Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 6

EXGSE060 – EXGSE069

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 05

EXGSE060 – Louvain, juillet 2004, série 1.

On vous demande de participer à la conception d'un jouet éducatif pour bébé. Ce jouet à pour but de le familiariser avec les formes géométriques et d'anticiper sa préparation à l'examen d'entrée ingénieur. Le jouet est constitué d'une surface percée de trois formes : (1) un disque de diamètre *d*. (2) un carré de côté *c* et (3) un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse *h* ?

a) On demande premièrement de déterminer toutes les relations existant entre *d*, *c* et *h* de façon à ce que l'enfant ne puisse insérer une sphère de diamètre *d*, un cube de côté *c* et un prisme à base triangulaire (rectangle isocèle) d'hypoténuse *h* (la hauteur de ce prisme est grande par rapport à *h*) que dans la forme qui lui corresponde
b) On demande ensuite un exemple chiffré de valeurs possibles de *d*, *c* et *h*

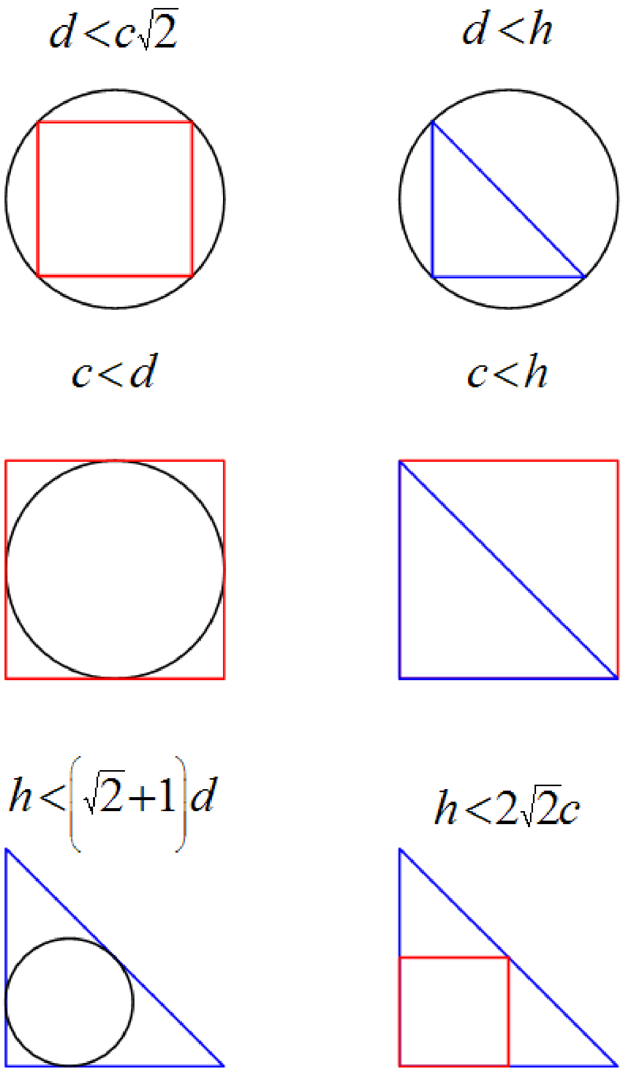


Fig 1

Figure 1

Pour que le carré ne puisse entrer dans le cercle, il faut $d < c\sqrt{2}$

Pour que le triangle ne puisse entrer dans le cercle, il faut $d < h$

De même, il faut $c < d$ et c < h, pour le carré;

et il faut $h < \left(\sqrt{2}+1\right)d$ $\left(\text{voir ci-dessous}\right)$ et $h < 2\sqrt{2}c,$ pour le triangle.

