Sujet 1

Prépa Profs

EXERCICE 1 - Des polynômes

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P)=P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Pour $p=0,\dots,n$, déterminer le degré de $f(X^p)$? En déduire $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P)=Q$ et $P(0)=P'(0)=0$.

EXERCICE 2 - Noyau égal à l'image

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f)=\operatorname{Im}(f)$ si et seulement si E est de dimension paire.

EXERCICE 3 - Composée et somme

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Montrer que
$$|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leq \operatorname{rg}(u+v)\leq \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v).$$
2. On suppose que $u\circ v=0$ et que $u+v$ est inversible. Prouver que $\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)=n$.

EXERCICE 4 - Base donnée par un endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f\in\mathcal{L}(E)$ un opérateur tel que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.

1. Soit $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$. Montrer que la famille $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Soit $g\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que g commute avec f (ie $fg=gf$) si et seulement si $g\in\operatorname{vect}(Id,f,\dots,f^{n-1})$.

PROBLEME

Soit E un K espace vectoriel ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E. On désigne par $\operatorname{Ker} u$ le noyau de u et $\operatorname{Im} u$ l'image de u.

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u\circ u\circ u\cdots\circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

PREMIERE PARTIE

IA Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

IA - 1 Déterminer le rang de u et donner une base de $\operatorname{Im} u$, une base de $\operatorname{Ker} u$ en fonction des vecteurs de la base B.

IA - 2 Calculer M^2, M^3 et montrer que pour tout entier $p\geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p=\alpha_p A$. Expliciter alors M^p.

IA - 3a Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Im} u^2$, $\operatorname{Ker} u^2$, $\operatorname{Im} u^3$, $\operatorname{Ker} u^3$.

IA - 3b Déterminer : $\forall k\geq 2$, $\operatorname{Ker} u^k$, $\operatorname{Im} u^k$.

IA - 3c Montrer que $E=\operatorname{Ker} u^2\oplus\operatorname{Im} u^2$.

IB Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps K et d l'endomorphisme de $K[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

IB - 1 d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $K[X]$ n'est pas de dimension finie ?

IB - 2 Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Ker} d^q$.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \operatorname{Im} u^p$ et $K_p = \operatorname{Ker} u^p$.

II - 1 Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

II - 2 On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_p$ et K_p.

II - 3 On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

II - 3a Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

II - 3b Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

II - 3c Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

II - 4 Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Sujet 1

Prépa Profs