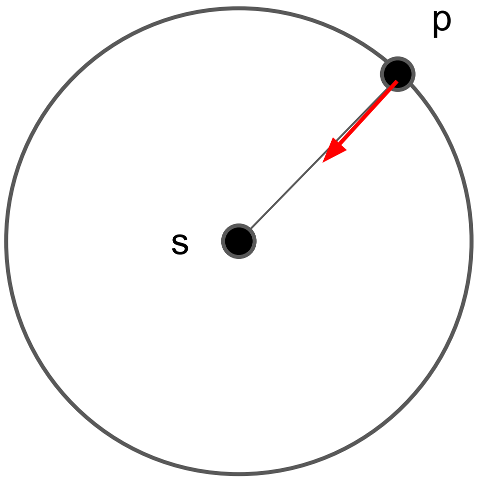
Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferencias

2020-PLE

A-12

Projeto 2



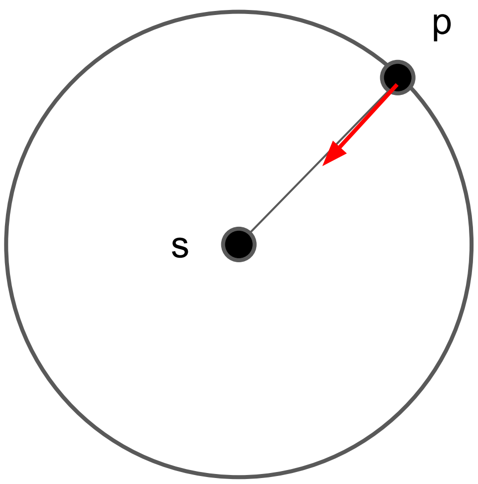
Gravidade $$|F_{p,s}| = G\frac{m_p m_s}{||r_p - r_s||^2}$$

Direção $$\vec{r} = \overrightarrow{r_s} - \overrightarrow{r_p} \longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$$

$$F_{p,s} = |F_{p,s}|\overrightarrow{e_r} = m_p \frac{d^2 r_p}{dt^2}$$

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} F_{i,j}$$

Projeto 2



Gravidade $$|F_{p,s}| = G\frac{m_p m_s}{||r_p - r_s||^2}$$

Direção $$\vec{r} = \overrightarrow{r_s} - \overrightarrow{r_p} \longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$$

$$F_{p,s} = |F_{p,s}|\overrightarrow{e_r} = m_p\frac{d^2 r_p}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{r_s} = \alpha i + \beta j \qquad \overrightarrow{r_p} = \gamma i + \delta j$$

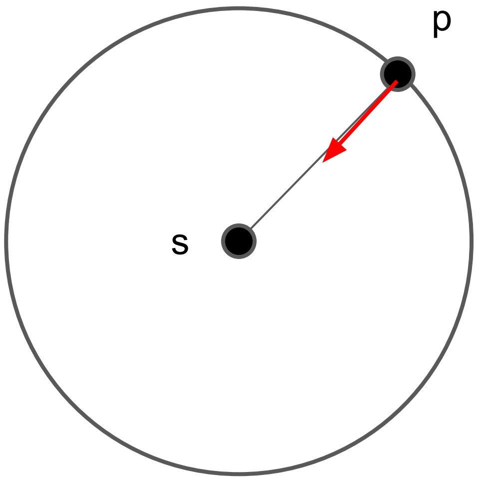
$$\vec{r} = (\alpha - \gamma)i + (\beta - \delta)j$$

$$||\vec{r}|| = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2}$$

$$m_p\frac{d^2\alpha}{dt^2} = (G m_p m_s)\frac{\alpha - \gamma}{||\vec{r}||^3}$$

Projeto 2

$$m_p \frac{d^2\alpha}{dt^2} = (Gm_p m_s)\frac{\alpha-\gamma}{||\vec{r}||^3}$$



Nós temos essas equações:

1. Movimento do planeta X (alpha)
2. Movimento do planeta Y (beta)
3. Movimento do sul X (gamma)
4. Movimento do sul Y (delta)

Temos 4 equações e 4 desconhecimentos ….

Você deve assumir que todos os planetas e sol têm a mesma massa.

PVC linear de dois pontos

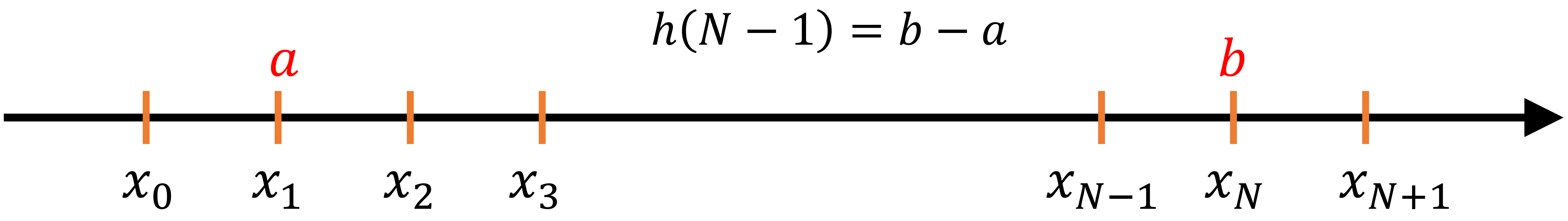
- Queremos resolver isso

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right) + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

- com as seguintes condições de contorno

$$\kappa(a)\frac{du}{dx}(a) = \alpha_1 u(a) + \beta_1, \qquad \kappa(b)\frac{du}{dx}(b) = \alpha_2 u(b) + \beta_2$$

- Nós usamos a seguinte grade



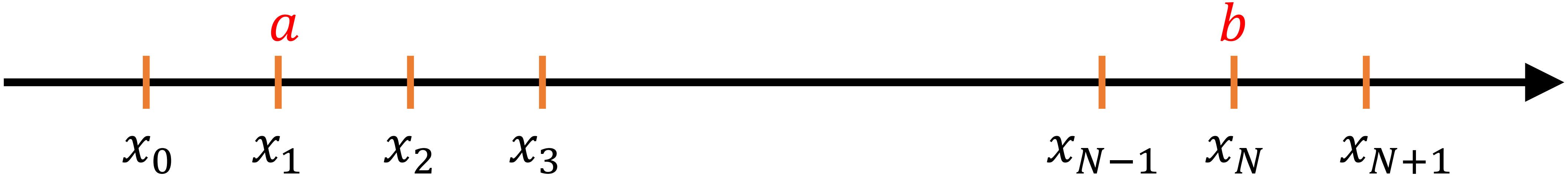
PVC linear de dois pontos

- Queremos resolver isso

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right)+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x),\qquad a\le x\le b$$

