Computação Científica II

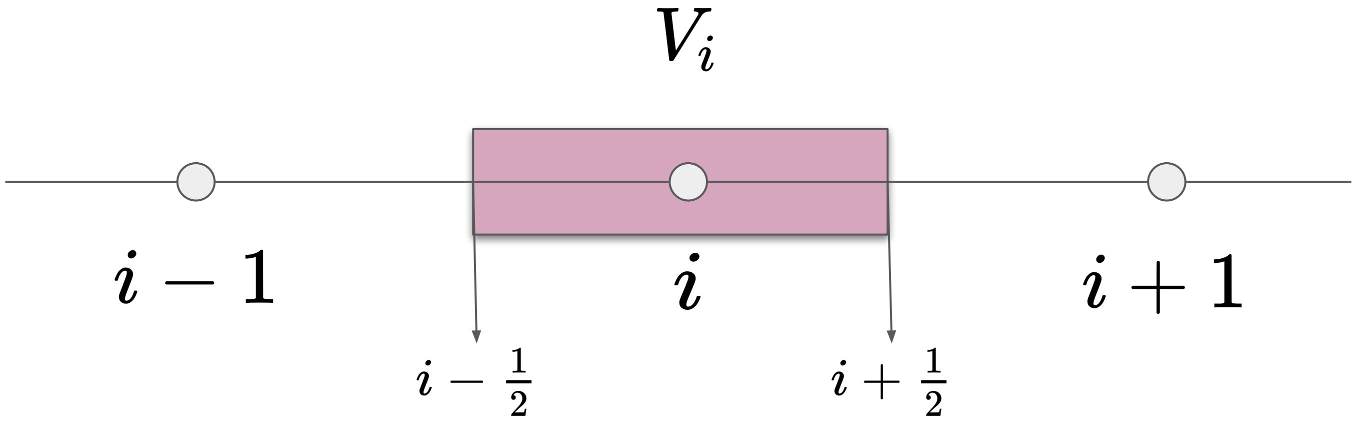
Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

A-20

Método de volume finito

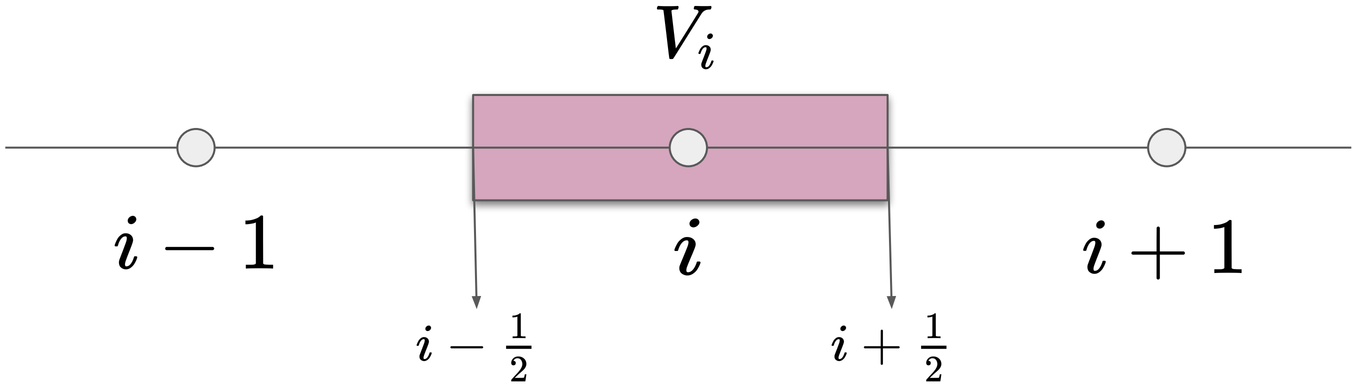
- Para entender o método do volume finito, precisamos estender a definição da “Grid”.
- Nesse método, temos células que contêm nós. Por exemplo, o nó *i* é o centro da célula *Vi*.



