

Einstiegsbeispiel:

In einer Flussniederung wird Kies ausgebagert. Ein anfangs 500 m^2 großer See vergrößert sich durch die Baggerarbeiten jede Woche um 200 m^2 .

Da der See später als Wassersportfläche genutzt werden soll, wird die Wasserqualität regelmäßig untersucht. Besonders genau wird eine Algenart beobachtet, die sich sehr schnell vermehrt. Die von den grünen Algen bedeckte Fläche ist zu Beginn der Baggerarbeiten 10 m^2 groß, sie verdoppelt sich jede Woche.

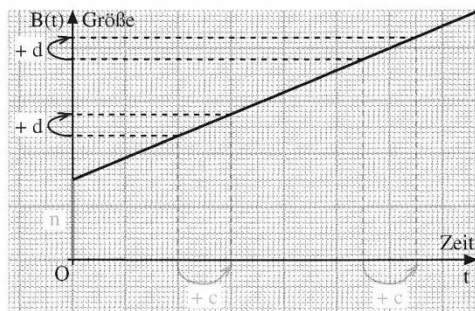
$$B(t) = 500 + 200 \cdot t$$

$$A(t) = 10 \cdot 2^t$$

Lineares Wachstum

In gleichen Zeitspannen c werden zu den zugehörigen Größen $B(t)$ immer die gleichen Summanden addiert.

Dies nennt man *lineares Wachstum*.



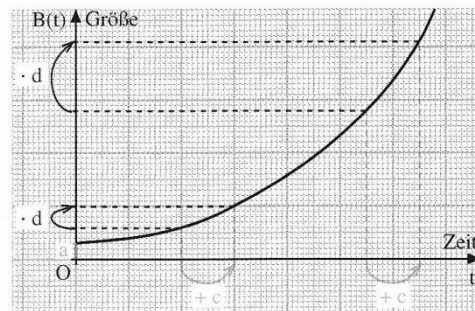
Lineares Wachstum wird durch die Formel $B(t) = m \cdot t + n$ beschrieben.

Bei der Baggerseegröße liegt lineares Wachstum mit dem Anfangsbestand n vor.

Exponentielles Wachstum

In gleichen Zeitspannen c werden die zugehörigen Größen $B(t)$ immer mit dem gleichen Faktor d multipliziert.

Dies nennt man *exponentielles Wachstum*.



Exponentielles Wachstum wird durch die Formel $B(t) = a \cdot b^t$ beschrieben.

Bei der Algenflächengröße liegt exponentielles Wachstum mit dem Anfangsbestand a vor.

Lineares Wachstum

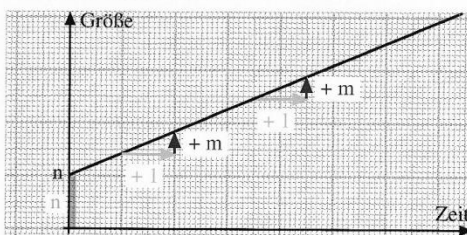
In gleichen Zeitspannen werden zu den zugehörigen Werten von $f(t)$ immer die gleichen Summanden addiert.

Lineares Wachstum wird durch die explizite Formel $f(t) = m \cdot t + n$ beschrieben.

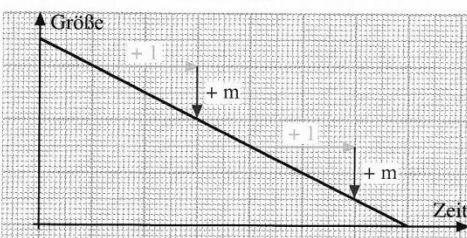
Die rekursive Formel lautet:

$$f(t) = f(t-1) + m; \quad f(0) = n$$

Lineare Zunahme: $m > 0$



Lineare Abnahme: $m < 0$

**Exponentielles Wachstum**

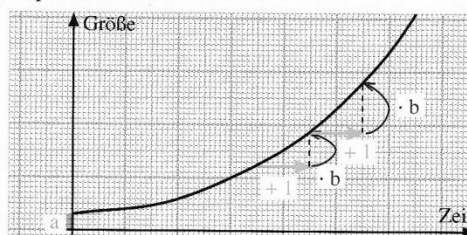
In gleichen Zeitspannen werden die zugehörigen Werte von $f(t)$ immer mit dem gleichen Faktor d multipliziert.

