Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

Finite Element Method (FEM)

- Até agora, estudamos o método das diferenças finitas (FEM) para resolver problemas de valor de contorno.

- Nesta aula, estudaremos os fundamentos do método Galerkin e do método dos elementos finitos.

- Vamos começar com o seguinte problema de teste.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

- Vamos supor que podemos aproximar a solução exata como

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x)$$

Finite Element Method (FEM)

- $$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

- Vamos supor que podemos aproximar a solução exata como

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x)$$

- Aqui, $\phi_j(x)$ são chamados funções base e c_j são coeficientes.

- Nós adivinhamos (educado) para funções $\phi_j(x)$. Portanto, nós os conhecemos.

- O problema é encontrar c_j, para que $u_h(x)$ seja uma boa aproximação.

Finite Element Method (FEM)

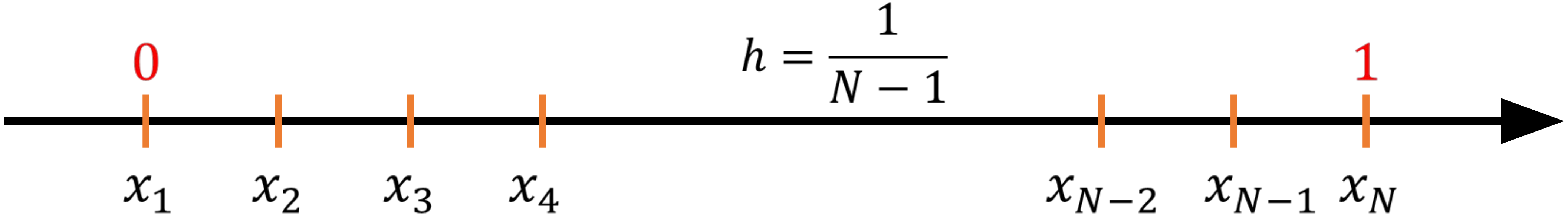
- Vamos supor que podemos aproximar a solução exata como

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x)$$

- Assumimos que as funções de base satisfazem as condições de contorno:

$$\phi_j(0) = 0, \qquad \phi_j(1) = 0, \qquad j = 1, \dots, N$$

- Podemos assumir a grade como abaixo



Finite Element Method (FEM)

- $$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad\qquad u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x)$$

- Como $u_h(x)$ é uma aproximação para $u(x)$, então, se inserimos no problema BVP, obtemos um resíduo como

$$r(x) = \frac{d^2u_h}{dx^2} + f(x) \neq 0$$

- Queremos que a função residual seja pequena.

- Preste atenção se $r(x) \equiv 0$ para todo x no intervalo $0 < x < 1$, então $u_h(x)$ é a solução exata do problema.

Finite Element Method (FEM)

- $$r(x) = \frac{d^2 u_h}{dx^2} + f(x) \neq 0$$
- Queremos que a função residual seja pequena.
- É claro que não podemos esperar que $u_h(x)$ seja exato no caso geral. Resíduo pequeno pode ser alcançado de várias maneiras, como

1. $r(x_i) = 0, i = 1, \dots, N$. O residual é zero nos pontos da grade. Isso é chamado de método de colocação.
2. $r(x)$ é ortogonal a $\phi_i(x)$, isto é

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)dx = 0, \qquad i = 1, \dots, N$$

Finite Element Method (FEM)

- $$r(x) = \frac{d^2 u_h}{dx^2} + f(x) \neq 0$$

2. $r(x)$ é ortogonal a $\phi_i(x)$, isto é

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)dx = 0, \qquad i = 1, \dots, N$$

- Isso é chamado método de Galerkin.
- O que isso significa?

