Encontre a região de estabilidade para o método LeapFrog (Apresentação 6/7).

LP $\rightsquigarrow$ $U_{m+1} = U_{m-1} + 2h f(t_m, U_m)$

USANDO $f(t_m, U_m) = \lambda U_m$, COM $\lambda \in \mathbb{C}$

E SUBSTITUINDO NO MÉTODO, TEMOS:

$$U_{m+1} = U_{m-1} + 2h\lambda U_m$$

AGORA, SUBSTITUINDO $U_{m+1} = \mu^2$, $U_m = \mu$, $U_{m-1} = \mu^0 = 1$

$$\mu^2 = 1 + 2h\lambda\mu \rightsquigarrow \mu^2 - 2h\lambda\mu - 1 = 0$$

OBTEM-SE A E.Q. CARACTERÍSTICA.

AGORA, CALCULAMOS AS RAÍZES DA E.Q. CARACTERÍSTICA:

$$\frac{2h\lambda \pm \sqrt{(-2h\lambda)^2 - 4.1.(-1)}}{2} \begin{cases} \rightarrow \phi_1 = h\lambda + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1} \\ \rightarrow \phi_2 = h\lambda - \sqrt{h^2\lambda^2 + 1} \end{cases}$$

$$\phi_1 + \phi_2 = 2h\lambda$$

$$\phi_1 \cdot \phi_2 = h^2\lambda^2 - h\lambda\sqrt{h^2\lambda^2+1} + h\lambda\sqrt{h^2\lambda^2+1} - (h^2\lambda^2+1) = -1$$

COMO ESTAMOS TRABALHANDO NOS COMPLEXOS, É CONVENIENTE ESCREVERMOS NA FORMA POLAR AS RAÍZES ϕ_1 E ϕ_2, LOGO TEMOS:

$\phi_1 = r e^{i\theta}$, PARA ALGUM $r \in \mathbb{R}$ E $\theta \in [0, 2\pi]$

COMO $\phi_1 \cdot \phi_2 = -1$, PODE-SE ACHAR ϕ_2 USANDO r E θ

$$\phi_2 = \frac{-1}{\phi_1} = -\frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

AGORA, USANDO QUE $\phi_1 + \phi_2 = 2h\lambda$, SUBSTITUIMOS PELA FORMA POLAR E FICAMOS COM A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$re^{i\theta} - \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} = 2h\lambda$$

PORÉM, PARA QUE A SOLUÇÃO SEJA ESTÁVEL $r \leq 1$, PORTANTO, VAMOS CONSIDERAR r SENDO O MAIOR POSSÍVEL PARA VERMOS A FRONTEIRA DA REGIÃO; COM $r=1$ FICAMOS COM A SEGUINTE RELAÇÃO:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2h\lambda$$

COMO $e^{ix} - e^{-ix} = 2\sin(ix)$, USAMOS ESSE FATO NO LADO ESQUERDO DA IGUALDADE, E OBTEMOS:

$$2\sin(i\theta) = 2h\lambda \rightsquigarrow \boxed{h\lambda = \sin(i\theta)}$$

COMO $r=1$, A REGIÃO ESTÁ LIMITADA NO CÍRCULO DE RAIO 1, E COMO $h\lambda = \sin(i\theta)$, $h\lambda \in [-i, i]$

LOGO, A REGIÃO DE ESTABILIDA É DADA PELO INTERVALO $[-i, i]$ NO EIXO IMAGINÁRIO.