Figure 2

Supposons $d = 1 \rightarrow \begin{cases} c_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7 \text{ et } c_{\max} = 1 \\ h_{\min} = 1 \text{ et } h_{\max} = \sqrt{2}+1 \approx 1.4 \end{cases}$

Mais c et h sont aussi liés :

$$\begin{cases} c_{\min} = 0.7 \rightarrow \begin{cases} h_{\min} = 0.7 \\ h_{\max} = 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 \end{cases} \\ c_{\max} = 1 \quad \rightarrow \begin{cases} h_{\min} = 1 \\ h_{\max} = 2\sqrt{2} \approx 2.8 \end{cases} \end{cases}$$

La figure 2 résume les contraintes. On en déduit : $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} d < c < d \\ d < h < 2d \end{cases}$

Soit par exemple $c = 3\,cm, \;\; d = 4\,cm, \;\; h = 5\,cm$

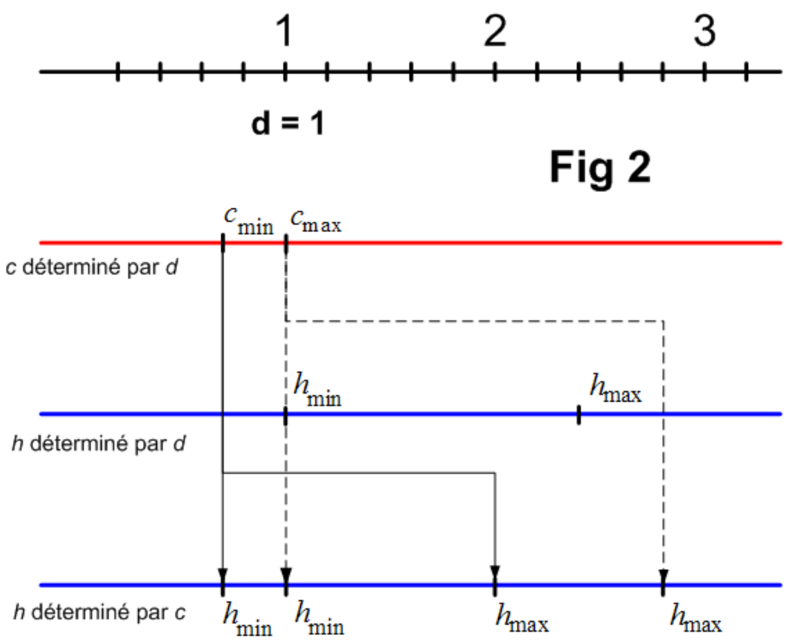


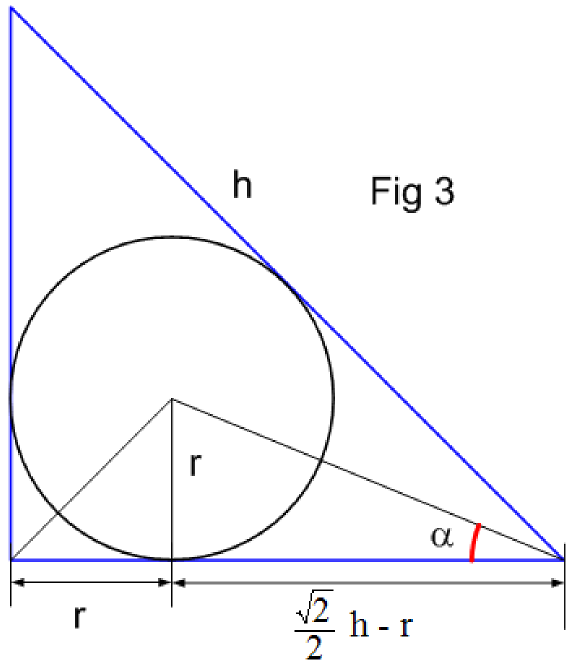
Figure 3

Démontrons que h doit être inférieur à $\left(\sqrt{2}+1\right)d$

On a $\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$

Donc le rayon r du cercle inscrit est : $r = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}h - r\right)$

$\rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}h \rightarrow$ or $d = 2r \rightarrow h = \left(\sqrt{2}+1\right)d$