- Usando a diferença central para os pontos internos, teremos

$$-\frac{1}{h}\left(\kappa\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-\kappa\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$
$$+p(x_i)\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q(x_i)u_i=f(x_i)$$



PVC linear de dois pontos

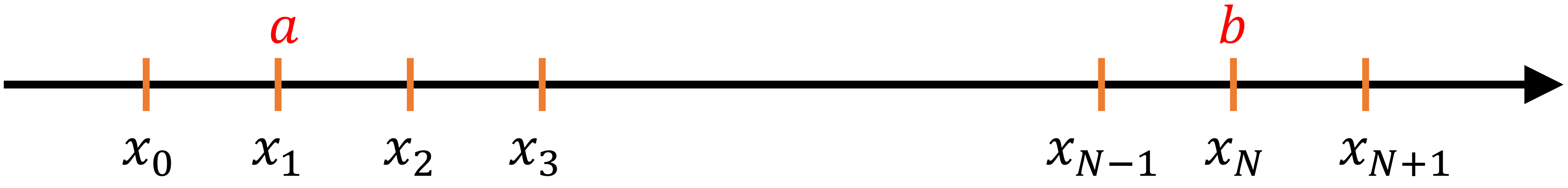
- As condições de contorno

$$\kappa(a)\frac{du}{dx}(a) = \alpha_1 u(a) + \beta_1, \qquad \kappa(b)\frac{du}{dx}(b) = \alpha_2 u(b) + \beta_2$$

- Usando a diferença central para as condições

$$\kappa(x_1)\frac{u_2 - u_0}{2h} - \alpha_1 u_1 = \beta_1$$

$$\kappa(x_N)\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} - \alpha_2 u_N = \beta_2$$



Problema não linear da BVP

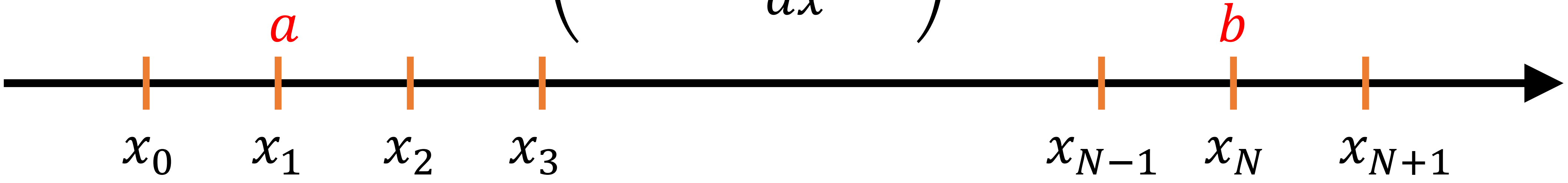
- Considere que queremos resolver o seguinte problema,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right)$$

com condições de contorno como

$$g_1\left(a, u(a), \frac{du}{dx}(a)\right) = 0$$

$$g_2\left(b, u(b), \frac{du}{dx}(b)\right) = 0$$



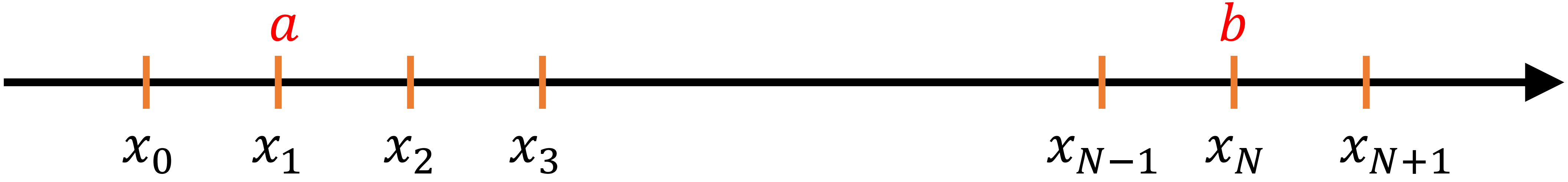
Problema não linear da BVP

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \qquad g_1\left(a, u(a), \frac{du}{dx}(a)\right) = 0$$

- Usando a seguinte grade nós temos

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - f\left(x, u, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) = 0, \qquad i = 1, \dots, N$$

$$g_1\left(a, u(a), \frac{u_2 - u_0}{2h}\right) = 0, \qquad g_2\left(b, u(b), \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h}\right) = 0$$



Problema não linear da BVP

- Podemos formular estas equações como $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0$.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} g_1\left(a, u(a), \dfrac{u_2 - u_0}{2h}\right) \\ \vdots \\ \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - f\left(x, u, \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) \\ \vdots \\ g_2\left(b, u(b), \dfrac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix}$$

- Este é um “root finding” não linear. Podemos usar métodos como o método de Newton para resolvê-lo.

Equações diferencias parciais elípticas

- Ainda não falamos sobre classificação das equações.
- Portanto, sabia que as equações elípticas surgem em um problema de equilíbrio ou estacionário.
- Problemas que são independente do tempo.
- Por exemplo, equação de Poisson

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega$$

- Ou Condução de calor estacionário, como

$$-\nabla(\kappa \nabla T) = 0$$

Equações diferencias parciais elípticas

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega$$

- Para completar o problema, precisamos de condições de contorno.
- Dirichlet:

$$u = g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

- Nuemann:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

Isso significa a derivada normal ao contorno.

