logistisches Wachstum II

Aufgabe 1:

Auf einer Schulveranstaltung mit 800 Teilnehmerinnen und Teilnehmern setzen zwei Personen um acht Uhr ein Gerücht in Umlauf. Nach etwas mehr als acht Minuten kennen zehn Personen das Gerücht.

a) Beschreiben Sie, wie sich das Gerücht auf der Veranstaltung verbreitet.

b) Nehmen Sie Stellung zu der Aussage: *„Die Ausbreitung eines Gerüchtes ist eine Kombination aus exponentiellem und begrenztem Wachstum."*
Skizzieren Sie qualitativ einen Graphen, der zu der Ausbreitung eines Gerüchtes passt.

c) Untersuchen Sie, welche der Differenzialgleichungen zu der Ausbreitung des Gerüchtes passt.

A $f'(x) = 0{,}00025\cdot(800 - f(x))$ B $f'(x) = 0{,}00025\cdot f(x) + 0{,}00025\cdot(800 - f(x))$
C $f'(x) = 0{,}00025\cdot f(x)\cdot(800 - f(x))$ D $f'(x) = 0{,}2\cdot f(x) - 0{,}00025\cdot(f(x))^2$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{800}{1+399\cdot e^{-0{,}2x}}$ gut zu den gegebenen Daten passt und die DGL aus c) erfüllt. Skizzieren Sie den Graphen von *f* und vergleichen Sie mit ihrer Skizze aus b). Untersuchen Sie, wann die halbe Schülerschaft das Gerücht kennt bzw. wann alle Schülerinnen und Schüler Bescheid wissen.

Aufgabe 2:

a) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{S}{1+a\cdot e^{-r\cdot S\cdot x}}$ die Differenzialgleichung für logistisches Wachstum erfüllt.

b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} f_a(x)$ und deuten Sie das Ergebnis.

c) Zeigen Sie, dass sich der Parameter *a* bestimmen lässt, sofern man den Anfangswert *f(0)* kennt.

d) In Formelsammlungen und auch bei verschiedenen GTR bzw. CAS wird der Funktionsterm für logistisches Wachstum auf verschiedene Weisen notiert. Zeigen Sie, dass alle fünf Terme wertgleich sind.

(1) $f(x) = \frac{S}{1+\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)\cdot e^{-r\cdot S\cdot x}}$

(2) $f(x) = \frac{f(0)\cdot S}{f(0)+(S-f(0))e^{-r\cdot S\cdot x}}$

(3) $f(x) = \frac{f(0)\cdot S\cdot e^{r\cdot S\cdot x}}{f(0)\cdot e^{r\cdot S\cdot x}+S-f(0)}$

(4) $f(x) = S - \frac{(S-f(0))\cdot S}{f(0)\cdot e^{r\cdot S\cdot x}+S-f(0)}$

(5) $f(x) = \frac{S\cdot e^{r\cdot S\cdot x}}{e^{r\cdot S\cdot x}+\frac{S-f(0)}{f(0)}}$