מטריצות

מושגי יסוד:

סדר המטריצה: $m\times n$ (מס' השורות, מס' העמודות)

הגדרה 3.1.1: שוויון מטריצות: $A_{m\times n}=B_{p\times q}$ $m=p$, $n=q$ $a_{ij}=b_{ij}$ לכל $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

הגדרה 3.2.1 - וקטור שורה / עמודה

מטריצה מסדר $1\times n$: וקטור שורה. לדוגמא: $(1,-1,5)$

מטריצה מסדר $n\times 1$: וקטור עמודה. לדוגמא: $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

מוסכמה: כשמדברים על וקטור ללא ציון שורה/עמודה, הכוונה לוקטור עמודה.

הגדרה 3.2.2: שורה i של מטריצה: $[A]_i^r$

עמודה j של מטריצה $[A]_j^c$

הגדרה 3.2.3: המטריצה המשוחלפת-

תהי $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ מטריצה מסדר $m\times n$. המטריצה המשוחלפת של A היא המטריצה $n\times m$. אשר האיבר (i,j) שלה הוא האיבר (j,i) של A.

את המטריצה המשוחלפת מסמנים: A^t.

דוגמא:

המטריצה המשוחלפת של $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&6\\0&3\end{pmatrix}_{3\times 2}$ היא: $A^t=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&6&3\end{pmatrix}_{2\times 3}$

טענה 3.2.4: מתקיים $(A^t)^t=A$

הגדרה 3.2.5: מטריצה ריבועית, אלכסון ראשי, אלכסון משני

מטריצה ריבועית: מטריצה שבה מס' השורות שווה למספר העמודות.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

אלכסון ראשי: $i=j$ $(a_{11},a_{22},\dots)$, אלכסון משני: $i+j=n+1$ $(a_{1n},a_{2,n-1},\dots)$

הגדרה 3.2.6: מטריצה סימטרית – מטריצה (ריבועית) נקראת סימטרית אם $A^t=A$

שאלה 3.2.4: מטריצה אלכסונית (3.6.7) היא מטריצה סימטרית. מטריצה אנטיסימטרית - מטריצה ריבועית שמקיימת $A^t=-A$ (שאלה 4.3.10).

פעולות עם מטריצות:

סימון: $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ - אוסף כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.

$M_n(\mathbb{F})$ - אוסף כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 3.3.1 - קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומנת $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

הגדרה: 3.3.2 - חיבור מטריצות

טענה 3.3.3 - תכונות החיבור. פעולות החבור מקיימת: סגירות, חילופיות, קיבוציות, קיום איבר ניטרלי וקיום איבר נגדי. מטריצת האפס, 0, מטריצה שכל איבריה הם 0.

הגדרה 3.3.4 - תכונות הכפל בסקלר.

משפט 3.3.7 - מתקיים: (1) $(SA)^t = SA^t$. (2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

שאלה

A - מטריצה סימטרית.

B - מטריצה אנטי-סימטרית.

נתון - $\boxed{C = A+B}$

הוכיחו: $A = \frac{1}{2}(C+C^t)$ ו- $B = \frac{1}{2}(C-C^t)$

פתרון:

$C = A+B$

$C^t = (A+B)^t \overset{(3.3.7)}{=} A^t + B^t$

A סימטרית מכאן נובע $A^t = A$

B אנטי סימטרית מכאן נובע $B^t = -B$

קיבלנו מערכת משוואות:
$$\begin{cases} C^t = A-B \\ C = A+B \end{cases}$$

נחלץ A ו B:

$$\begin{array}{r} C^t = A-B \\ + \quad C = A+B \\ \hline C + C^t = 2A \end{array}$$

$A = \frac{1}{2}(C+C^t) \longrightarrow$ מ.ש.ל. א

$$\begin{array}{r} C = A+B \\ - \quad C^t = A-B \\ \hline C - C^t = 2B \end{array}$$

