Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

Exemplo 1

- Resolva as equaçoes,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.02\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Com condições inicias

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 150$$

1. Solução analítica
2. Método de Euler avançado
3. Método de Euler atrasado

Exemplo 1

1. Solução analítica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 75\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 75\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

2. Método de Euler avançado

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_n \end{bmatrix} + 0.02h.\begin{bmatrix} -u_n + v_n \\ u_n - v_n \end{bmatrix}$$

3. Método de Euler atrasado

$$u_{n+1} = \frac{(1 + 0.02h)u_n + (0.02h)v_n}{1 + 0.04h} \qquad v_{n+1} = \frac{(0.02h)u_n + (1 + 0.02h)v_n}{1 + 0.04h}$$

Exemplo 2

- Vamos resolver a equação de Van der pol,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \epsilon(u^2 - 1)\frac{du}{dt} + u = 0$$

- É um modelo para um sistema vibratório, com amortecimento não linear.

- Podemos decompor em duas equações de primeira ordem.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\epsilon(u^2 - 1)v - u \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\epsilon(u^2 - 1)v - u \end{bmatrix}$$

- Use o método de Euler avançado para resolver este sistema.

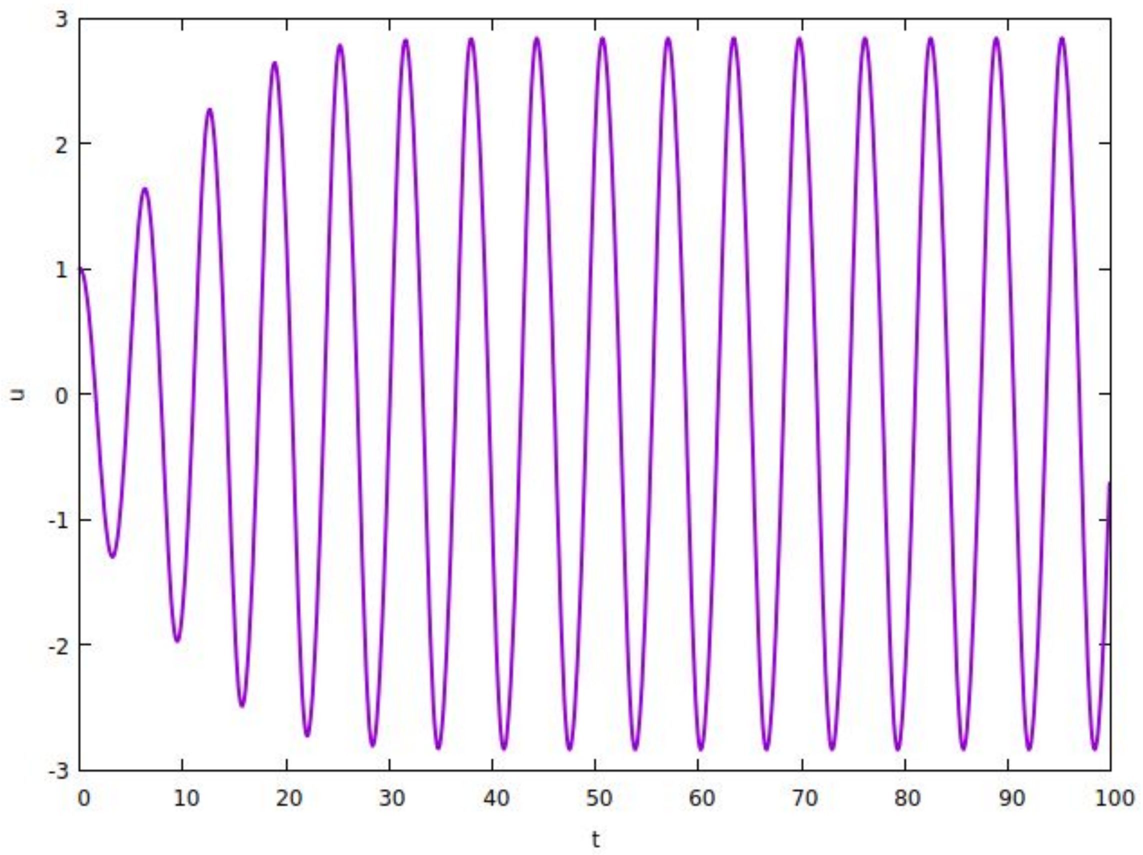
$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_n \\ -\epsilon(u_n^2 - 1)v_n - u_n \end{bmatrix}$$

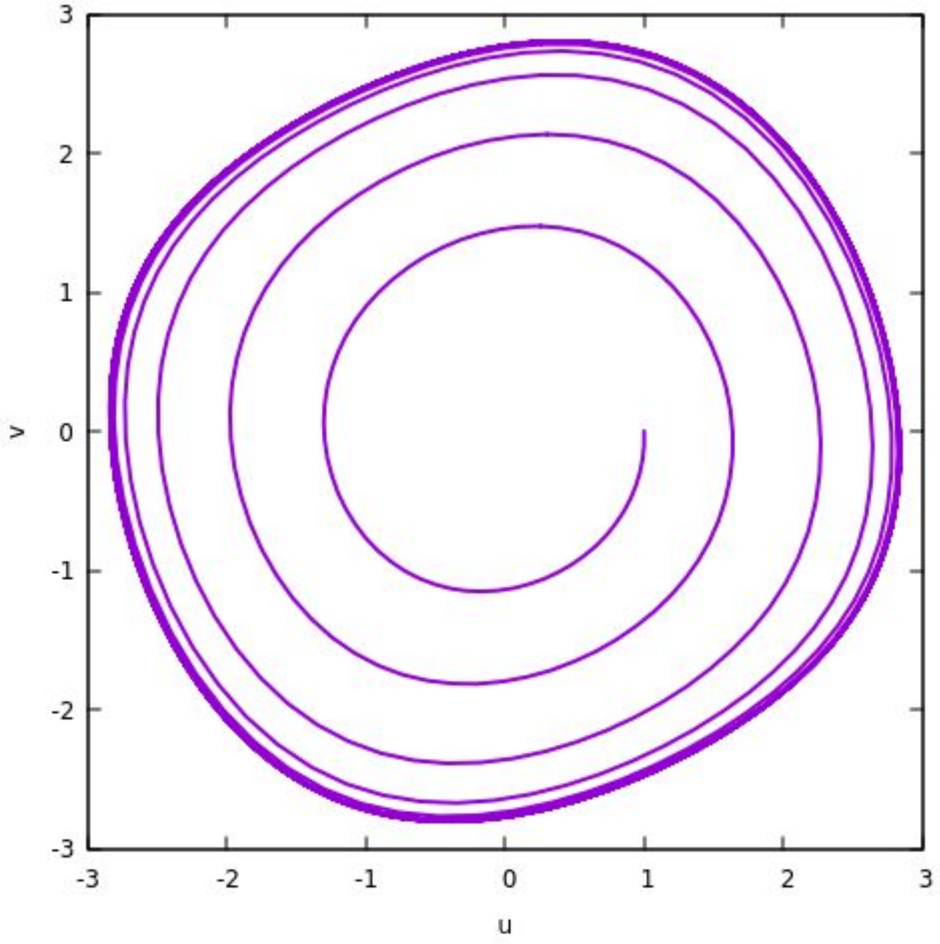
  com condições iniciais $u(0) = 1, v(0) = 0$.

