Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferencias

2020-PLE

Esta aula cobrirá

- Métodos de Euler avançado, de Euler atrasado, Crank-Nicolson, Huen,
- Métodos explícitos e implícitos,
- Erro global e estabilidade dos métodos,
- Como resolver numericamente um sistema de equações,
- Retrato de fase.

Problema de valor inicial

- Vamos começar a resolução numérica de PVI.
- Primeiro vamos considerar a equação única como

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

com uma condição inicial como $u(0) = u_0$.

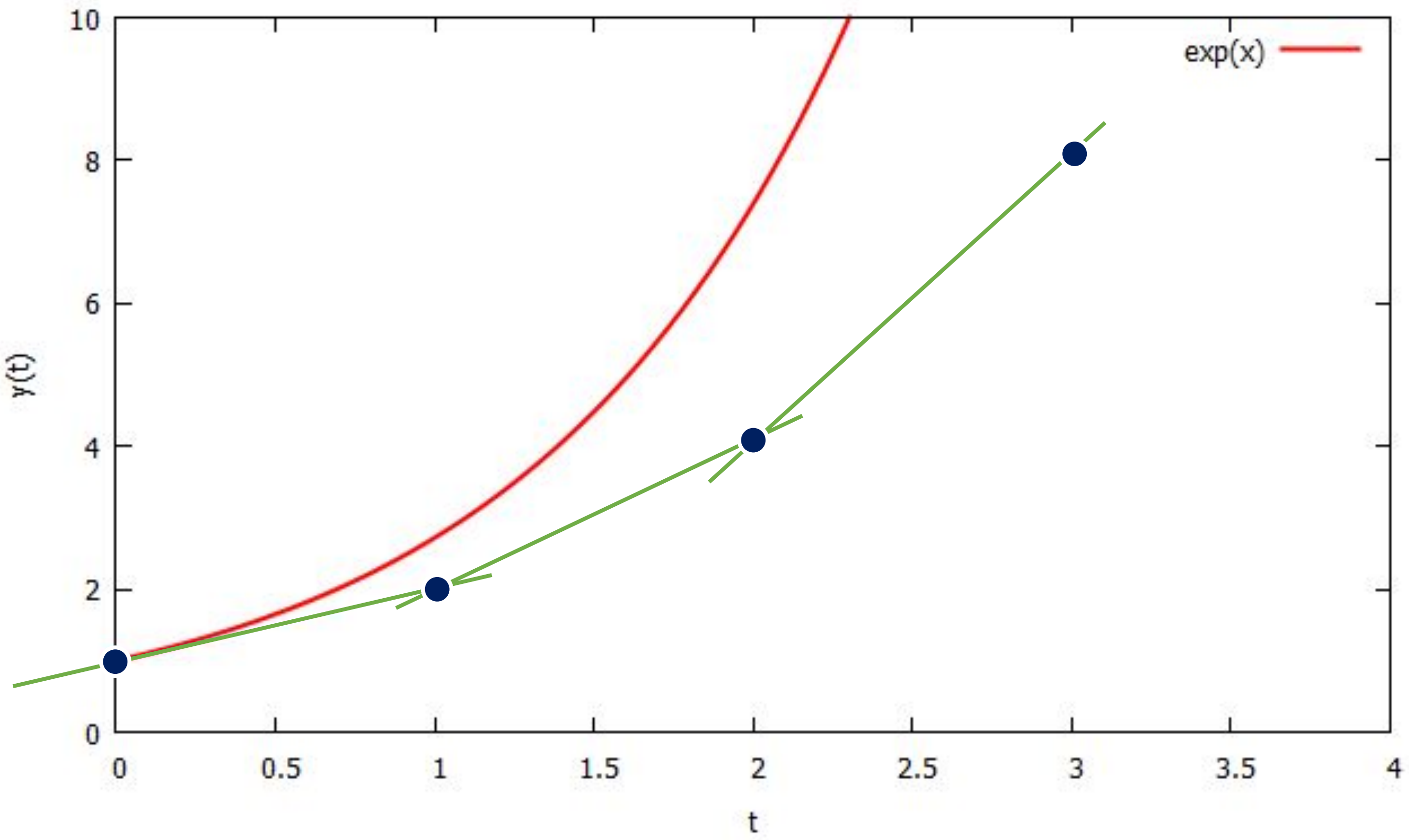
Test
problem

Introdução

- Para mostrar a ideia, vamos trabalhar no seguinte problema.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	y	y’
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8



Introdução

- Primeiro, atenção que o método numérico, nós da a solução em alguns pontos.
- Está em contraste com a solução analítica que fornece uma solução continua.
- Geralmente, nós dividimos o intervalo interessado em subintervalo $I_n \in [t_n, t_{n+1}]$, onde $t_n = t_0 + nh,\ n = 0, \dots, N$.
- Nós chamamos h tamanho de passo.