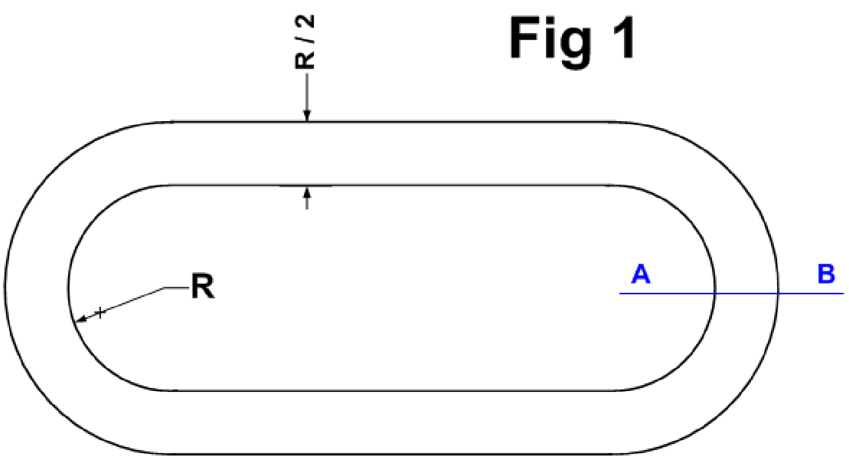


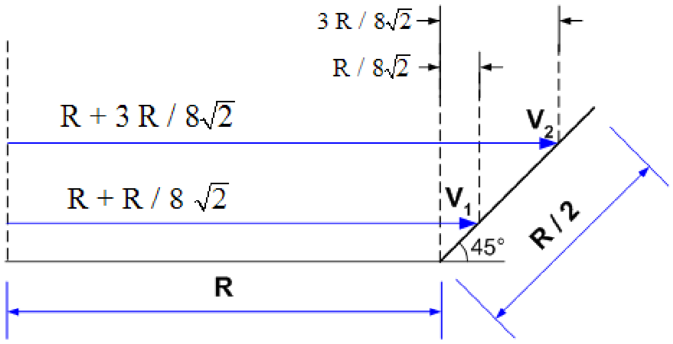
Le 26 mars 2005

EXGSE061– Louvain, juillet 2004, série 2.

On vous demande de participer à la conception d'un anneau de vitesse pour voitures de course. Cet anneau de vitesse est constitué de deux lignes droites de longueur L et de deux virages semi circulaires dont le rayon intérieur est égal à R . La piste possède une largeur constante égale à $R/2$. Pour améliorer la tenue de route, l'ensemble de la piste est incliné à 45°. (L'extérieur de la piste est relevé par rapport à l'intérieur). La piste est divisée en deux bandes de même largeur.

- Des courses sur un tour de piste sont organisées en duel entre deux voitures, avec une voiture sur chaque bande. Les commissaires de course désirent connaître l'avance à donner à la voiture située sur la partie haute de la piste pour qu'elle effectue exactement la même distance que l'autre voiture. On considère que les voitures roulent au milieu de chaque bande.
- Quel est le volume total de béton nécessaire pour supporter l'ensemble de la piste ?





Sur la partie droite, les distances parcourues par les deux voitures sont les mêmes.
Les deux virages à 180° peuvent être "accolés". Comme le montre la figure 1,

la voiture V_1 tourne selon un cercle de rayon $R+\frac{R}{8\sqrt{2}}$, et la voiture V_2 selon un cercle $R+\frac{3R}{8\sqrt{2}}$

La différence des distances parcourues par les voitures est donc pour un tour :

$$d = 2\pi\left[\left(R+\frac{3R}{8\sqrt{2}}\right)-\left(R+\frac{R}{8\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$$

L'avance a donner à V_2 est donc $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$

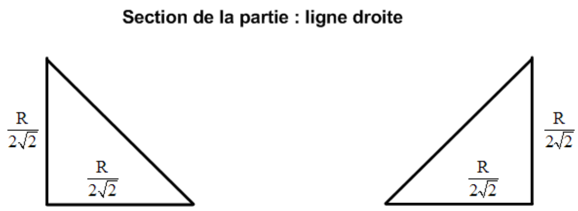


Fig 2

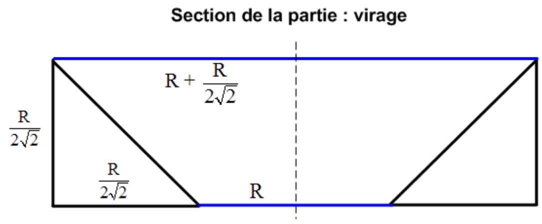


Figure 2

Sur la partie droite la quantité de béton nécessaire pour supporter la piste est :

$$V_d = \left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)^2 L = \frac{R^2 L}{8}$$

Pour les deux virages, la quantité de béton peut être calculée comme la différence entre le volume d'un cylindre et d'un tronc de cône.

