

Aplicaciones del Filtro de Kalman

Karen Melissa Gomez Montoya

Noviembre 2021

1 Introducción

En ocasiones no es posible medir todos los estados de un sistema. El filtro de Kalman permite estimar estos estados, para sistemas lineales, a partir de entradas, salidas y un modelo del sistema, mientras este último sea observable. Esto lo hacer a través de un proceso de predicción-corrección. El filtro de Kalman se puede usar para modelos no lineales utilizando un variación llamada Filtro de Kalman Extendido (*Extended Kalman Filter* o EKF). Además no solo es posible estimar el estado si no también parámetros del modelo utilizando el filtro de Kalman extendido dual.

El sistema con el que se trabajará es el de dos tanques acoplados, como el que se ve en la figura 1. En el que al sistema entra agua por medio de una válvula al tanque número 1 y su descripción matemática incluye una variable x que se refiere al porcentaje de apertura de la válvula, cuenta con dos variables k_1, k_2 que hacen referencia a la conductividad del tanque 1 al 2 y del 2 a la salida respectivamente, A_1 es el área del tanque 1 y A_2 es el área del tanque 2, h_1 se refiere a la altura del tanque número 1 y h_2 a la altura del tanque 2. En la figura 1, q_{in} representa el flujo de entrada de agua, q_o el de salida y q_1 el flujo entre el tanque 1 y el 2. No se consideran válvulas $R1$ y $R2$.

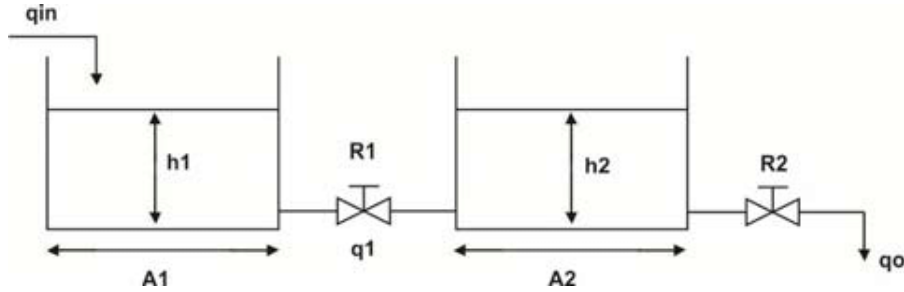


Figure 1: Representación dos tanques acoplados tomado de [Côrtes et al., 2017]

Luego sean $x_1 = h_1$ y $x_2 = h_2$ las variables de estado, el modelo matemático que describe este sistema se compone de las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{k_1}{A_1}\sqrt{x_1 - x_2} + \frac{a}{A_1}u \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{A_2}\sqrt{x_1 - x_2} - \frac{k_2(1+v)}{A_2}\sqrt{x_2} \end{cases} \quad (1)$$

Con salida $y = x_2$. Este es un modelo no lineal, para el cual se estimará x_1 y x_2 utilizando el EKF (x_2 puede medirse pero se estimará para tener un control adicional del funcionamiento del filtro). Luego se estimará también el parámetro A_2 junto con el estado x_1 usando el filtro de Kalman extendido dual. Con esto también se buscará responder a la pregunta de investigación ¿Qué tan diferente es la estimación de x_1 a través del filtro de Kalman extendido dual en comparación con el EKF? Es decir, ¿Cómo se ve afectado el filtro al incluir uno de los parámetros en el proceso de estimación?

Con este modelo del sistema también se generarán los datos “experimentales”, utilizando los parámetros de la tabla 1.

Parámetro	Descripción	Valor
A1	Área tanque 1	0.45
A2	Área tanque 2	0.45
K1	Constante de conductividad del flujo 1	0.047
K2	Constante de conductividad del flujo 2	0.065
a	Ganancia de la válvula	0.0005
v	Perturbación	$\sim N(0, 1)$
Ap	Amplitud de la perturbación	0.01

Table 1: Parámetros del modelo para recolectar los datos

2 Métodos

2.1 Datos experimentales

Es importante obtener adecuadamente los datos experimentales, de modo que representen la mayor cantidad de información del sistema. Estos se generarán a partir de un modelo en Simulink de MATLAB y tendrán un ruido pequeño como suele ocurrir en los sistemas reales. El modelo de Simulink que se utilizará es el presente en la figura 2.

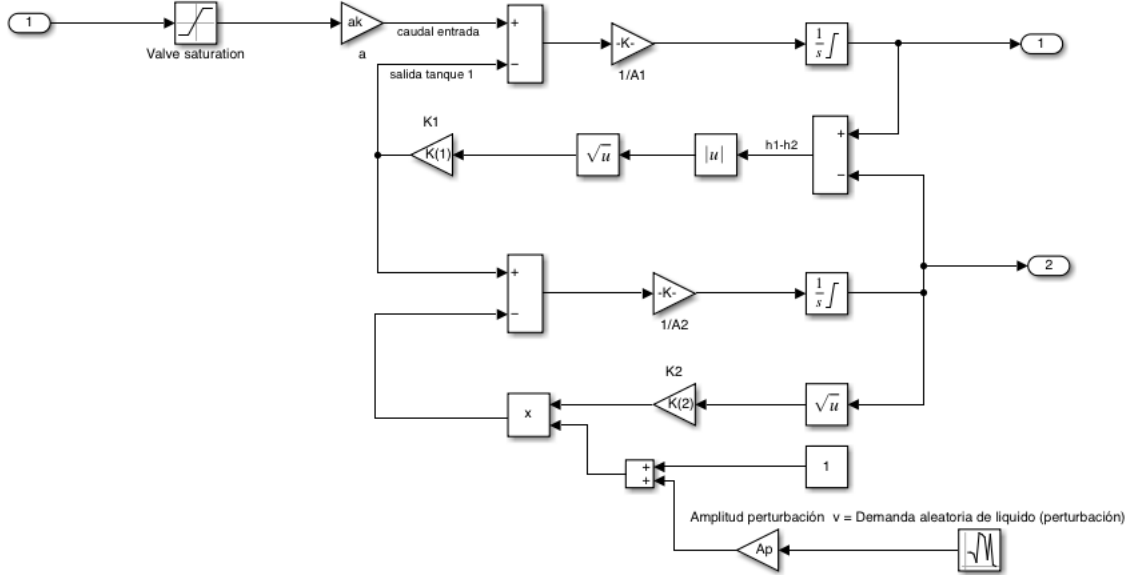


Figure 2: Modelo de Simulink

2.1.1 Periodo de muestreo

Para determinar el periodo de muestreo T_s , es decir cada cuanto se tomarán los datos, se identifica el tiempo de crecimiento del sistema T_r . Se recomienda tomar T_s en el intervalo $(0.1 T_r, 0.2 T_r)$. Sea y_{ss} la salida en estado estacionario, el tiempo de crecimiento T_r , es el tiempo que tarda el sistema en ir de $0.1y_{ss}$ a $0.9y_{ss}$. Para obtener y_{ss} aplicamos entrada escalón $u = 75$ (figura 3).