$B = \frac{1}{2}(C-C^t) \longrightarrow$ מ.ש.ל. ב

כפל מטריצות

הגדרה 3.4.1 - מכפלה סקלרית

יהיו $B_{n\times1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $A_{1\times n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

המכפלה: $A_{1\times n} \cdot B_{n\times1} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

קודם א:

$(1,2,3)_{1\times3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times1} = 1\cdot -1 + 2\cdot2 + 3\cdot1 = 6$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,2,3) = ?$

הגדרה 3.4.2 - כפל מטריצות

תהינה $B = [b_{ij}]_{n\times q}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ אז המכפלה מוגדרת $\underset{m\times q}{C} = AB$

ומתקיים:

$$[C]_{ij} = [A]_i^r \cdot [B]_j^c = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

שאלה - נתונות המטריצות:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

חשבו AB:

$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}_{2\times2}$

המשך דוגמא:

$C_{11} = 1\cdot1 + 2\cdot4 = 9$

$C_{21} = 3\cdot1 + 4\cdot4 = 19$

$C_{12} = 1\cdot(-1) + 2\cdot0 = -1$

$C_{22} = 3\cdot(-1) + 4\cdot0 = -3$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times1}(1,2,3)_{1\times3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

שאלה נתונות המטריצות:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$

חשבו AB:

$AB = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} =$ המכפלה לא מוגדרת $3 \neq 2$

חשבו BA:

$BA = C' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}_{2\times3}$

**למה 3.4.3

תהי"נה $B=[b_{ij}]_{n\times q}$, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boxed{C=AB}$ אז

$$C = AB\left(A[B]^c_1 \middle| \dots \middle| A[B]^c_q\right) = \begin{pmatrix} [A]^r_1\cdot B \\ \vdots \\ [A]^r_n\cdot B \end{pmatrix}$$

מסקנה 3.4.4

א. אם השורה ה-i של A היא אפס, גם השורה ה-i ב-AB אפס.
ב. אם העמודה ה-j של A היא אפס, גם העמודה ה-j ב-AB אפס.

טענה 3.4.5

מתקיים $(AB)^t = B^tA^t$ $\quad$ $(A+B)^t = A^t+B^t$

תכונות של כפל מטריצות

משפט 3.5.1 - קיבוציות הכפל

מתקיים $(AB)C = A(BC)$

הגדרה 3.5.2 - מטריצה היחידה

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה סקלרית

$$\lambda I=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

משפט 3.5.3

לכל מטריצה $A_{m\times n}$ מתקיים: 1) $I_n\cdot A = A$ $\quad$ 2) $A\cdot I_n = A$

משפט 3.5.5 - פילוג הכפל מעל החיבור

מתקיים: 1) $(A+B)C = AC+BC$ $\quad$ 2) $C(A+B) = CA+CB$

טענה 3.5.6 : מתקיים

1) $t(AB) = (tA)B$ $\quad$ 2) $t(AB) = A(tB)$

שאלה

תנו דוגמא למטריצות A,B כך ש $A\neq 0$ וגם $B\neq 0$
ושמתקיים $AB=0$ וגם $AA=0$ ו- $BB\neq 0$.

פתרון

נסמן: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$ $\quad$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

$$AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

$$BB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$$

הערות:

- הכפל אינה פעולה חילופית - לא בהכרח הפעולה חילופית מוגדרת וגם אם היא מוגדרת לא בהכרח יש שוויון בין הממדים. וגם אם מדובר על מטריצות ריבועיות אין בהכרח שוויון בין המטריצות.
- $AB=0$ אינו גורר ש $A=0$ או $B=0$.
- $A^n=0$ אינו גורר $A=0$.

מטריצות ריבועיות

טענה 3.6.1: הקבוצה $M_n(\mathbb{F})$ סגורה ביחס לכפל, ו-I הוא הניטרלי.