$$V_{cylindre} = \pi\frac{R}{2\sqrt{2}}\left(R+\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi R^3}{32}\left(9\sqrt{2}+8\right)\approx 2.035R^3$$

$$V_{tronc} = \frac{1}{3}\pi\frac{R_3}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+1\right]=\frac{\pi R^3}{96}\left(25\sqrt{2}+12\right)\approx 1.55R^3$$

$$\rightarrow V_{virages} = V_{cylindre}-V_{tronc} = \frac{\pi R^3}{32}\left(9\sqrt{2}+8\right)-\frac{\pi R^3}{96}\left(25\sqrt{2}+12\right)=\frac{\pi R^3}{48}\left(\sqrt{2}+6\right)\approx 0.485R^3$$

Et finalement :

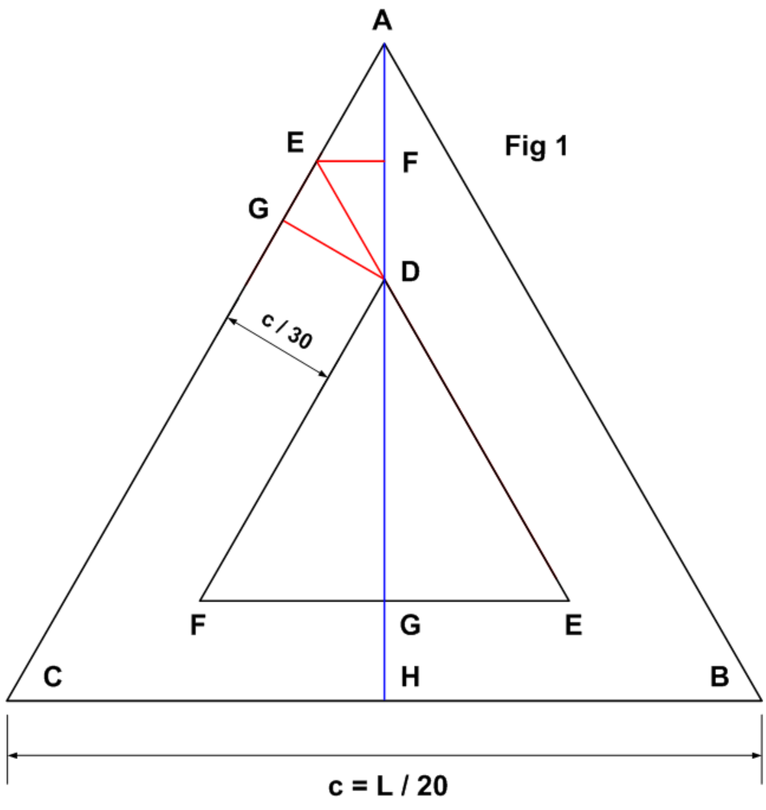
$$V_{total} = V_d + V_{virages} = \frac{R^2 L}{8}+\frac{\pi R^3}{48}\left(\sqrt{2}+6\right)=\frac{R^2}{48}\left[8L+\pi R\left(\sqrt{2}+6\right)\right]$$

$$\approx R_2\left(\frac{L}{6}+0.485R\right)$$

Le 26 mars 05

EXGSE062– Louvain, septembre 2004.

On extrude (« pousse ») un barreau cylindrique plein de longueur l et de diamètre $L / 10$ à travers une filière (« ouverture ») afin d'obtenir un profilé creux (« tube ») dont les sections extérieure et intérieure forment un triangle équilatéral. Le côté de la section $c = L / 20$. L'épaisseur du profilé est égale à $c / 30$. On demande d'exprimer la longueur du profilé L_p qui sera obtenu en fonction L.



Calculons la surface du tube : $S_{tube} = S_{ABC} - S_{DJK}$

Sur la figure 1, on voit que les triangles rectangles GED et EFD sont égaux.