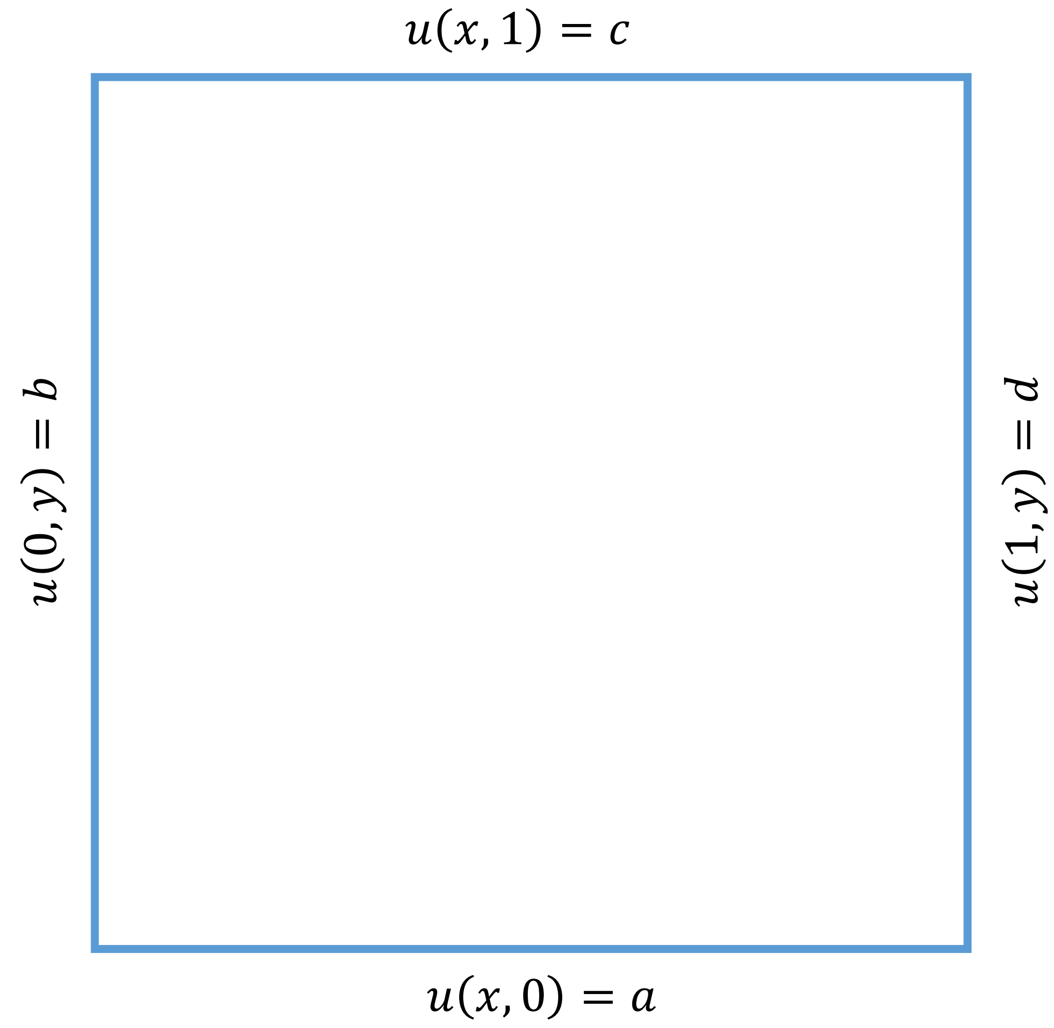
- Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u + g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

Equações diferencias parciais elípticas

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega$$

- O método da solução de diferenças finitas é semelhante ao que estudamos anteriormente.
- Considere que nosso domínio é um quadrado.
- E as condições de contorno são Dirichlet. Suponha que em cada borda desse quadrado a função seja fixa.



Equações diferencias parciais elípticas

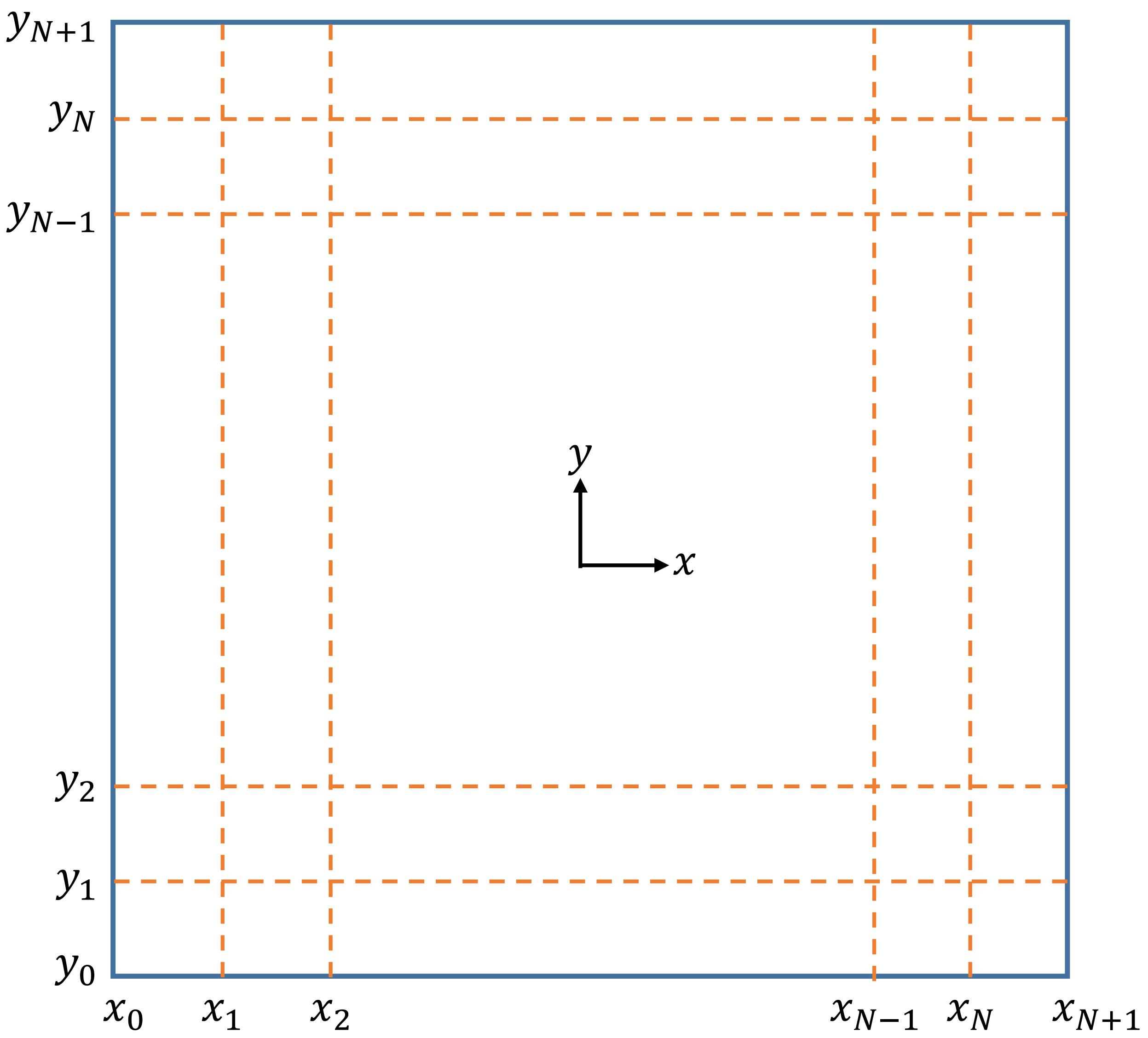
- Primeiro precisamos definir a grade.