- use $h = 0.1$ e resolva para $\epsilon = 0.1, 1.0, 10$.

Exemplo 2

- Você deve obter isso para $\epsilon = 0.1$ $(h = 0.1)$.

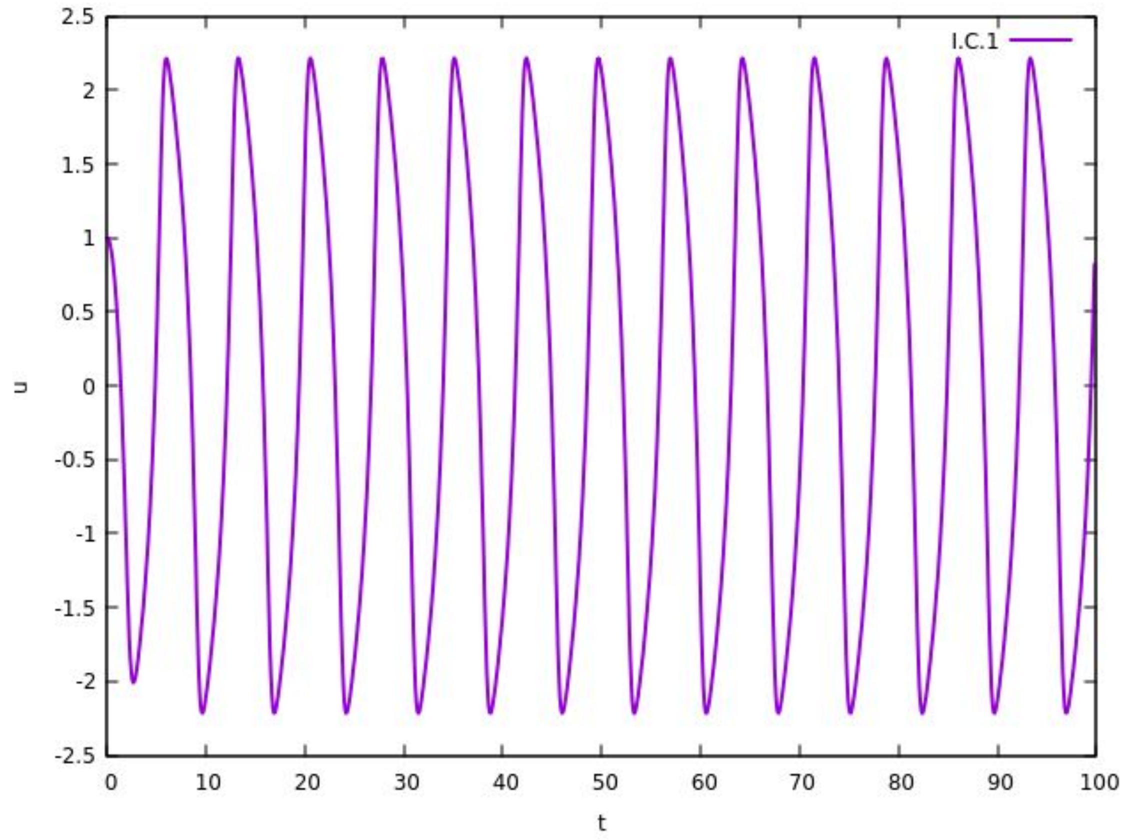


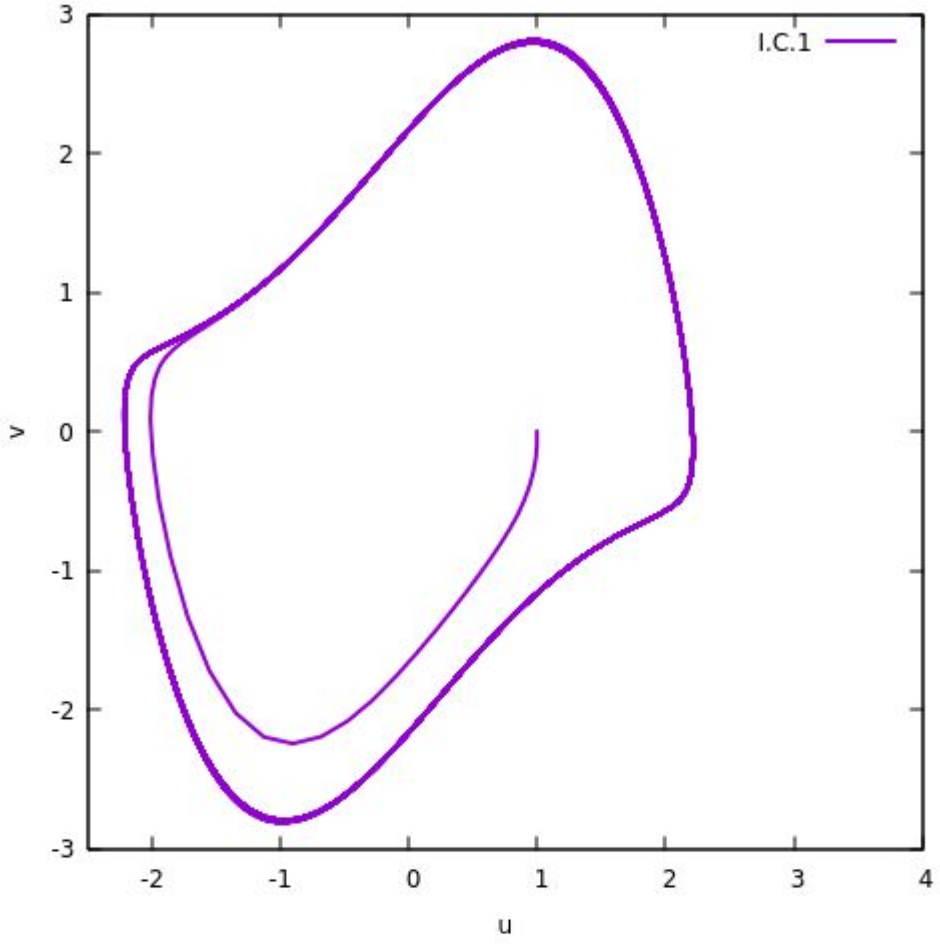


phase portrait

Exemplo 2

- Você deve obter isso para $\epsilon = 1$ $(h = 0.1)$.

