

Fakultätsfunktion und Binomialkoeffizienten

Fakultätsfunktion:

Die Fakultätsfunktion f berechnet das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer Stelle n :
 $f(0) = 1$ und $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ oder rekursiv: $f(n) = f(n-1) \cdot n \wedge f(0) = 1$




Als Funktionszeichen wird aus historischen Gründen das Ausrufungszeichen¹ ! verwendet,
 z. Bspl.: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ und $0! = 1$.

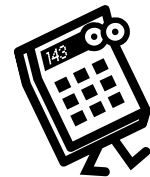
Binomialkoeffizient:

Für den Term $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ hat sich auch eine historische Schreibweise eingebürgert: $\binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Man liest: „ n über k “ oder „ k aus n “ oder „ k unter n “.

Dieser Term heißt **Binomialkoeffizient**². Diese Terme heißen so, da sie bei der Berechnung der n -ten Potenz des Binoms $(a+b)$ als Koeffizienten auftreten.

Berechnung der Terme mit dem CAS

Term	Befehl
Permutationen $\frac{n!}{(n-k)!}$	nPr(n,k) oder  5, 2
Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	nCr (n,k) oder  5, 3
Fakultäten $n!$	n! und ! wählen oder  5, 1



Aufgabe:

a) Weisen Sie nach, dass die folgenden drei Aussagen korrekt sind:

- (1) $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n-1} = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$
- (2) Das Symmetriegesetz: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und $k \in \mathbb{N}^* \wedge k \leq n$
- (3) Die Rekursionsformel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und jedes $k \in \mathbb{N}^* \wedge k \leq n$

b) Benutzen Sie die dritte Aussage, um die Binomialkoeffizienten rekursiv zu berechnen. Tragen Sie die Werte in das untere Dreieck ein³.

n = 0			1	
n = 1			1	1
n = 2			1	
n = 3			1	
n = 4			1	

¹ Diese Notation wurde erstmals 1808 von dem Mathematiker *Christian Kramp* (1761–1826) verwendet, der um 1798 auch die Bezeichnung *faculté* „Fähigkeit“ dafür einführte.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) hat 1666 in einer Arbeit eine Tabelle für die Fakultäten bis zur Zahl 24 angelegt, Diese wurde 1690 ohne sein Wissen nachgedruckt, worüber er sich sehr ärgerte.

² *Michael Stifel* (1487? –1567) hat die Binomialkoeffizienten erfunden. Danach wurden sie von Mathematikern mit verschiedenen Bezeichnungen belegt. *Abraham Gotthelf Kästner* (1719–1800) führte 1759 die Bezeichnung Binomialkoeffizient und *Andreas von Ettingshausen* (1796–1878) führte 1826 die obige Schreibweise ein.

³ Dies Dreieck heißt häufig *Pascalsches Dreieck*, die Anordnung stimmt aber nicht exakt mit der von ihm 1654 benutzten Anordnung überein.