Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferencias

2020-PLE

Equação de Calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

- Nós temos tudo para resolver esse problema.
- Podemos usar a diferença central para o derivado espacial.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T^n_{i+1,j} - 2T^n_{i,j} + T^n_{i-1,j}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T^n_{i,j+1} - 2T^n_{i,j} + T^n_{i,j-1}}{h_y^2}$$

Equação de Calor

- E podemos usar o método de Euler avançado para a derivada de tempo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{h_t}$$

- Aqui T_i^n significa $T_{i,j}^n = T(x = x_i\,, y = y_j\,, t = t_n)$
- Portanto, temos

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{h_t} = \alpha \left[\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right]$$

Equação de Calor

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{h_t} = \alpha \left[\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right]$$

$$T_{i,j}^{n+1} = \sigma_x T_{i+1,j}^n + \sigma_x T_{i-1,j}^n + \sigma_y T_{i,j+1}^n + \sigma_y T_{i,j-1}^n$$
$$+ (1 - 2\sigma_x - 2\sigma_y) T_{i,j}^n$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha h_t}{h_x^2} \qquad \sigma_y = \frac{\alpha h_t}{h_y^2}$$

Equação de Calor

- Preste atenção, esta solução é explícita. Se tivermos condições iniciais e de contorno, podemos encontrar a temperatura a qualquer momento.

$$T_{i,j}^{n+1} = \sigma_x T_{i+1,j}^{n} + \sigma_x T_{i-1,j}^{n} + \sigma_y T_{i,j+1}^{n} + \sigma_y T_{i,j-1}^{n}$$
$$+(1 - 2\sigma_x - 2\sigma_y)T_{i,j}^{n}$$

$$T(x, y, t = 0) = T_0(x, y)$$

Equação de Calor

- Vamos continuar as equações parabólicas com um problema 2d.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < t_e nd$$

$$\kappa = \kappa(x, y) > 0, \quad \rho c_p = \rho c_p(x, y) > 0$$

$$T(0, y, t) = 200, \quad T(2, y, t) = 200,$$

$$T(x, 0, t) = 200, \quad T(x, 1, t) = 200$$

Equação de Calor

- Apenas por simplicidade, assumimos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\alpha(x, y) = \frac{\kappa}{\rho c_p}$$

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < t_end$$

$$T(0, y, t) = 200, \quad T(2, y, t) = 200,$$

$$T(x, 0, t) = 200, \quad T(x, 1, t) = 200$$

Equação de Calor

- Suponha que a temperatura inicial seja de 200 (K) em todo lugar, a menos que dentro de dois círculos centrados em (0.5,0.5) e (1.5,0.5), com raio 0.2, onde a temperatura é 400 (K).
- Suponha que alpha = 15.0e-4 (m2/s) e resolva até 2.6 (s).

- Em seguida, escreva seu nome com uma temperatura mais alta e resolva o problema.

Exemplo (Capítulo 6)

- Queremos resolver a equação do calor, na presença da condição de contorno radiativo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x=0,t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(1) = \beta(T^4(1) - T^4_{out})$$

$$T(x,0) = 0$$

$$\alpha = 1.0e-6, \quad \beta = 5.6e-5, h_t = \frac{h_x^2}{8\kappa}$$

Exercício: Resolva esse problema com o método Crank-Nicolson.

Classificação de equações diferenciais parciais

- Nós temos três tipos de EDOs: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.
- Considere a equação linear geral de segunda ordem

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x,y)$$

- Nós chamamos
  - elípticas $\quad if \quad b^2 - ac < 0$
  - parabólicas $\quad if \quad b^2 - ac = 0$
  - hiperbólicas $\quad if \quad b^2 - ac > 0$

Classificação de equações diferenciais parciais

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x, y)$$

$$if \quad b^2 - ac < 0$$

- Como as curvas elípticas na geometria analítica, a solução das equações elípticas é suave. A solução não pode ter derivados descontínuos em qualquer lugar.
- Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Classificação de equações diferenciais parciais

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x,y)$$

$$if \quad b^2 - ac = 0$$

- Como as curvas parabólicas na geometria analítica, A solução é suave, mas pode explodir a tempo.
- Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Classificação de equações diferenciais parciais

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x,y)$$

$$if \quad b^2 - ac > 0$$

- Como as curvas hiperbólicas na geometria analítica, a solução tem dois ramos e pode pular de um para outro (choque/descontinuidade). Mas a solução em cada filial é suave.
- Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(wave equation)

Classificação de equações diferenciais parciais

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x,y)$$

- Quando os coeficientes (a,b,c,d,...) não são constantes, o tipo da equação pode depender das variáveis independentes. Por exemplo, para a equação de Euler-Tricomi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- temos
  - elíptica: $if \quad b^2 - ac = x < 0$
  - hiperbólica: $if \quad b^2 - ac = x > 0$

Classificação de equações diferenciais parciais

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + eu = f(x,y)$$

- Outro exemplo é a equação de Prandtl-Glauert, que descreve o fluxo invíscido compressível sobre um aerofólio fino.

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$M_\infty = \frac{V}{C}$$ (Mach number)

Classificação de equações diferenciais parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- A equação de onda pode ser escrita como um sistema de primeira ordem.

$$y_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad y_2 = c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = 0 \qquad\qquad A = -c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se a matriz A é real e diagonalizável com autovalores reais, então o sistema se torna hiperbólico.