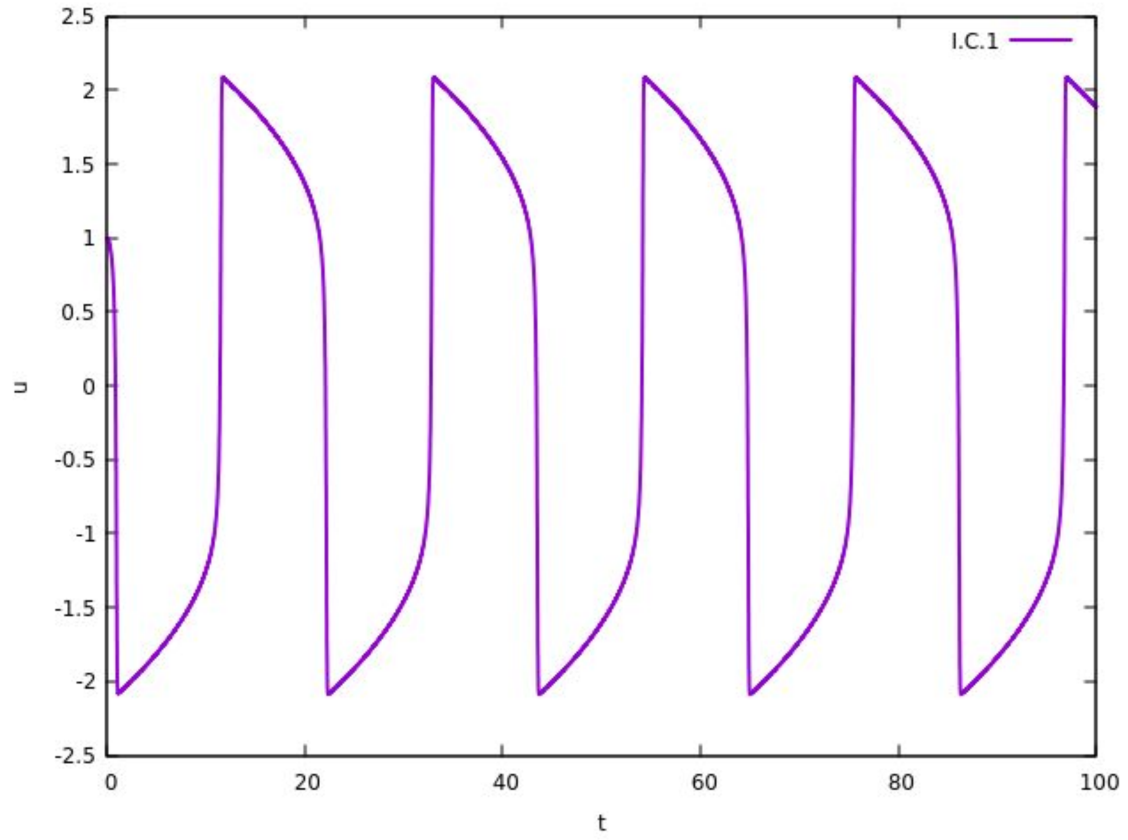


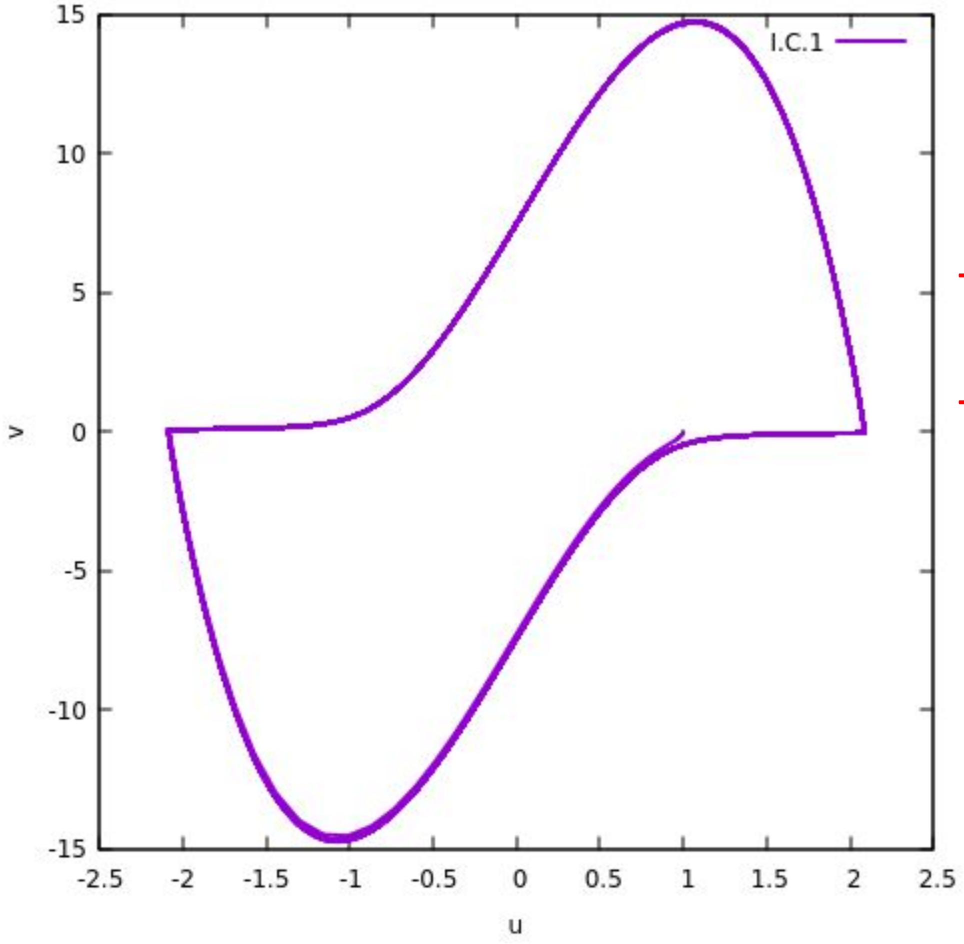


phase portrait

Exemplo 2

- Você deve obter isso para $\epsilon = 10$ $(h = 0.01)$.

