Sistemi lineari

Matteo Cocciniglia

02/03/2022

1 matrici simmetriche

look at pag 167
Ricordando che:

- Una matrice quadrata A è simmetrica se $A = A^T$.
- Per memorizzare una matrice in modo ottimizzato è richiesto $\simeq \frac{n^2}{2}$ locazioni di memoria.

1.1 Teorema di fattorizzazzione di Gauss per matrici simmetriche

Se A è simmetrica e tutti i suoi minori principali sono diversi da zero, allora esistono una matrice triangolarte inferiore L una diagonale D con elementi $\neq 0$
tali che $A = LDL^T$

1.2 dimsotrazione

Sfruttando l'ipotesi che tutti i minori di A sono $\neq 0$ dai risultati del **teorema di fattorizzazzione di Gauss** si ottiene che $A = LU$ dove L è una matrice triangolare inferiore con diagonale unitaria e U matrice diagonale superiore.

Si definisce $D = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$,quindi si ha che $A = LDD^{-1}U$

dato che DD^{-1} è la matrice identità il risultato non è alterato.
Provare che $D^{-1}U \stackrel{?}{=} L^T$:
Sfruttando la simmetria della matrice $A = A^T$ si ottiene $A = (LDD^{-1}U)^T$. Quindi seguendo i passi algebrici $L^T D(D^{-1}U)^T \rightarrow LL^{-1}LDD^{-1}U = L^{-1}L^T D(D^{-1}U)^T$, ricordando che LL^{-1} è la matrice Identità si arriva alla seguente uaglianza $D(D^{-1}U)^T = L^T L^{-1}LDD^{-1}U$ inoltre semplificando L^T moltiplicandolo per la sua inversa si arriva al risultato finale $D(D^{-1}U)^T L^{T^{-1}} = L^{-1}DD^{-1}U$, notando

che $D(D^{-1}U)^T L^{T^{-1}}$ è una matrice triangolare superiore e che $L^{-1}DD^{-1}U$ è una triangolare inferiore si ha che tutti gli elementi non nella diagonale sono uguali a zero; quindi $D(D^{-1}U)^T L^{T^{-1}}$ è una matrice diagonale da qui otteniamo che $(D^{-1}U)^T L^{T^{-1}}$ è anchessa una diagonale e sicuramente anche unitaria dato il risultato appena ottenuto. Quindi possiamo concludere che $D(D^{-1}U)^T L^{T^{-1}} = I \rightarrow D(D^{-1}U)^T = L^{T^{-1}} = L^T$