Taller 1 - Distancia, norma y convergencia

Álgebra en ciencia de datos

Universidad EAFIT

Fecha de Entrega: Octubre 1 de 2023

Entregue soluciones justificadas y con código reproducible a 4 de los siguientes problemas:

Problema 1

Elija un vocabulario técnico correspondiente a un dominio específico, por ejemplo, nombres científicos de animales. Programe una función tipo autocorrector que dada una palabra cualquiera encuentre la palabra más similar dentro del vocabulario elegido.

Problema 2

A partir del algoritmo de k-vecinos más cercanos cree un modelo que clasifique fotografías según el género de la persona retratada. Justifique por qué la distancia que usted usó es apropiada para este problema.

Problema 3

1. Grafique en el plano $\mathbb{R}^2$ la bola de radio r y centro en el origen respecto a la distancia de Minkowski de orden p, donde los parámetros r y p varían entre desde 0.1 a 2 y desde 1 a ∞.

2. Programe un algoritmo que dado n y p genere de forma aleatoria un vector de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia de Minkowski de orden p al origen sea menor a 0.1.

Problema 4

Tómese una foto tipo documento y transformela a escala de grises y resolución 400×600. Defina una sucesión de imágenes que sea convergente a su foto. Muestre al menos 10 términos de la sucesión incluyendo el elemento 100-ésimo. Como la sucesión es convergente, obtenga el término tal que todos las imágenes siguientes en tienen una distancia (en norma de Frobenius) menor a 0.5 de su foto.

Problema 5

Demuestre que las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales 1 y ∞, corresponden a tomar el máximo de la suma de valores absolutos entre filas y columnas, respectivamente.

Problema 6

1. Programe un algoritmo que dada una matriz aproxime su norma inducida por la norma vectorial de orden p.

2. Usando el algoritmo del ítem anterior estime la norma inducida de ordenes 1, 2, 3 y ∞ para la matríz de Hilbert de tamaño 10×10 definida por $H_{10} = [h_{ij}] = [\frac{1}{i+j}]$.

Problema 7

1. Si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica, entonces $\bar{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ también es una métrica.

2. Demuestre que la distancia coseno en $\mathbb{R}^n$ definida como

$$d(x, y) = 1 - \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$$

   no satisface la desigualdad triangular.

Problema 8

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y los vectores $a = [2, 1]^T$, $v = [3, 9]^T$. Halle vectores u y w tales que $u \in \text{Gen}(a)$, $w \perp a$ y $v = u + w$.

Muestre que $\|v\|2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$ y haga una gráfica que muestre los cuatro vectores.

2. Definimos la reflexión ortogonal del vector u sobre el subespacio $\mathrm{Gen}(v)$ mediante la expresión:

$$H_v(u) = u - 2P_v(u)$$

Considere el vector en $\mathbb{R}^2$, $u = [4,3]^T$. Encuentre una dirección adecuada v tal que su reflexión, sobre dicha dirección, sea un múltiplo del vector básico $e_1 = [1,0]^T$.