Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

Exemplo 0 (Última aula)

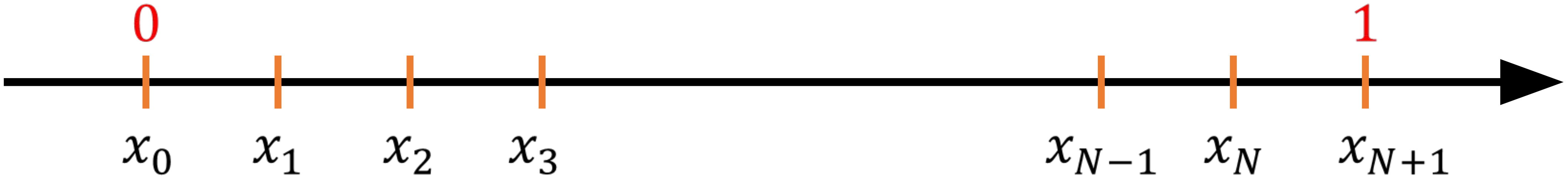
- Vamos resolver essa equação.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) = \sin(\pi x) \qquad u(0) = 0, u(1) = 0$$

- Use o método de diferença central de segunda ordem para a derivada.

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i)$$

$$h(N+1) = 1 \qquad x_i = hi \quad i = 0, \dots, N+1$$



Exemplo 1

- Vamos resolver essa equação.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) = \sin(\pi x) \qquad \frac{du}{dx}(0) = 0, -\frac{du}{dx}(1) = u(1) - 1$$

- Use o método Euler de primeira ordem para aproximar as condições de contorno.

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{u_1 - u_0}{h}$$

$$\frac{du}{dx}(1) = \frac{u_{N+1} - u_N}{h}$$

Encontre a ordem do método

Exemplo 2

- Vamos resolver essa equação.

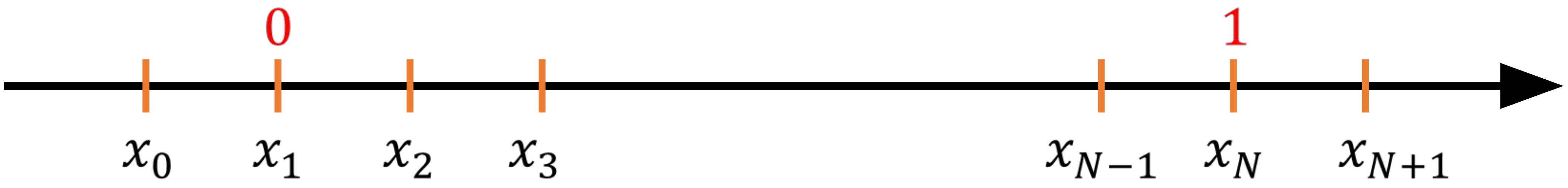
$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) = \sin(\pi x) \qquad \frac{du}{dx}(0) = 0, -\frac{du}{dx}(1) = u(1) - 1$$

- Use o método de segunda ordem para aproximar as condições de contorno.

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{u_2 - u_0}{2h}$$

h e Xi vão mudar

$$\frac{du}{dx}(1) = \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h}$$



Exemplo 0 (Última aula)

Vamos resolver essa equação (Advection-Diffusion).

$$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0 \qquad u(0) = 0, u(1) = 1$$

- O primeiro termo corresponde ao transporte de difusão, enquanto o segundo termo é transporte de convecção.
- ϵ é uma constante positiva.
- A solução geral é $u(x) = C_1 + C_2 e^{x/\epsilon}$.
- Aplicando condições de contorno, a solução é