הגדרה 3.6.2: מטריצות מתחלפות אם מתקיים $\boxed{AB=BA}$

מסקנה 3.6.3: כל מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית A.

משפט 3.6.4: אם C מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית אז C הוא מטריצה סקלרית.

שאלה: הוכיחו $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ אם ורק אם $AB=BA$

פתרון: כיוון 1: אם $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

נוכיח $AB=BA$

$(A-B)(A+B) \overset{\text{משפט } 3.5.5}{=} A(A+B)-B(A+B)=$

$=A\cdot A+A\cdot B-B\cdot A-B\cdot B=A^2+AB-BA-B^2$ .1

מהנתון: $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ .2

מ-1 ו-2:

$\cancel{A^2}+AB-BA-\cancel{B^2}=\cancel{A^2}-\cancel{B^2}$

$\boxed{AB=BA}$

כיוון 2: אם: $AB=BA$

נוכיח $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$(A-B)(A+B) \overset{\text{משפט } 3.5.5}{=} A(A+B)-B(A+B) \overset{\text{משפט } 3.5.5}{=}$

$=A\cdot A+A\cdot B-B\cdot A-B\cdot B=A^2+\underbrace{AB-BA}_{*}-B^2.$

$=A^2-B^2.$

נתון: $\overset{*}{\overbrace{AB=BA}}$:

שאלה:

נתונות A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות:

1) $AB=A$ 2) $BA=B$

הוכיחו כי מתקיים $A^2=A$ ו-$B^2=B$

פתרון:

נוכיח: $A^2=A$

הוכחה מש"ל $A^2=A\cdot A \overset{(1)}{=} (AB)\cdot A=A(BA) \overset{(2)}{=} A\cdot B \overset{(1)}{=} A$

נוכיח $B^2=B$

הכח מ.ש.ל. $B^2=B\cdot B \overset{(2)}{=} B\cdot(BA)=B(AB) \overset{(1)}{=} BA=B$

שאלה נכון או לא נכון.

א). אם A ו-B סימטריות אז גם AB סימטרית.

ב). אם A ו-B סימטריות ומתחלפות בכפל אז גם AB סימטרית.

פתרון:

א). תשובה: לא נכון

דוגמא נגדית:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

מתקיים $A^t=A$, $B^t=B$ כלומר סימטריות.

נחשב:

$C=AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

$C^t=\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \neq C$

לכן AB אינה סימטרית.

ב).

פתרון: הטענה נכונה.

הוכחה: נתון $AB=BA$.

צ"ל: AB סימטרית. $\leftarrow (AB)^t=AB$

נחשב: מש"ל $(AB)^t \overset{3.4.5}{=} B^tA^t \overset{\text{נתון}}{=} B\cdot A \overset{\text{נתון}}{=} AB.$

קיבלנו $(AB)^t=AB$ כלומר סימטרית

הקשר בין מערכת משוואות למטריצות

מערכת משוואות ניתנת לכתיבה כ- $A\underline{x}=\underline{b}$

A - מטריצת המקדמים מספר - $m\times n$

$\underline{x}$ - וקטור משתנים - $n\times 1$

$\underline{b}$ - וקטור המקדמים חופשיים - $m\times 1$

אם $\underline{b}=0$ ו $\underline{c}$, $\underline{d}$ פתרונות של המערכת אז גם $\underline{c}+\underline{d}$ פתרון למערכת. וגם $t\underline{c}$ פתרון למערכת

שאלה

נתונה מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\geq 3$, כך ש $A^n=0$

אך $A^{n-1}\neq 0$ הוכח כי קיים $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש $A^{n-1}\cdot v\neq 0$

וקיים $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש הקבוצה $\{v, Av, \dots, A^{n-1}\cdot v\}$

בסיס ל $\mathbb{R}^n$.

