§2 方阵的特征值与特征向量

一、基本概念

定义： 设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 满足

$$Ax = \lambda x,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的**特征向量**．

例1： $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

则 $\lambda = 4$ 为 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为对应于 $\lambda = 4$ 的特征向量.

一、基本概念

定义：设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维**非零向量** x 满足

$$Ax = \lambda x\,,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的**特征向量**．

$$Ax = \lambda x = \lambda E x <=> Ax - \lambda E x = 0$$

$\Leftrightarrow$ 非零向量 x 满足 $(A-\lambda E)\, x = 0$（零向量）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A-\lambda E| = 0$

特征方程

特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- **特征方程** $|A-\lambda E| = 0$
- **特征多项式** $|A-\lambda E|$

例1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量．

解：A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$ ．

当 $\lambda_1=2$ 时，对应的特征向量应满足方程组 $(A-2E)x=0$

$$\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{即}\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $k\,p_1$（$k\neq 0$）就是对应的特征向量．

例1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ **的特征值和特征向量．**

解（续）： A **的特征多项式为**

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A **的特征值为** $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$ ．

当 $\lambda_2=4$ **时，对应的特征向量应满足方程组** $(A-4E)x=0$

$$\begin{pmatrix}3-4 & -1\\ -1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $k\,p_2$ （$k\neq 0$）**就是对应的特征向量．**

例2： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量．

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ ．

例2：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ **的特征值和特征向量．**

解（续）：当 $\lambda_1=-1$ **时，因为**

$$A-\lambda_1E=A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解方程组 $(A+E)x=0$ ．

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ； $k\,p_1$ （$k\neq0$） **就是对应的特征向量．**

例2：求矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量．

解（续）：当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，因为

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解方程组$(A-2E)\,x=0$．

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

$k_2\,p_2+k_3\,p_3$（k_2, k_3不同时为零）就是对应的特征向量．

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ （称为矩阵A的迹,TrA）

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$

结论：

当 $|A| \neq 0$ 时, A的特征值全为非零数;

当 $|A| = 0$ 时, A至少有一个特征值等于零.

[注意]：A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

例3（书上例8）：设 λ 是方阵 A 的特征值，证明

(1) λ^2 是 A^2 的特征值；

(2) 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值 .

证明：（1）$\because Ap=\lambda p \Rightarrow A^2p=A(Ap)=A(\lambda p)$

$$=\lambda(Ap)=\lambda(\lambda p) \Rightarrow A^2p=\lambda^2 p$$

（2）$\because Ap=\lambda p \Rightarrow A^{-1}Ap=\lambda A^{-1}p \Rightarrow A^{-1}p=\dfrac{1}{\lambda}p$

结论：若非零向量 p 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则

- λ^2 是 A^2 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- 推广：λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值，对应的特征向量仍然是 p .

命题：若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_m\lambda^m$ 是矩阵多项式 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m$ 的特征值．

证：$\varphi(A)p=(a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m)p$

$=a_0Ep+a_1Ap+\cdots+a_mA^mp=a_0p+a_1\lambda p+\cdots+a_m\lambda^m p$

$=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)p=\varphi(\lambda)p$

例 4 设 A 为可逆矩阵, λ 为 A 的特征值, p 为对应的特征向量, 证明: $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值, p 为 A^* 对应的特征向量.

证明 由已知条件可知: $Ap=\lambda p \Rightarrow A^{-1}p=\dfrac{1}{\lambda}p$

故 $A^*p=|A|A^{-1}p=|A|\dfrac{1}{\lambda}p=\dfrac{|A|}{\lambda}p$.

因此结论成立.

例5（书上例9）：设3 阶方阵 A 的特征值为$1, -1, 2$，求

$$A^* + 3A - 2E$$

的特征值 .

解：$A^* + 3A - 2E = |A|\, A^{-1} + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E$

其中$|A| = 1\times(-1)\times 2 = -2$ ，所以 A 是可逆矩阵.

令

$$\varphi(\lambda) = -\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2$$

设 λ 是 A 的一个特征值， p 是对应的特征向量 .

$$\varphi(A)p = (-2A^{-1} + 3A - 2E)p = -2(A^{-1}p) + 3(Ap) - 2p$$

$$= -\frac{2}{\lambda}p + 3\lambda p - 2p = \left(-\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2\right)p = \varphi(\lambda)p$$

$\Rightarrow A^* + 3A - 2E$ 的特征值是$\varphi(1) = -1; \varphi(-1) = -3; \varphi(2) = 3$

练习： 设三阶方阵A的特征值为$1,-2,-3,$

求$|A|$及A^{-1}，A^*，A^2+2A+E的特征值。

解： $|A|=6$

A^{-1}的特征值$:1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3};$

A^*的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}:6,-3,-2;$

A^2+2A+E的特征值$\lambda^2+2\lambda+1:4,1,4.$

关于矩阵的特征值的几点说明

1. 由于 n 阶矩阵的特征方程是一元 n 次方程，所以在复数域上，n 阶矩阵一定有 n 个特征值，但不一定有 n 个实特征值.

2. 若 n 阶矩阵的特征值都是实数，则它们不一定各不相同，即矩阵的特征值可以是特征方程的重根. 在计算特征值的个数时，重根按重数计算. k重根叫做k重特征值。

3. 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的.

一个特征向量不能属于不同的特征值.

反证法： 若p 同时是A的属于特征值λ_1,λ_2（$\lambda_1\neq\lambda_2$）

的特征向量，即有 $Ap=\lambda_1 p$，$Ap=\lambda_2 p$

则 $\lambda_1 p=\lambda_2 p$ 即 $(\lambda_1-\lambda_2)p=0$

由于$\lambda_1-\lambda_2\neq 0$,则 $p=0$，这与p是特征向量相矛盾.

4. 矩阵 A 和 A^T 的特征值相同.

证明: 因为 $A^T-\lambda E=A^T-(\lambda E)^T=(A-\lambda E)^T$

所以$\left|A^T-\lambda E\right|=\left|(A-\lambda E)^T\right|=\left|A-\lambda E\right|$

因此, A和 A^T 有完全相同的特征值.

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个各不相等特征值，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

例6：设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2， 证明 $p_1 + p_2$ 不是 A 的特征向量.