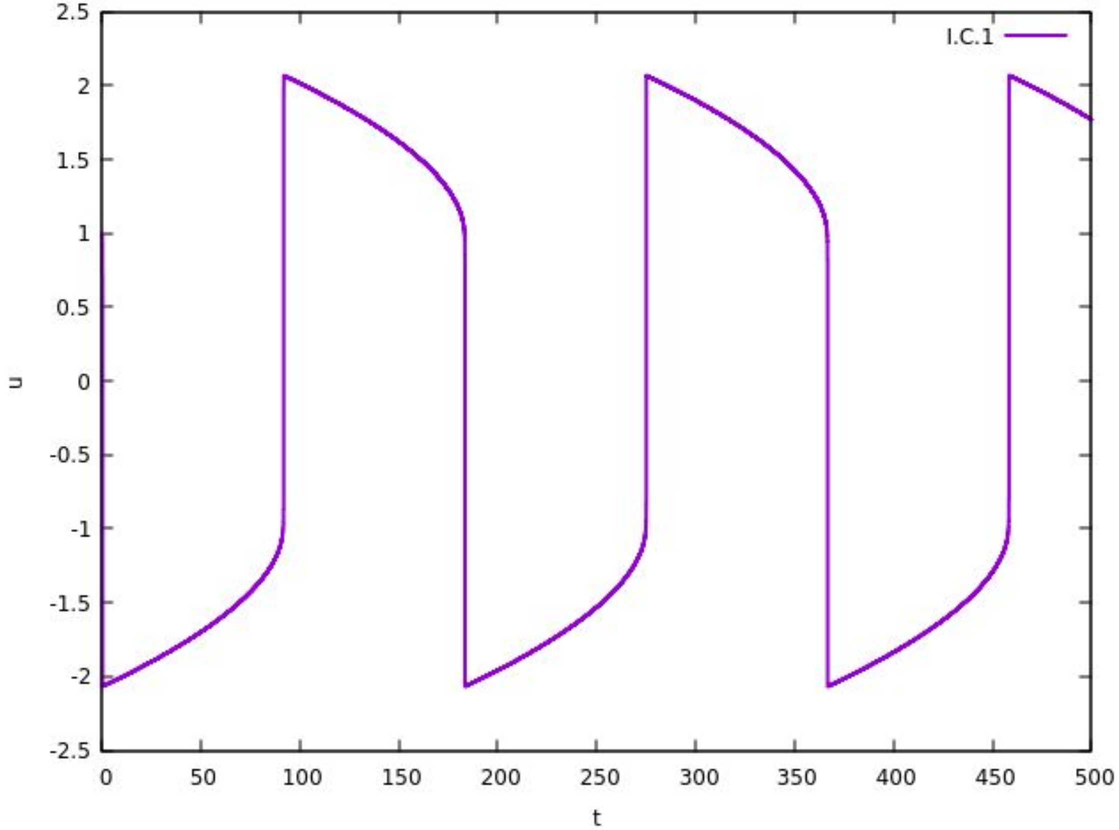


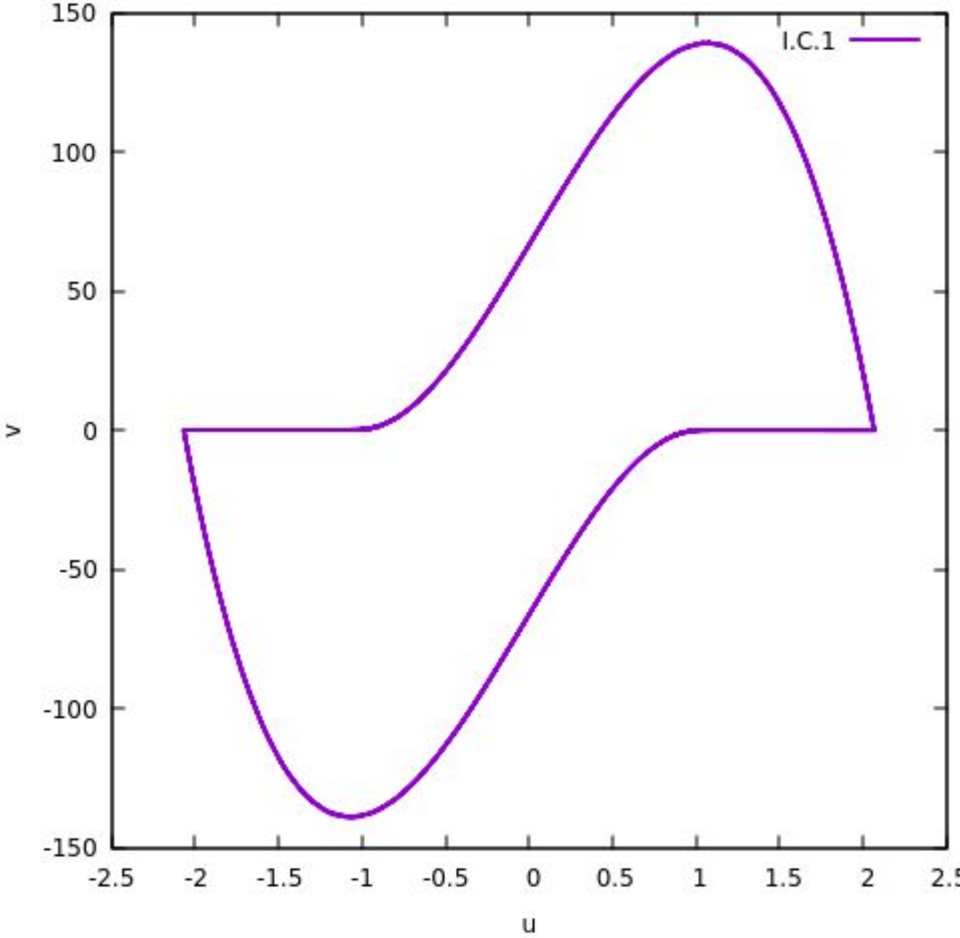


phase portrait

Exemplo 2

- Você deve obter isso para $\epsilon = 100$ $(h = 0.001)$.