Finite Element Method (FEM)

- $$r(x) = \frac{d^2 u_h}{dx^2} + f(x) \neq 0, \qquad u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x)$$

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)dx = 0, \qquad i = 1, \dots, N$$

- Agora temos

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} + f(x) \right] \phi_i(x)dx = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \int_0^1 \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \phi_i(x)dx + \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = 0$$

Finite Element Method (FEM)

- $$\sum_{j=1}^{N} c_j \int_0^1 \frac{d^2\phi_j}{dx^2}\phi_i dx + \int_0^1 f(x)\phi_i dx = 0$$
- Agora, usando integração parte por parte, para o primeiro termo, teremos

$$\int_0^1 \frac{d^2\phi_j}{dx^2}\phi_i dx = \left[\frac{d\phi_j}{dx}\phi_i\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- Usando as condições de contorno, finalmente temos

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx = \int_0^1 f(x)\phi_i dx$$

Finite Element Method (FEM)

- Usando as condições de contorno, finalmente temos

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx = \int_0^1 f(x)\phi_i dx$$

- Preste atenção que este é um sistema linear como

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}$$

$$f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i dx \qquad\qquad A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- A matriz A é $N \times N$, simétrica e positiva definida.
- Mas ainda não podemos dizer nada sobre a esparsidade da A.

Finite Element Method (FEM)

- $$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}, \qquad f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i dx\,, \qquad A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$
- Vamos supor que a função base seja um polinômio como

$$\phi_j(x) = x^j(x-1)$$

- é fácil verificar $\phi_j(0) = \phi_j(1) = 0, j = 1, \dots, N$. Também temos

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx = \int_0^1 [(1+j)x^j - jx^{j-1}][(1+i)x^i - ix^{i-1}]dx$$

$$A_{ij} = \left[\frac{(1+i)(1+j)}{j+i+1}x^{i+j+1} - \frac{i+j+2ij}{i+j}x^{i+j} + \frac{ij}{i+j-1}x^{i+j-1}\right]_0^1$$

Finite Element Method (FEM)

- $$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}, \qquad f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i dx\,, \qquad A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- Vamos supor que a função base seja um polinômio como

$$\phi_j(x) = x^j(x-1)$$

$$A_{ij} = \left[\frac{(1+i)(1+j)}{j+i+1}x^{i+j+1} - \frac{i+j+2ij}{i+j}x^{i+j} + \frac{ij}{i+j-1}x^{i+j-1}\right]_0^1$$

- É fácil verificar se a matriz A é uma matriz completa (a maioria dos elementos $A_{ij} \neq 0$).

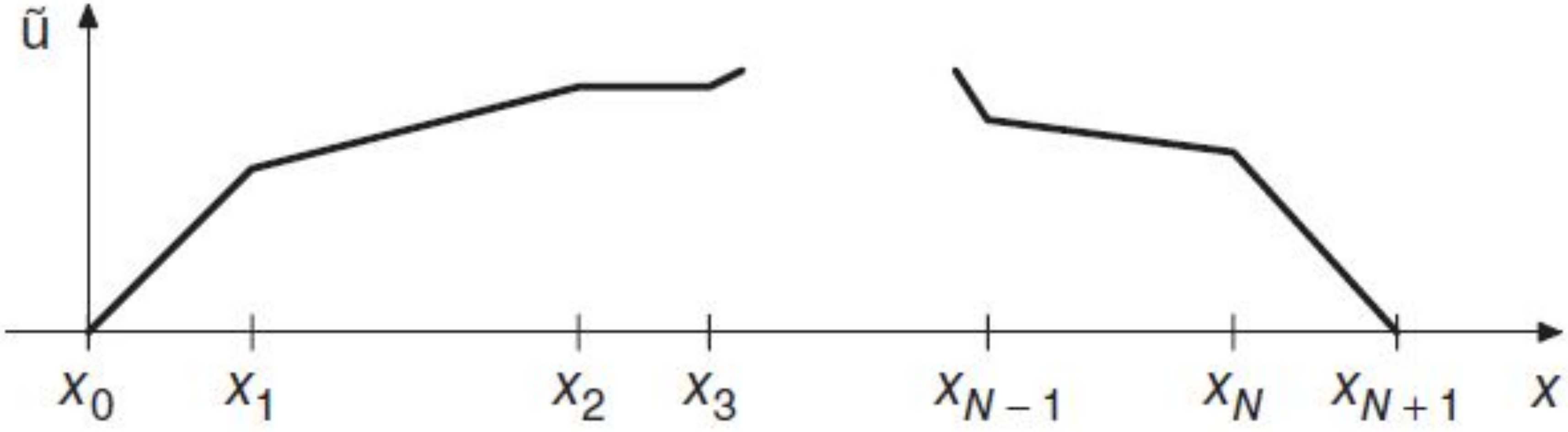
- Para lembrar, o método FEM resultou em uma matriz tridiagonal que foi mais fácil de resolver e salvar.