- Como no caso 1D, podemos definir o grade como

$$h = \frac{1}{N}$$

$$x_i = h \times i$$

$$y_j = h \times j$$



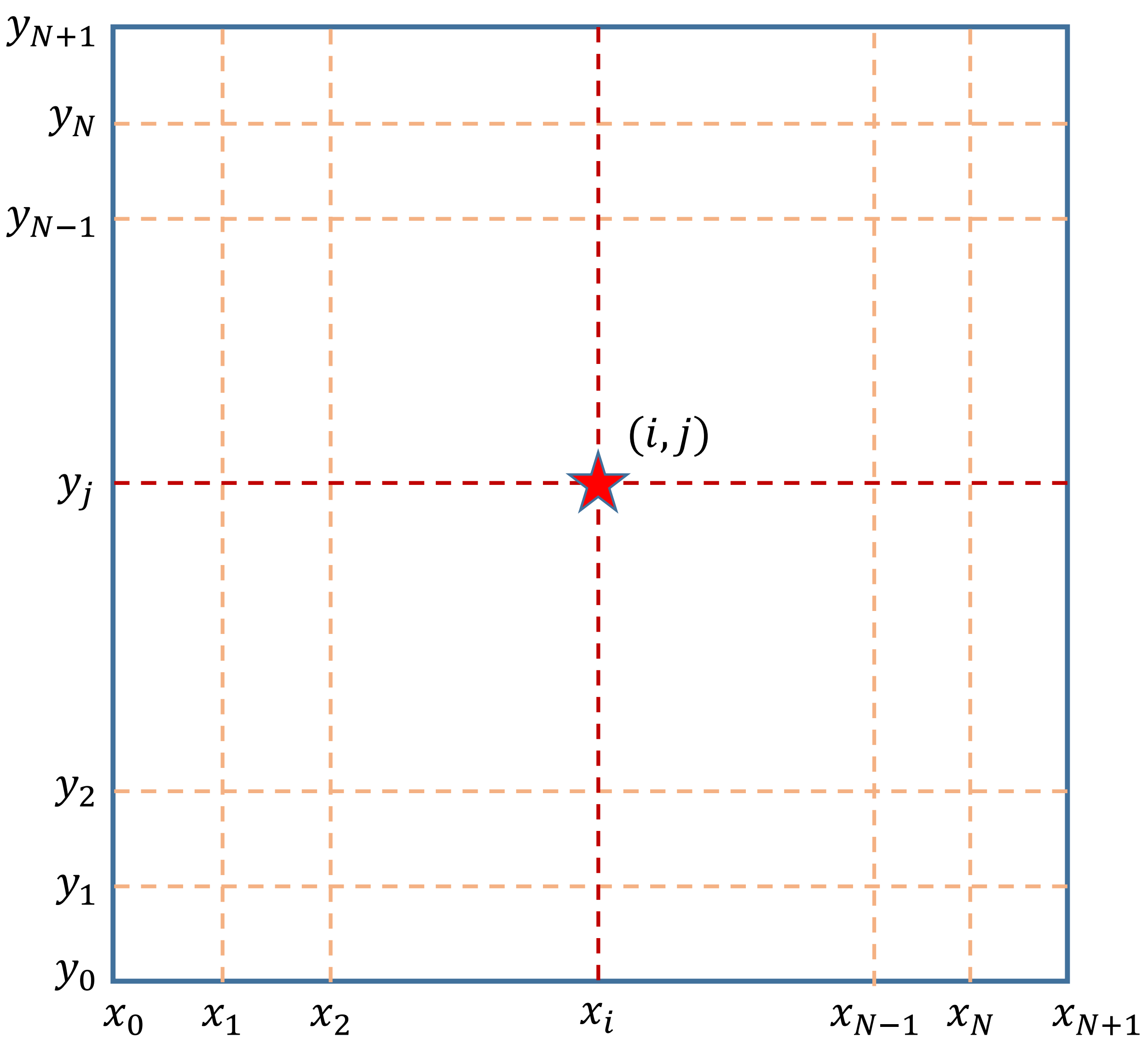
Equações diferencias parciais elípticas

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

- Podemos usar a fórmula de diferença central novamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$



Equações diferencias parciais elípticas

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

- Podemos usar a fórmula de diferença central novamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