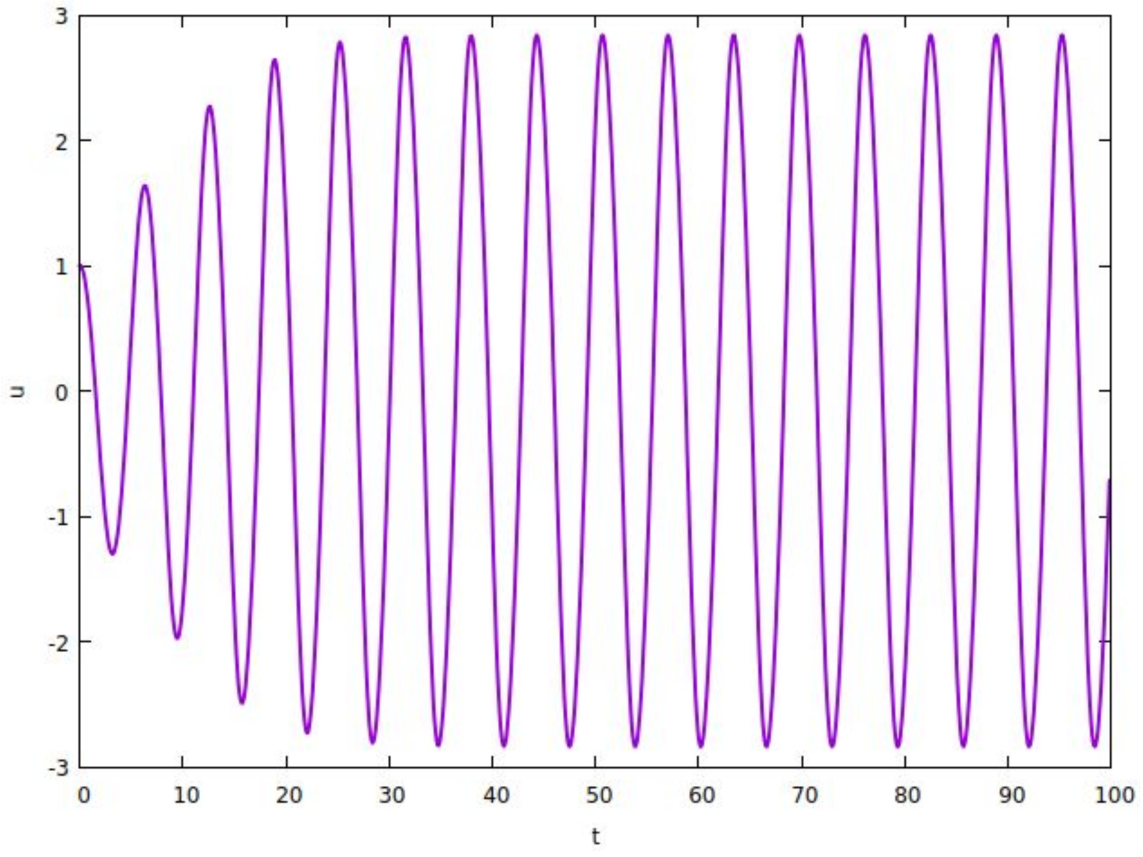


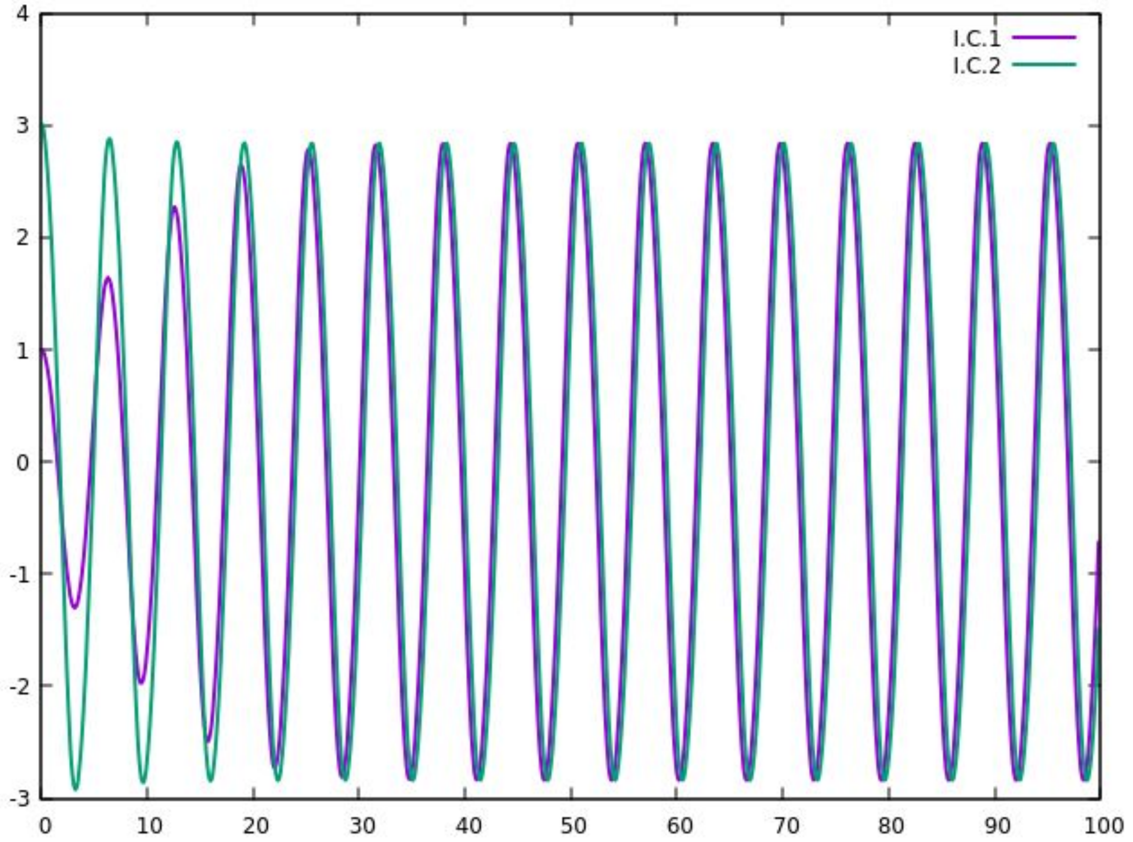


phase portrait

Exemplo 2

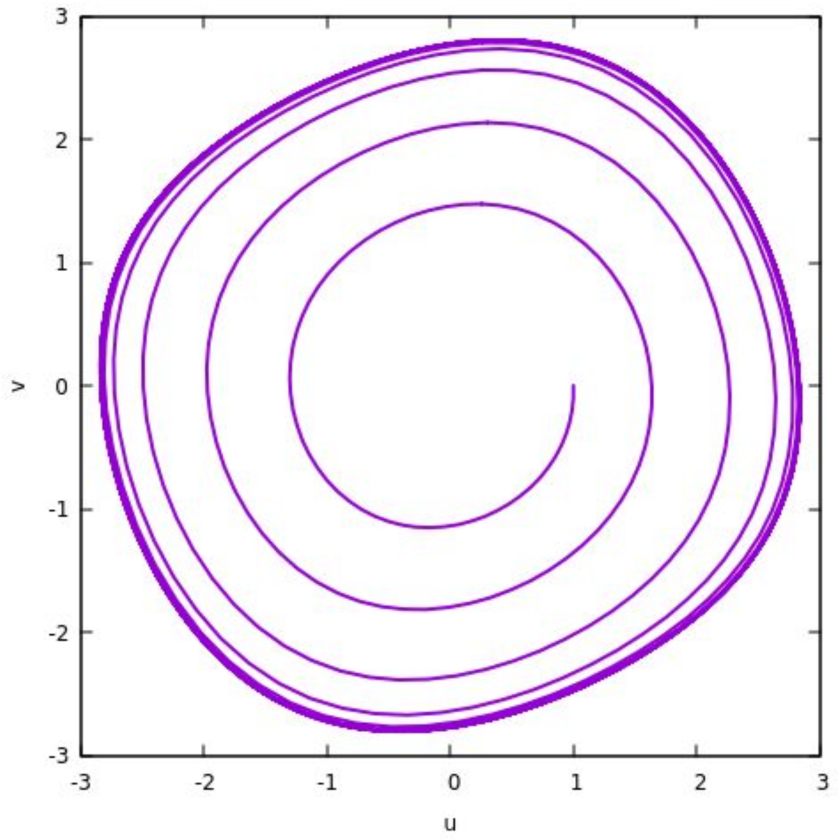
- É interessante notar que, para outra condição inicial, o comportamento oscilatório final será mesmo.