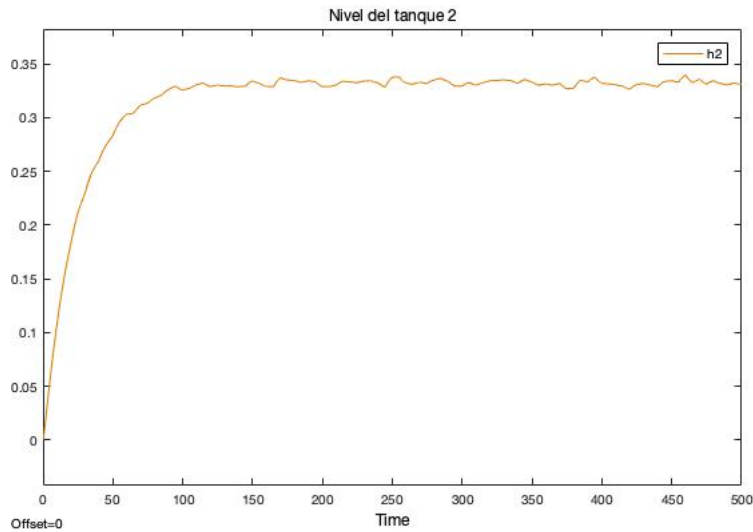


Figure 3: Respuesta a escalón $u=75$

En promedio $y_{ss} = 0.3324$. Luego $0.9y_{ss} = 0.2992$ y $0.1y_{ss} = 0.0332$. Entonces los tiempos en donde tenemos estos valores son 56 y 3 respectivamente. Luego el tiempo de crecimiento es $Tr = 53$ y el periodo de muestro $Ts \in (5.3, 10.6)$. Por practicidad, se selecciona $Ts = 5$.

2.1.2 Selección de la entrada

Como el sistema tiene perturbación se requiere una entrada que sea una señal persistentemente excitada. Para un modelo con n parámetros desconocidos una señal persistentemente excitada de orden n es suficientemente informativa. Un aspecto a tener en cuenta para la elección de la entrada es el factor de cresta, el cual para una señal de media cero se calcula así:

$$C_r^2 = \frac{\max u^2(t)}{\text{var } u(t)}$$

La entrada que se utilizará es una PRBS (Pseudo Random Binary Sequence) cuya amplitud sea la mayor posible dentro del rango de la entrada que haga que y sea siempre mayor que cero para evitar errores matemáticos. Se toma $(40, 100)$. El periodo P para la PRBS debe ser múltiplo del periodo de muestreo, en este caso se utilizará $P = 15$, luego la frecuencia $freq = 1/P = 1/15$.

Se simulará hasta $t = 2000$, resultando 401 datos.

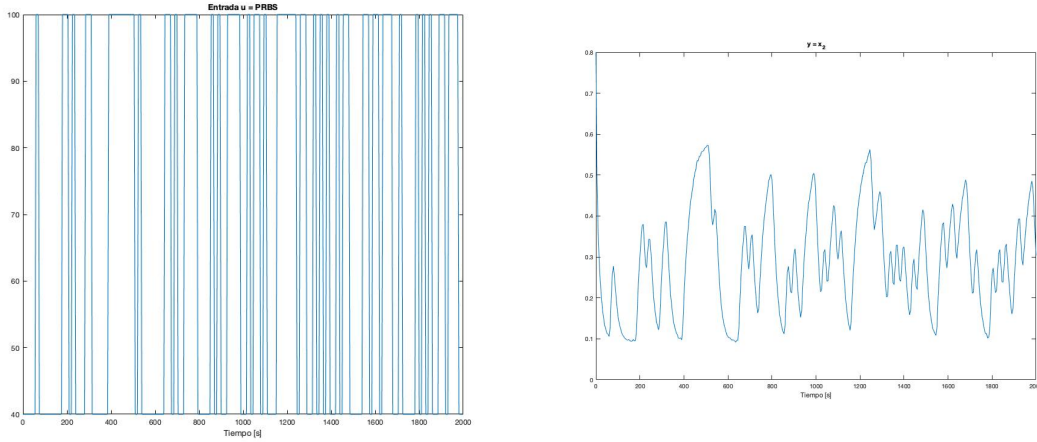


Figure 4: Datos experimentales

2.2 Filtro de Kalman Extendido

Dado el sistema no lineal discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (2)$$

Es posible obtener una aproximación de sus estados a través de un filtro de Kalman Extendido. Este se compone de una parte de predicción, la cual luego es actualizada a través de una fase de corrección. Las ecuaciones de predicción son:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= f(\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)) \\ \mathbf{P}(k|k-1) &= \Phi \mathbf{P}(k-1|k-1) \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T\end{aligned}\quad (3)$$

Las ecuaciones de corrección son:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k) &= \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{y}(k) - h(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))] \\ \mathbf{P}(k|k) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{C}] \mathbf{P}(k|k-1)\end{aligned}\quad (4)$$

Con valores iniciales $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}_0$ y $\mathbf{x}(0|-1) = \mathbf{x}_0$.

La primera ecuación de predicción, predice el estado utilizando la función no lineal, la segunda ecuación predice la matriz de covarianza del error del estado $\mathbf{P} = E[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T$, Φ resulta de la linealización del sistema no lineal discreto y $\mathbf{Q} = E\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)$ es la matriz de covarianza del ruido del proceso.

La primera ecuación de corrección es el cálculo de la matriz óptima de Kalman \mathbf{K} utilizando la matriz de covarianza del error predicha \mathbf{P} , \mathbf{C} que resulta de linealizar el modelo no lineal y $\mathbf{R} = E\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)$ que es la matriz de covarianza del ruido de medición. La segunda ecuación es la actualización de la estimación utilizando los datos experimentales \mathbf{y} comparándolos con el \mathbf{y} predicho, y la matriz de Kalman. Por último, la tercera ecuación actualiza la matriz de covarianza \mathbf{P} .

$\mathbf{G} = \mathbf{I}$ generalmente. \mathbf{R} y \mathbf{Q} se seleccionan haciendo pruebas con diferentes valores (por lo general constantes para que \mathbf{P} y \mathbf{K} converjan rápido) hasta obtener los resultados esperados.

2.2.1 Implementación del filtro

Para implementar el filtro es necesario discretizar el sistema no lineal y linealizar para obtener Φ .

El proceso de linealización está dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} \quad \mathbf{C} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \quad (5)$$

Al aplicar en las ecuaciones (1) del modelo no lineal se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_1}{2A_1\sqrt{x_1-x_2}} & \frac{k_1}{2A_1\sqrt{x_1-x_2}} \\ \frac{-k_1}{2A_2\sqrt{x_1-x_2}} & \frac{k_1}{2A_2\sqrt{x_1-x_2}} - \frac{k_2}{2A_2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Luego se puede discretizar \mathbf{A} con la siguiente aproximación:

$$\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{A}T \quad (7)$$

Siendo T el periodo de muestreo. Al discretizar se obtiene:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_1T}{2A_1\sqrt{x_1-x_2}} & \frac{k_1T}{2A_1\sqrt{x_1-x_2}} \\ \frac{-k_1T}{2A_2\sqrt{x_1-x_2}} & 1 + \frac{k_1T}{2A_2\sqrt{x_1-x_2}} - \frac{k_2T}{2A_2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

La función f debe ser discreta también para aplicar el filtro, se usará el método de Euler para esto:

$$\dot{x}_i \approx \frac{x_i(k+1) - x_i(k)}{T} \quad (9)$$

$$\mathbf{x}(k+1) \approx \mathbf{x}(k) + T f_c(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + T \mathbf{G}_c \mathbf{w}(k) \equiv f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{G} \mathbf{w}(k)$$

Resultando la siguiente función discreta

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - \frac{k_1 T}{A_1} \sqrt{x_1(k) - x_2(k)} + \frac{a T}{A_1} u \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - \frac{k_1 T}{A_2} \sqrt{x_1(k) - x_2(k)} - \frac{k_2 T \sqrt{x_2}}{A_2} \end{aligned} \quad (10)$$

Con estas ecuaciones ya es posible aplicar iterativamente el filtro de Kalman. Para asegurar el funcionamiento de este, es necesario que el sistema sea observable, luego debe monitorearse el rango de la matriz de observabilidad \mathbf{M}_o .

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea observable $\text{rango}(\mathbf{M}_o) = n$ con n el orden del sistema. Siendo este un requisito para la observabilidad, pueden haber problemas si el número condición \mathbf{M}_o es muy grande, por tanto también debe observarse en las iteraciones del filtro.

Para analizar el comportamiento del filtro, se graficará también la traza de la matriz \mathbf{P} y la norma de la matriz \mathbf{K} .