Finite Element Method (FEM)

- Vamos tentar encontrar algo semelhante para o FEM. Suponha que estamos procurando uma solução como a mostrada abaixo.

- Queremos que $u_h(x)$ seja polinomial por partes de grau um. Esta função é uma coleção de linhas retas de maneira contínua nos nós.

- Aqui podemos ter espaçamento constante $h = \frac{1}{N+1}$ ou variável como $\sum_{i=0}^{N} h_i = 1$.



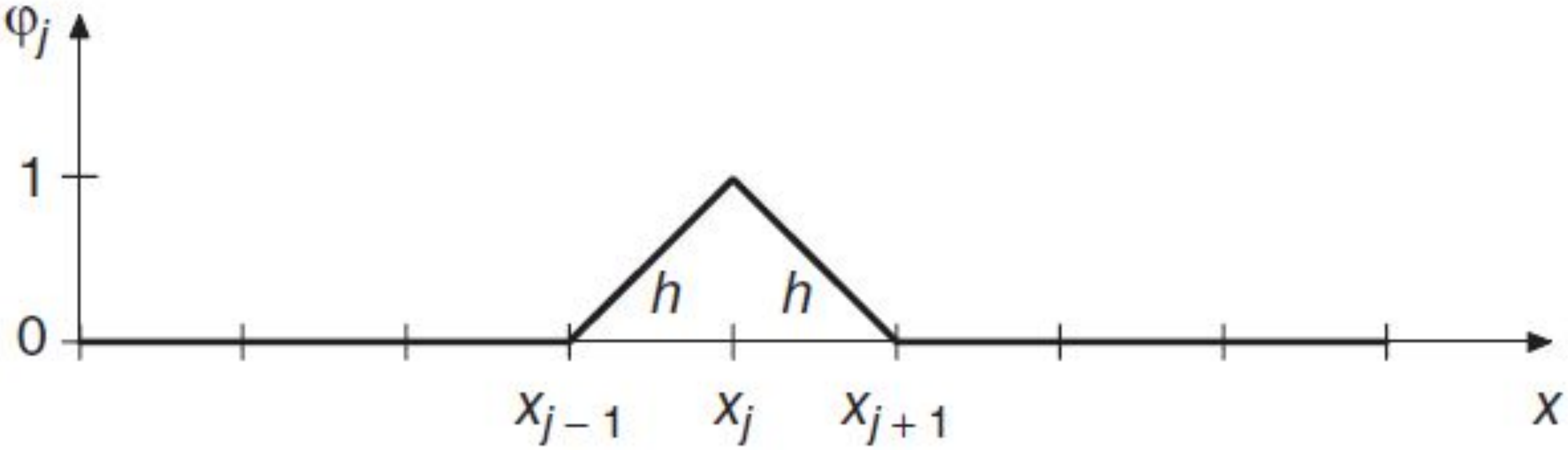
Finite Element Method (FEM)

- Para esta solução, é fácil mostrar que as funções básicas (ϕ_j) também são polinômios (linear) por partes.