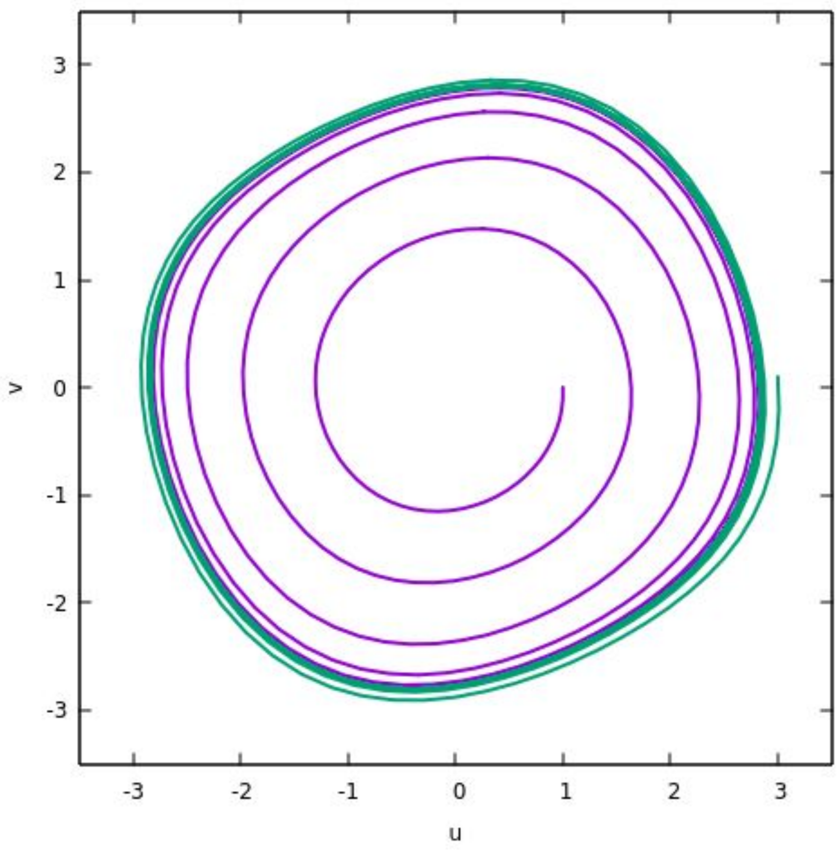




Exemplo 2

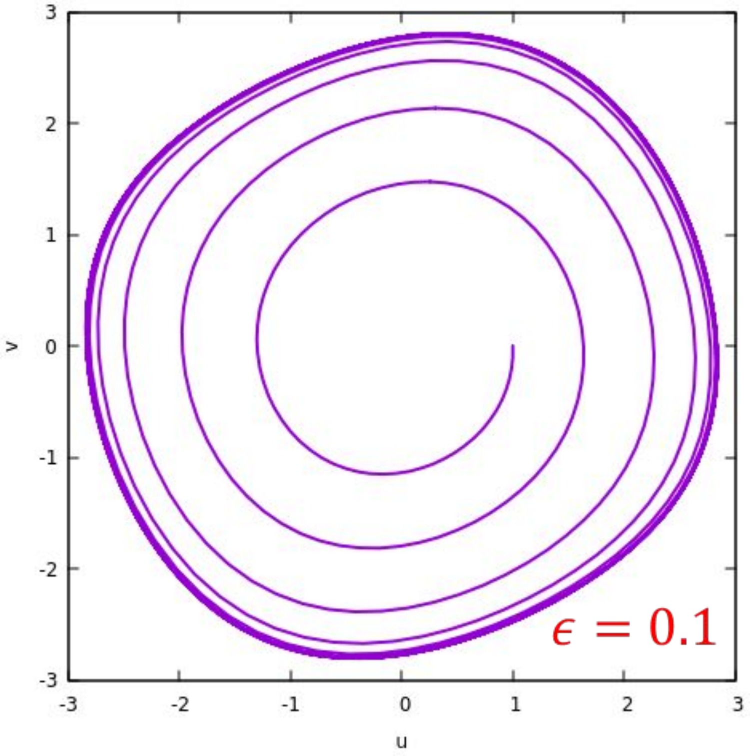
- É interessante notar que, para outra condição inicial, o comportamento oscilatório final será mesmo.