Exponentielles Wachstum wird durch die explizite Formel $f(t) = a \cdot b^t$ beschrieben.

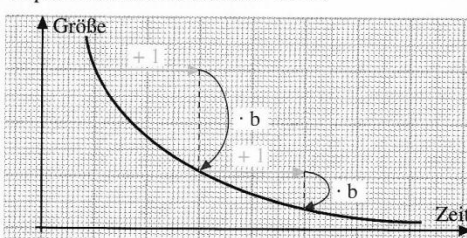
Die rekursive Formel lautet:

$$f(t) = f(t-1) \cdot b; \quad f(0) = a$$

Exponentielle Zunahme: $b > 1$



Exponentielle Abnahme: $b < 1$



Aufgabe 1:

Auf einem Kartoffelfeld breitet sich der Kartoffelkäfer aus. Beobachtungen haben ergeben, dass sich der Bestand an Schädlingen näherungsweise durch eine Wachstumsfunktion f mit $f(t) = 5000 \cdot e^{0,025t}$ beschreiben lässt, wobei t die Anzahl der Tage angibt.



- Berechnen Sie die Verdopplungszeit der Kartoffelkäfer.
- Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Schädlingsbestandes nach 1, 2, 3, 5 und 10 Tagen.
- Geben Sie einen Zusammenhang zwischen der momentanen Änderungsrate und dem Funktionswert zum Zeitpunkt t an.

Jede Gleichung über einer Variablen x , mit der ein Funktionsterm $f(x)$ gesucht wird und die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion nach der Variablen x enthält, ist eine (gewöhnliche) **Differenzialgleichung**. Eine Funktion, welche eine Differenzialgleichung erfüllt, heißt (spezielle) **Lösung der Differenzialgleichung**.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Differenzialgleichung $f'(x) = 0,2 \cdot f(x)$.

- Geben Sie alle Funktionen an, die Lösung dieser Differenzialgleichung sind.
- Welcher dieser Lösungen erfüllt die Bedingung $f(5) = 6$?
- Geben Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung $f'(x) = -0,1 \cdot f(x)$ an.
- Für welche dieser Lösungen gilt: $f(0) = 4$?

Jede Differenzialgleichung der Form $f'(x) = k \cdot f(x)$ mit $k \neq 0$ beschreibt für $k > 0$ einen exponentiellen Zunahmeprozess und für $k < 0$ einen exponentiellen Abnahmeprozess. Alle Funktionen der Schar f_c mit $f_c(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ und $c \neq 0$ sind Lösungen dieser Differenzialgleichung.

Bei diesen Prozessen ist die momentane Änderungsrate $f'(x)$ proportional zum augenblicklich vorhandenen Bestand $f(x)$. Der Proportionalitätsfaktor k ist dabei die Wachstums- bzw. Zerfallskonstante.

Aufgabe 3:

Im Dickdarm des Menschen befinden sich Kolibakterien. Sie können in die Niere vordringen und eine Nierenbeckenentzündung hervorrufen. Das Wachstum der Bakterien lässt sich beschreiben durch $f(t) = 0,1 \cdot e^{0,03598t}$, wobei $f(t)$ die Anzahl der Bakterien in Millionen nach t Minuten angibt.

- Eine Infektion macht sich beim Menschen ab 100 Millionen Bakterien als Nierenbeckenentzündung bemerkbar. Wie lange dauert es bis diese kritische Größe erreicht wird?
- Nach welcher Zeit hat sich die Bakterienzahl verdoppelt bzw. versechsfacht?
- Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion keinen Hochpunkt hat. Ist das realistisch?
- Wie ließe sich die Anzahl der Bakterien nach t Minuten berechnen, wenn man ein lineares Wachstum unterstellt, mit einem Zuwachs von 23000 Bakterien pro Minute? Zu Beginn sollen 100 Bakterien vorhanden sein.
- Geben Sie sowohl für das exponentielle Modell als auch für das lineare Modell die zugehörigen Differenzialgleichungen an.