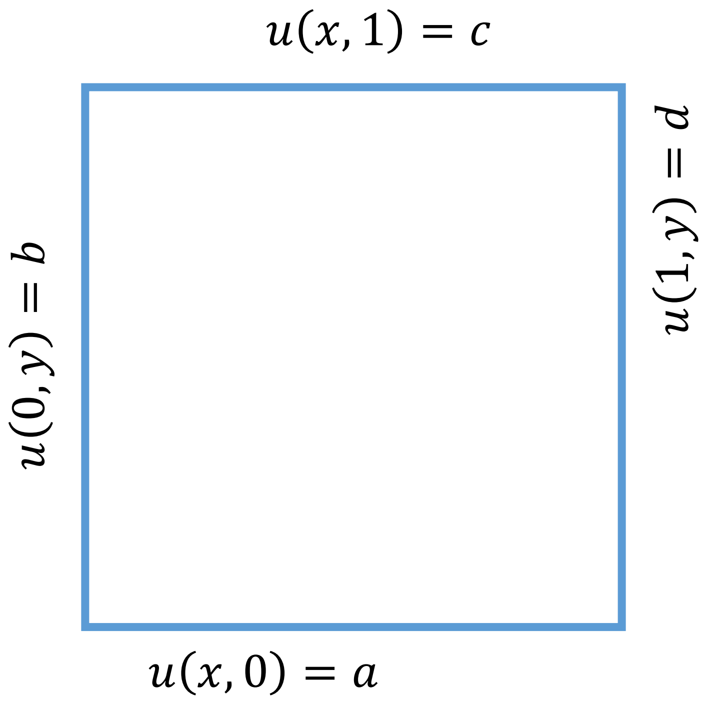
- Agora, para o ponto (i, j), temos

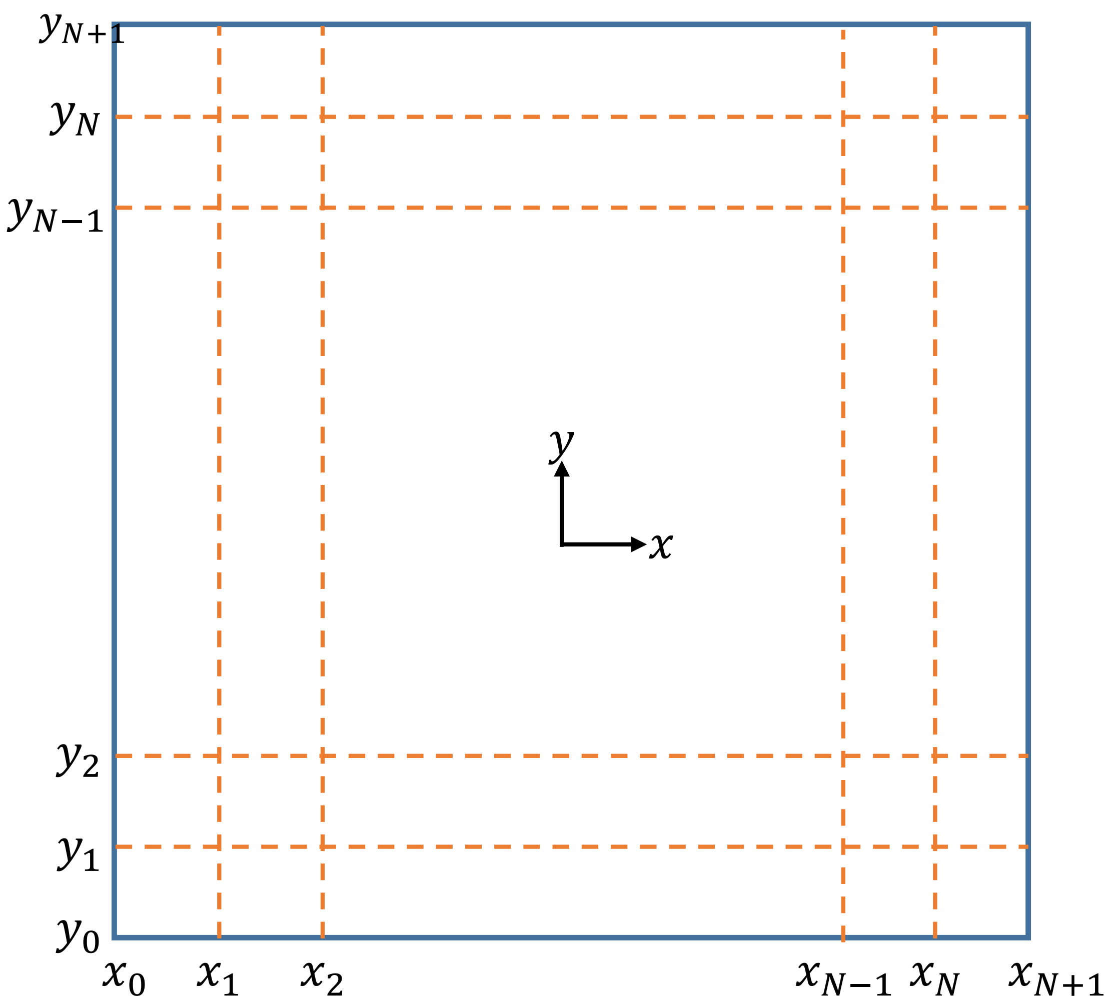
$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2\, f(x_i, y_i)$$

Condições de contorno

- Vamos ver o condições de contorno:

$$u_{i,0} = a,$$
$$u_{0,j} = b,$$
$$u_{i,N+1} = c,$$
$$u_{N+1,j} = d$$





Renumeração

- É mais fácil usar n em vez (i, j) para identificar os nós.