On a donc : $GD = DF = FA = GH = \dfrac{c}{30} \rightarrow DG = AH - 3GH$

Or $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c \rightarrow DG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c - \dfrac{c}{10} = c\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{10}\right)$

D'autre part, $S_{DJK} = S_{ABC}\dfrac{DG^2}{AH^2}$ avec $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$$\rightarrow S_{DJK} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \frac{c^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{10}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}$$

et donc $S_{tube} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2\left(1 - \dfrac{4}{3}.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{10}\right)^2\right) = \dfrac{c^2}{10}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{30}\right)$

Ou en fonction de L : $S_{tube} = \dfrac{L^2}{4000}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{30}\right)$

Le volume du barreau est : $V = \dfrac{\pi L^3}{400}$

La longueur du profilé sera donc de : $L_p = \dfrac{V}{S_{tube}} = \dfrac{\dfrac{\pi L^3}{400}}{\dfrac{L^2}{4000}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{30}\right)}$

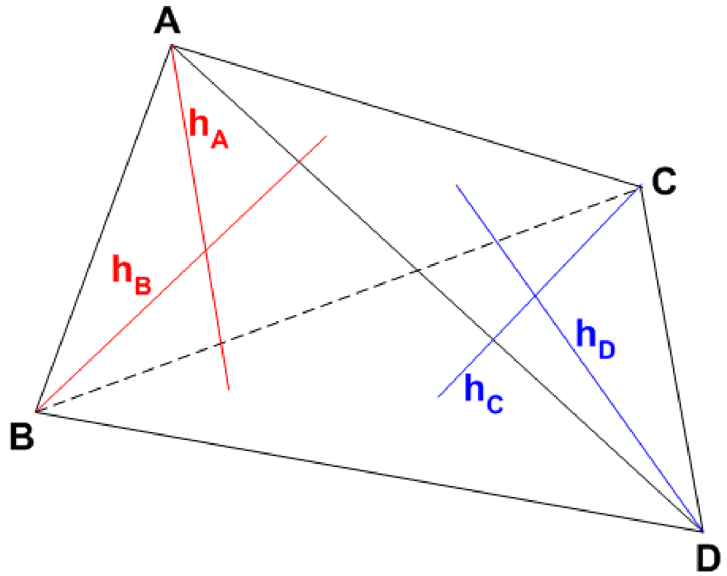
$$\rightarrow \boxed{L_p = \frac{100}{299}\pi L\left(30 + \sqrt{3}\right) \approx 33.34L}$$

Le 26 mars 05

EXGSE063 – Liège, septembre 2004.

On considère un tétraèdre $ABCD$. On note respectivement h_A , h_B , h_C et h_D les hauteurs du tétraèdre issues des sommets A, B, C et D. On suppose que h_A et h_B sont sécantes.

1. Montrer que les droites AB et CD sont orthogonales.
2. Montrer que h_C et h_D sont sécantes.



Nous reprenons la solution proposée par l'université.
On utilisera les deux propositions suivantes :

- (P_1) Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire ou orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- (P_2) Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale ou perpendiculaire à deux sécantes de ce plan.

a) Les droites h_A et h_B sont sécantes. Elles déterminenet donc un unique plan π.
Par définition, h_A est perpendiculaire au plan BCD.
Par (P_1), on obtient que h_A est orthogonale ou perpendiculaire à CD.
De manière similaire, on obtient que h_B est orthogonale ou perpendiculaire à CD.
Puisque h_A et h_B sont sécantes, on peut utiliser (P_2) et CD est perpendiculaire à π.
Puisque $A \in \pi$ et $B \in \pi$, on a $AB \subset \pi$ et par (P_1) AB et CD sont orthogonales.

Note : Méthode alternative
Soit $E = h_A \cap h_B$. On $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} \rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{CD}$
Or $h_A \perp$ plan $BCD \rightarrow h_A \perp CD \rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CD} = 0$. De même : $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{CD} = 0$
$\rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \rightarrow AB$ et CD sont orthogonales.