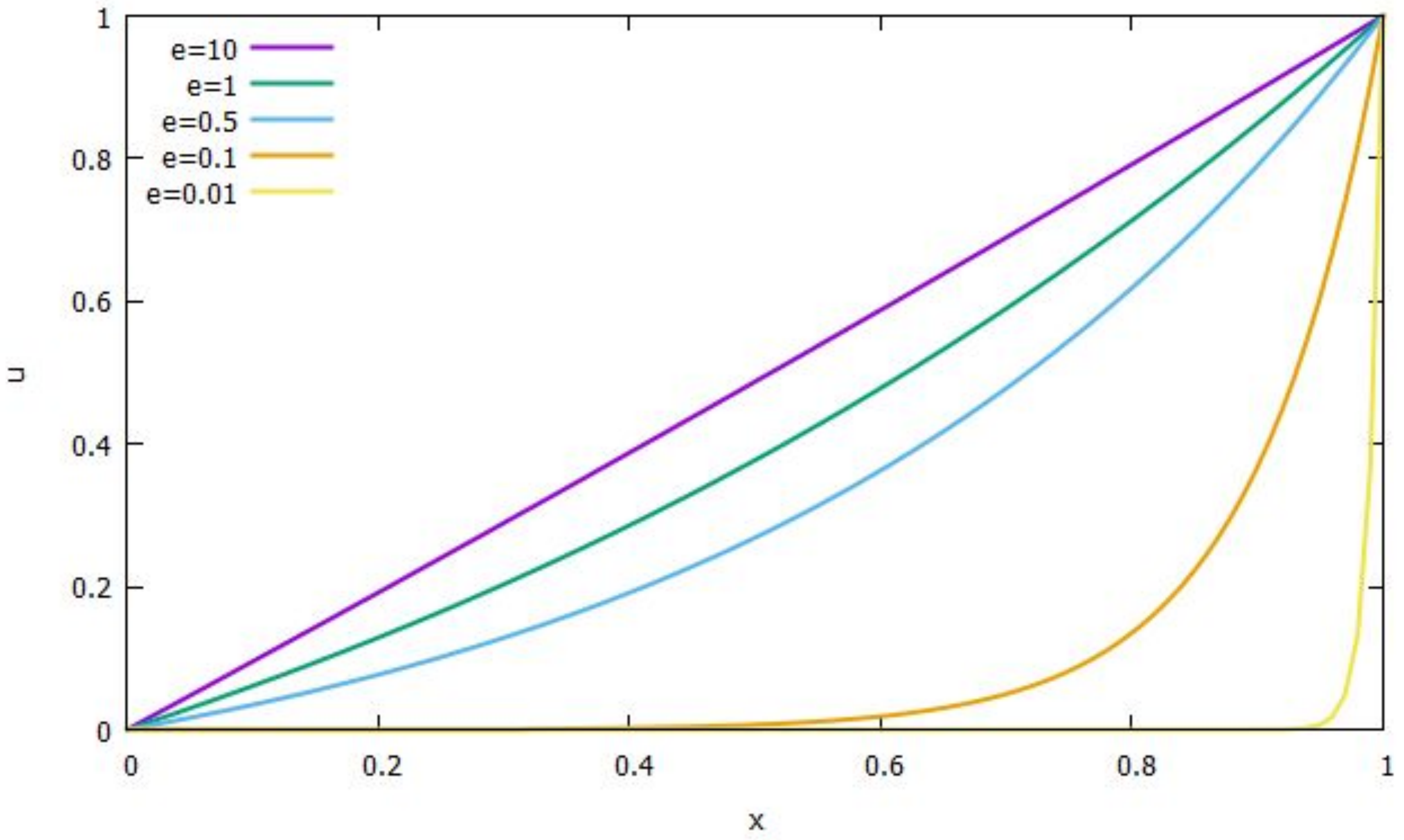
$$u(x) = \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{x^{1/\epsilon} - 1}$$

Exemplo 0 (Última aula)

- (Advection-Diffusion)

$$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0$$

$$u(x) = \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{x^{1/\epsilon} - 1}$$



Exemplo 0 (Última aula)

- $$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0 \qquad u(0) = 0, u(1) = 1$$
- Aplicando condições de contorno, a solução é
$$u(x) = \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{x^{1/\epsilon} - 1}$$
- Para $\epsilon \gg 1$, temos $u(x) \approx x$, que é uma linha reta entre $(0{,}0)$ e $(1{,}1)$.
- Para $0 < \epsilon \ll 1$, temos $u(x) \approx e^{-(1-x)/\epsilon}$, que é quase igual a zero em todos os lugares, exceto próximo de $x = 1$, onde $u(1) = 1$. A solução faz um salto em $x = 1$.
- Dizemos que o problema tem um “boundary layer” neste ponto.

Exemplo 0 (Última aula)

Vamos resolver essa equação (Advection-Diffusion).

$$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0 \qquad u(0) = 0, u(1) = 1$$

- Use a diferença central para ambos os termos.