Método de volume finito

- Agora, podemos definir o valor médio de uma quantidade em uma célula como:

$$\bar{u}_i(t_n) = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n)dx = \frac{1}{h_x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n)dx$$



Método de volume finito

- Agora considere que queremos resolver a equação de conservação como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

- Se nos integrarmos em uma célula, teremos

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dt = f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+1\frac{1}{2}})$$

- Atenção que esta integração é válida a qualquer momento.
- No método de volume finito, precisamos calcular os fluxos nas bordas das células.

Método de volume finito

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad \int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dt = f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})$$

- Agora, vamos mudar a ordem de integração e seria,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{1}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

- É uma equação da EDO. Se usarmos o método Euler avançado, teremos

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

Método de volume finito

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

- Se usarmos o método “upwind” para calcular os fluxos que temos

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}(f^n(u_{i-1}) - f^n(u_i))$$

Exemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad \bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-1}) - f(u_i)\right)$$

- Considere a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

- Aqui, *f* é $f(t, x) = \frac{1}{2}u^2$
- Usando o método de volume finito, teremos

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{2h_x}\left(\bar{u}_{i-1,n}^2 - \bar{u}_{i,n}^2\right)$$

Exemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

- Considere a seguinte equação

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{2h_x}\left(\bar{u}_{i-1,n}^2 - \bar{u}_{i,n}^2\right)$$

- Podemos escrever a equação de forma não conservadora a partir de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Agora, se usarmos a diferença finita regular, teremos

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\bar{u}_{i,n}\left(\bar{u}_{i-1,n} - \bar{u}_{i,n}\right)$$

Exemplo

- Resolva a equação do Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0$$

- com as seguintes condições de contorno e inicial

$$IC : u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0.5 \\ 1 & x \geq 0.5 \end{cases}, \quad BC : u(0,t) = 2, \;\; u(1,t) = 1$$

- Resolva para

$$h_x = 0.025, h_t = 0.0125, T_f = 0.2$$

- Solução exata é uma onda com velocidade 1.5.

Exercício

- Resolva a equação do Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0$$

- com as seguintes condições de contorno e inicial

$$IC : u(x,0) = cos(2\pi x) + 1, \quad BC : u(0,t) = u(1,t)$$

- usando o método upwind.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{h_t}{2h_x}\left[(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2\right]$$

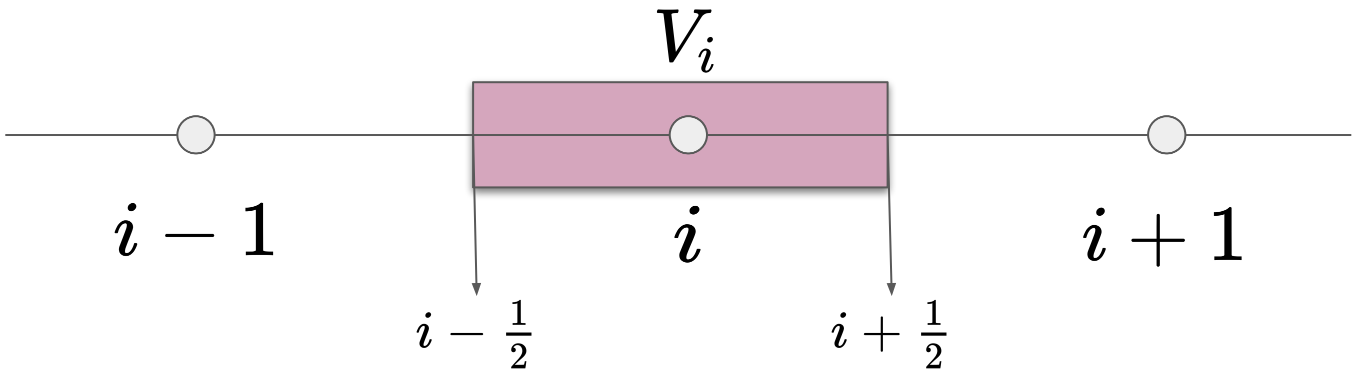
- Obtenha a Figura 8.8 do livro.

