

Fakultätsfunktion und Binomialkoeffizienten

Fakultätsfunktion:

Die Fakultätsfunktion f berechnet das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer Stelle n :
 $f(0) = 1$ und $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ oder rekursiv: $f(n) = f(n-1) \cdot n \wedge f(0) = 1$

Als Funktionszeichen wird aus historischen Gründen das Ausrufungszeichen¹ ! verwendet,
z. Bsp.: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ und $0! = 1$.

Binomialkoeffizient:

Für den Term $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ hat sich auch eine historische Schreibweise eingebürgert: $\binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Man liest: „ n über k “ oder „ k aus n “ oder „ k unter n “.

Dieser Term heißt **Binomialkoeffizient**². Diese Terme heißen so, da sie bei der Berechnung der n -ten Potenz des Binoms $(a+b)$ als Koeffizienten auftreten.

Berechnung der Terme mit dem CAS

Term	Befehl
Permutationen $\frac{n!}{(n-k)!}$	$nPr(n,k)$ oder [menu] 5, 2
Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$nCr(n,k)$ oder [menu] 5, 3
Fakultäten $n!$	$n^{[n]}$ und ! wählen oder [menu] 5, 1

Aufgabe:

a) Weisen Sie nach, dass die folgenden drei Aussagen korrekt sind:

$$(1) \quad \binom{n}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{n} = 1 \text{ und } \binom{n}{1} = n \text{ und } \binom{n}{n-1} = n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}^*$$

$$(2) \quad \text{Das Symmetriegesetz: } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}^* \text{ und } k \in \mathbb{N}^* \wedge k \leq n$$

$$(3) \quad \text{Die Rekursionsformel: } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}^* \text{ und jedes } k \in \mathbb{N}^* \wedge k \leq n$$

b) Benutzen Sie die dritte Aussage, um die Binomialkoeffizienten rekursiv zu berechnen. Tragen Sie die Werte in das untere Dreieck ein³.



n = 0	1	
n = 1	1	1
n = 2	1	1
n = 3	1	1
n = 4	1	1

¹ Diese Notation wurde erstmals 1808 von dem Mathematiker Christian Kramp (1761–1826) verwendet, der um 1798 auch die Bezeichnung *faculté „Fähigkeit“* dafür einführte.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) hat 1666 in einer Arbeit eine Tabelle für die Fakultäten bis zur Zahl 24 angelegt, Diese wurde 1690 ohne sein Wissen nachgedruckt, worüber er sich sehr ärgerte.

² Michael Stifel (1487? –1567) hat die Binomialkoeffizienten erfunden. Danach wurden sie von Mathematikern mit verschiedenen Bezeichnungen belegt. Abraham Gottlob Kästner (1719–1800) führte 1759 die Bezeichnung Binomialkoeffizient und Andreas von Ettinghausen (1796–1878) führte 1826 die obige Schreibweise ein.

³ Dies Dreieck heißt häufig *Pascalsches Dreieck*, die Anordnung stimmt aber nicht exakt mit der von ihm 1654 benutzten Anordnung überein.