第二章　矩阵及其运算

§1　矩阵

一、线性方程组
二、引入矩阵的其他例子
三、矩阵的定义
四、特殊的矩阵
五、矩阵与线性变换

一、线性方程组

具有n个未知数和m个方程的方程组记为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

其中 a_{ij} 为第 i 个方程第 j 个未知数的系数，b_i 为第 i 个方程的常数项

若常数项全为零，则该线性方程组称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组.

对一个方程组我们关心下面三个问题

（1）是否有解？

（2）有解时，解是否唯一？

（3）无穷多解是怎样表示所有解？

注意到方程组有下面数表完全决定

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{matrix}
$$

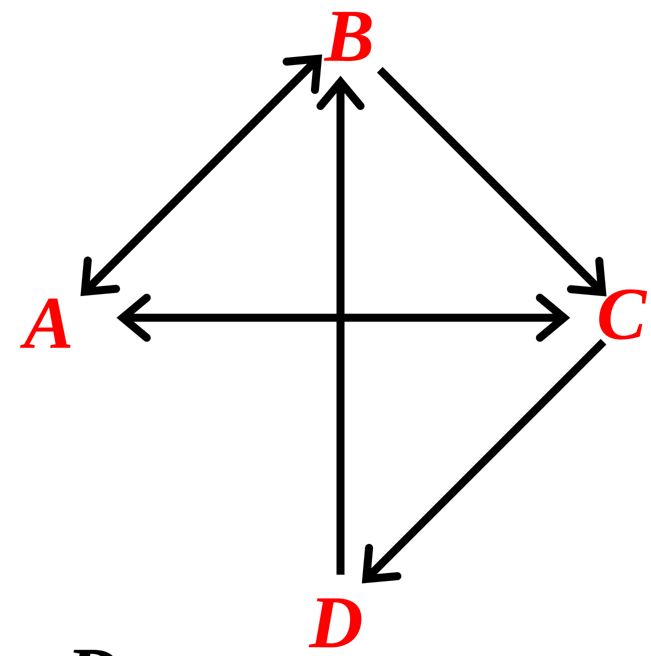
抓住主要矛盾

矩阵

忘掉自变量直接研究这个数表可以更清楚的研究方程组，以便回答上面三个问题

二、引入矩阵的其他例子

例　某航空公司在 A、B、C、D 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.



城市间的航班图情况常用表格来表示:

目的地

始发地

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中√表示有航班

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

为了便于计算，把表中的√改成1，空白地方填上0，就得到一个数表：

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四个城市之间交通联接的情况.

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四个城市之间交通联接的情况.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{数学家记为} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例　某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第i家商店发送第j种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第i种货物的单价，b_{i2}表示第i种货物的单件重量.

三、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵．记作

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵A的元素，简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素 ■元素为数时，行列式是一个数	■行数可以不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表
$\det(a_{ij})$	$(a_{ij})_{m \times n}$

例子：对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

下面几个矩阵非常常用

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

未知数矩阵
常数项矩阵

四、特殊的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶方阵．可记作 A_n

2. 只有一行的矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为行矩阵(或行向量) .

只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量) .

3. 元素全是零的矩阵称为零距阵．可记作 O .

例如： $O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $O_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为对角阵. 记作:

Diagonal matrix

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

特别的，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为单位阵. 记作：E_n

方阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ 称为纯量矩阵或数量矩阵

特别的对于n阶方阵 A

由一个n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

定义的一个n阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

称为**矩阵 A 的行列式**，记作$|A|$.

若：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix}$

则
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

P14例10可以表示为：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等、列数相等时，称为同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

注意：不同型的零矩阵是不相等的.

五、矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \cdots\cdots \qquad \downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

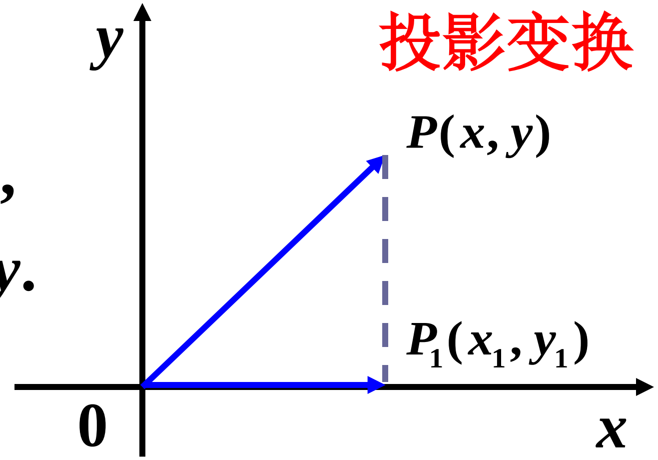
线性变换与系数矩阵之间存在着一一对应关系.

例 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为**恒等变换**.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$

例: 投影变换对应的 2 阶方阵



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x = x + 0y, \\ y_1 = 0 = 0x + 0y. \end{cases}$$

例: 旋转变换对应的 2 阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针
旋转 φ 角的旋转变换