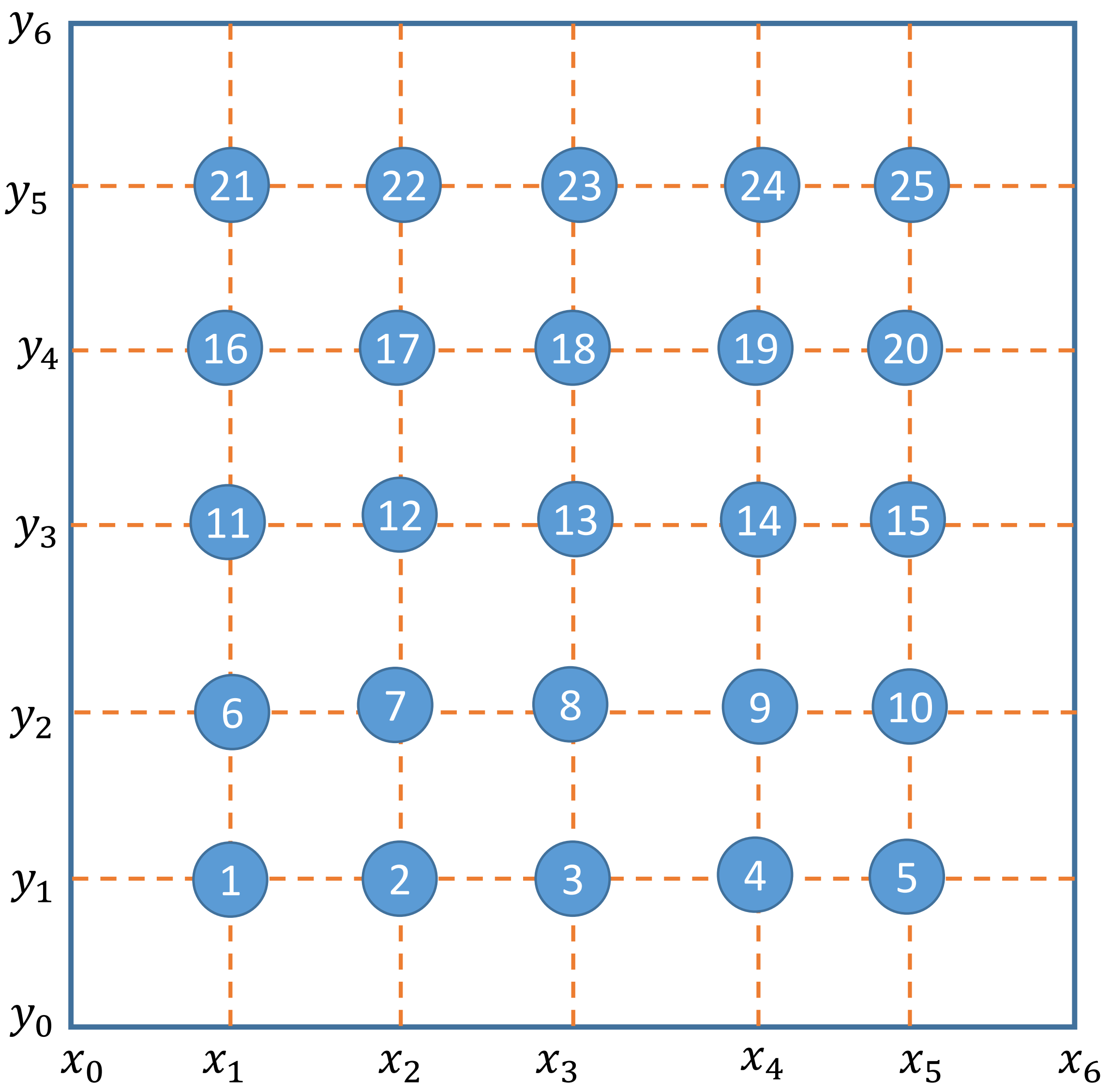
$$u = i + (j-1) \times N$$

- Agora, a solução é

$$u_n = u_{i,j}$$

- Podemos transformar a equação discretizada no novo sistema de numeração, como

$$4u_n - u_{n-1} - u_{n+1} - u_{n-N} - u_{n+N} = h^2 f_n$$



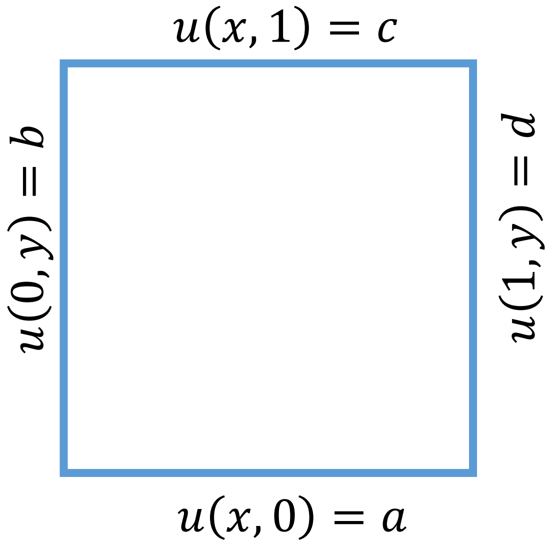
Condições de contorno

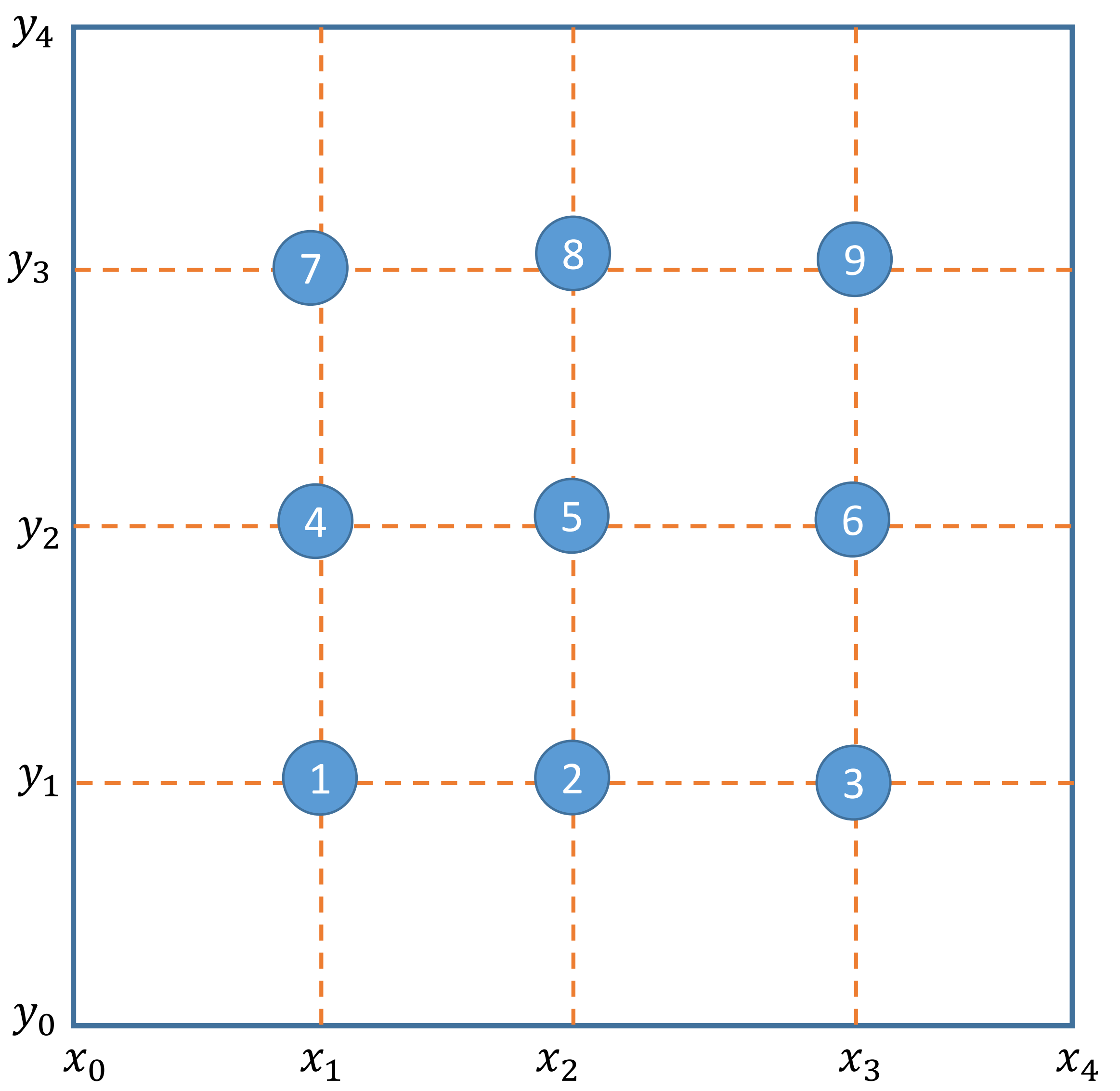
$$4u_n - u_{n-1} - u_{n+1} - u_{n-N} - u_{n+N} = h^2 f_n$$