Adicionalmente, se incluirá una aproximación de intervalos de confianza para los estados estimados. La diagonal de \mathbf{P} tiene las varianzas del error del estado $x(k) - \hat{x}(k)$, la raíz cuadrada de estas varianzas es la desviación estándar, luego es posible aproximar intervalos de confianza de la forma $(\mathbf{x} \pm 1.96 \sqrt{\text{diag}(\mathbf{P})})$. Se toma 1.96 para considerar un intervalo de confianza del 95%.

2.3 Filtro de Kalman Extendido Dual

Es posible estimar, además del estado, un parámetro a través del filtro de Kalman extendido dual. Esto se hace añadiendo a la ecuación de estado una variable adicional que represente el parámetro. Para estimar el parámetro A_2 la función discreta resultante es:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - \frac{k_1 T}{A_1} \sqrt{x_1(k) - x_2(k)} + \frac{a T}{A_1} u \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - \frac{k_1 T}{x_3(k)} \sqrt{x_1(k) - x_2(k)} - \frac{k_2 T \sqrt{x_2(k)}}{x_3(k)} \\ x_3(k+1) &= x_3(k) \end{aligned} \quad (11)$$

Al linealizar, se obtiene:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_1 T}{2A_1 \sqrt{x_1 - x_2}} & \frac{k_1 T}{2A_1 \sqrt{x_1 - x_2}} & 0 \\ \frac{-k_1 T}{2x_3 \sqrt{x_1 - x_2}} & 1 + \frac{k_1 T}{2x_3 \sqrt{x_1 - x_2}} - \frac{k_2 T}{2x_3 \sqrt{x_2}} & \frac{-k_1 T \sqrt{x_1 - x_2}}{x_3^2} + \frac{k_2 T \sqrt{x_2}}{x_3^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

En este caso también se hará monitoreo de la traza de \mathbf{P} , la norma de \mathbf{K} y la observabilidad.

3 Resultados

3.1 Filtro de Kalman Extendido

3.1.1 Pruebas con \mathbf{R} , \mathbf{Q} y \mathbf{P}_0

Se conoce el valor inicial del estado x_2 el cual es 0.8, el valor inicial del estado x_1 se sabe es un poco mayor que el otro, se seleccionó 1.2. Como hay poca incertidumbre de \mathbf{x}_0 se toma $\mathbf{P}_0 = 0.1\mathbf{I}$.

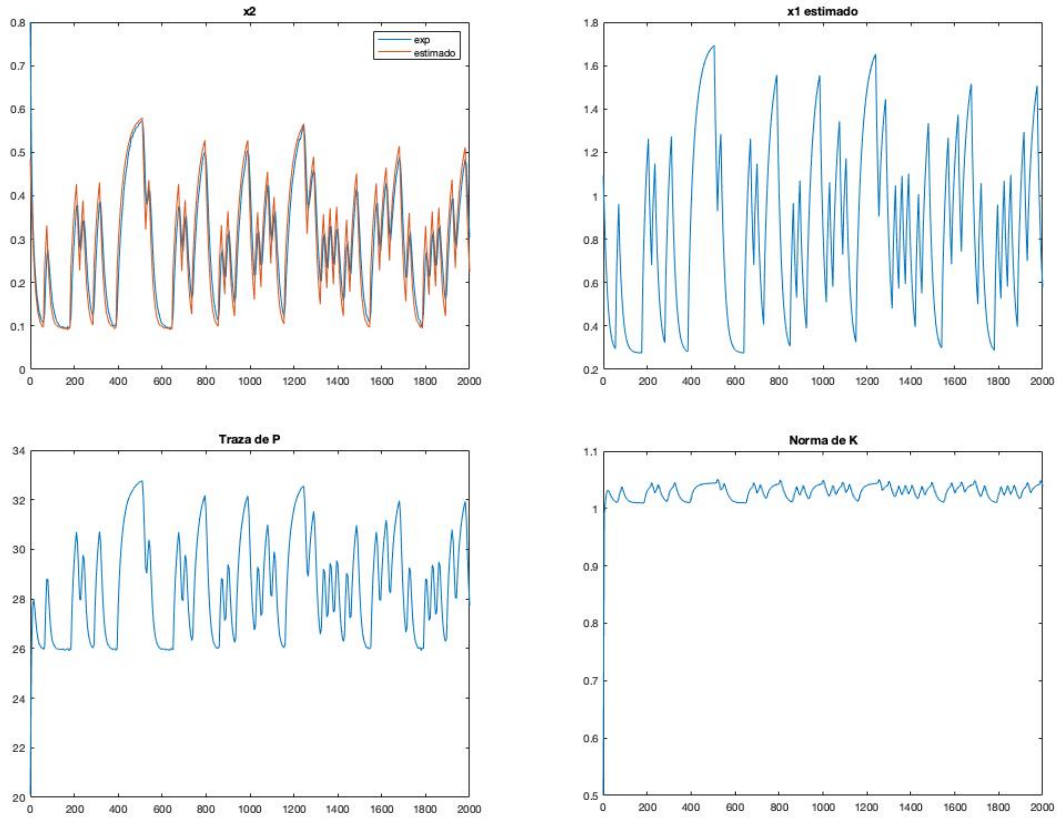


Figure 5: $\mathbf{Q} = 10\mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 0.1$