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0 \qquad i = 0, \dots, N$$

- Resolva a equação para $\epsilon = 0.01$ e $h = 0.1, 0.01$.

- Plote os resultados e a solução exata.

Exemplo 0 (Última aula)

Vamos resolver essa equação (Advection-Diffusion).

$$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0 \qquad u(0) = 0, u(1) = 1$$

- Use a diferença central para o primeio termo e diferença backward para o ultimo.

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0 \qquad i = 0, \dots, N$$

- Resolva a equação para $\epsilon = 0.01$ e $h = 0.1, 0.01$.

Número de Peclet

- Use a diferença central para ambos os termos.

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0 \qquad i = 0, \dots, N$$

- Usando o método que estudamos para os métodos múltiplos passos, a equação características será

$$(-2\epsilon + h)u_{i+1} + (4\epsilon)u_i + (-2\epsilon - h)u_{i-1} = 0$$

- E as raízes são

$$r = \frac{-2\epsilon \mp \sqrt{4\epsilon^2 - (4\epsilon^2 - h^2)}}{-2\epsilon + h} \rightarrow r_1 = 1, r_2 = \frac{-2\epsilon - h}{-2\epsilon + h}$$

- Nós definimos o número de Peclet como

$$Pe = \frac{h}{2\epsilon} \rightarrow r_2 = \frac{1 + Pe}{1 - Pe}$$

Número de Peclet

- Agora a solução da equação diferença será

$$u_i = C_1 + C_2 \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe} \right)^i$$

- As condições de contorno são $u_0 = 0, u_{N+1} = 1.$

- Portanto,

$$u_i = \frac{1 - \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe} \right)^i}{1 - \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe} \right)^{N+1}} \qquad i = 0, \dots, N + 1$$

Número de Peclet

- A solução da equação diferença será

$$u_i = \frac{1 - \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe}\right)^i}{1 - \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe}\right)^{N+1}} \qquad\qquad u(x) = \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{x^{1/\epsilon} - 1}$$

- Note que se $Pe > 1$, a solução u_i é oscilatória. Por outro lado, se $Pe < 1$ então a solução é livre de oscilações. Mas a solução exata é livre de oscilações.

- Por isso, precisamos escolher o número de Peclet menor que 1.

- A física determina o parâmetro de difusão ϵ. Isso significa que $Pe < 1$, limita o tamanho do passo h.

Viscosidade Artificial

- Diferença central:

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

- Diferença backward:

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0$$

- Podemos escrever o oltimo termo como

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

$$-\epsilon(1 + Pe) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

Viscosidade Artificial

- Diferença central:

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

- Diferença backward:

$$-\epsilon(1 + Pe) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

- Portanto, usar esse método é o mesmo que considerar o problema original com maior difusão.

- Chamamos isso “difusão artificial” ou “viscosidade artificial”.

Método de "shooting"