- É comum assumir $c_j = u_h(x_j)$, portanto ϕ_j deve cumprir

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}$$

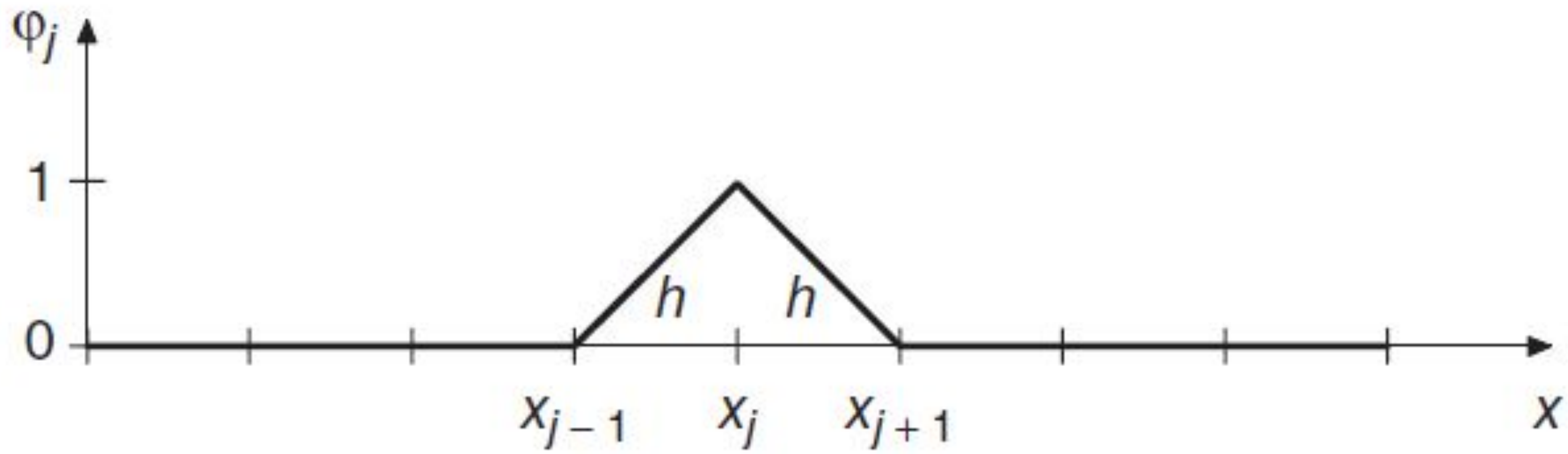
- Portanto, a função base (ϕ_j) é como o seguinte gráfico



Finite Element Method (FEM)

- Ou nós podemos escrever

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



Finite Element Method (FEM)

- Ou nós podemos escrever

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases} \rightarrow \frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} \left(x_j - x_{j-1}\right)^{-1}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ -\left(x_{j+1} - x_j\right)^{-1}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- Para o primeiro e último nós também temos

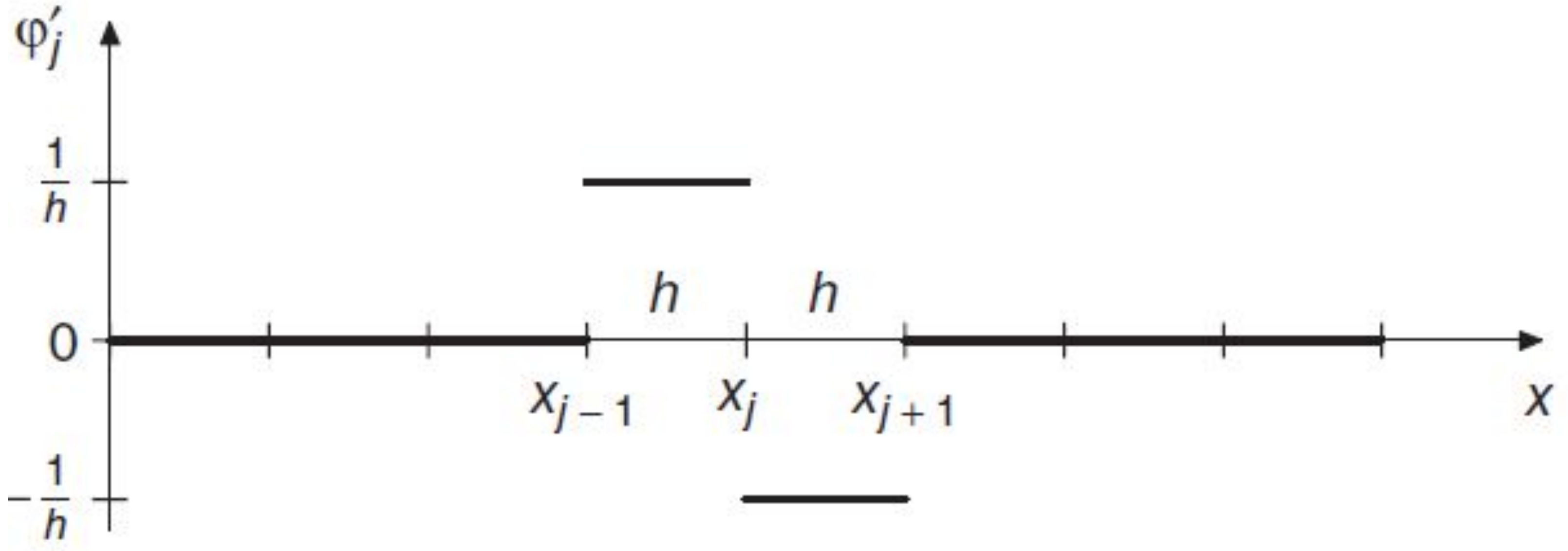
$$\phi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2 - x}{x_2 - 0}, & 0 = x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & otherwise \end{cases} \rightarrow \frac{d\phi_1}{dx} = \begin{cases} -(x_2 - 0)^{-1}, & 0 \leq x \leq x_2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\phi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{1 - x_{N-1}}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \rightarrow \frac{d\phi_N}{dx} = \begin{cases} (1 - x_{N-1})^{-1}, & x_{N-1} \leq x \leq 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Finite Element Method (FEM)