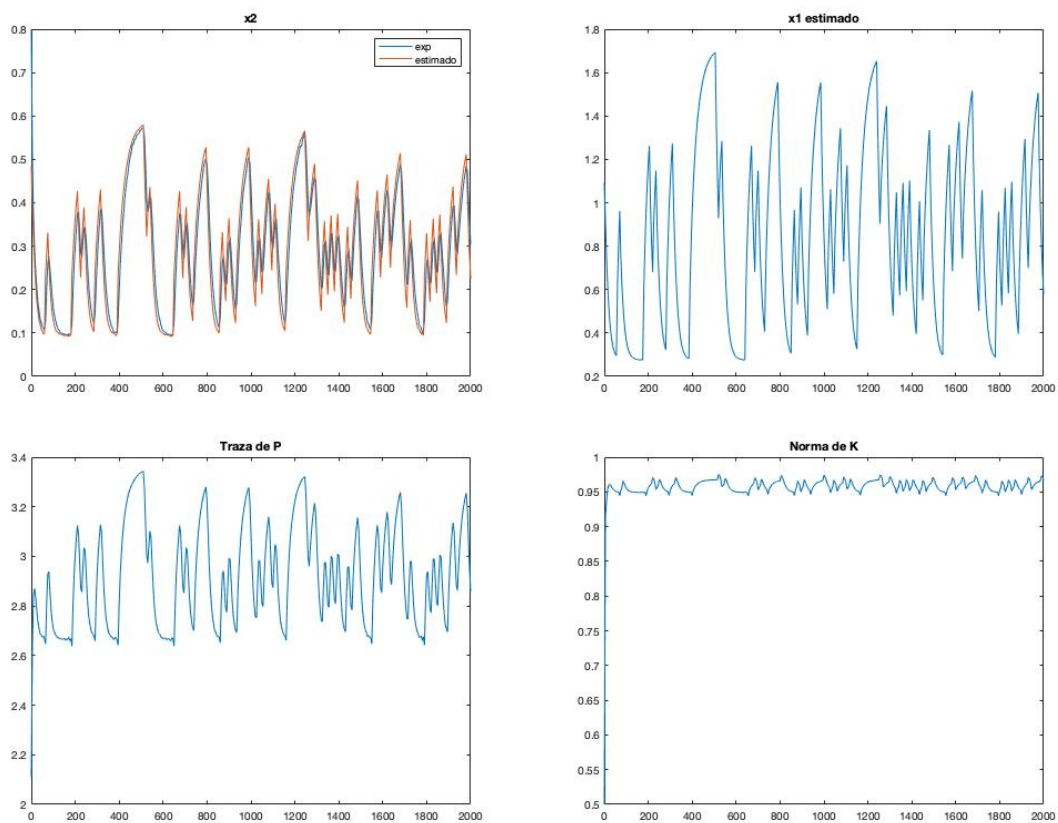


Figure 6: $\mathbf{Q} = \mathbf{1I}$ y $\mathbf{R} = 0.1$

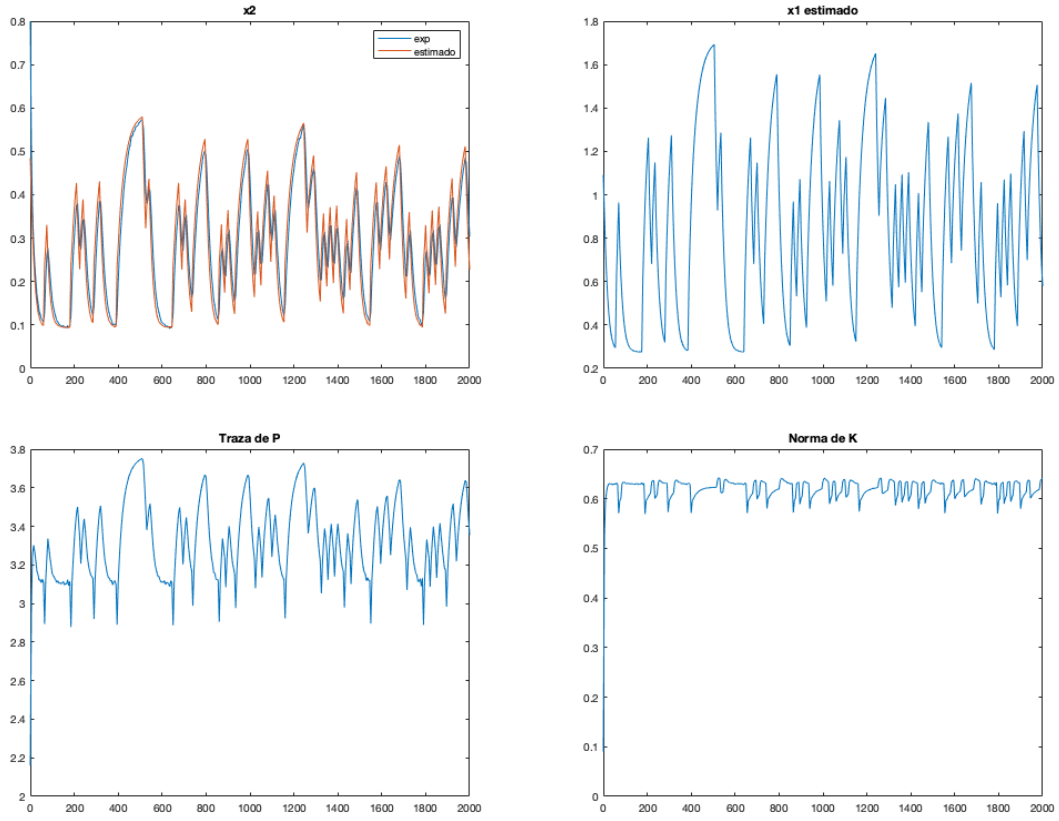


Figure 7: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 1$

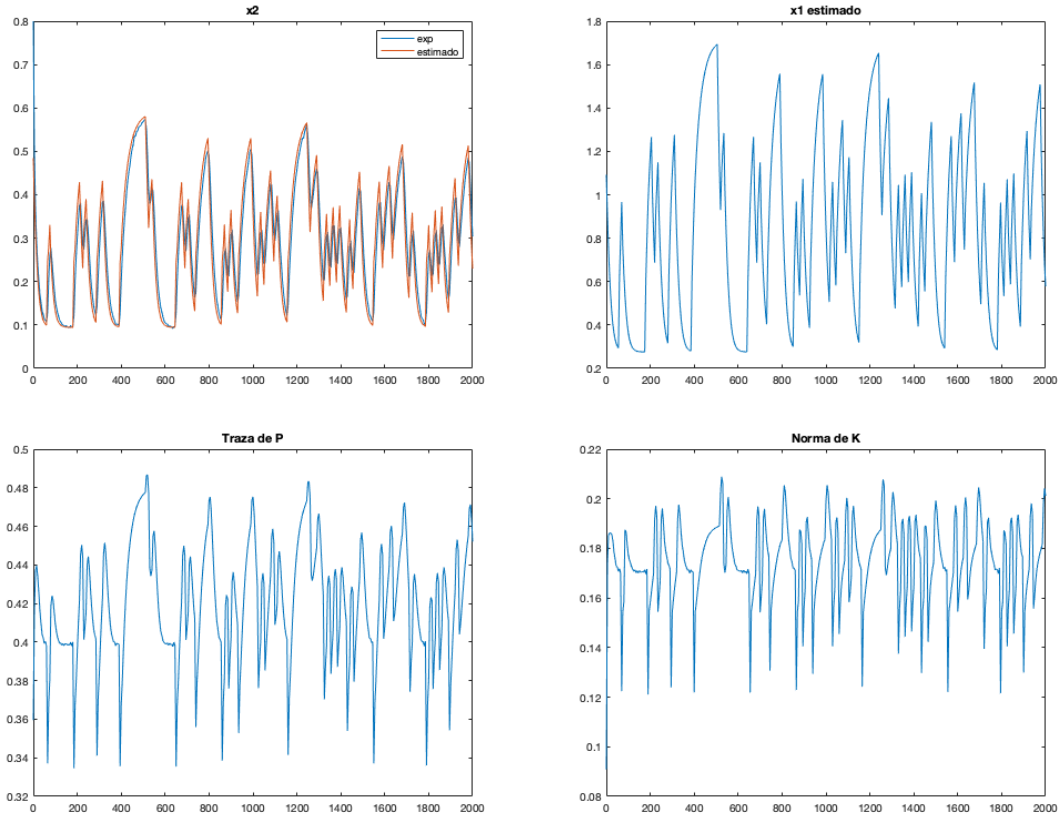


Figure 8: $\mathbf{Q} = 0.1\mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 1$

