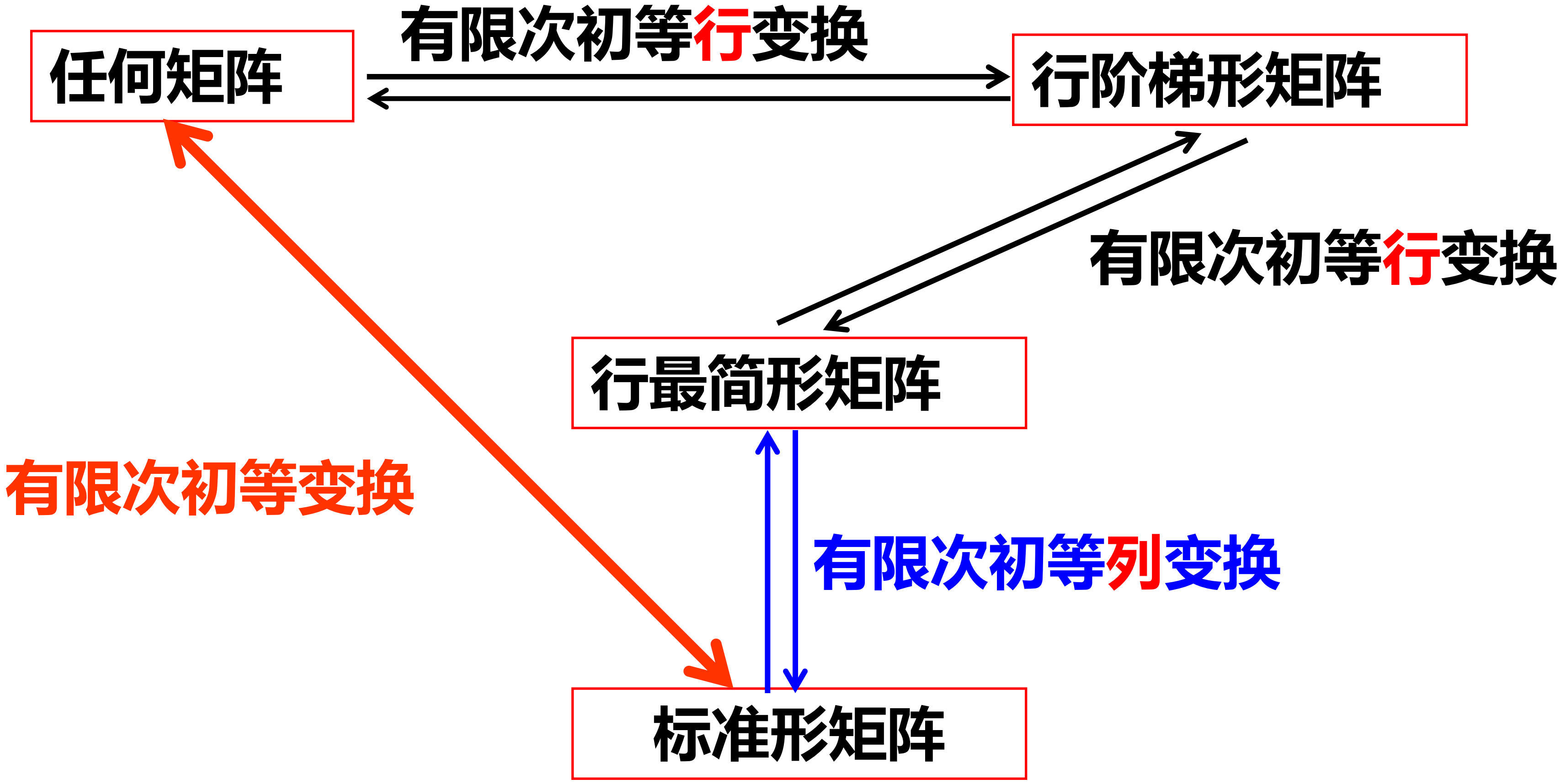
$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形矩阵由m、n、r三个参数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数，也是E_r的阶数，也是F 中1的个数。

三者之间的包含关系



结论


任何矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

回顾:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（见书上$P61$）

定理1

（i）$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow \exists m$阶可逆矩阵$P$，使得$PA = B$

（ii）$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow \exists n$阶可逆矩阵$Q$，使得$AQ = B$

（iii）$A \sim B \Leftrightarrow \exists m$阶可逆矩阵$P$,

n阶可逆矩阵Q,使得$PAQ = B$

为了证明定理1，首先介绍初等矩阵的概念.

