Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

Equações hiperbólicas

- Hoje vamos começar a estudar equações hiperbólicas. Só para lembrar, uma equação hiperbólica é definida como

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x,y)$$

$$hyperbolic \quad if \;\; b^2 - ac > 0$$

- Por exemplo (advection equation),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Equações hiperbólicas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Um conceito importante em EDPs hiperbólicas é a característica.
- Para esta equação, a característica é $\frac{dx}{dt} = a$
- Agora, usando a regra da cadeia, teremos

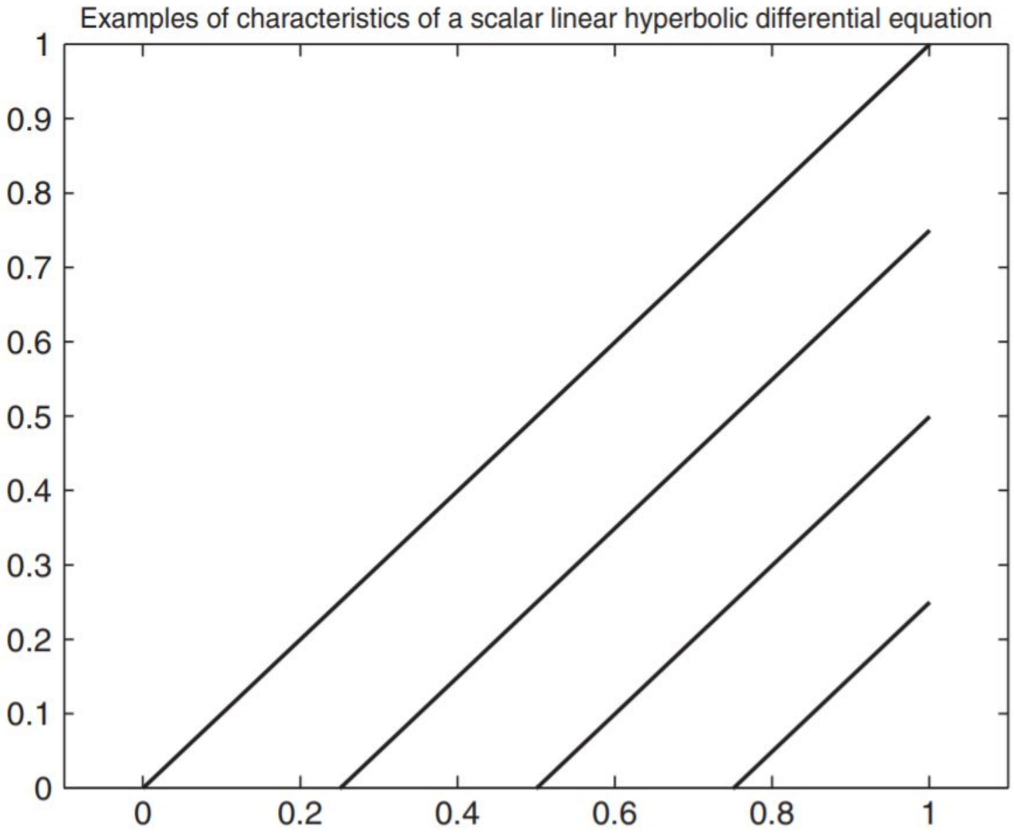
$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Significa ao longo da característica (linha), a solução permanece fixa no tempo.

Equações hiperbólicas

$$\frac{dx}{dt} = a \rightarrow x = at + b$$

- Para este problema, a característica é uma linha.
- Se tivermos o valor da função em t = 0, então temos a solução ao longo dessas linhas a qualquer momento.



Equações hiperbólicas

- Agora, considere o seguinte problema

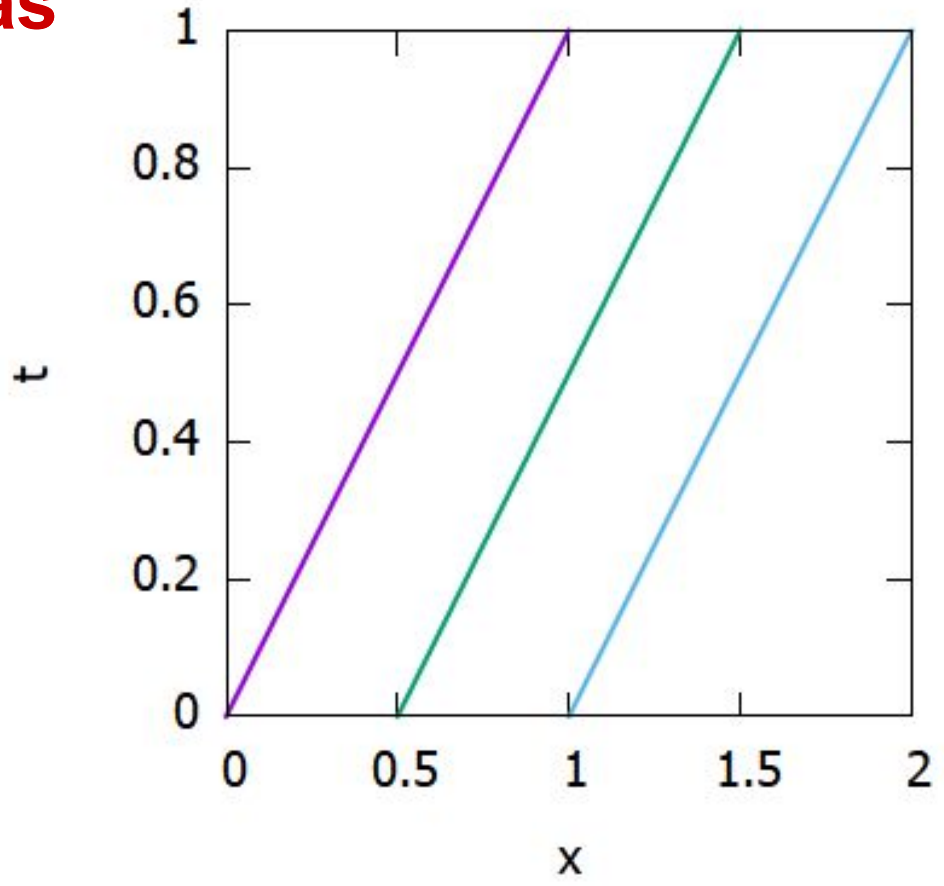
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1, a = 1 > 0$$