Godunov scheme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad \bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

- Se usarmos o método "upwind" para calcular os fluxos que temos

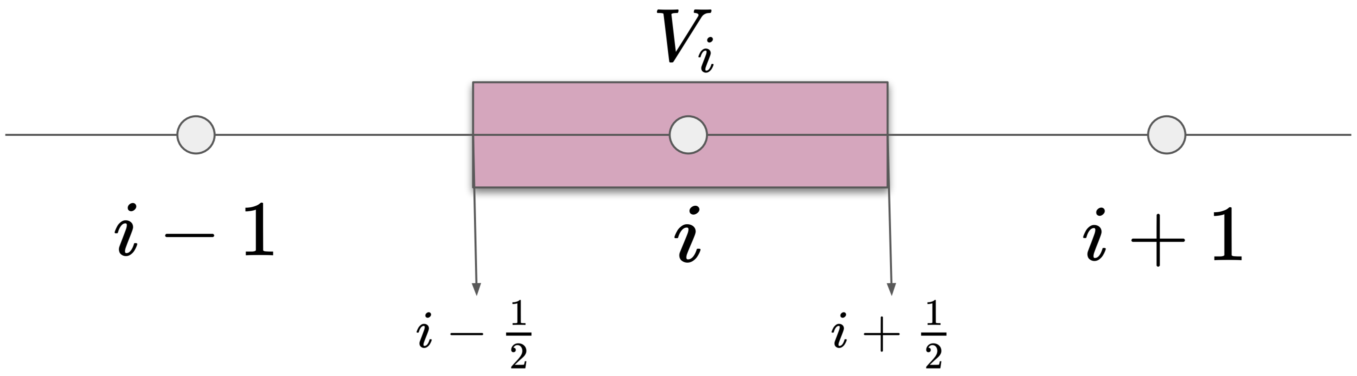
$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}(f^n(u_{i-1}) - f^n(u_i))$$



Godunov scheme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad \bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

- No método de Godunov, para obter fluxos resolvemos o problema local de Riemann.

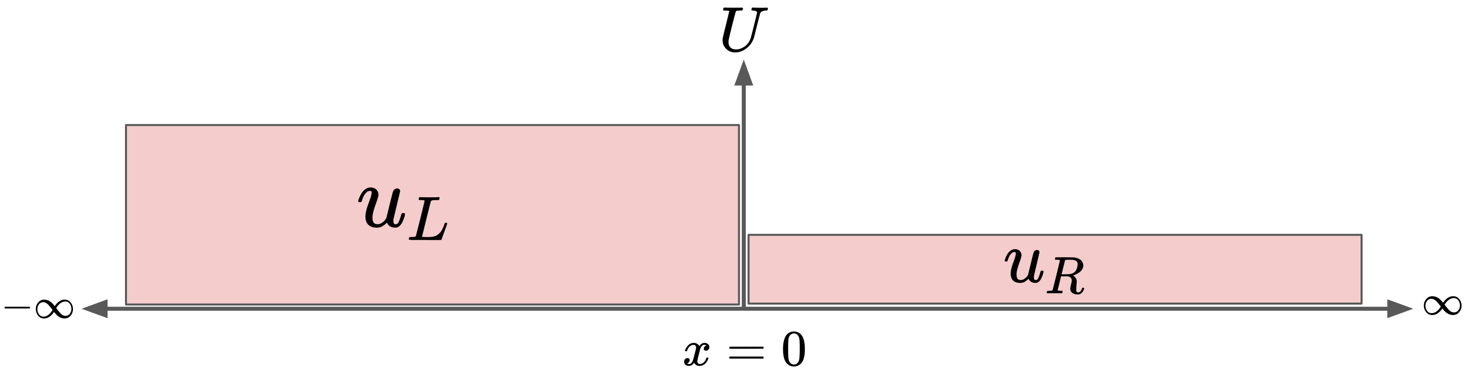


Riemann Problem

- É problema de valor inicial. Entre cada célula, precisamos resolver esta equação para obter o fluxo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

