Parcial 1

Biología
Modelación Experimental

Profesor:
Daniel Rojas Diaz
Año Académico:
2022

Camilo Oberndorfer Mejía, 1000454952

1. Estimacion por Minimos Cuadrados Ordinarios

Para el siguiente conjunto de datos experimentales (las columnas corresponden a [t, u, y]), aplicar el método de mínimos cuadrados para (i) calcular la función de transferencia con la estructura indicada (indicar todas las operaciones matemáticas intermedias, pero se pueden realizar con Matlab), (ii) calcular la desviación estándar de los parámetros aplicando las propiedades estadísticas del método de mínimos cuadrados, (iii) validar los resultados comparando la respuesta temporal a partir del modelo obtenido con la respuesta experimental.

arx122

0	1.0000	0.0049
1.0000	1.0000	0.0078
2.0000	1.0000	1.1252
3.0000	1.0000	1.4378
4.0000	1.0000	1.6006
5.0000	1.0000	1.6803
6.0000	1.0000	1.7287
7.0000	1.0000	1.7471

Solucion Como se tiene un ARX 122, se tiene que:

$$y(t) = \frac{b_1 q^{-2} + b_2 q^{-3}}{1 + a_1 q^{-1}} u(t) + \frac{1}{1 + a_1 q^{-1}} e(t)$$
$$y(k) + y(k-1) = b_1 v(k-1) + b_2 u(k-2) + e(k)$$

Y la funcion de transferencia queda de la manera:

$$G(z) = \frac{y}{u} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 (z + a_1)}$$

Donde los parametros $\theta = [a_1 \quad b_1 \quad b_2]^T$.
La matriz Φ quedaria definida como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^T(3) \\ \phi^T(4) \\ \phi^T(5) \\ \phi^T(6) \\ \phi^T(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & u(1) & u(0) \\ y(3) & u(2) & u(1) \\ y(4) & u(3) & u(2) \\ y(5) & u(4) & u(3) \\ y(6) & u(5) & u(4) \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y(3) \\ Y(4) \\ Y(5) \\ Y(6) \\ Y(7) \end{bmatrix}$$

Y por miminos cuadrados oridinarios tenemos que $\theta = (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T Y$ Pero al calcular la matriz Φ esta queda singular por lo que no se podría realizar el calculo de parámetros por MCO, para esto se le añaden entradas nulas al sistema en $y(-2)$ y en $y(-1)$ pues el sistema no reaccionara en esos instantes. De esta manera la matriz Φ sera:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \phi^T(3) \\ \phi^T(4) \\ \phi^T(5) \\ \phi^T(6) \\ \phi^T(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) & u(-1) & u(-2) \\ y(1) & u(0) & u(-1) \\ y(2) & u(1) & u(0) \\ y(3) & u(2) & u(1) \\ y(4) & u(3) & u(2) \\ y(5) & u(4) & u(3) \\ y(6) & u(5) & u(4) \end{bmatrix}$$

De esta manera obtenemos la matriz Φ como

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0{,}0049 & 0 & 0 \\ -0{,}0078 & 1 & 0 \\ -1{,}1252 & 1 & 1 \\ -1{,}4378 & 1 & 1 \\ -1{,}6006 & 1 & 1 \\ -1{,}6803 & 1 & 1 \\ -1{,}7287 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera entonces obtenemos que los parametros son:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5158 \\ 1{,}1212 \\ -0{,}2635 \end{bmatrix}$$

1.1. a

De tal manera que la funcion de transferencia obtenida es:

$$G(z) = \frac{1{,}1212z - 0{,}2635}{z - 0{,}5158} z^{-2}$$

1.2. b

Ahora para la covarianza de los parametros se tiene que:

$$\lambda(\phi^T\phi)^{-1}$$

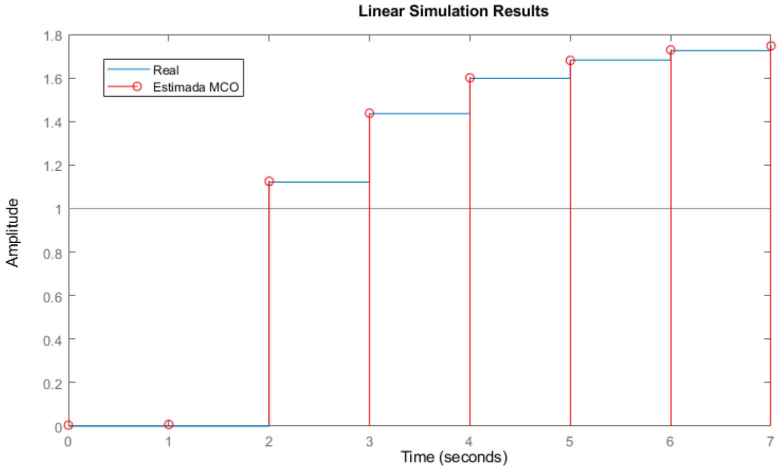
A partir de este calculo obtenemos que la matriz de covarianzas es:

$$\begin{bmatrix} 5{,}2117e-05 & 4{,}0651e-07 & 7{,}8526e-05 \\ 4{,}0651e-07 & 1{,}2420e-05 & -1{,}1804e-05 \\ 7{,}8526e-05 & -1{,}1804e-05 & 1{,}3322e-04 \end{bmatrix}$$

Y para la desviacion estandar de cada parametro tomamos la diagonal de esta matriz y le sacamos la raiz, de tal manera que la desviacion estandar obtenida es:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5158 \pm 0{,}0072 \\ 1{,}1212 \pm 0{,}0035 \\ -0{,}2635 \pm 0{,}0115 \end{bmatrix}$$

1.3. c



Se ve que la estimación es muy buena por lo que el método de mínimos cuadrados hizo una buena estimación de los parametros, el modelo posiblemente si era un ARX122.

2. Filtros de Kalman

Especificar las ecuaciones y el código en Matlab del filtro de Kalman para el siguiente sistema, con medición de una de las variables de estado y estimación de las restantes:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1=-x_1+a x_2\left(1+x_1\right) \\ \dot{x}_2=-b x_1\left(1+x_1\right)+u\end{array}\right.$$

Solucion Dado que no tenemos una forma lineal para la ecuacion de estado utilizamos el filtro de Kalman extendido. Para esto inciamos discretizando el modelo.

- Discretizacion:

$$\left\{\begin{array}{l}x_1(k+1)=x_1(k)+\tau\left(-x_1(k)+a x_2(k)\left(1+x_1(k)\right)\right) \\ x_2(k+1)=x_1(k)+\tau\left(-b x_1(k)\left(1+x_1(k)\right)+u\right)\end{array}\right.$$

Donde τ es el tamaño del paso. Luego encontramos el jacobiano de este modelo.

$$J=\left[\begin{array}{cc}a\, x_2-1 & a\,\left(x_1+1\right) \\ -b\, x_1-b\,\left(x_1+1\right) & 0\end{array}\right]$$

Luego se linealiza:

$$A=I+\tau J=\left[\begin{array}{cc}1+\tau(a\, x_2-1) & a\,\left(x_1+1\right) \\ -b\, x_1-b\,\left(x_1+1\right) & 1+\tau\end{array}\right]$$

Luego con el sistema general:

$$x(k+1)=f\left(x_1(k), u(k)+\theta w(k)\right.$$

$$y(k)=c x+\eta(k)$$

Siendo $w(k)$ y $n(k)$ ruidos, $E\left[\eta(t) \eta^{\top}(k)\right]=N$ y $E\left[w(k) w^{\top}(k)\right]=M$. Y midiendo x_2 y estimndo x_1, tenemos que:

$$C=\left[\begin{array}{ll}0 & 1\end{array}\right]$$

Las ecuaciones para el filtro de Kalman seria:

Prediccion:

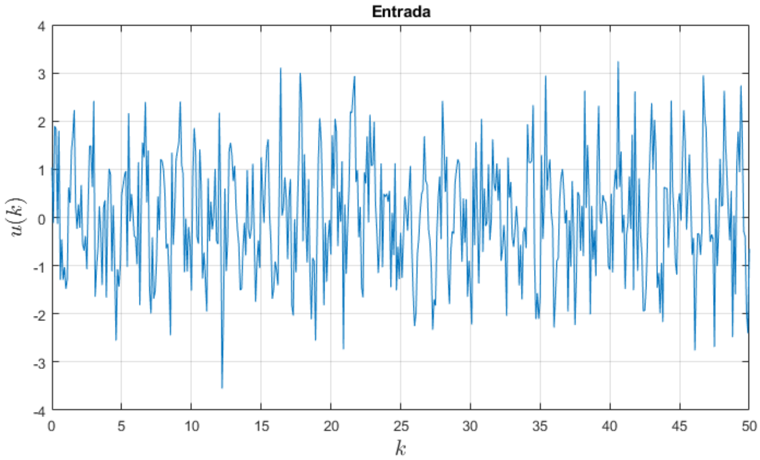
$$x(k+1 \mid k)=f(x(k \mid k), u(k))=\left[\begin{array}{l}x_1(k+1)=x_1(k)+\tau\left(-x_1(k)+a x_2(k)\left(1+x_1(k)\right)\right) \\ x_2(k+1)=x_1(k)+\tau\left(-b x_1(k)\left(1+x_1(k)\right)+u\right)\end{array}\right]$$

$$P(k+1 \mid k)=A P(K \mid k) A^T+V M V^{\top}$$

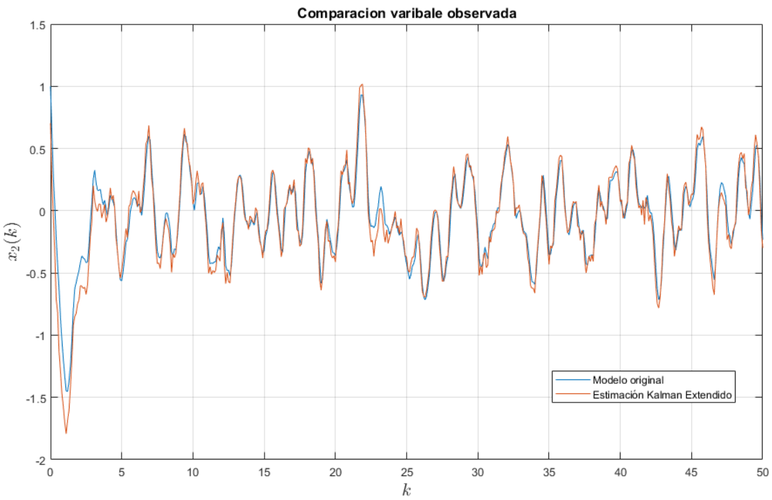
Correccion:

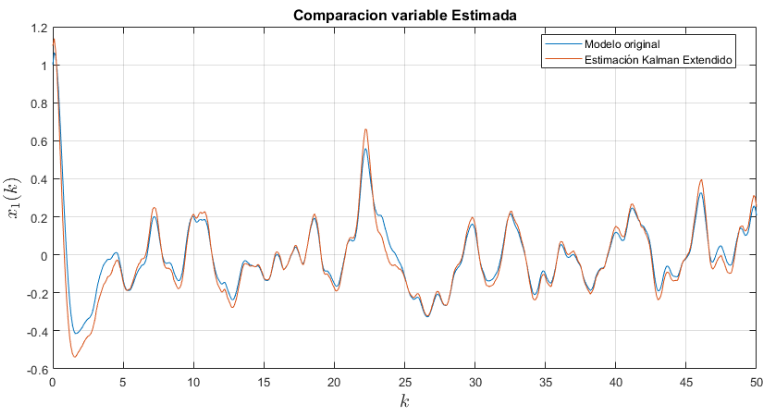
$$\mathbb{K}(k+1) = P(k+1 \mid k)C^\top[CP(K+1 \mid k)C - N]^{-1}$$
$$x(K+1 \mid K+1) = x(K+1 \mid K) + \mathbb{K}(k+1)[y(k+1) - Cx(K+1/k)]$$
$$P(k+1 \mid k+1) = [I - \mathbb{K}(k+1)C]P(k+1 \mid k)$$

Ahora, como tenemos el modelo, podemos simular una solución con las condiciones iniciales $x_0 = (1,1), a = 1, b = 2$ además, usaremos una entrada dada por $u(t) = \text{sen}(5t) + r$, donde $r \sim N(0,1)$, dando la entrada:



Luego de correr el codigo con un ruido normal $\eta \sim N(0, 0{,}1)$, $M = 0{,}001 * eye(2)$, $R = 10$ y $P_0 = M$. Tomando esos valores para M y R dado que hay poco ruido entonces hay mucha confianza en la prediccion, obtenemos que:





Y viendo el error de la estimacion en cada iteracion.