$$IC : u(x,0) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0.5 \\ 1 & if\ x > 0.5 \end{cases} \qquad BCs : \begin{matrix} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{matrix}$$

- Agora, a linha característica passando de (0.5,0) será

$$x = t + 0.5$$

Equações hiperbólicas



Equações hiperbólicas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1, a = 1 > 0$$

$$IC : u(x,0) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0.5 \\ 1 & if\ x > 0.5 \end{cases} \qquad BCs : \begin{matrix} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{matrix}$$

- Use a diferença central de segunda ordem para discretizar a equação.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} = -a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h_x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) \qquad \sigma = a\frac{h_t}{h_x}$$

Equações hiperbólicas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1, a = 1 > 0$$

$$IC : u(x,0) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0.5 \\ 1 & if\ x > 0.5 \end{cases} \qquad BCs : \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{array}$$

- Use a diferença central de segunda ordem para discretizar a equação.
- Este método é instável para qualquer valor de h.

Equações hiperbólicas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1, a = 1 > 0$$

$$IC : u(x,0) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0.5 \\ 1 & if\ x > 0.5 \end{cases} \qquad BCs : \begin{matrix} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{matrix}$$

- Agora use a diferença para trás.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} = -a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_x}$$

$$u_i^{n+1} = (1-\sigma)u_i^n + \sigma u_{i-1}^n \qquad \sigma = a\frac{h_t}{h_x}$$

Equações hiperbólicas

$$u_i^{n+1} = (1-\sigma)u_i^n + \sigma u_{i-1}^n \qquad \sigma = a\frac{h_t}{h_x}$$

- Nós chamamos este método Upwind. porque, o efeito vem da parte superior do fluxo.
- Para ter um método estável, precisamos ter

$$0 < \sigma \leq 1$$

- Isso é chamado de condição CFL.
- Se a velocidade é invertida, então precisamos reformular o método.

Equações hiperbólicas

$$u_i^{n+1} = (1-\sigma)u_i^n + \sigma u_{i-1}^n \qquad \sigma = a\frac{h_t}{h_x}$$

- Para ter um método estável, precisamos ter

$$0 < \sigma \leq 1$$

- Isso é chamado de condição CFL.
- Isso significa que a informação não pode viajar mais de um ponto, a cada vez.
- Esta é a condição de estabilidade para os métodos usados para solução de equações hiperbólicas.

Equações hiperbólicas

- Se a velocidade é invertida, então precisamos reformular o método.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1, a = -1 < 0$$

- Para esta situação, a discretização será

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h_t} = -a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_x}$$

$$u_i^{n+1} = (1+\sigma)u_i^n - \sigma u_{i+1}^n \qquad \sigma = a\frac{h_t}{h_x}$$

Equações hiperbólicas

- Para o caso geral, podemos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$a^{+} = max(a, 0) \quad a^{-} = min(a, 0)$$

$$u_x^{-} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_x} \qquad u_x^{+} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - h_t(a^{+}u_x^{-} + a^{-}u_x^{+})$$

Equações hiperbólicas

- Método de Lax-Friedrich é uma primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço:

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{\sigma}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

- É simétrico, não depende do **a**.
- É estável para $-1 \leq \sigma \leq 1$
- Preste atenção à diferença com o método FTCS.

Equações hiperbólicas

- O método Leapfrog é:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2h_t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h_x} = 0$$

- Este é um método de segunda ordem no tempo e no espaço.
- Tente este método no problema de teste com CFL = 1 e 0.5.

Equações hiperbólicas

- O método Lax-Wendroff é:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

- Este é um método de segunda ordem no tempo e no espaço.
- Tente este método no problema de teste com CFL = 1 e 0.5.

Equações hiperbólicas

- Repita os cálculos com a seguinte condição inicial

$$u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0.2}{0.03}\right)^2}$$

- Por que temos oscilações para a condição inicial anterior?
  Dispersion!

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2 h_t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equações hiperbólicas

- Vamos resolver a equação de Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

- com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$u(x,0) = cos(2\pi x) + 1$$

$$u(0,t) = u(1,t)$$

- Condição de contorno periódica

Equações hiperbólicas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

- Vamos usar o método upwind

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

- Condição de contorno periódica

$$u(0,t) = u(1,t)$$

$$u_0 = u_{N-1}$$

$$u_N = u_1$$

Equações hiperbólicas