Step size

Introdução

- $$t_n = t_0 + nh$$
- A seguir, a solução numérica no tempo t_n será mostrada como u_n.
- Mas a solução exata (se disponível) será mostrada por $u(t_n)$.

Step size

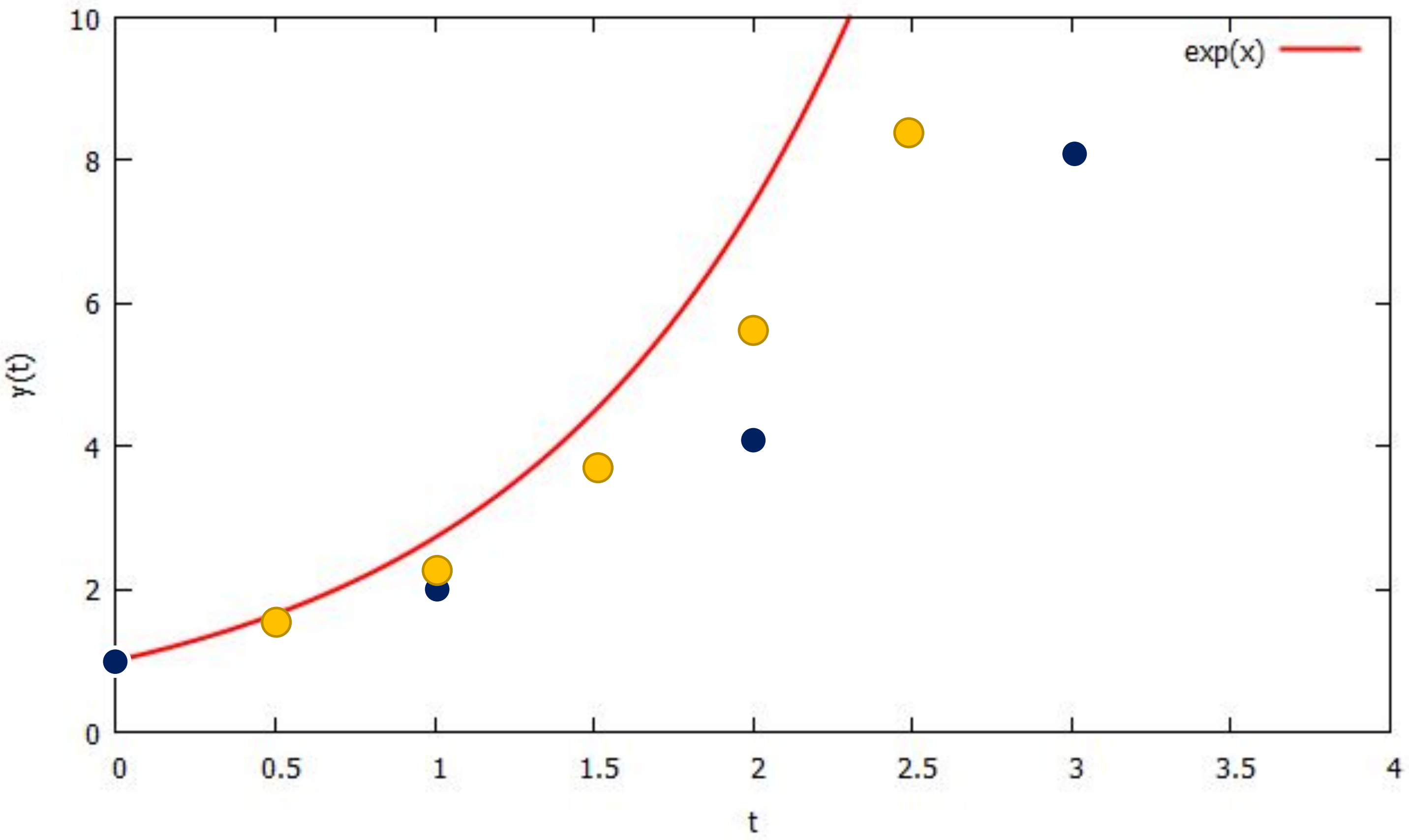
Introdução

- Segundo, a solução está avançando no tempo.
- Para obter a solução no próximo passo, precisamos de solução em pontos antes.
- Em contraste, na solução analítica podemos encontrar a solução em qualquer ponto separadamente.