- Agora considere a grade de espaçamento igual ($x_{j+1} - x_j = h$).
- Então a derivada da função base será como a figura a seguir

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} h^{-1}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ -h^{-1}, & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



Finite Element Method (FEM)

- $$\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} h^{-1}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ -h^{-1}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- Lembre-se que queríamos calcular a matriz A.

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- Nós temos quatro situações ($i = j, i - 1 = j, i + 1 = j, rest$).

- A última situação resulta em $A_{ij} = 0$. Oorque o intervalo de valores diferentes de zero de ϕ_j não é nenhuma união com ϕ_i.

Finite Element Method (FEM)

- $$\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} h^{-1}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ -h^{-1}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- Para o caso $i = j$, temos

$$A_{ii} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$
$$= \int_0^{x_{i-1}} 0 \times 0dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{-1} \times h^{-1}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-h^{-1}) \times (-h^{-1})dx$$
$$+ \int_{x_{i+1}}^1 0 \times 0dx = \frac{2}{h}$$

Finite Element Method (FEM)

- $$\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} h^{-1}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ -h^{-1}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad A_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

- Para o caso $j = i - 1$, temos

$$A_{i-1,i} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_{i-1}}{dx}dx$$
$$= \int_0^{x_{i-1}} 0 \times \frac{d\phi_{i-1}}{dx}dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{-1} \times (-h^{-1})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-h^{-1}) \times 0dx$$
$$+ \int_{x_{i+1}}^1 0 \times 0dx = -\frac{1}{h}$$

Finite Element Method (FEM)

- O mesmo é para o caso $j = i + 1$. Portanto nós temos

$$A_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{h}, & j = i - 1 \; or \; j = i + 1 \\ \frac{2}{h}, & i = j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finite Element Method (FEM)

- $$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Além do fator $\frac{1}{h}$, essa matriz é igual à matriz que obtivemos no método FD.

- Agora vamos encontrar o vetor $\boldsymbol{f}$ ($A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}$).

$$f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i dx = \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)\phi_i dx$$

- Para calcular isso, podemos usar o método trapezoidal.

Finite Element Method (FEM)

- $$f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i dx = \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)\phi_i dx$$

- Para calcular isso, podemos usar o método trapezoidal.

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)\phi_i dx \approx \frac{f(x_i-h)\phi_i(x_i-h) + f(x_i)\phi_i(x_i)}{2}h + \frac{f(x_i)\phi_i(x_i) + f(x_i+h)\phi_i(x_i+h)}{2}h = hf(x_i)$$

- É óbvio que o sistema resultante é o mesmo que o método FD.

Finite Element Method (FEM)

- Podemos usar funções de base de ordem superior. Por exemplo, o polinômio de terceira ordem por partes será assim.

$$\phi_j(x) = \begin{cases} g_1\big(\xi_{j-1}(x)\big), & x_{j-1} \le x \le x_j \\ g_1\big(1 - \xi_j(x)\big), & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} h_{j-1} g_2\big(\xi_{j-1}(x)\big), & x_{j-1} \le x \le x_j \\ -h_j g_2\big(1 - \xi_j(x)\big), & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \qquad \xi_j(x) = \frac{x - x_j}{h_j}, \qquad g_1(x) = -2x^3 + 3x^2, \qquad g_2(x) = x^3 - x^2$$

Exercícios

- Repita todo o passo do case FEM linear para a função de base cúbica. Encontre a matriz A e vetor f. Resolva o exemplo 4.8 do livro com este método.