Mehrstufige Zufallsexperimente – Pfadregeln

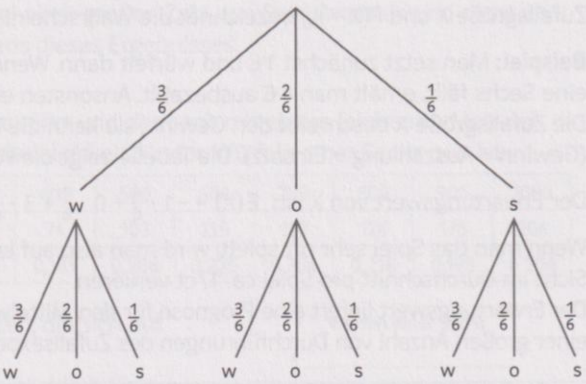
In einer Urne liegen drei weiße, zwei blaue und eine schwarze Kugel.

Man zieht zufällig eine Kugel, notiert ihre Farbe, legt sie zurück und zieht erneut eine Kugel. Dieses **Zufallsexperiment** lässt sich wie folgt mathematisch beschreiben:

Die **Ergebnismenge** S besteht aus allen möglichen Ergebnissen des Zufallsversuchs. Man kann sie in der Form S = {ww, wb, ws, bw, bb, bs, sw, sb, ss} angeben, wobei „ws" das Ergebnis „Im ersten Zug wurde eine weiße und im zweiten Zug eine schwarze Kugel gezogen" ist.

Am zugehörigen **Baumdiagramm** kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses bestimmen, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert (**Pfadregel 1**).

So ist $P(ws) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.



Die zugehörige **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ist:

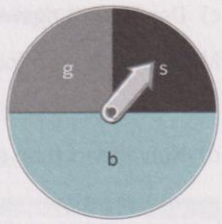
e	ww	wb	ws	bw	bb	bs	sw	sb	ss
P(e)	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1 bzw. 100 %.

Eine Teilmenge der Ergebnismenge S nennt man **Ereignis**. So ist E = {ws, bs, ss} ein Ereignis. Man kann es auch in Worten beschreiben: „Im zweiten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen".

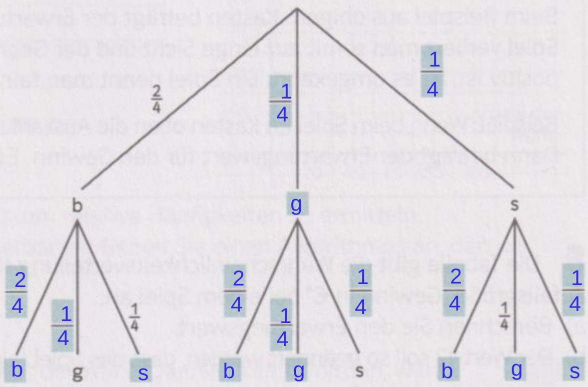
Die Wahrscheinlichkeit von E erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse addiert, $P(E) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (**Pfadregel 2 – Summenregel**).

1 Das Glücksrad rechts wird zweimal gedreht.



a) Ergebnismenge S = {(gg), (ss), (bb), (gs), (gb), (sg), (sb), (bg), (bs)}.

b) Vervollständigen Sie das zugehörige Baumdiagramm.



c) P(bb) = 2/4 * 2/4 = 4/16 = 1/4 = 0.25 und P(sb) = 1/4 * 2/4 = 2/16 = 1/8 = 0.125.

d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an:

e	gg	ss	bb	gs	gb	sg	sb	bg	bs
P(e)	1/16	1/16	4/16	1/16	2/16	1/16	2/16	2/16	2/16

e) Das Ereignis E: „Ein Feld ist blau und das andere schwarz" lautet als Menge

E = { (bs), (sb) }.

f) Das Ereignis F: „Beide Felder haben dieselbe Farbe" lautet in Mengenschreibweise

F = { (bb), (ss), (gg) }.

g) Das Ereignis G = {bb, bg, bs} lautet in Worten:

Das erste Feld ist immer Blau.

h) Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind:

P(E) = 4/16, P(F) = 6/16 und P(G) = 8/16.

Manchmal ist es günstig, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über das **Gegenereignis** zu bestimmen.
Wenn man in obigem Zufallsversuch (zweimaliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Schale mit drei weißen, zwei orangefarbenen und einer schwarzen Kugel) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E: „Es ist höchstens eine Kugel weiß" berechnen möchte, ergibt sich mithilfe der Summenregel für
E = {wo, ws, ow, oo, os, sw, so, ss}, also $P(E) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
Einfacher ist es, das Gegenereignis $\overline{E}$ zu betrachten. $\overline{E}$ besteht aus allen Ergebnissen, die nicht zu E gehören, also $\overline{E}$ = {ww} und $P(\overline{E}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Es gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

2 Ein Würfel wird viermal geworfen. Vervollständigen Sie die Tabelle.

Ereignis E	Gegenereignis $\overline{E}$
Es fällt mindestens eine Sechs.	Es fällt keine Sechs
Es fallen mindestens drei Sechsen.	Es fallen weniger als drei Sechsen
Es fällt höchstens eine Sechs.	Es fallen mindestens 2 Sechsen
Es fällt mindestens eine Sechs	Es fallen höchstens drei Sechsen.
Es fallen vier Sechsen	Es fällt mindestens einmal keine Sechs.
Es fallen nur gerade Zahlen.	Es fällt mindestens eine ungerade Zahl

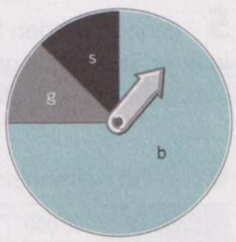
3 Drei Münzen werden geworfen.
a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an (W steht für „Wappen" und Z für „Zahl").

e	WWW	WWZ	WZW					
P(e)								

b) Geben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten an.
Überlegen Sie zunächst, ob es günstig ist, das Gegenereignis $\overline{E}$ zu betrachten.

Ereignis E	Es ist günstig, $\overline{E}$ zu betrachten.	P(E)
Es fällt mindestens einmal Wappen.	ja	
Es fällt nur Wappen.		
Es fällt höchstens zweimal Wappen.		
Es fällt einmal Wappen und zweimal Zahl.		

4 Das Glücksrad rechts wird viermal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Wie viele Pfade des vollständigen Baumdiagramms müssen Sie betrachten?



a) Zuerst erscheint grau, dann zweimal blau und dann schwarz.
b) Es erscheint nur blau.
c) Es erscheint dreimal blau.
d) Es erscheint genau beim ersten und dritten Mal schwarz.