Introdução

- Vamos repetir as operações, mas desta vez com o tamanho do passo da metade.
- $\frac{dy}{dt}(t) = y(t) \quad y(0) = 1$

- A precisão da solução melhora se usamos tamanhos de passo menores.



Método de Euler Avançado.

- $$\frac{du}{dt} = f(t,u)$$
- Este método pode set obtido usando a expansão de Taylor.

$$u(t_{n+1}) = u(t_n + h) = u(t_n) + h\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Se negligenciarmos termos de ordem mais elevada, teremos

$$u(t_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$

Forward Euler Method

Exemplo 1

$$u_{n+1} = u_n + h.f(t_n, u_n)$$

- $$\frac{du}{dt} = u \qquad u(0) = 1$$

1. Resolva isso até $t = 5$ com $h = 0.1$.
2. Traçar a resolução.
3. Encontre o erro entre a solução exata e a sua.

Excel file

Definições

- O erro global é definido como

$$e_k = u(t_k) - u_k$$

- Existem outros tipos de erro. mas nesta aula nos concentramos nisso.

- nós chamamos um método p ordem se

$$e_k = u(t_k) - u_k = \mathcal{O}(h^p)$$

Order of the method

Exemplo 2

$$u_{n+1} = u_n + h.f(t_n, u_n)$$

- $$\frac{du}{dt} = -5u \qquad u(0) = 1$$

1. Resolva isso até $t = 5$ com $h = 0.1$.
2. Traçar a resolução.
3. Encontre o erro entre a solução exata e a sua.
4. Repita os cálculos para $h = 0.41, 0.4, 0.3, 0.1$.

Excel file

Definições

- O que você viu foi instabilidade no método numérico.
- Para grandes tamanhos de passos, a solução numérica começa a oscilar e também diverge da solução exata.
- Com base nesta experiência, podemos dizer que há limite máximo para o tamanho do passo no método de Euler avançado.
- Vamos discutir esse assunto na próxima aula.

Instability of the numerical method

Exemplo 3

$$u_{n+1} = u_n + h.f(t_n, u_n)$$

- $$\frac{du}{dt} = \frac{u-t}{u+t} \qquad u(0) = 1$$

1. Resolva isso até $t = 7$ com $h = 0.1$.
2. Traçar a resolução.
3. A solução exata com esta condição inicial é

$$\frac{1}{2}\log(t^2 + u^2) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{t}\right) = 1.5708$$

Use wolfram para traçar esta solução e comparar com a solução numérica.

Excel file

Método de Euler atrasado

- podemos usar outras aproximações para a derivada de tempo.
- Vamos começar com a expansão do Taylor

$$y(t_n) = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} = f\big(t_{n+1}, y(t_{n+1})\big)$$

- Euler atrasado (Backward Euler)

$$y(t_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

Exemplo 4

$$u_{n+1} = u_n + h.f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

- $$\frac{du}{dt} = -5u \qquad u(0) = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n - 5hu_{n+1} \rightarrow u_{n+1} = \frac{u_n}{1+5h}$$

1. Resolva isso até $t = 5$ com $h = 0.41$.
2. Traçar a resolução.
3. Encontre o erro entre a solução exata e a sua.
4. Repita os cálculos para $h = 0.41, 0.4, 0.3, 0.1$.

Excel file

Atenção

- Parece que o método de euler atrasado é estável para qualquer escolha do tamanho do passo.

- A desvantagem é que precisamos resolver uma equação não linear.

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

- Será dor de cabeça em problemas com função mais complexa f.