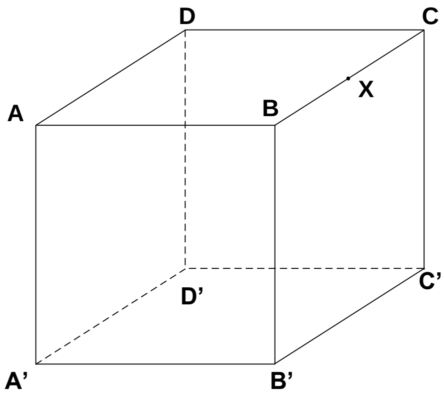
b) Si h_c coïncide avec CD, la thèse est évidente. Dans le cas contraire, ces droites sont sécantes et déterminent donc un plan π_1.
Par a), on a $AB \perp CD$. De plus, par définition et (P_1), on a $h_C \perp AB$, donc par (P_2) on a $AB \perp \pi_1$.
Par définition, $h_D \perp ABC$, donc par (P_1), on a $h_D \perp AB$. Ceci implique que $h_D // \pi_1$.
Et puisque $D \in \pi_1$, $h_D \subset \pi_1$ (Si une droite et un plan sont parallèles et ont un point commun, alors la droite est incluse dans le plan).
Les droites h_C et h_D sont coplanaires. Il reste à montrer qu'elles ne sont pas parallèles.
Puisque h_C et h_D sont respectivement perpendiculaires à ABD et à ABC, si elles sont parallèles, ces deux plans le seraient également. Ils seraient alors confondus (puisqu'ils ont le point A en commun), ce qui est absurde.

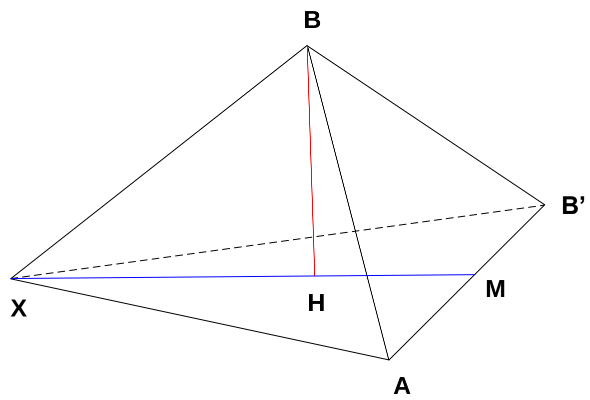
Le 23 avril 05

EXGSE064 – **Liège, juillet 2005.**

On considère un cube *ABCD A'B'C'D'* et un point *X* sur l'arête [*B,C*], distinct de *B.* Dans le tétraèdre *BAB'X*, on note *H* le pied de la hauteur issue de *B*.

3. Montrer que *H* est l'orthocentre *M* le milieu de *AXB'*.
4. On suppose que *X* = *C* et on note *M* le milieu de [*A, B'*]
   Exprimer $\left|\overrightarrow{MH}\right|$ en fonction de $\left|\overrightarrow{BX}\right|$

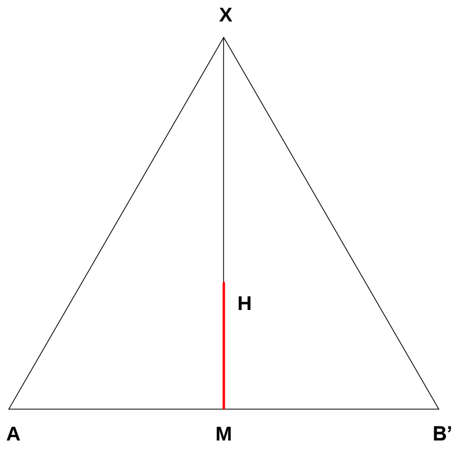




1) $\left.\begin{array}{l} XB \perp \text{plan } ABB' \rightarrow AB' \underline{\perp} XB \\ BH \perp \text{plan } XB'A \rightarrow AB' \underline{\perp} BH \end{array}\right\} \rightarrow AB' \perp \text{plan } XBH \rightarrow AB' \perp XH$

Donc XH est une hauteur du triangle $XB'A$

On recommence pour XB' et XA pour conclure que H est l'orthocentre du triangle $XB'A$



2) Si X est en C, alors le triangle $XB'A$ est équilatéral et H est aussi le centre de gravité du triangle $\rightarrow \left| \overrightarrow{MH} \right| = \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{XM} \right|$

Or si $\left| \overrightarrow{BX} \right| = c$ est la longueur d'une des arêtes du cube :

$\left| \overrightarrow{AX} \right| = \sqrt{2}c$, $\left| \overrightarrow{AM} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}c \rightarrow \left| \overrightarrow{MH} \right| = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 - \frac{c^2}{2}} = \frac{c}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$

