

Problemlösen mit der Binomialverteilung

Bearbeiten Sie die Aufgaben 2, 3 und 4 auf einem Blatt.

1 Parameter n unbekannt

a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $p = 0,2$. Bestimmen Sie den Parameter n als möglichst kleine Zahl, sodass gilt:

i) $P(X = 0) \leq 0,1$: Mit der Formel von Bernoulli erhält man für $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^n = 0,8^n \leq 0,1$.

Durch Logarithmieren der Ungleichung erhält man für n : $n \cdot \ln(0,8) = \ln(0,1) \Rightarrow n = 11$.

ii) $P(X \geq 1) \geq 0,6$: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. Mit der Formel von Bernoulli erhält man $1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^n \geq 0,6$.

Durch Logarithmieren der Ungleichung erhält man für n : $n \cdot \ln(0,8) = \ln(0,6) \Rightarrow n = 5$.

b) Etwa 15% der Bevölkerung in Deutschland sind Linkshänder. Bestimmen Sie mit dem Rechner, wie groß eine Gruppe zufällig ausgewählter Personen sein muss, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 20 Linkshänder befinden.

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Linkshänder und ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0,15$.

Gesucht ist n , sodass $P(X \geq 20) \geq 0,9$. Es ist $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Also muss folgende

Ungleichung gelöst werden: $P(X \leq 19) \leq 0,1$. Mit dem Rechner erhält man für $n = 169$ den

Wert $P(X \leq 19) \approx 0,10062$ und für $n = 170$ den Wert $P(X \leq 19) \approx 0,09533$.

Antwort: Bei 170 Menschen ist die Chance, dass mindestens 20 Linkshänder anwesend sind etwa 90,5%.

2 Parameter p unbekannt

a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$. Bestimmen Sie mit der Formel von Bernoulli p , sodass:

(1) $P(X = 0) \leq 0,2$ (2) $P(X \geq 1) \geq 0,7$.

b) Bei der Produktion von Plastikflaschen an einer Maschine entsteht mit einem Anteil p fehlerhafte Ware. Die Plastikflaschen werden unabhängig voneinander produziert. Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% keine der 10 Plastikflaschen einer Kontrolle fehlerhaft ist?

3 Parameter k unbekannt

a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,25$. Bestimmen Sie mit dem Rechner die kleinste natürliche Zahl k , für die gilt:

(1) $P(X \leq k) \geq 0,9$ (2) $P(X \geq k) \leq 0,02$.

b) Zwei Würfel werden 20-mal zusammen geworfen. Ein Gewinn wird ausbezahlt, wenn mindestens k -mal ein Pasch gewürfelt wird. Bestimmen Sie, wie groß k mindestens sein muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 40% gewinnt.

4 Bei der Produktion von Autoreifen entsteht an der Maschine M_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% fehlerhafte Ware.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

E_1 : Von 100 Autoreifen sind genau 5 fehlerhaft. E_2 : Höchstens 7 von 300 Autoreifen sind fehlerhaft.

E_3 : Von 250 Autoreifen sind genau 6 fehlerhaft. E_4 : Mehr als 8 von 200 Autoreifen sind fehlerhaft.

E_5 : Mindestens 5 und weniger als 13 von 500 Autoreifen sind fehlerhaft.

b) Bestimmen Sie die Anzahl an Autoreifen, die höchstens geprüft werden dürfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% höchstens 2 fehlerhafte Autoreifen zu erhalten.

c) An der neuen Maschine M_2 enthält eine Palette mit 80 Autoreifen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 70% mindestens einen fehlerhaften Reifen. Überprüfen Sie, ob diese Maschine einen geringeren Anteil fehlerhafter Reifen produziert als Maschine M_1 .