Exemplo 5

$$u_{n+1} = u_n + h.f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + h\left(\frac{u_{n+1} - t_{n+1}}{u_{n+1} + t_{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1}^{k+1} = \Phi\left(u_{n+1}^{k}\right)$$

$$\Phi\left(u_{n+1}^{k}\right) = u_n + h\left(\frac{u_{n+1}^{k} - t_{n+1}}{u_{n+1}^{k} + t_{n+1}}\right)$$

- $$\frac{du}{dt} = \frac{u-t}{u+t} \qquad u(0) = 1$$

1. Resolva isso até $t = 7$ com $h = 0.1$.
2. Traçar a resolução.
3. A solução exata com esta condição inicial é

$$\frac{1}{2}\log(t^2 + u^2) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{t}\right) = 1.5708$$

Use wolfram para traçar esta solução e comparar com a solução numérica.

Excel file

Métodos explícitos e implícitos

- Euler avançado

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$

- Euler atrasado

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

- Um método é chamado explícito, se u_{n+1} puder ser calculado diretamente dos valores anteriores de $u_k, k \leq n$.
- Caso contrário, se u_{n+1} depende de si mesmo através do f, ele é chamado implícito.

Métodos explícitos e implícitos

- Euler avançado (explícito) $u_{n+1} = u_n + hf_n$
- Euler atrasado (implícito) $u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$

- Vamos somar esses dois métodos. O resultado é

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

que é chamado Crank-Nicolson e é implícito.

Métodos explícitos e implícitos $f_{n+1} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$

- Forward Euler (explícito) $u_{n+1} = u_n + hf_n$
- Backward Euler (implícito) $u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$
- Crank-Nicolson (implícito) $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$

- Vamos aproximar o f_{n+1} usando o método de Euler avancado.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f(t_{n+1}, u_n + hf_n))$$

- O novo método é chamado Huen (explícito).

Exemplo 6 / 7

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f(t_{n+1}, u_n + hf_n)\right)$$

- $$\frac{du}{dt} = -5u \qquad u(0) = 1$$

1. Resolva isso até $t = 5$ com $h = 0.4$.
2. Traçar a resolução.
3. Encontre o erro entre a solução exata e a sua.
4. Repita os cálculos para $h = 0.4, 0.3, 0.1$.

Excel file

Exemplo 8

- Agora, compare o erro no tempo t $= 1$ e $h \;=\; 0.1$ para todos os 4 métodos.
- Qual é a conclusão?

- Execute todos os métodos para $h \;= 0.1, 0.05, 0.025$ e plote o erro no tempo $t \;= 1$ versus o tamanho do passo (h). use plot de log-log.