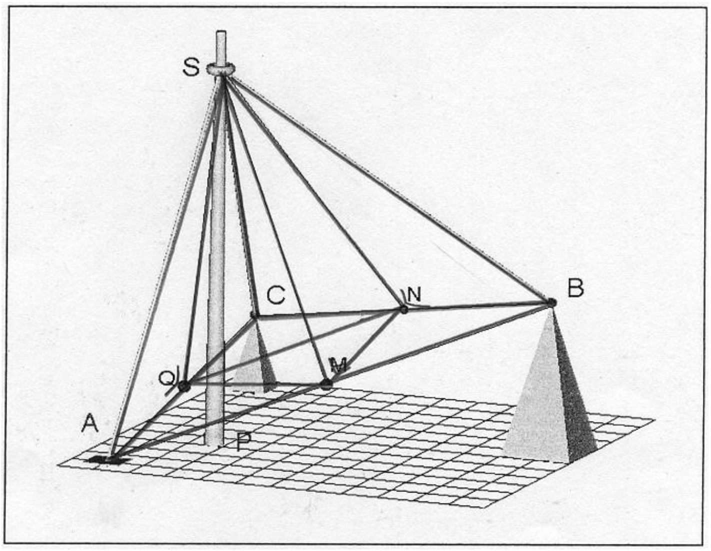
Le 7 août 05

EXGSE065 – Mons, juillet 2005.

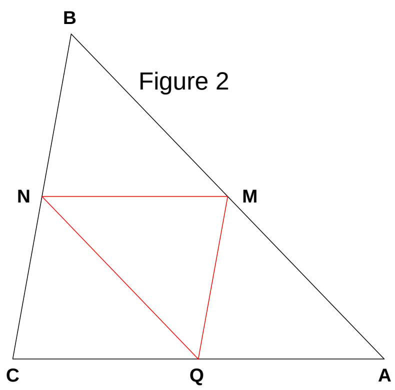
Sur un terrain plan et horizontal, il existe 3 massifs d'ancrage munis d'anneaux permettant d'y attacher les extrémités de 3 câbles d'acier qui, accrochés à leurs extrémités vers le sommet d'un mât vertical en un point commun S de ce mât, en assurent le soutien.
Les longueurs des 3 câbles sont identiques.

Démontrez :

1. Que le volume du tétraèdre $SABC$ vaut 4 fois le volume du tétraèdre $SMNQ$, les 3 points M, N et Q étant les pieds des perpendiculaires menées de S aux côtés AB, BC et CA.
2. Que le volume du cône circonscrit doit de hauteur 10 et dont la base est le cercle inscrit au triangle ABC vaut 8 fois celui du cône de hauteur 5 et dont la base est l'aire du cercle inscrit au triangle MNQ



Note : Cet exercice est couplé avec EXGAE047



1) Le triangle SAC est isocèle puisque les câbles sont de même longueur.
La hauteur SQ est donc aussi une médiane et Q est le milieu de AC.
De même, N est le milieu de CB et M est le milieu de AB.
On est alors ramené à le figure 2.

Par Thalès, on a $MN // CA$ et de plus $|MN| = \frac{|CA|}{2}$

De même, $|NQ| = \frac{|BA|}{2}$ et $|MQ| = \frac{|BC|}{2}$

On remarque également que l'on obtient 4 triangles identiques : BNM, CNQ, NMQ, QMA
Autrement dit l'aire du triangle $ABC = 4$ fois l'aire du triangle MNQ.
Finalement, si h désigne la distance de S au plan ABC, les volumes des tétraèdres sont :

$$\begin{cases} V_{SABC} = \frac{1}{3} h.A_{ABC} \\ V_{SMNQ} = \frac{1}{3} h.A_{MNQ} \end{cases} \rightarrow \frac{V_{SABC}}{V_{SMNQ}} = \frac{A_{ABC}}{A_{MNQ}} = \frac{4.A_{MNQ}}{A_{MNQ}} = 4$$

2) Pour simplifier l'écriture, posons :
$a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|, a' = |MQ|, b' = |MN|, c' = |NQ|$
En géométrie synthétique plane, le résultat suivant à été établit :

Le rayon du cercle inscrit à un triangle est donné par : $r = \frac{A}{s}$

où A est l'aire du triangle et s le demi périmètre.