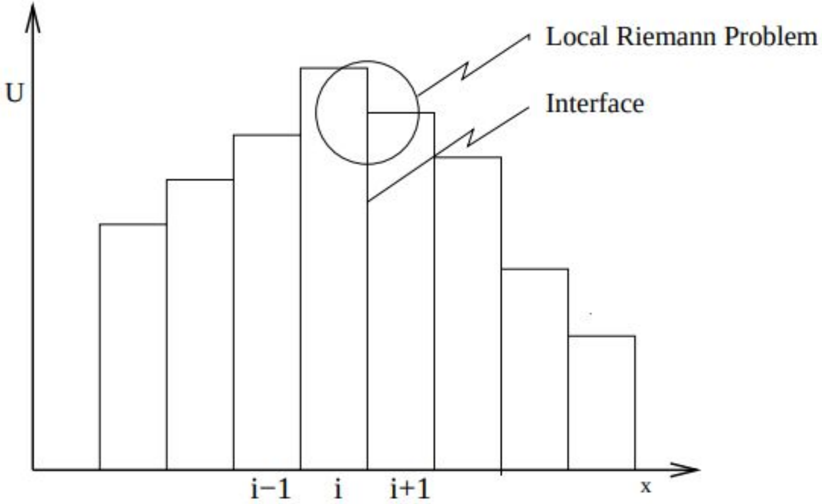
$$IC: \begin{array}{l} u(x < 0, 0) = u_L \\ u(x > 0, 0) = u_R \end{array}$$

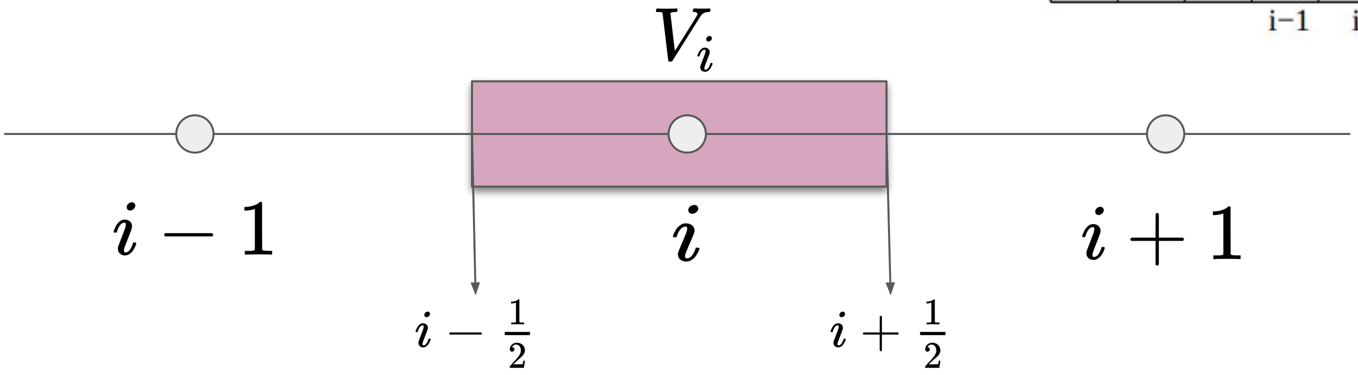


Godunov scheme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{h_t}{h_x}\left(f(u_{i-\frac{1}{2}}) - f(u_{i+\frac{1}{2}})\right)$$





Riemann Problem

- Existem diferentes métodos para resolver o problema de Riemann. Por exemplo, solução numérica exata, HLLE, HLLC, ...

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$$IC : \begin{array}{l} u(x < 0, 0) = u_L \\ u(x > 0, 0) = u_R \end{array}$$