Ordem de um método numérico

- Vimos que o pedido é definido como

$$e_k = u(t_k) - u_k = \mathcal{O}(h^p)$$

- Vamos pegar o logaritmo de ambos os lados

$$\ln(e_k) = p\ln(h) + C$$

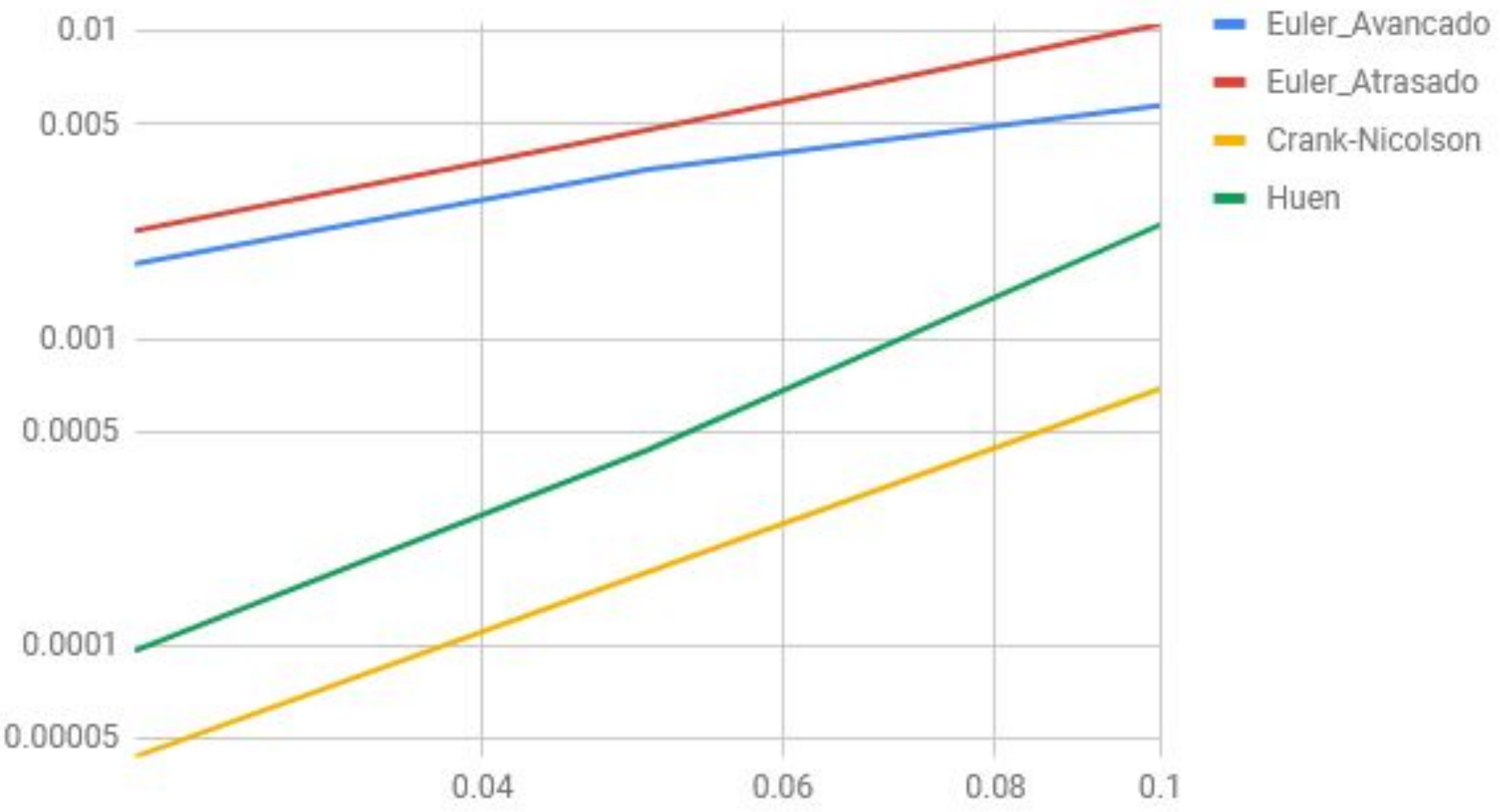
- Portanto, no gráfico de log-log, a inclinação é a ordem do método.

- Para alguns métodos, é possível encontrar a ordem analiticamente. Mas, para a maioria dos métodos, é muito difícil ou impossível fazer isso.

Ordem de um método numérico

- Os métodos de Euler avançado e atrasado são primeiras ordens.

- Mas os métodos de Crank-Nicolson e Huen são segundas ordens.



Sistema de equações

- Vamos supor (por enquanto) que podemos generalizar esses métodos numericos como este

Euler avançado	$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, u_n)$
Euler atrasado	$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{f}(t_{n+1}, u_{n+1})$
Crank-Nicolson	$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{f}_{n+1})$
Huen	$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{f}_n)\right)$

- aqui, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{f}$ são vetores.

Sistema de equações

- Vamos nos concentrar no método de Euler avançado,

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, u_n)$$

onde, $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ e $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_m]^T$.

- Portanto, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} u_{n+1}^1 \\ \vdots \\ u_{n+1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^m \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_n^1 \\ \vdots \\ f_n^m \end{bmatrix}$$

Exemplo 9

- Vamos resolver a equação de Van der pol,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \epsilon(u^2 - 1)\frac{du}{dt} + u = 0$$

- É um modelo para um sistema vibratório, com amortecimento não linear.

- Podemos decompor em duas equações de primeira ordem.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\epsilon(u^2 - 1)v - u \end{bmatrix}$$

Exemplo 9

- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\epsilon(u^2 - 1)v - u \end{bmatrix}$$
- Use o método de Euler avançado para resolver este sistema.

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} v_n \\ -\epsilon(u_n^2 - 1)v_n - u_n \end{bmatrix}$$

com condições iniciais $u(0) = 1, v(0) = 0.$

- use $h = 0.1$ e resolva para $\epsilon = 0.1, 1.0, 10.$

Exemplo 9

- Trace o gráfico no plano $(t - u)$.
    - você vai ver um movimento oscilatório.
- Agora trace o gráfico no plano $(u - v)$.
    - Nós chamamos este gráfico de retrato de fase (phase portrait).
    - Se você resolver a equação por um tempo muito longo, a solução entra no ciclo limite.
- O que fizemos foi um estudo de parâmetros.