פתרון:

דוגמא:

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad v=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad B\cdot v=\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}}\cdot\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\leftarrow \text{שורה } 2$$

$[B]_{23}=b_{23}=2$

לקחנו e_3

קיבלנו $\begin{pmatrix}0\\b_{23}\\0\end{pmatrix}$

מהנתון $A^{n-1}\neq 0$ נסיק שקיים בלפחות איבר אחד ששונה מ-0.

$[A^{n-1}]_{ij}=a_{ij}\neq 0$ $\quad v=e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\to j$

נחשב $A^{n-1}\cdot v$:

$$A^{n-1}\cdot v=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ [A^{n-1}]_i^R\cdot e_j\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}\to i=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}\to i$$

והתוצאה $A^{n-1}\cdot v\neq 0$

בקבוצה $C=\{v, Av, \dots, A^{n-1}\cdot v\}$ יש n איברים. מספיק להראות ש-C בת"ל.

בדיקת תלות: $\leftarrow$ ונניח $\lambda_1 v+\lambda_2 Av+\dots+\lambda_n A^{n-1}v=0$ (*) וקיבלנו: $\lambda_1 A^{n-1}\cdot v=0$ $\leftarrow$ $\lambda_2 Av+\dots+\lambda_n A^{n-1}\cdot v=0$ (**) $\leftarrow$ וקיבלנו $\lambda_2 A^{n-1}\cdot v=0$

$\lambda_1 v+\lambda_2 Av+\dots+\lambda_n A^{n-1}v=0$ נכפיל את (*) ב A^{n-1} ונקבל:

$\lambda_1 v\cdot A^{n-1}+\underset{=0}{\lambda_2 vA^n}+\dots+\underbrace{\lambda_n A^{2n-2}\cdot v}_{=0}=0$

$\leftarrow$ נתון $A^{n-1}\cdot v\neq 0$ ולכן בהכרח $\lambda_1=0$

נכפיל את (**) ב A^{n-2} ונקבל $\lambda_2 A^{n-1}v+\underset{=0}{\lambda_3 A^n v}+\dots+\underbrace{\lambda_n A^{2n-3}\cdot v}_{0}=0$

נתון $A^{n-1}\cdot v\neq 0$ ולכן בהכרח $\lambda_2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

וכך עוד $n-2$ צעדים נקבל

$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

ולכן הקבוצה C בת"ל ובה n וקטורים ועל פי 2.7.11

C בסיס של $\mathbb{R}^n$.

מטריצות הפיכות

הגדרה 3.8.2 - מטריצה הפיכה, מטריצה ריבועית A הפיכה (רגולרית) אם קיימת מטריצה B המקיימת $AB=BA=I$

מטריצה ריבועית שאינה הפיכה נקראת אי הפיכה (סינגולרית).

סימון: אוסף המטריצות ההפיכות ב-$M_n(\mathbb{F})$ מסומנת ב-$GL_n(\mathbb{F})$.

למטריצה B קוראים ההופכית (היחידה) של A ונסמן אותה ב A^{-1}.

טענה 3.8.3 - חוק הצמצום. אם A מטריצה הפיכה

א. אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ב. אם $BA=CA$ אז $B=C$.

טענות חשובות נוספות

שאלה 3.8.2

א. אם A הפיכה ומתקיים $AB=0$ או $BA=0$ אז $B=0$.

ב. אם A ו-B מטריצות הפיכות אז $AB\neq 0$

ג. אם $A\neq 0$, $B\neq 0$ ואבל $AB=0$ אז A ו-B סינגולריות.

משפט 3.8.4

א). אם A מטריצה הפיכה אז גם A^{-1} הפיכה ו- $(A^{-1})^{-1}=A$

ב). המטריצה A הפיכה אמ"מ A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

ג). אם A ו-B הפיכות אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

ד). אם A הפיכה ו- $s\neq 0$ סקלר אז sA הפיכה ומתקיים $(sA)^{-1}=\frac{1}{s}A^{-1}$

שאלה 3.8.3 $(A_1\cdot\ldots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$

שאלה 3.8.4 $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

שאלה 3.8.5 - מטריצה אלכסונית נסמן $A=[a_i]$

1) אם יש איבר באלכסון השווה ל-0 אז A סינגולרית.