三、初等变换与矩阵乘法的关系

定义：由**单位矩阵** E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种**初等变换**对应着三种**初等矩阵**.

(1)对调单位阵的两行（列）；

(2)以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵的某一 行（列）；

(3)以 k 乘单位阵单位阵的某一 行（列）加到另一 行（列）　.

(1) 对调单位阵的第 i, j 行（列），记作 $E_m(i, j)$.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$ 记作 $E_5(3, 5)$

$$\|$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_3 \leftrightarrow c_5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & & 0 & \end{pmatrix}$$

(2)以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵第 i 行（列），记作 $E_m(i(k))$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$ 记作 $E_5(3(k))$

$$\|$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0& &0&0\\0&1& &0&0\\0&0& &0&0\\0&0& &1&0\\0&0& &0&1\end{pmatrix}$$

(3)以 k 乘单位阵第 j 行加到第 i 行，记作 $E_m(ij(k))$.

两种理解！

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_5 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

记作 $E_5(35(k))$

以 k 乘单位阵第 i 列加到第 j 列 .

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_5 + c_3 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_3(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3(2,3)A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & {\color{red}a_{12}} & {\color{blue}a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & {\color{red}a_{22}} & {\color{blue}a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & {\color{red}a_{32}} & {\color{blue}a_{33}} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & {\color{blue}a_{13}} & {\color{red}a_{12}} & a_{14} \\ a_{21} & {\color{blue}a_{23}} & {\color{red}a_{22}} & a_{24} \\ a_{31} & {\color{blue}a_{33}} & {\color{red}a_{23}} & a_{34} \end{pmatrix}$$

结论

$E_m(i,j)A_{m\times n}$ 把矩阵A的第 i 行与第 j 行对调，即 $r_i \leftrightarrow r_j$

$A_{m\times n}E_n(i,j)$ 把矩阵A的第 i 列与第 j 列对调，即 $c_i \leftrightarrow c_j$

$E_m(i(k))A_{m\times n}$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$

$A_{m\times n}E_n(i(k))$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$

$E_m(ij(k))A_{m\times n}$ 把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$

$A_{m\times n}E_n(ij(k))$ 把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$

口诀：左行右列.

性质1 设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换 ⟷ 初等矩阵

初等变换的逆变换 ⟷ ?

初等矩阵可逆吗？其逆矩阵还是初等矩阵吗 ?

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\ & & & & \end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\div k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3+r_5\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3-r_5\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

推论：对于n 阶方阵A、B，如果$AB = E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵。（P43）

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$E_5(3,5)E_5$$

$$E_5(3,5)E_5(3,5)E_5$$
$$= E_5(3,5)E_5(3,5)$$
$$= E_5$$

所以 $E_5(3,5)^{-1} = E_5(3,5)$.

一般地，$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3?\times\frac{1}{k}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5(3(k))E_5$$

$$E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))E_5$$

$$=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(3(k))^{-1}=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

一般地，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是
可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_5+c_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_5+c_3?\times(-k)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_5(35(k)) \qquad E_5E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(35(k))^{-1}=E_5(35(-k))$.

一般地，$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵的逆矩阵 ?

初等矩阵是可逆的，并且其逆矩阵仍然是初等矩阵：

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j);$$

$$E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)).$$

性质2：n 阶方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$，使 $A = P_1 P_2 \dots, P_l$ ．（充分性显然，只证必要性）

证明：设A的标准形矩阵为$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，于是必存在一系列初等矩阵$Q_1 Q_2, \cdots, Q_s, Q_{s+1}, \cdots, Q_l$，使

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_s A Q_{s+1} \cdots Q_l = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

初等矩阵都是可逆的，其逆阵仍是初等矩阵

$$\Rightarrow A = Q_s^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_l^{-1} \cdots Q_{s+1}^{-1}, \quad r \le n$$

以下要证明 $r = n$，即$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$是单位矩阵$E$. 反证法：若 $r < n$，

上式两端分别取行列式，可推出$|A| = 0$，这与已知A是可逆相矛盾$\Rightarrow r = n$

令 $Q_s^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} Q_l^{-1} \cdots Q_{s+1}^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_l \Rightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_l$ [证毕]

回忆：性质1　设A与B都是 $m\times n$ 矩阵，

口诀：左行右列.

