

Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße

Voraussetzung: Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen, die man üblicherweise als „Treffer“ und „Niete“ oder „Erfolg“ und „Misserfolg“ deutet. Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n erhält man, wenn man ein Bernoulli-Experiment n -mal bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit p ausführt.

Zählt eine Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p , so sagt man, dass X **binomialverteilt** ist.

Nach der **Formel von Bernoulli** gilt für die Wahrscheinlichkeit für k Treffer: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Ziel: Die Berechnung des Erwartungswertes einer binomialverteilten Zufallsgröße.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben auf einem Blatt.

1 Intuitive Herangehensweise

Eine kleine familiengeführte Pension mit fünf Einzelzimmern in einem Skigebiet weiß aus Erfahrung, dass ca. 40 % der Gäste, die über Silvester ein Zimmer gebucht haben, aus verschiedenen Gründen kurzfristig absagen. In diesem Jahr sind über Silvester alle fünf Zimmer gebucht worden. Mit wie vielen Absagen kann die Pension tatsächlich rechnen? Bestimmen Sie hiermit anschließend eine intuitiv plausible allgemeine Formel, mit der man berechnen kann, wie viele Treffer bei einer binomialverteilten Zufallsgröße der Kettenlänge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p im Schnitt erwartet werden können.

2 Formale Herangehensweise

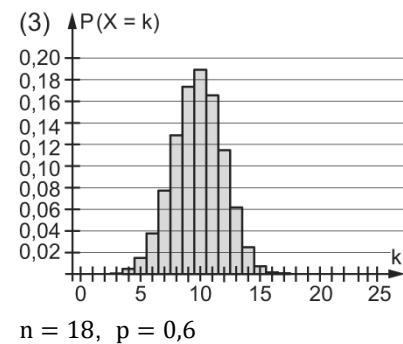
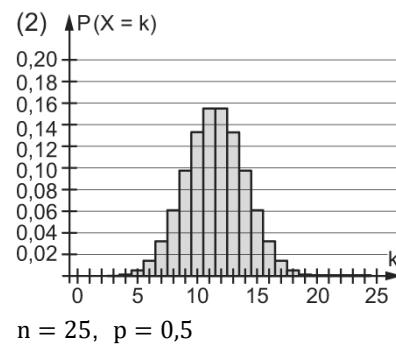
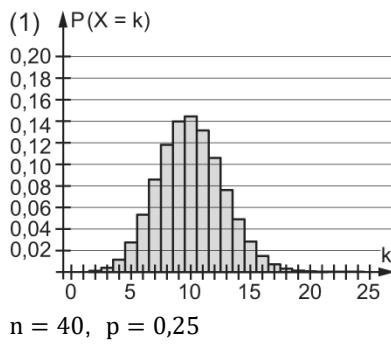
Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X kann auch mit deren Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden. Wenn X die Werte x_1, x_2, \dots, x_n annehmen kann, so ist der Erwartungswert von X wie folgt definiert: $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$. Überprüfen Sie, ob Sie mit dieser Formel zum gleichen Ergebnis wie mit der oben entdeckten intuitiveren Herangehensweise kommen. Vergleichen Sie die beiden Formeln hinsichtlich ihrer Praktikabilität.

Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße

Für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p gilt:

$$\mu = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$$

3 Binomialverteilungen können mithilfe von Histogrammen veranschaulicht werden. Hierzu werden über den möglichen Trefferanzahlen auf der x-Achse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten abgetragen. Unten abgebildet sind jeweils die Histogramme einer binomialverteilten Zufallsgröße X . Bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert und untersuchen Sie, wie dieser am Histogramm abgelesen werden kann.



Ist der Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsgröße X ganzzahlig, so findet man bei μ

den Balken vor. Ist μ nicht ganzzahlig, so befindet sich μ in der Nähe des Balkens.