§4 线性方程组的解的结构

复习：线性方程组的解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$．(P.77定理4）

2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = R(A, b)$，(P.77定理5）

- 当$R(A) = R(A, b) = n$时，方程组有唯一解；
- 当$R(A) = R(A, b) < n$时，方程组有无限多个解．

（P.71定理3）

引言

什么是线性方程组的解的结构？

所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系．

备注：

- **当方程组存在唯一解时，无须讨论解的结构．**
- **下面的讨论都是假设线性方程组有无限多个解．**

解向量的定义

定义：设有n元齐次线性方程组 $Ax=0$ ，如果

$$x_1 = a_1\,,\ x_2 = a_2\,,\ \ldots\,,\ x_n = a_n$$

为该方程组的解，则

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为方程组的**解向量**．

齐次线性方程组的解的性质

性质1： 若 $x = \xi_1, x = \xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，

则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 还是 $Ax = 0$ 的解．

证明： $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$ ．

性质2： 若 $x = \xi$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，k 为实数，

则 $x = k\xi$ 还是 $Ax = 0$ 的解．

证明： $A(k\xi) = k(A\xi) = k0 = 0$ ．

性质3： 若 $x = \xi_1,\ x = \xi_2, \ldots,\ x = \xi_t$ 是齐次线性方程组

$Ax = 0$ 的解，

则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

- 由性质3可以看出：若已知齐次方程组 $Ax = 0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出该方程组的更多的解．或者齐次方程组$Ax = 0$的几个解的线性组合仍然是该方程组的解.

- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax = 0$ 的无限多个解全部表示出来？

- 把 $Ax = 0$ 的全体解组成的集合记作 S，若能求得 S 的一个最大无关组S_0：$x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_t$，那么$Ax = 0$ 的通解可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t\ .$$

回顾：向量组的秩的概念

定义：设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量 α_1，$\alpha_2, \dots, \alpha_r$ ，满足

① 向量组 A_0 ： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组 .

(向量组的最大无关组一般是不唯一的)

以下应用最大线性无关组的概念给出齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系的概念.

基础解系的概念

定义：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组解向量

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$，如果满足

① ξ_1，ξ_2，…，ξ_r 线性无关；

②方程组中任意一个解都可以表示成 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ 的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个基础解系．

显然一个齐次线性方程组的基础解系不唯一，以下介绍怎样找出方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系

设 $Ax=0$，且$R(A)=r$ ，为叙述方便，不妨设 A **行最简形矩阵**为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{前 } r \text{ 列}} & & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{后 } n-r \text{ 列}} & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$ ，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ ．（满足基础解系②）

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r}\\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r}\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)\\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-r\text{ 列}}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{前 } r \text{ 行}\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{后 } n-r \text{ 行}\end{array}$$

显然这里有一个n-r阶非零子式，故 $R(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}) = n-r$ ，

即 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关（P.88定理4）. （满足基础解系①）

于是 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系 .

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, …, $x_n = c_{n-r}$ ，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{-b_{11}} x_{r+1} \boxed{-b_{12}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{1,n-r}} x_n, \\ x_2 = -b_{21} x_{r+1} - b_{22} x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r} x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1} x_{r+1} - b_{r2} x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r} x_n. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系．通解为

$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$

$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 是任意常数

P.97定理7

设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

也即$R_S = n - R(A)$

例：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系．

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} x_1=3x_3-4x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

令$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

（c_1, c_2是任意常数）

因为

- ✓ 方程组的任意一个解都可以表示为ξ_1, ξ_2的线性组合．
- ✓ ξ_1, ξ_2的四个分量不成比例，所以ξ_1, ξ_2线性无关．

所以ξ_1, ξ_2是原方程组的基础解系．

方法2：先求出基础解系，再写出通解．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \quad -3x_3+4x_4=0\\ \quad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，　得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

还能找出其它基础解系吗？

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

例 用基础解系表示如下线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

解:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

因为 $r(A) = 3$, 基础解系由 2 个解向量构成,自由未知量为 x_2, x_5

同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 6x_5 = 0 \\ \quad x_3 + 4x_5 = 0 \\ \quad x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 6x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \quad -4x_5 \\ x_4 = \quad -3x_5 \\ x_5 = \quad x_5 \end{cases}$$

让$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$分别取$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

方程组的通解为:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}6\\0\\-4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

k_1, k_2是任意常数

例13 设A、B分别为$m\times n$和$n\times l$矩阵，且$AB=O$，证明$R(A)+R(B)\le n$.

证：记 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$ （β_i为B的第i列向量）.

由$AB=O$，得$A\beta_i=0$ $(i=1,\cdots,l)$，即$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$都是$Ax=0$的解，

又$Ax=0$的基础解系含$n-R(A)$个线性无关的解，

且$Ax=0$的解$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$都能有其基础解系线性表示，

根据P.85定理3知: $R(B)\le n-R(A)$,

即 $R(A)+R(B)\le n$

例14：设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，试证明 $R(A)=R(B)$.

证明: 由于$Ax=0$与$Bx=0$同解, $\Rightarrow$ 它有相同的解集合,

设其解集合为S, 由P. 97定理7知:

$$\Rightarrow R_S=n-R(A), \text{且} R_S=n-R(B)$$

$$\Rightarrow n-R(A)=n-R(B) \Rightarrow R(A)=R(B)$$

例15: 设A为$m\times n$实矩阵，证明$R(A^T A)=R(A)$.