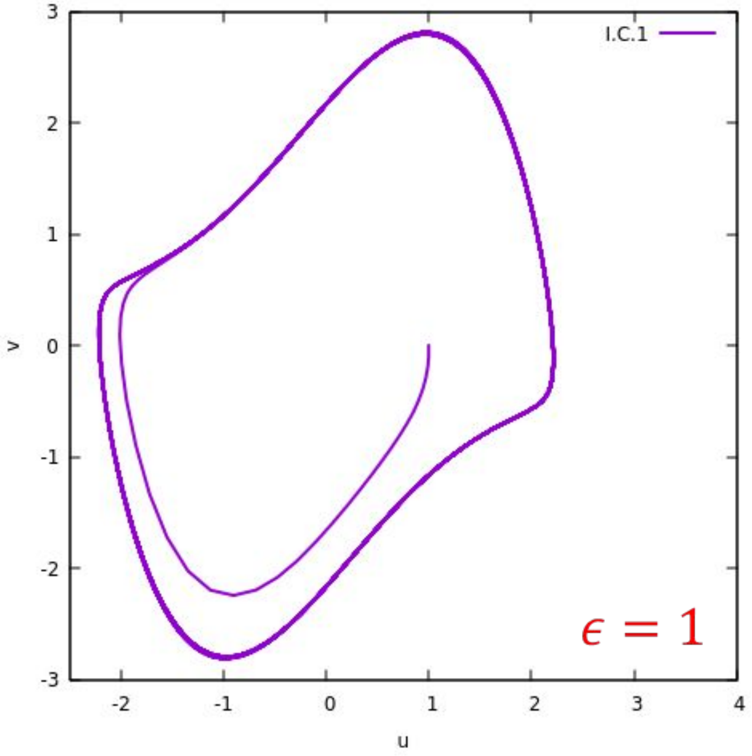


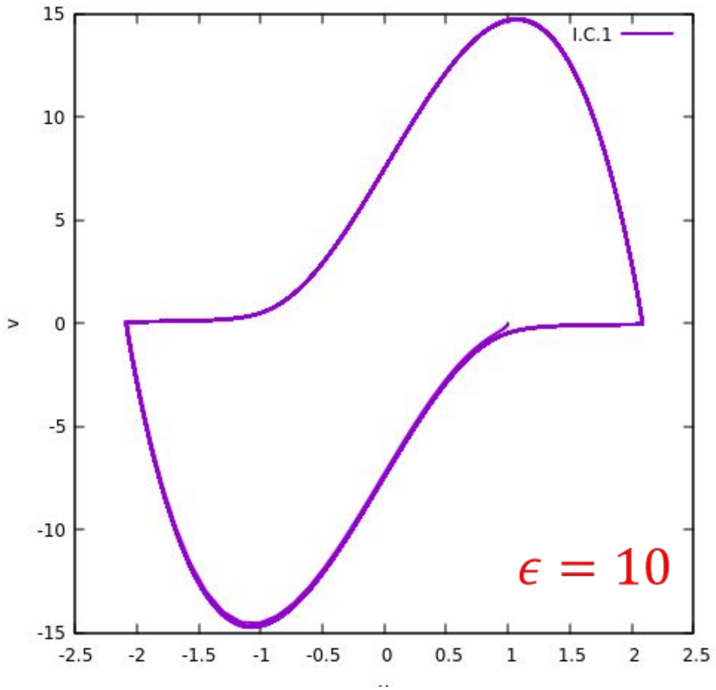


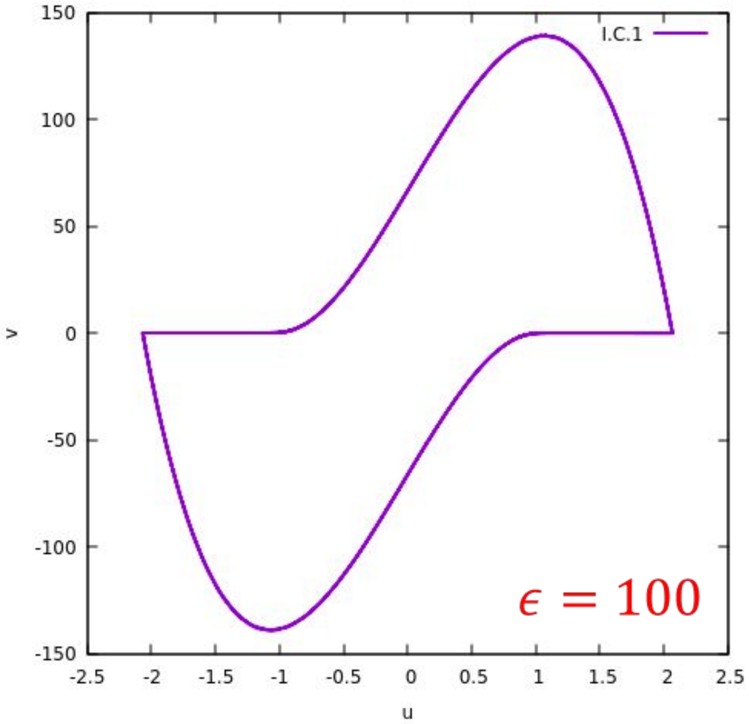
Exemplo 2

- Se você resolver a equação por um tempo muito longo, a solução entra no ciclo limite.



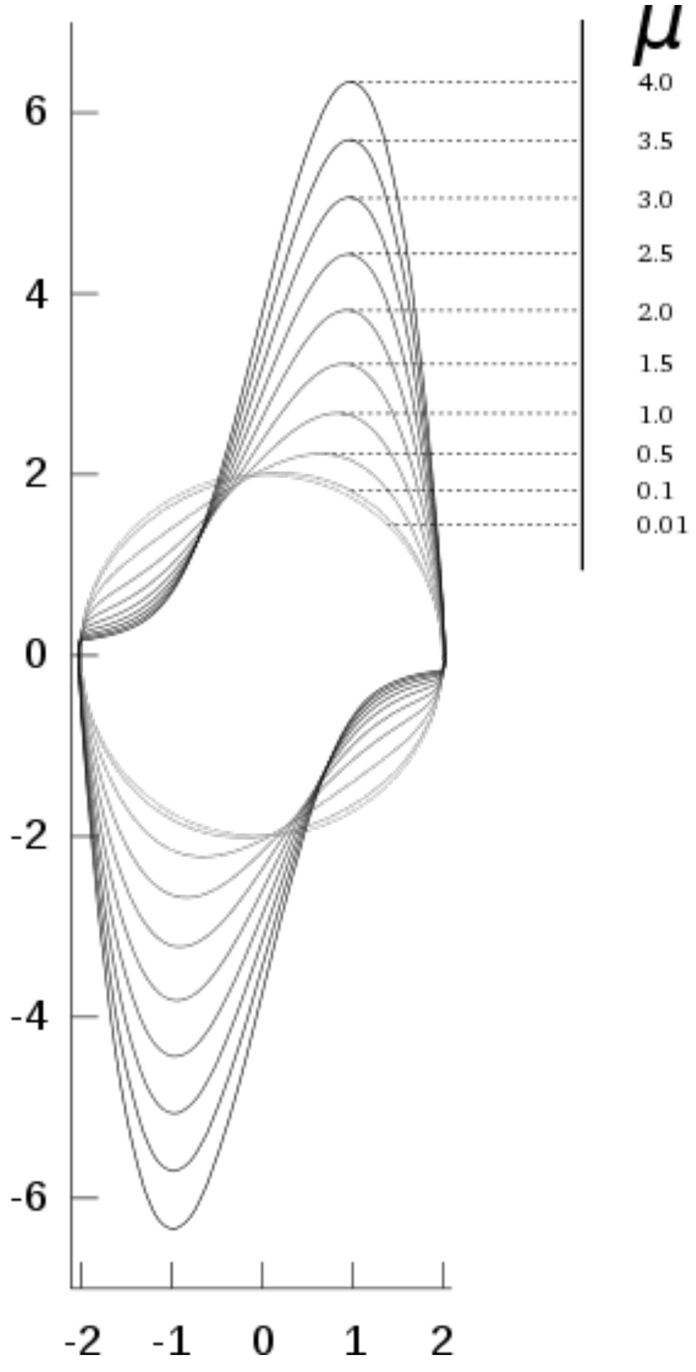






Exemplo 2

- O que fizemos foi um estudo de parâmetros.
- Estudamos o feito de parâmetros na solução de equação.
- Por exemplo, aqui o parâmetro é ϵ, e o nos estudamos o feito dele no ciclo final.