Aufgabe 4:

Heißer Kaffee in einer Tasse kühlt sich allmählich auf Raumtemperatur ab. Gibt dabei die Funktion u zu jedem Zeitpunkt t den Unterschied zwischen Kaffee- und Raumtemperatur an, so ist nach dem newtonschen Abkühlungsgesetz die Abkühlgeschwindigkeit $u'(t)$ proportional zum momentanen Temperaturunterschied.

- Geben Sie die Differenzialgleichung und die Funktion u an, die diesem Abkühlvorgang allgemein beschreibt.
- Bei einer konstanten Raumtemperatur von 20°C wurde beim Einschenken eine Kaffeetemperatur von 70°C gemessen. 10 Minuten später betrug die Temperatur noch 58°C . Bestimmen Sie hiermit die fehlenden Parameter in der Gleichung der Funktion u und skizzieren Sie den Graphen von u .
- Betrachten Sie nun die Temperatur des Kaffee zum Zeitpunkt t . Berechnen Sie dazu die Funktionswerte der Temperatur r mit $r(t)=S-u(t)$ und stellen Sie diese grafisch dar.
- Die Abkühlgeschwindigkeit ist proportional zum momentanen Temperaturunterschied. Es handelt sich also um ein beschränktes Wachstum bzw. um einen beschränkten Zerfall. Geben Sie eine Differenzialgleichung zur Beschreibung des begrenzten Wachstums an.

Aufgabe 5:

Eine Flüssigkeit hat im Kühlschrank eine Temperatur von 5°C . Nimmt man sie heraus und gießt sie in ein Glas, so erwärmt sie sich allmählich auf die umgebende Raumtemperatur von 20°C . Nach 10 Minuten beträgt die Temperatur der Flüssigkeit bereits 12°C . Auch bei diesem Vorgang gilt das newtonsche Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgesetz, d.h. die Erwärmungsgeschwindigkeit ist proportional zur Differenz von Raum- und Flüssigkeitstemperatur.

- Geben Sie eine Differenzialgleichung an, die diesen Erwärmungsvorgang beschreibt.
- Geben Sie die Lösung dieser Differenzialgleichung an und skizzieren Sie den Graphen.

Bei einer kontinuierlichen Modellierung nähert sich $f(t)$ mit zunehmendem t der Schranke S immer mehr. Das besagt, dass die Wachstumsrate $f'(t)$ gegen Null strebt, wenn $S-f(t)$ immer kleiner wird. Eine nahe liegende mathematische Formulierung eines Modells für das begrenzte Wachstum ist daher gegeben durch: $f'(t)$ ist proportional zu $S-f(t)$, d.h. die Funktion f erfüllt die Differenzialgleichung: $f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \wedge k > 0$.

Alle Funktionen der Schar f_a mit $f_a(t) = S - a \cdot e^{k \cdot t}$ und $a \neq 0$ sind Lösungen dieser Differenzialgleichung. Für $a > 0$ beschreibt die Funktion f_a ein begrenztes Wachstum, für $a < 0$ eine begrenzte Abnahme oder Zerfall.

Aufgabe 6:

Die Bevölkerung eines Stammes kann durch begrenztes Wachstum mit der Schranke $S = 2000$ modelliert werden. Anfangs hat der Stamm 500, nach zehn Jahren 800 Mitglieder.

- Beschreibe die Bevölkerungsentwicklung mithilfe einer geeigneten Funktion.
- Wie groß wird die Bevölkerung nach 100 Jahren etwa sein, wie groß war sie vor 10 Jahren?
- Nach wie vielen Jahren wird der Stamm 1800 Personen haben?
- Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit etwa zehn Mitglieder pro Jahr?