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

$\boxed{\text{定理1（i）} A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, m\text{阶可逆矩阵} P,\quad \text{使} PA = B}$ （见书上$P61$）

证明："$\Rightarrow$" $\because A \overset{r}{\sim} B \Rightarrow$ 由行等价的定义及性质1可知，　A经过有限次初等行变换变成B，　也就是说，$\exists$有限个m阶初等矩阵

$$P_1, P_2, \cdots, P_l,\quad \text{使} P_1P_2\cdots P_lA = B,\quad \text{令} P_1P_2\cdots P_l = P,$$

$\because P_i(i = 1, 2, \cdots, l)$都是初等矩阵 $\Rightarrow P$ 是m阶可逆矩阵，且$PA = B$

"$\Leftarrow$"　$\because \exists\, m$阶可逆矩阵P，　使 $PA = B$，由性质2可知

必$\exists$有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_l$，　使$P_1P_2\cdots P_l = P$，　从而就有

$P_1P_2\cdots P_lA = B$，　根据行等价的定义及性质1得：$A \overset{r}{\sim} B$

性质1 设A与B都是 $m\times n$ 矩阵，

✓ 对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵. 以下同理可证明P61定理1 (ii)

定理1（ii）$A\overset{c}{\sim}B \Leftrightarrow \exists\, n$阶可逆矩阵$Q$，使 $AQ=B$

同理可证书上P61定理1（iii）

回忆定义：称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A_{m\times n}\sim B_{m\times n}$

$$A \underset{}{\overset{\text{有限次行或列初等变换}}{\rightleftarrows}} B$$

（iii）矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ=B$.

定理1 (iii) 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q ，使 $PAQ = B$.

证明： $A \sim B \Leftrightarrow A$ 经过有限次初等变换（有限次初等行变换或有限次初等列变换）变成 B,

$\Leftrightarrow$ 存在有限个 m 阶初等矩阵 $P_1P_2\cdots P_l$ 和有限个 n 阶初等矩阵 $Q_1Q_2\cdots Q_s$， 使

$$P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s = B$$

$\Leftrightarrow$ 令 $P_1P_2\cdots P_l = P$， $Q_1Q_2\cdots Q_s = Q$， $PAQ = B$

再议性质2： n 阶方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ ，使 $A = P_1P_2\cdots P_l = P_1P_2\cdots P_lE$

任何一个可逆矩阵都可以分解成有限个初等矩阵的乘积，

$\Leftrightarrow$ 任何一个可逆矩阵的标准形矩阵是单位矩阵 E，

$\Leftrightarrow$ 可逆矩阵的行最简形矩阵是单位矩阵 E.

$\Leftrightarrow$ 任何一个可逆矩阵都和同阶的单位矩阵 E 等价。

推论： 方阵 A 可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$ (或 $A \overset{c}{\sim} E$)

（书上P63）

四、初等变换的应用（求逆阵、解矩阵方程）

当$|A| \neq 0$时，存在初等矩阵$P_i, i=1,2,\cdots,l-1,l$; 使得$A = P_1P_2\cdots P_{l-1}P_l$

$$\Rightarrow P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A = P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}P_1\cdots P_{l-1}P_l = E$$

$$\Rightarrow \boxed{P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A = E,} \Rightarrow \boxed{P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E = A^{-1},}$$

$$\therefore \quad P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}\left(A \,\vdots\, E\right)$$

$$=\left(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A \,\vdots\, P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E\right)$$

$$=\left(E \,\vdots\, A^{-1}\right)$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵（$A \,\vdots\, E$）施行初等行变换，当把A变成E时，原来的E就变成 A^{-1}.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

如何简便的验证 A^{-1} 的正确性呢？

课堂练习：用初等变换求3阶方阵$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：$|A|=1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$

若$AX = B$,且A是可逆矩阵，则$X = A^{-1}B$

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$，简化解矩阵方程的过程.

$$\because \quad A^{-1}(A \vdots B) = (A^{-1}A \vdots A^{-1}B) = (E \vdots A^{-1}B)$$

即

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} E \quad \boxed{A^{-1}B}$$

例2 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若A可逆，则$X=A^{-1}B$，$A^{-1}(A\quad B)=(E\quad A^{-1}B)$

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{r_3 - 3r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 3 \end{pmatrix} = (E \ \vdots \ A^{-1}B)$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵为 F，求 F，

并求一个可逆矩阵 P，使 $PA=F$

解： $P(A \vdots E)=(PA \vdots PE)=(F \vdots P)$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&0&0\\1&1&-2&0&1&0\\4&-6&2&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\0&-3&3&1&-2&0\\0&-4&4&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-3&3&1\\0&1&-1&3&-2&-1\\0&0&0&10&-8&-3\end{pmatrix}=(F \vdots P)$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 & -3 \end{pmatrix} = (F \;\vdots\; P)$$

$$\therefore\ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

注意： 这里可逆矩阵P不是唯一的（书上P64）