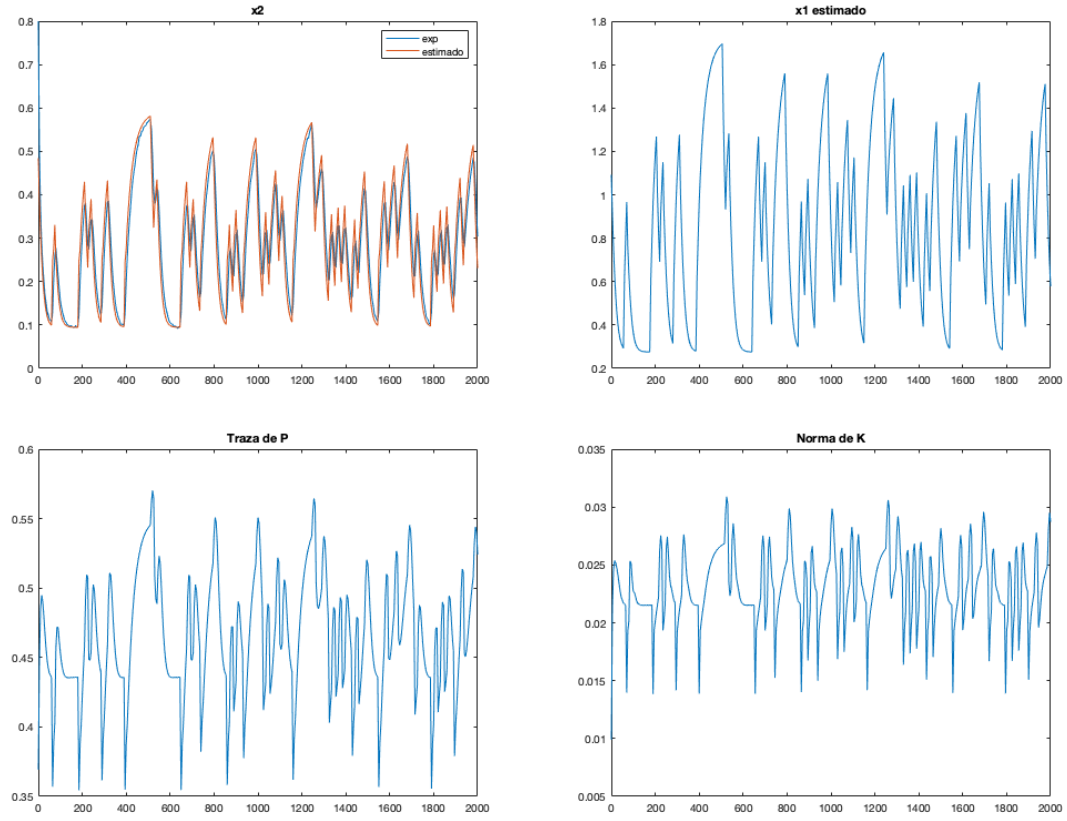


Figure 9: $\mathbf{Q} = 0.1\mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 10$

Para $\mathbf{Q} = 0.1\mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 10$ la estimación con intervalos de confianza está dada en las gráficas 10.

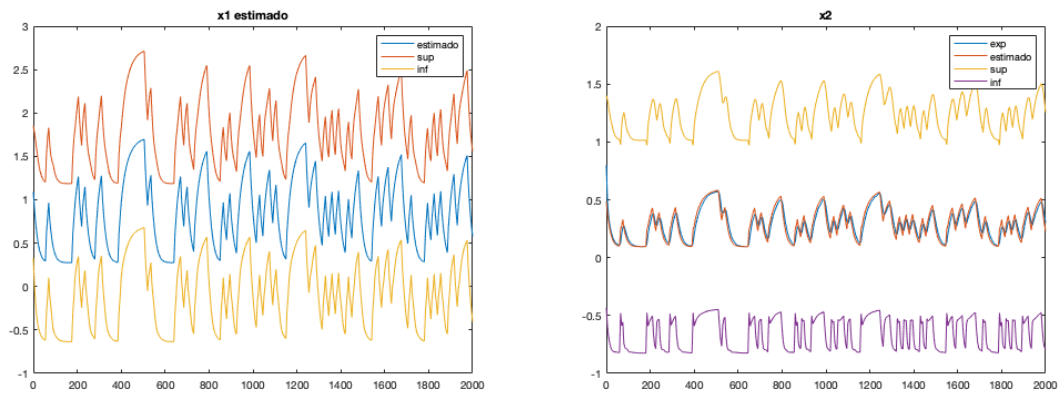


Figure 10: Estimación del estado con intervalos de confianza

La observabilidad en todas las iteraciones está en la figura 11.

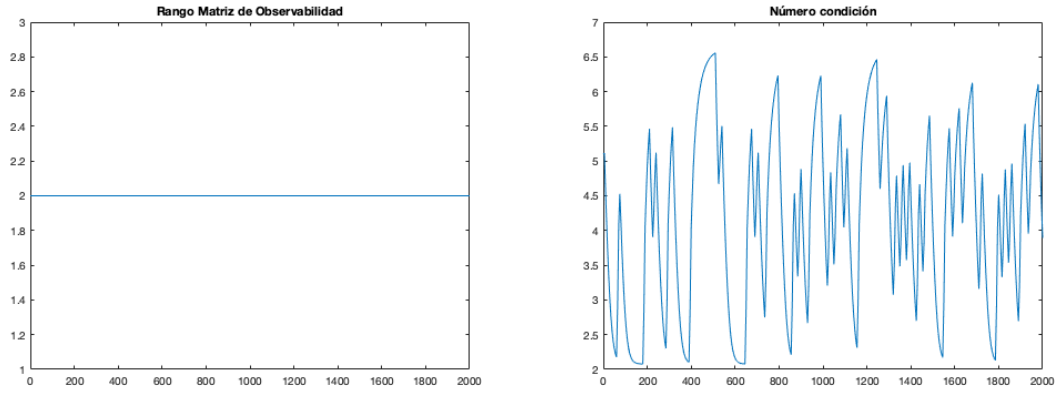


Figure 11: Observabilidad

Los residuos para el estado medido y estimado x_2 se encuentran en la figura 12.

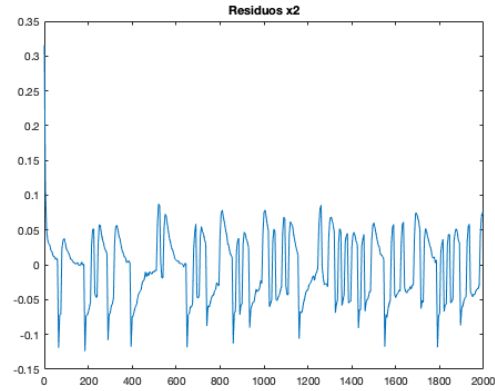


Figure 12: Residuos x_2

Se calculó el error cuadrático medio entre el x_2 estimado por el filtro y el medido y dio 0.0026.