2) אם כל איברי האלכסון שונה מ-0 אז $A^{-1}=\left[\frac{1}{a_i}\right]$

תרגיל:

תהיינה A ו B מטריצות ריבועיות המקיימות

(1) $B^2=2I$ (2) $AB=A$

האם יתכן ש-A מטריצה הפיכה?

פתרון:

לא יתכן A הפיכה, נוכיח: נניח בשלילה שA הפיכה.

נתון (2) - $AB=A$

נכפול משמאל בהופכית כלומר ב-A^{-1} - $A^{-1}(AB)=A^{-1}\cdot A$

מקיבוציות הכפל - $(A^{-1}A)B=A^{-1}A$

מהגדרה $(A^{-1}\cdot A=I)$ ולכן $I\cdot B=I$

$\boxed{B=I}$

נעלה בריבוע ונקבל $B^2=I^2=I$ וזו סתירה לנתון (1).

ולכן ההנחה שגויה ולא תיתכן מטריצה A הפיכה.

$\blacksquare$

שאלה

תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות שמקיימות $BA^2-A^2-I=0$ נראה שA ו-B מתחלפות כלומר $AB=BA$

הוכיחו כי A מטריצה הפיכה ושהן מתחלפות.

פתרון

מהנתון $BA^2-A^2-I=0$

$BA^2-A^2=I$

$(BA-A)A=I$

נסמן $C=BA-A$ ונקבל $CA=I$

ולכן A הפיכה.

יותר מכך $A^{-1}=BA-A$

$\blacksquare$

מכך שהוכחנו שA הפיכה ו $A^{-1}=BA-A$

מתקיים $A(BA-A)=(BA-A)A$

$ABA-\cancel{AA}=BAA-\cancel{AA}$

מימין $ABA=BAA \quad /\cdot A^{-1}$

$ABAA^{-1}=BAAA^{-1}$

מקיבוציות: $AB(AA^{-1})=BA(AA^{-1})$

$AA^{-1}=I$

$AB=BA$

שאלה תהי A מטריצה ריבועית מסדר n המקיימת $A^n=0$

הוכיחו $A-I$ רגולרית. (הפיכה)

פתרון:

$\boxed{\text{זהות: } x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}$

מחפשים מטריצה C כך ש $(A-I)C=I$

I ו-A מטריצות מתחלפות ולכן נחשב לפי הזהות:

$$(\underset{0}{A^n}-I)=(A-I)(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots+I)$$

$$-I=(A-I)(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots+I) \quad /\cdot(-1)$$

כלומר: $I=(A-I)(-A^{n-1}-A^{n-2}-\ldots-I)$

נסמן: $C=-A^{n-1}-A^{n-2}-\ldots-I$

ונקבל $I=(A-I)C$

ולכן $A-I$ רגולרית.

$\blacksquare$

הערה: מהנתון $A^n=0$ נובע שA סינגולרית

הסבר: $A\cdot A^{n-1}=0$ (נתון)

משאלה (3.8.2 ג) נסיק שA לא הפיכה.

תרגיל

נתון כי המטריצות A,B, $A+B$ הפיכות.

הוכיחו כי המטריצה $A^{-1}+B^{-1}$ הפיכה.

$$A(A^{-1}+B^{-1})B=(\overbrace{AA^{-1}}^{I}+AB^{-1})B$$

$$(I+AB^{-1})B=B+AB^{-1}\cdot B=B+A$$

קיבלנו $A(A^{-1}+B^{-1})B=A+B$, כלומר $A(A^{-1}+B^{-1})B$ מטריצה הפיכה $\blacksquare$

ולכן כל אחד מהגורמים במכפלה הוא מטריצה הפוכה.