- Suponha que queremos resolver a seguinte equação

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \qquad a \leq x \leq b$$

- Com condições de contorno de Dirichlet como

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

- No último capitólio, aprendemos que podemos reformular isso como

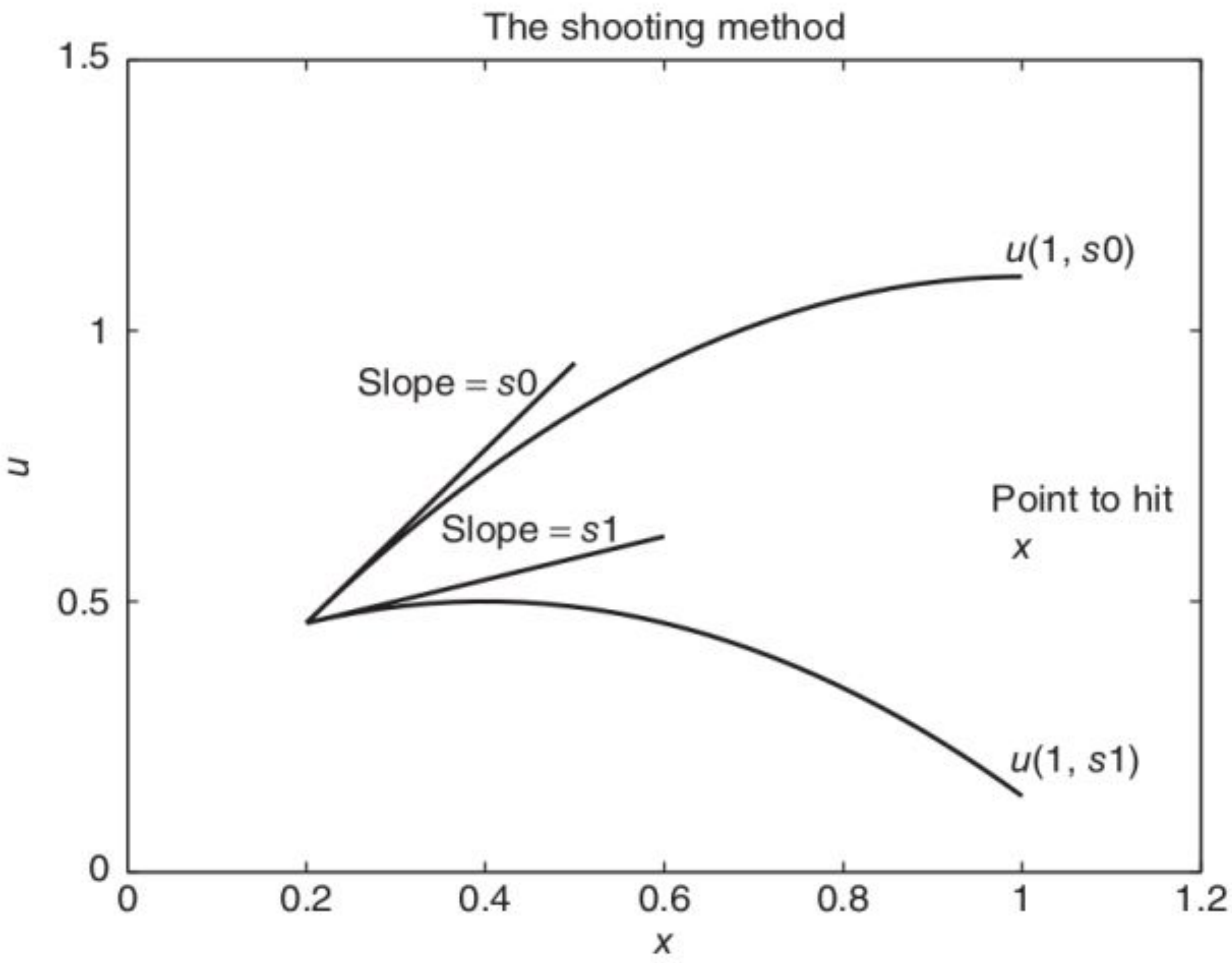
$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dx} = f(x, u_1, u_2) \end{cases} \qquad u_1(a) = \alpha, \qquad u_2(\alpha) = ?$$

Método de "shooting"

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dx} = f(x, u_1, u_2) \end{cases} \qquad u_1(a) = \alpha, \qquad u_2(a) = ?$$

- Se sabemos a segunda condição inicial, podemos resolver facilmente este problema de valor inicial.
- Vamos supor que a condição ausente é como $u_2(a) = s$.
- Agora podemos adivinhar s e verificar se a solução no ponto b é β ou não.
- Com tentativa e erro, podemos encontrar o s adequado para alcançar a solução desejada.

Método de “shooting”



Método de "shooting"

- Vamos tornar mais inteligente.

- Precisamos desaparecer a diferença entre a solução baseada em suposição ($u(b,s)$) e a condição de contorno β.

$$F(s) = u(b,s) - \beta = 0$$

- Podemos usar um método como método secante para resolver isso.

$$s_{i+1} = s_i - \frac{F(s_i)(s_i - s_{i-1})}{F(s_i) - F(s_{i-1})}$$

- Não podemos usar o método de Newton, porque precisamos $\frac{\mathrm{d}F}{ds}$ ou $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Exemplo 3

A equação de camada limite de Blasius é

$$2\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \qquad 0 \leq \eta < \infty$$

- Com condições

$$f(0) = 0, \qquad \frac{df}{d\eta}(0) = 0, \qquad \frac{df}{d\eta}(\infty) = 1$$

- Resolva esta equação com o método de “shooting”.

Exercícios

- 4.2.6
- 4.2.8