3.1.2 Análisis de incertidumbre

Error de modelado del 10% con $Q = 0.1I$ y $R=10$

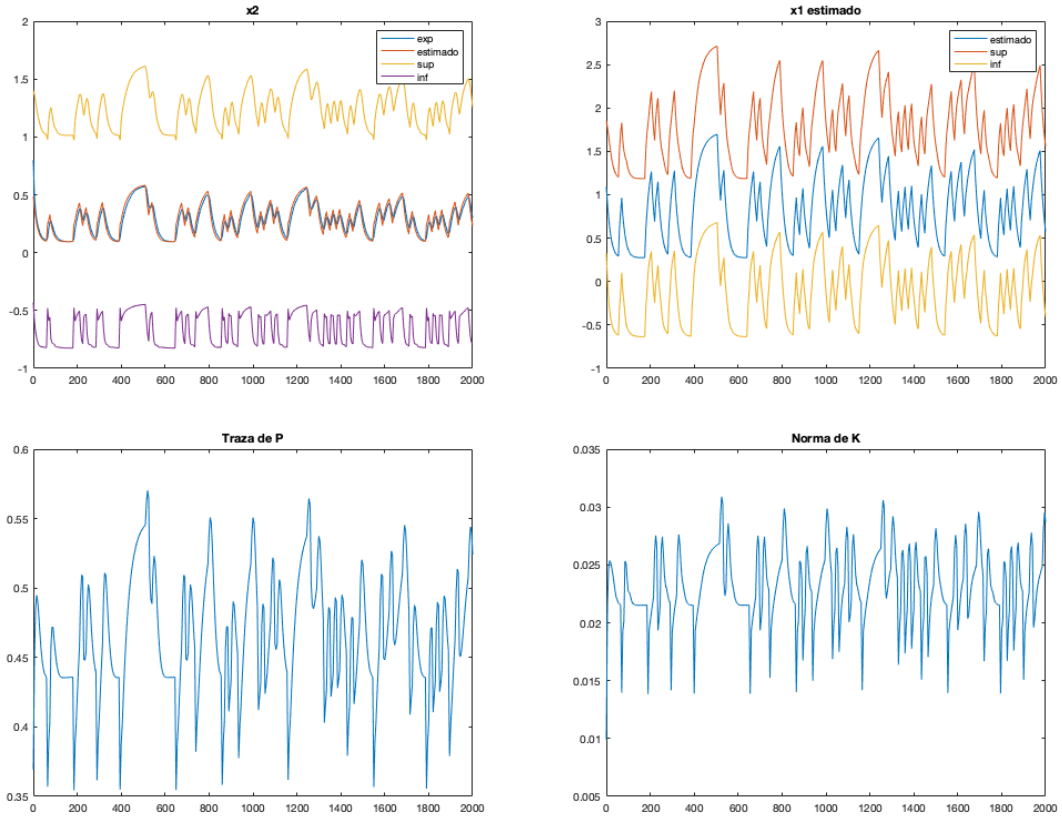


Figure 13: Incertidumbre del 10% en parámetros

Error de modelado del 20% con $Q = 0.1I$ y $R=10$

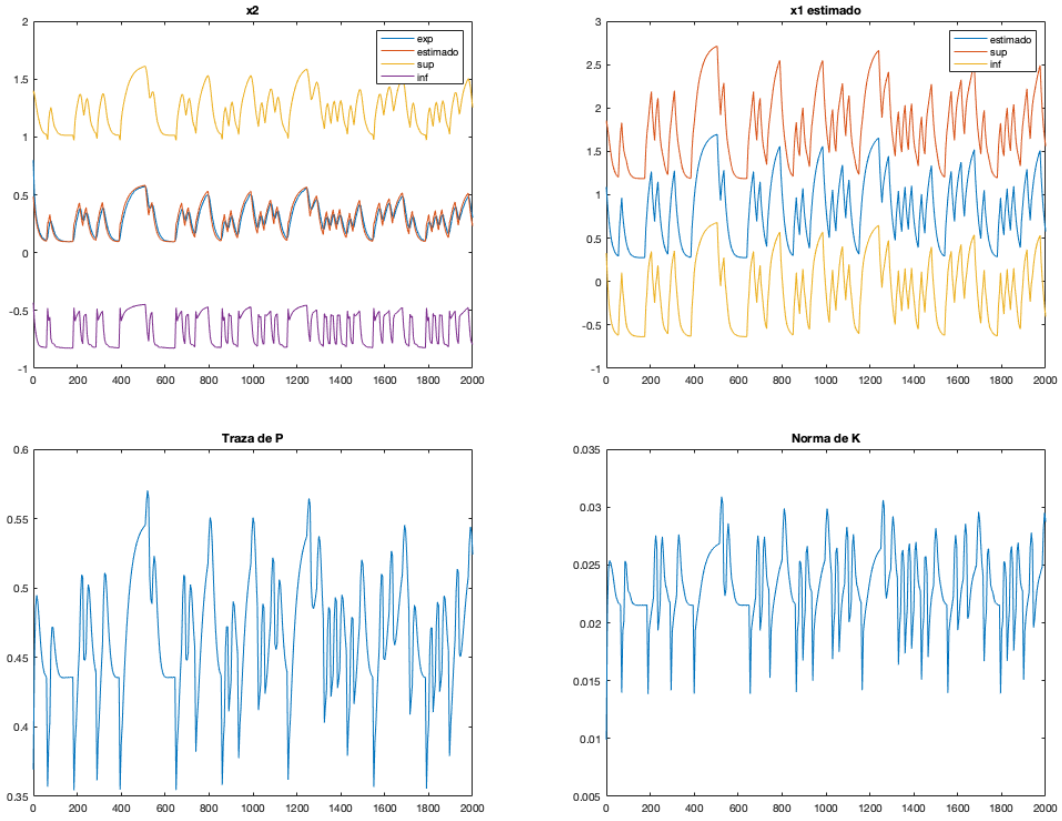


Figure 14: Incertidumbre del 20% en parámetros

Error de modelado del 50% con $Q = 0.1I$ y $R=10$

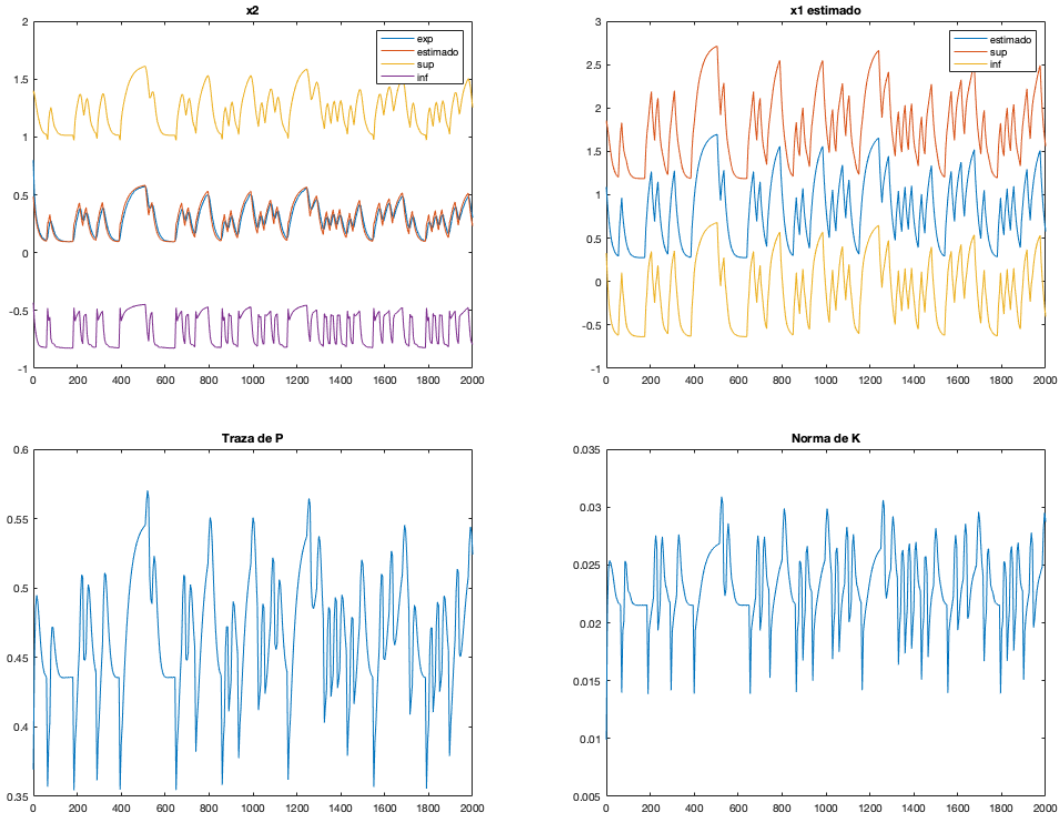


Figure 15: Incertidumbre del 50% en parámetros

3.2 Filtro de Kalman Extendido Dual

Con $\mathbf{x}_0 = [1.2 \ 0.8 \ 1]$, $\mathbf{P}_0 = 0.3\mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = 0.2\mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 1$, se obtuvo la estimación de los dos estados y el parámetro que se ve en las figuras 16.