- Agora, os efeitos das condições de contorno serão como

$$4u_1 - b - u_2 - a - u_4 = h^2 f_1$$

$$4u_9 - u_8 - d - u_6 - c = h^2 f_9$$





Equações diferencias parciais elípticas

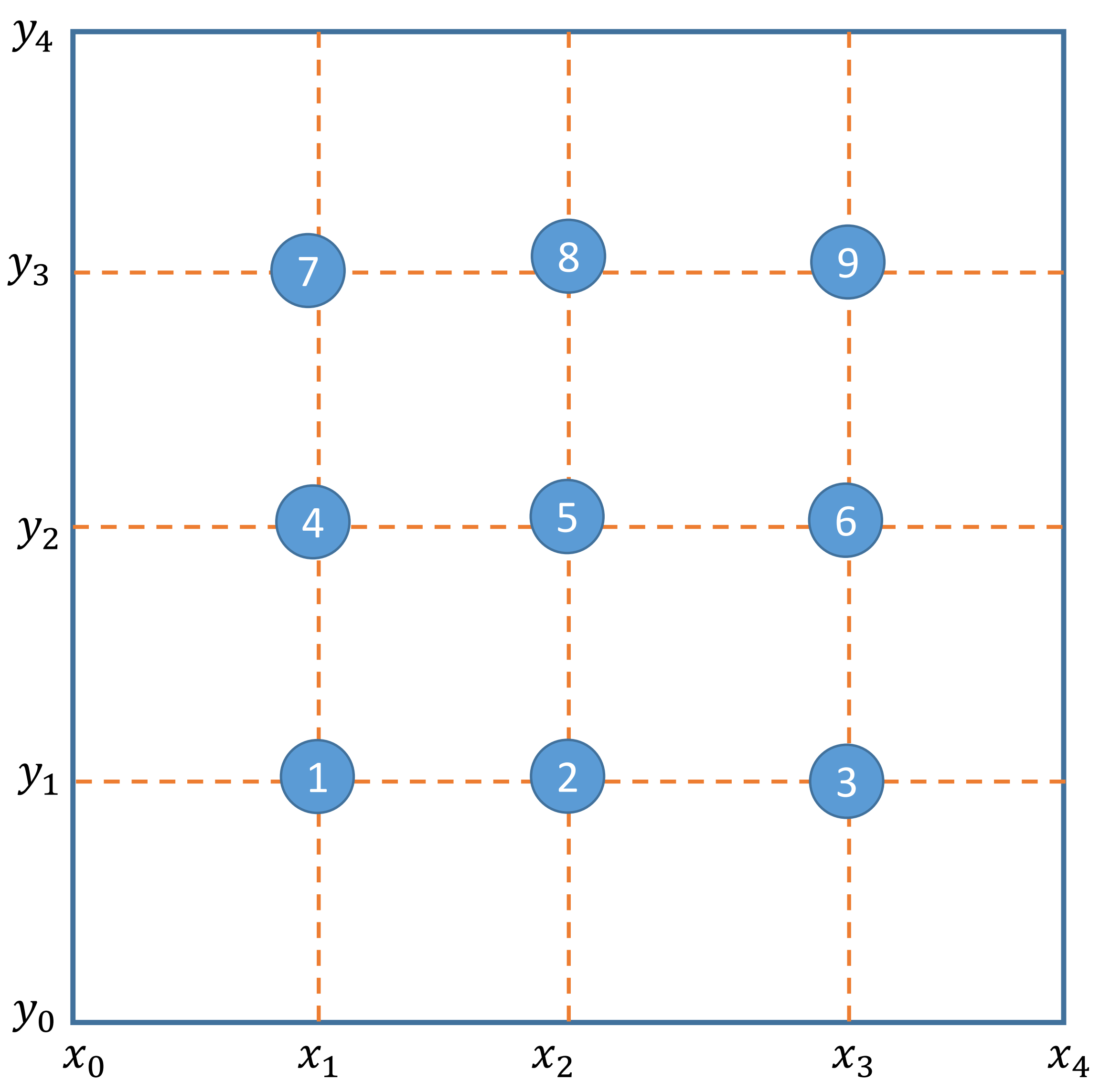
- Nós temos $N \times N$ equações para N^2 desconhecimentos.
- Podemos formar um sistema linear como

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

- Onde o vetor $\boldsymbol{u}$ é

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_{N^2-1}, u_{N^2}]^T$$

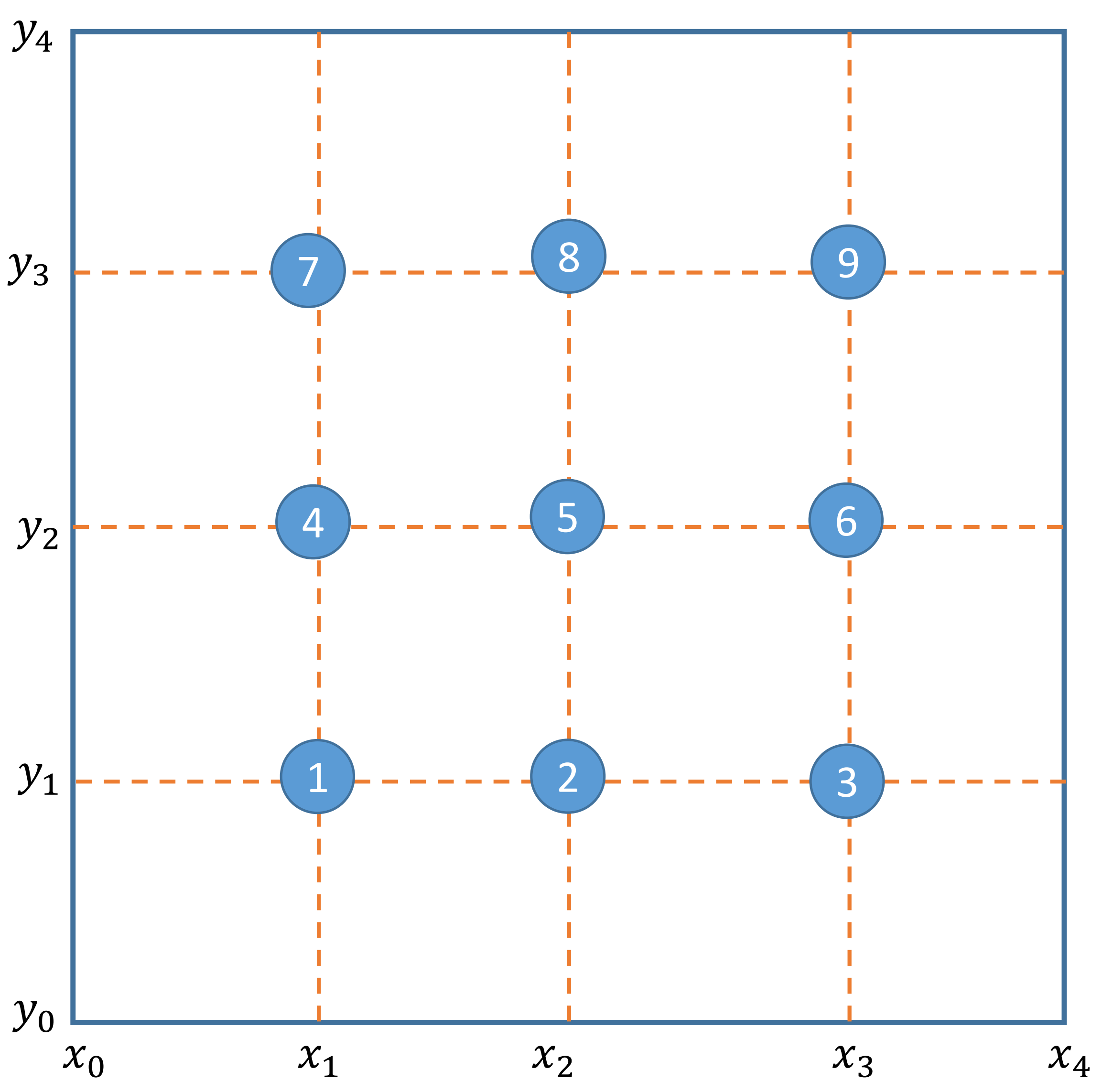
- E matriz A e uma matriz $N^2 \times N^2$.



