Wie wir wissen, ist bei linearem bzw. exponentiellem Wachstum der Zuwachs bzw. der Wachstumsfaktor konstant. Dies führt zu einem unbegrenzten Wachstum. Das ist in der Realität nur sehr selten möglich. Gründe wie Platznot, Nahrungsmangel oder Stress führen dazu, dass eine Population nicht unbegrenzt wächst. Sinnvollere mathematische Modelle berücksichtigen daher, dass trotz Wachstum eine bestimmte Grenze nicht überschritten werden kann. In den folgenden beiden Modellen ändert sich der Zuwachs. Er wird kleiner, je weiter man sich der Schranke S nähert.

<u>Aufgabe:</u> Wachstum von Hopfen

Um Aussagen über das Höhenwachstum von Hopfen zu machen, wurde bei einer Untersuchung die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit x (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe f(x) (in Meter)	0,6	1,2	2,0	3,3	4,1	5,0	5,5	5,8

a) Stellen Sie die Daten mit dem CAS graphisch dar. Zeigen Sie, dass für die ersten 6 Wochen der Wachstumsprozess mit Hilfe des exponentiellen Wachstums näherungsweise beschrieben werden kann. Ermitteln Sie, wie hoch die Pflanze demnach nach 12 Wochen sein müsste. Erläutern Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der Brauchbarkeit für die Beschreibung des Wachstums.

b) Die Pflanze ist nach 12 Wochen nur 5,5 Meter hoch. Für die Beschreibung des Wachstums der Pflanze ab der 8. Woche wählt man die Funktion g mit g(x) = 6,17 – 19,51· $e^{-0,28x}$.
Erläutern Sie diesen Ansatz und ermitteln Sie, wie groß die Pflanze nach diesem Modellansatz maximal werden kann. Nehmen Sie Stellung zu der Aussage, dass die Wachstumsgeschwindigkeit gegen Null strebt.
Berechnen Sie, wann die Pflanze 90% der Maximalhöhe erreicht hat. Nach welcher Zeit beträgt der Zuwachs pro Woche weniger als 1%?

c) Betrachten Sie nun die vollständige Messreihe. Erläutern Sie, welches Wachstumsmodell das Höhenwachstum beschreiben kann. Ermitteln Sie mit dem CAS eine geeignete Funktion und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

d) Eine Kombination der Wachstumsmodelle führt zu einer Funktionenschar h_k mit dem Funktionsterm $h_k(x) = \frac{3,6}{0,6+5,4\cdot e^{-6\cdot k\cdot x}}$ für $0,01 \leq k \leq 0,1$. Für k = 0,062 beschreibt die Kurve gut das Wachsen des Hopfens. Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass der Hopfen nach 10 Wochen schneller wächst als nach 6 Wochen.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes eines Graphen der Funktionenschar. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. Erläutern Sie die Bedeutung dieses Parameters k auf den Verlauf des zugehörigen Graphen, indem Sie verschiedene Parameter für k aus dem Intervall [0,01; 0,1] wählen. Übertragen Sie Ihre Beobachtungen auf den Wachstumsprozess einer Hopfenpflanze.

Wenn wir uns das Höhenwachstum der Hopfenpflanzen nochmals ansehen, so zeigt sich, dass das Wachstum anfangs annähernd exponentiell verläuft; mit zunehmender Zeitdauer verlangsamt es sich allerdings und kommt schließlich zum Erliegen.

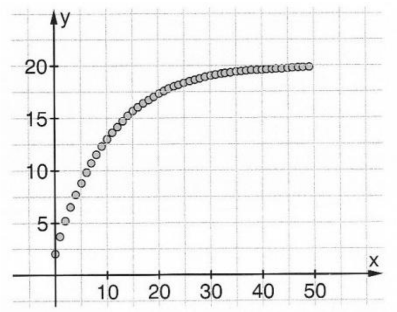
Bei einer kontinuierlichen Modellierung ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit *f´(t)* anfangs, wenn das Wachstum nahezu exponentiell verläuft, in etwa proportional zur augenblicklichen Höhe f*(t).* Gegen Ende des Beobachtungszeitraums nähert sich das Wachstum dem begrenzten Wachstum, damit ist *f´(t)* näherungsweise proportional zur Differenz $S - f(t)$, wobei *S* im Falle der Hopfenpflanzen die maximale Wuchshöhe beschreibt. Wachstum, das in dieser Form beschrieben werden kann, heißt **logistisches Wachstum**

Die zugehörige Differenzialgleichung ist: $f'(t) = r \cdot f(t) \cdot (S - f(t)) \wedge S > 0 \wedge f(t) > 0 \wedge f(t) < S$.

Logistisches Wachstum kann als eine Kombination von exponentiellem und begrenztem Wachstum angesehen werden. Eine Funktion, die diese Differenzialgleichung erfüllt, heißt **logistische Funktion.**

Die **Lösung der Differenzialgleichung** hat die Form $f(x) = \frac{S}{1+a\cdot e^{-k\cdot x}}$ mit k=rS.

(1) Einfach begrenztes Wachstum



(2) Logistisches Wachstum