



Escuela de Ciencias
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Técnicas robustas y no paramétricas
Taller Unidad 1

NOTA: _____

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

GRUPO: _____ PROFESOR: Henry Laniado Entrega en Latex.

El fichero Temperaturas.txt contiene la temperatura media diaria en Canadá durante 35 años. La primera columna es el año más reciente.

1. [10 %] Grafique en un mismo plano las funciones de distribución empíricas de las temperaturas. Explique con base en las gráficas de las funciones, si es observable un efecto de cambio climático. Realice una tabla de doble entrada donde se muestre en cada par de años, cuál es más caluroso entre el par. Primero en términos de la temperatura media y otra tabla en términos del orden dado por la distribución empírica.
2. Calcule el área limitada, en el primer cuadrante, por cada curva empírica y la recta $y = 1$. Réstele al área limitada, en el segundo cuadrante por cada curva y la recta $y = 0$. Esta área final sería un estimador Plug in de qué parámetro?. Justifique.
3. [10 %] Calcule y grafique las bandas de confianza a un 95 % de confianza para la función de distribución empírica de los años en media más y menos calurosos. Hay sectores solapados?. Argumente.
4. [10 %] Escriba y ejecute un código que permita visualizar el Teorema de Glivenko Cantelli para una distribución Weibull con parámetro de escala, la nota que el grupo de trabajo espera obtener en este curso, y parámetro de forma, la edad media del grupo sobre el cuadrado de la nota esperada.
5. [5 %] Enuncie y demuestre la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas. Muestre un ejemplo de utilidad de la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas.
6. Consulte el concepto de L-statistics and M-statistics. Proporcione 4 ejemplos de cada uno. Exponga las ventajas de uno sobre el otro. Pinte la curva de su Influence function para cada uno de los ejemplos y obtenga conclusiones. Hable también del breakdown de cada uno de ellos.
7. Deduzca la distribución y densidad del j -ésimo estadístico ordenado. Exponga con detalle cómo sería un procedimiento sencillo de simular el j -ésimo estadístico ordenado. Simule 1000 observaciones de algún estadístico ordenado de una muestra de tamaño n que venga de una distribución Weibull. Pinte en un mismo plano su distribución empírica y su distribución teórica.
8. [10 %] Suponga que X es una variable aleatoria exponencial de parámetro β . Calcule

$$P(|X - \mu| > k\sigma),$$

para $k > 1$. Compare el resultado con la cota obtenida de la desigualdad de Chebyshev.

9. [5 %] Demuestre que si X es Poisson de parámetro λ entonces

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

10. [5 %] Demuestre que convergencia en probabilidad está implicada por la convergencia en media cuadrática.
11. [7 %] Demuestre que la función de distribución empírica converge en probabilidad a la distribución teórica
12. [12 %] Considere las temperaturas diarias del año más en media mas frío. Calcule un intervalo de confianza para la temperatura máxima. Calcule el sesgo de $T_{[n]}$ y la varianza
13. [13 %] Considre U_1, U_2, \dots, U_n una muesrta de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Calcule la distribución teórica de $U_{[1]}$, su media y sesgo. Genere la muestra y utilice bootstrap para calcular la varianza de $U_{[1]}$. Calcule el sesgo por Jackknife y compárelo con el sesgo teórico.
14. Exponga las diferencias entre el bootstrap paramétrico y no paramétrico, ilustre con ejemplos. Consulte versiones robustas del método bootstrap y exponga ejemplos sobre el performance.
15. [13 %] Explique una forma no paramétrica y robusta de calcular la distancia de Mahalanobis. Aplique la técnica para recortar la muestra bivalente de temperaturas correspondientes a los años, en media, más caluroso y más frío. Compáre con el recorte obtenido de forma habitual. Luego elija aleatoriamente 30 observaciones y súmele un ruido que venga de una normal con media 10 y varianza 0.25 y realice de nuevo el ejercicio.
16. Ejercicios del Libro de Wasserman. Página 10. Ejercicio 2. Página 24. Ejercicios 3 y 7. Página 39. Ejercicios 2. Página 40. Ejercicios 6, 7 y 10. Página 41. Ejercicio 11.