Equações diferencias parciais elípticas

$$4u_n - u_{n-1} - u_{n+1} - u_{n-N} - u_{n+N} = h^2 f_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



Condições de contorno

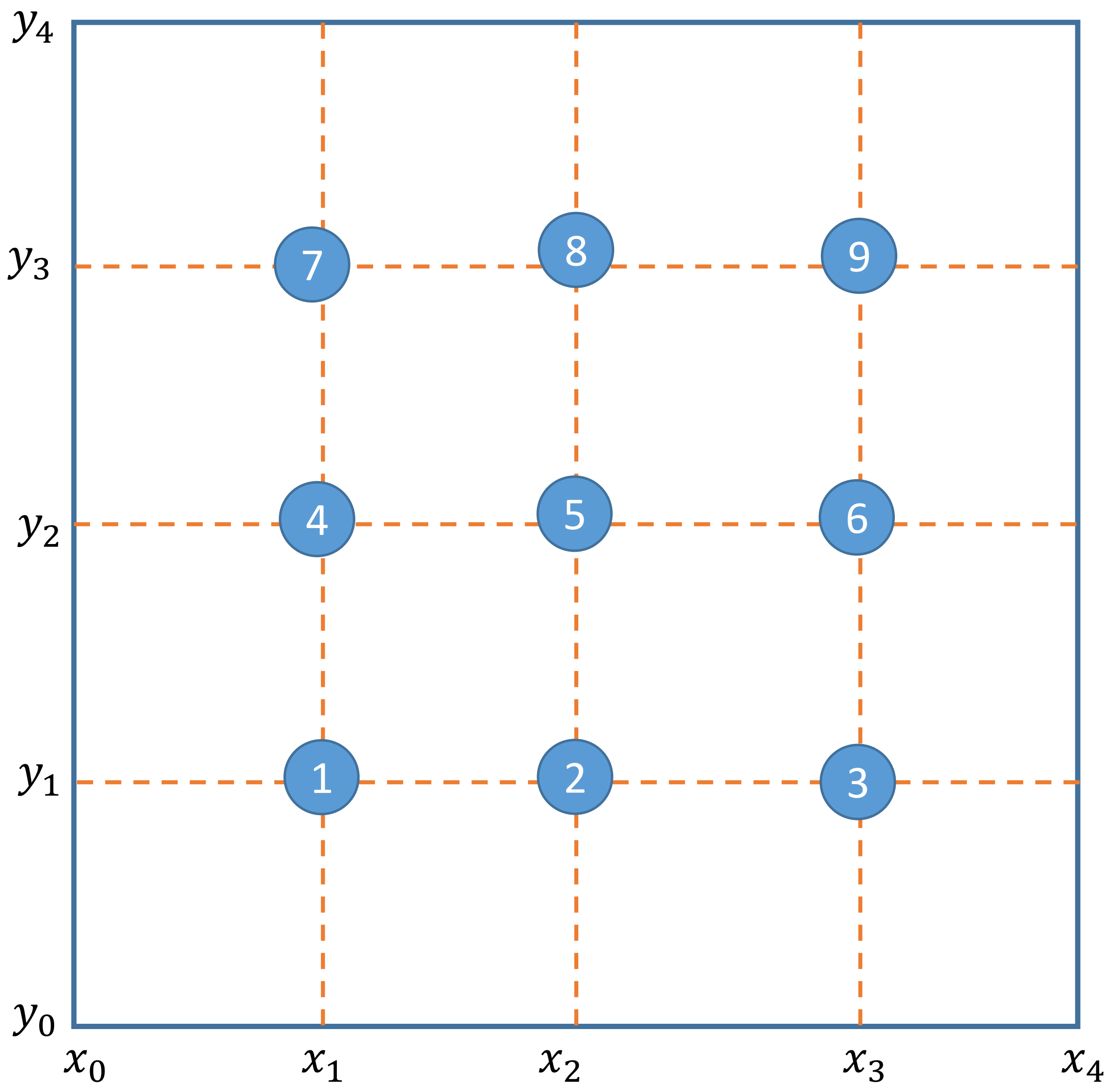
$$4u_n - u_{n-1} - u_{n+1} - u_{n-N} - u_{n+N} = h^2 f_n$$

- Os efeitos das condições de contorno entram no vetor f.

$$4u_1 - b - u_2 - a - u_4 = h^2 f_1$$

$$4u_9 - u_8 - d - u_6 - c = h^2 f_9$$

$$f = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + a + b \\ h^2 f_2 + a \\ h^2 f_3 + a + d \\ h^2 f_4 + b \\ h^2 f_5 \\ h^2 f_6 + d \\ h^2 f_7 + b + c \\ h^2 f_8 + c \\ h^2 f_9 + c + d \end{bmatrix}^T$$



Exemplo 1

- Vamos resolver

$$\nabla^2 u = 1, \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$