Exemplo 3

- Vamos resolver a equação de Lorenz,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

- Podemos escrever esse sistema como lado direito

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{f}_2(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{f}_3(t, \boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{bmatrix}$$

- Agora, queremos resolvê-lo com Euler avançado.

Exemplo 3

- Agora, queremos resolvê-lo com Euler avançado.

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(t,\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{f}_2(t,\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{f}_3(t,\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ x(\rho-z)-y \\ xy-\beta z \end{bmatrix}$$

- A solução será

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h.\boldsymbol{f}(t_n,u_n)$$

$$x_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + h.f_1(t_n,x_n,y_n,z_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h.f_2(t_n,x_n,y_n,z_n)$$

$$z_{n+1} = z_n + h.f_3(t_n,x_n,y_n,z_n)$$

- Resolva este sistema para

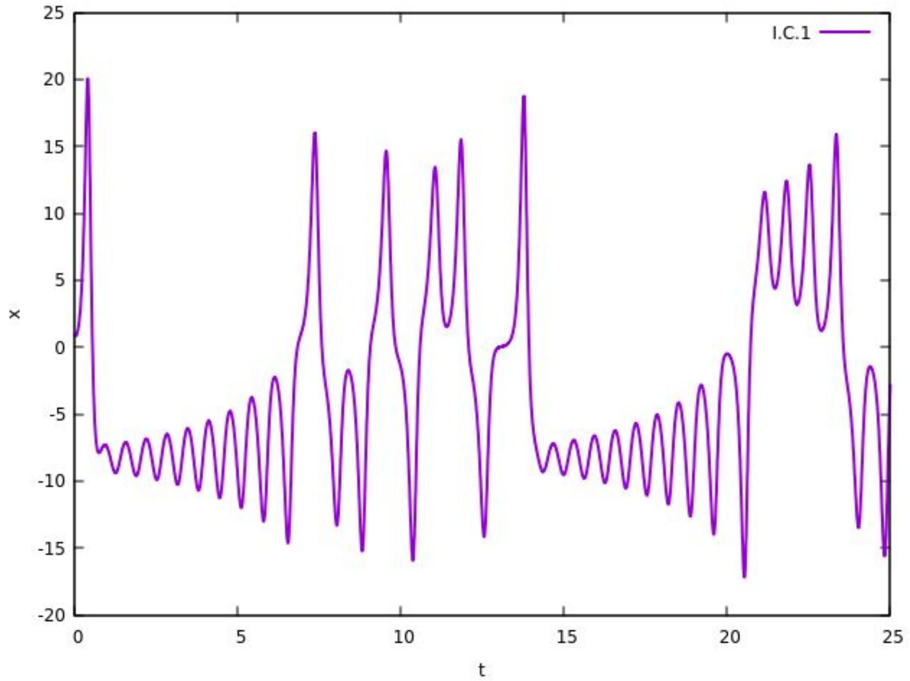
$$\boldsymbol{u_0} = [1,0,0]^T \qquad h = 0.005$$

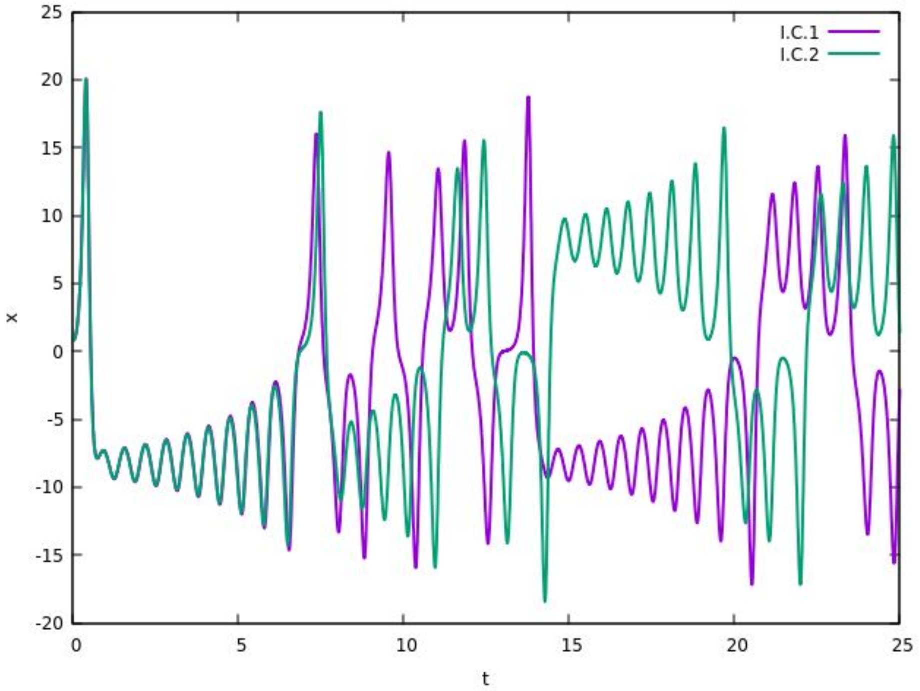
$$\boldsymbol{u_0} = [1,0.1,0.1]^T \qquad T_f = 30$$

$$\sigma = 10, \rho = 27, \beta = 8/3$$

Exemplo 3

- Mais uma vez, temos um comportamento oscilatório.
- Uma pequena mudança na condição inicial resultará em enorme diferença nos resultados.
- Mas boa visualização nos mostrará mais.





Exemplo 3

- Mais uma vez, temos um comportamento oscilatório.
- Uma pequena mudança na condição inicial resultará em enorme diferença nos resultados.
- Mas boa visualização nos mostrará mais.
- Isso é chamado de atrator estanho.