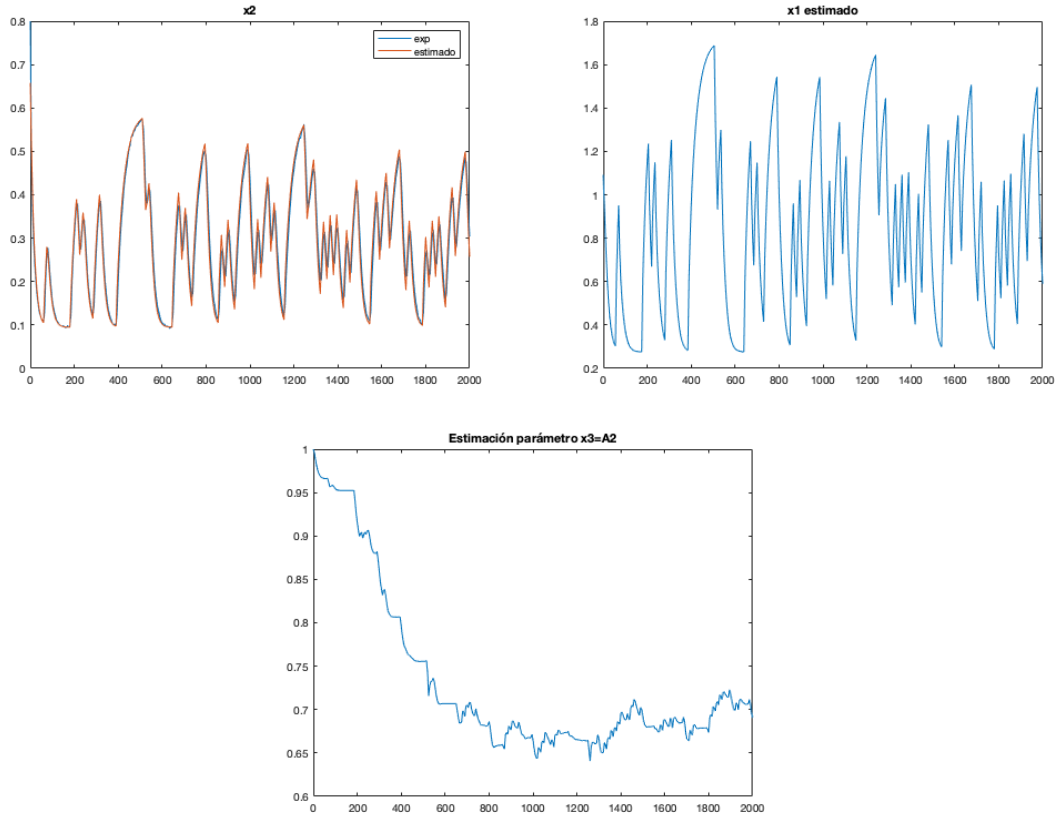


Figure 16: Estimación con filtro de Kalman extendido dual

La traza de \mathbf{P} y la norma de \mathbf{K} se muestran en la figura 17.

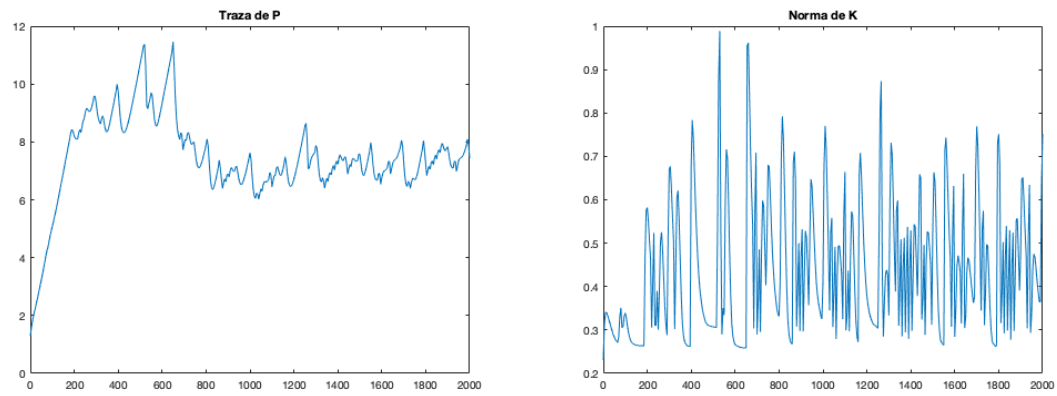


Figure 17: Matriz \mathbf{K} y \mathbf{P} de la estimación

En la figura 18, el rango y el número de condición de la matriz de observabilidad.

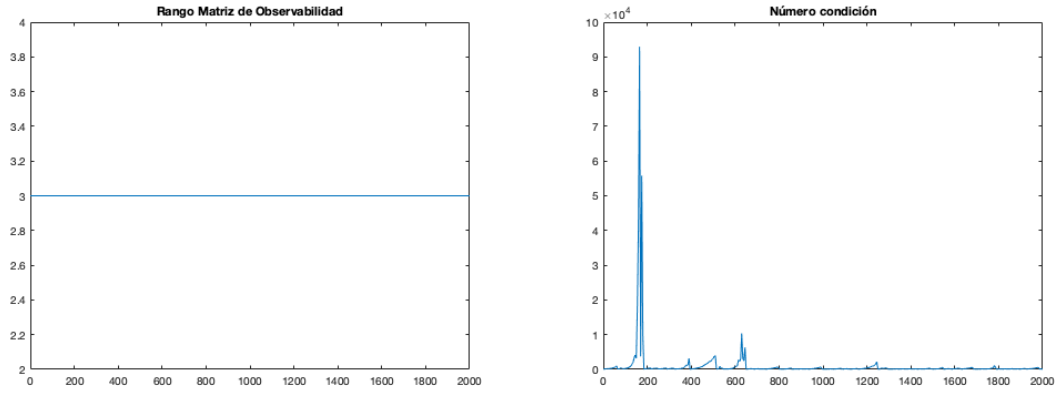


Figure 18: Observabilidad

En la figura 19, los residuos de x_2 estimado con el filtro y los valores experimentales. El error cuadrático medio al comparar x_2 estimado con experimental es 8.0487e-04.

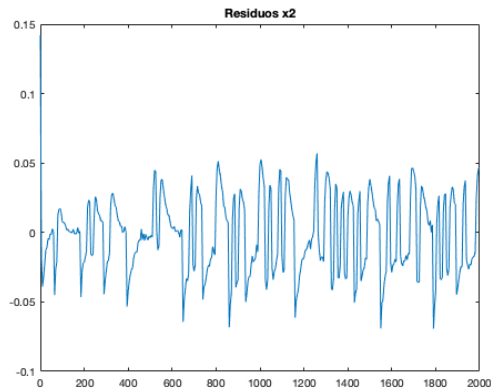


Figure 19: Residuos de x_2

En la figura 20, la estimación de los estados y el parámetro con sus respectivos intervalos de confianza.

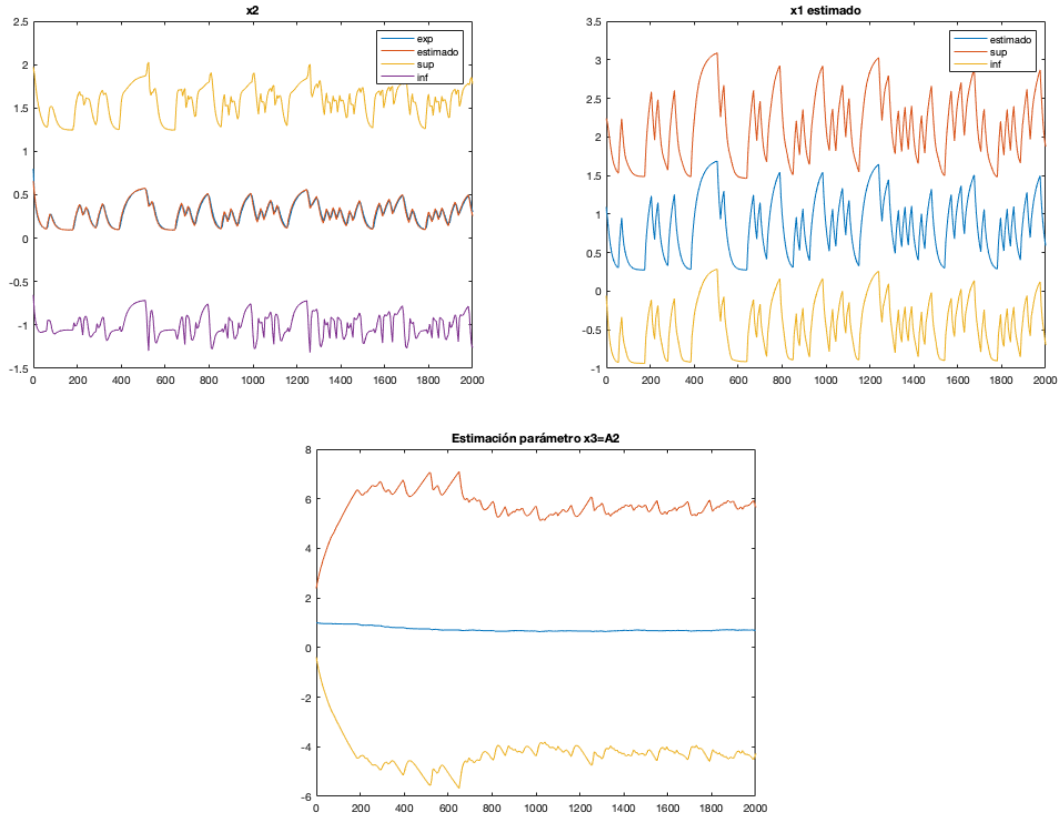


Figure 20: Estimación con filtro de Kalman extendido dual con intervalos de confianza