证 根据例题14，以下只要能证明方程组

$Ax=0$与$(A^T A)x=0$是同解方程即可,

设A为$m\times n$矩阵, x为n维列向量.

若x满足$Ax=0,\Rightarrow A^{\mathrm{T}}(Ax)=0$, 即$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$;

若x满足$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$, $\Rightarrow x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x=0$,

$\Rightarrow (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=0$, P.51例17 $\Rightarrow Ax=0$.

综上可知方程组$Ax=0$与$(A^T A)x=0$同解,

根据P.100例14 $\Rightarrow R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

非齐次线性方程组的解的性质

性质4：若 $x=\eta_1$，$x=\eta_2$ **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **的解，则** $x=\eta_1-\eta_2$ **是对应的齐次线性方程组** $Ax=0$ **（导出组）的解．**

证明： $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$ ．

性质5：若 $x=\eta$ **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **的解，** $x=\xi$ **是导出组** $Ax=0$ **的解，则** $x=\xi+\eta$ **还是** $Ax=b$ **的解．**

证明： $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$ ．

根据性质4 和性质5 可知

- **若** $x = \eta^*$ **是** $Ax = b$ **的解，** $x = \xi$ **是** $Ax = 0$ **的解，那么** $x = \xi + \eta^*$ **也是** $Ax = b$ **的解．**
- **设** $Ax = 0$ **的通解为** $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ ． $R(A) = r$
  于是 $Ax = b$ **的通解为:** $\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$

证： 设$Ax=b$的解集合为H， η^*是$Ax=b$的一个解（特解），

$\forall \eta \in H, \Rightarrow \eta - \eta^*$是其导出组$Ax=0$的解. 令$R(A)=r$

又设$\xi_1,,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出组$Ax=0$的一个基础解系，

则必存在$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$，使

$$\eta - \eta^* = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

$$\Rightarrow \eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

例： 求线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_4=5 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的通解．

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=1 \\ x_2+2x_3-3x_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3-4x_4+1 \\ x_2 = -2x_3+3x_4+1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad 3x_3 - 4x_4 + 1 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 + 1 \\ x_3 = \quad x_3 \\ x_4 = \quad\quad x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

显然当$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$时， $\eta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$是$Ax = b$的一个特解

当$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$时，其导出组$Ax = 0$的一个基础解系是：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$ 令$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$为任意常数

于是，原方程组的通解为:

$$\eta = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^*$$

非齐次方程组 $Ax=b$ 的求解步骤

1、写出(A,b)，并用初等行变换将其化为行阶梯形；然后求出$R(A)$与$R(A,b)$，从而判断方程组是否有解；

2、在方程组有解时，即$R(A)=R(A,b)$时，进一步用初等行变换将(A,b)化为行最简形，然后确定自由变量，并写出同解方程组；

3、先令自由变量全为零，从而求出特解η^*；再给自由变量取$n-r$组值（要保证其形成的向量组是线性无关的，通常取单位坐标向量是最简单的），以此求出导出组$Ax=0$的基础解系；并最终写出$Ax=b$的通解。

例2 设线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

就参数 a, b，讨论方程组的解的情况，有解时求出解。

解法1　用初等行变换将增广矩阵化为阶梯阵。

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)\times(-a)]{(2)+(1)\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times a}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(2)+(3)\times(-b)}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{array}\right)$$

(1) 当$(a-1)b \neq 0$时，有唯一解

$$x_1=\frac{2b-1}{(a-1)b},\quad x_2=\frac{1}{b},\quad x_3=\frac{1-4b+2ab}{(a-1)b}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{array}\right) \xrightarrow{a=1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array}\right)$$

(2) 当$a = 1$, 且$1-2b = 0$,即 $b = 1/2$ 时,有无穷多解,增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2 \\ x_2 = \qquad 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

方程组的通解为

$x = (2, 2, 0)^T + k(-1, 0, 1)^T$ (k为任意常数）

(3) 当$a=1$, $b\neq 1/2$ 时，方程组无解.

$$\because \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{array}\right) \xrightarrow{b=0} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(4) 当b=0 时,方程组无解。

例4. 设A是3×4矩阵，$R(A) = 2$, $Ax = b$

有三个解：$\xi_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\xi_2 = (1, -1, -1, 1)^T$;

$\xi_3 = (-1, 1, 1, -1)^T$, 求 $Ax = b$ 的一般解。

解: 因为A是3×4矩阵，所以$Ax = b$有4个未知量，2个自由变量，因此 $\xi_1-\xi_2 = (0, 2, 2, 0)^T$，$\xi_1 - \xi_3 = (2, 0, 0, 2)^T$ 是导出组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解(不成比例)，

又 $n-R(A) = 4-2 = 2$, 所以，$\xi_1-\xi_2$, $\xi_1 - \xi_3$是$Ax = 0$ 的一个基础解系. 因此 $Ax = b$ 的一般解：

$$x = \xi_1 + k_1(\xi_1 - \xi_2) + k_2(\xi_1 - \xi_3)$$

$$= (1,1,1,1)^T + k_1(0,2,2,0) + k_2(2,0,0,2)$$