3.2.1 Análisis de incertidumbre del 10%

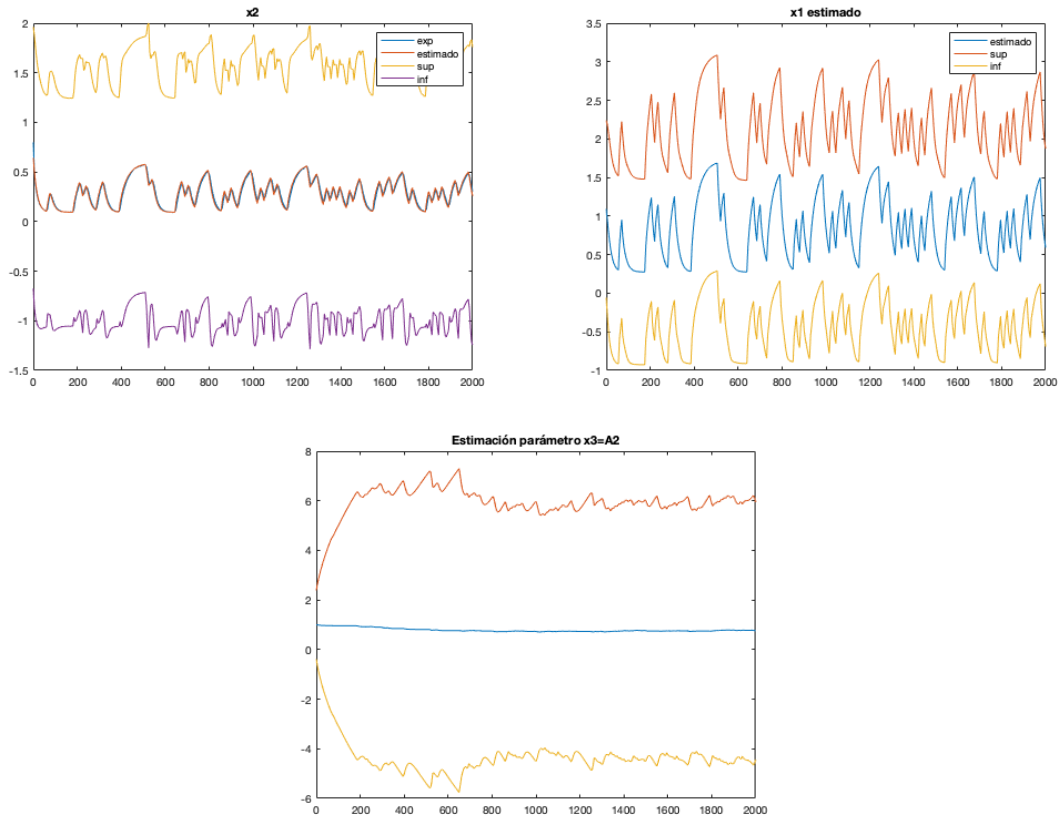


Figure 21: Estimación con filtro de Kalman extendido dual con error de modelado del 10%

La traza de \mathbf{P} y la norma de \mathbf{K} se muestran en la figura 22.

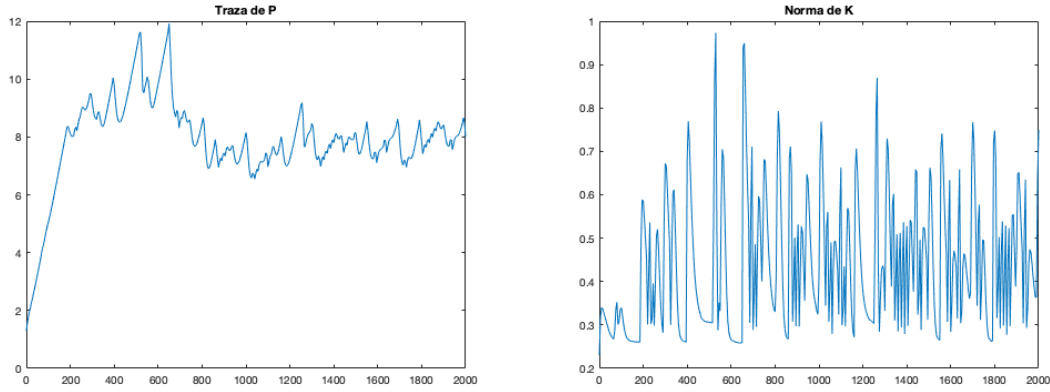


Figure 22: Matriz \mathbf{K} y \mathbf{P} de la estimación

4 Discusión

Se presentan cinco de las diferentes pruebas hechas con el filtro de Kalman extendido en lo que se refiere a las matrices \mathbf{R} y \mathbf{Q} en las figuras 5, 6, 7, 8 y 9. En todas la estimación de x_2 con respecto a los datos experimentales es muy similar, x_1 no cambia mucho entre pruebas, lo que da cuenta de la robustez del algoritmo. Lo más afectado con las variaciones son la traza de \mathbf{P} y la norma de \mathbf{K} , lo cual afecta los intervalos de confianza generados. En la figura 5, la norma de \mathbf{K} es bastante estable alrededor de 1.03. La traza de \mathbf{P} es mas fluctuante y no es un ruido blanco, está alrededor de 29. En la figura 6, la traza de \mathbf{P} esta alrededor de 3 y la norma de \mathbf{K} alrededor de 0.95. La reducción de \mathbf{Q} de 10 a 1, reduce la variabilidad. Luego el aumento de \mathbf{R} de 0.1 a 1 en 7 aumenta un poco \mathbf{P} y disminuye \mathbf{K} hasta 0.6 con poca variabilidad. \mathbf{P} es mas variable.

Para $\mathbf{Q}=0.1\mathbf{I}$ y $\mathbf{R}=10$, la traza de \mathbf{P} está en el rango (0.35,0.6), no tiene forma de ruido blanco, la norma de \mathbf{K} está entre (0.01,0.035), es un valor pequeño, hay poca corrección.

Los intervalos de confianza generados (figura 10) son bastante amplios, poco precisos, quizás sea necesario otro tipo de procedimiento. El sistema siempre fue observable y con los parámetros elegidos, el numero condición de la matriz de observabilidad es menor que 7.

Los residuos de x_2 no son un ruido blanco y están alrededor de -0.01, aunque se mantiene entre (-0.15, 0.1), excepto para el primer valor estimado que sube hasta 0.3. Se mantienen pequeños pero el hecho de que no sean un ruido blanco indican que la estimación no es muy confiable.

El análisis de incertidumbre afectó poco la estimación, lo que da cuenta de un algoritmo robusto.

En el caso del filtro dual, añadir un parámetro afecta la observabilidad, el numero condicion aumenta considerablemente pero el rango se mantuvo en 3, el parametro A_2 tiene dificultad para converger, quedando en aproximadamente 0.69 al final. La traza de \mathbf{P} y la norma de \mathbf{K} , varían bastante.

References

- [Côrtes et al., 2017] Côrtes, H., da Silva Filho, J., Blos, M., and B.S.Zanon (2017). Implementation of a paraconsistent-fuzzy digital PID controller in a level control process. *International Journal of Computer and Information Engineering*, 11:1122–1130.