(Voir un livre de géométrie ou bien l'exercice : EXGSP092)

Appliquons ce théorème à notre cas. Comparons d'abord le demi périmètre s du triangle ABC

et s' du triangle MNQ : $s' = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}{2} = \frac{s}{2}$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} r = \frac{A_{ABC}}{s} \\ r' = \frac{A_{MNQ}}{s'} \end{cases} \rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{A_{ABC}}{A_{MNQ}} \cdot \frac{s'}{s} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Soient h la hauteur du cône V dont la base est le cercle inscrit au triangle ABC et h' la hauteur du cône V' dont la base est le cercle inscrit au triangle MNQ. Nous avons $h = 2h'$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h' \end{cases} \rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = 4.2 = 8$$

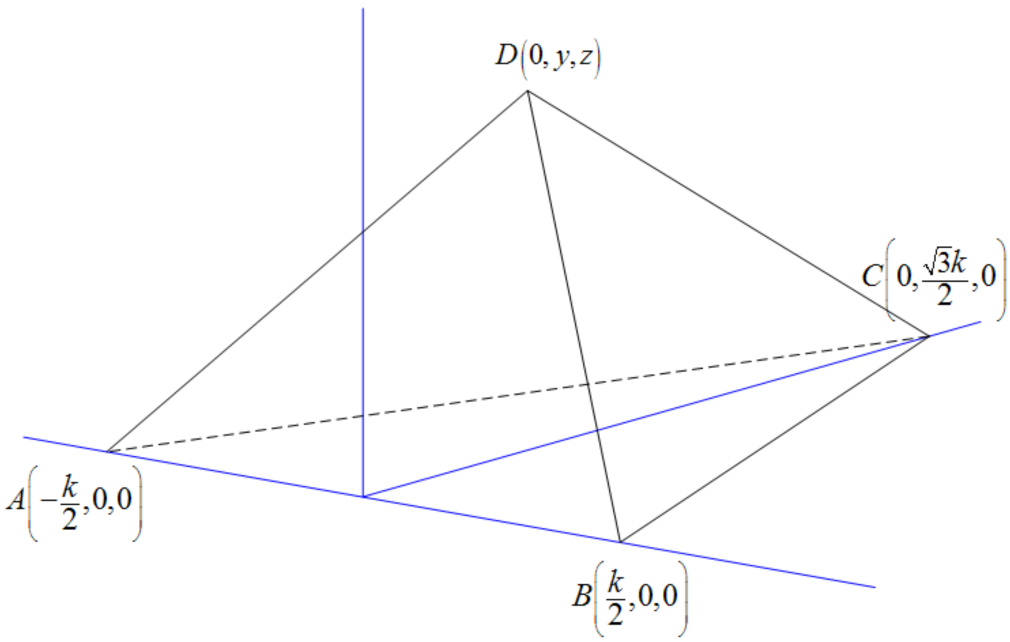
Le 7 août 05

EXGSE066 – ERM, juillet 2003.

On donne le tétraèdre régulier *ABCD* de côté $| AB | = k$. Le repère orthonormé est choisi de sorte que *O* se trouve au milieu du segment [*AB*] et que $A,B \in$ l'axe des *x* et que $C \in$ l'axe des *y*.

On demande

3. les coordonnées de *A, B, C* et *D*
4. Les coordonnées du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *ABCD*
5. Le rayon de cette sphère.



1) Les coordonnées de C sont faciles à obtenir $C:\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}k,0\right)$

Pour trouver les coordonnées de (x,y,z) de D, il suffit d'exprimer que les distances $|DC|$ et $|DB|$ sont égales à $k.$ Comme nous savons déjà que $x=0$ puisque D est dans le plan $Oyz,$ nous obtenons

$$\begin{cases} |DC|^2=\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2+z^2=k^2 \\ |DB|^2=\frac{k^2}{4}+y^2+z^2=k^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2-\sqrt{3}ky+\frac{3k^2}{4}+z^2=k^2 \\ y^2+z^2=\frac{3k^2}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}ky+\frac{3k^2}{4}+\frac{3k^2}{4}=k^2 \\ y^2+z^2=\frac{3k^2}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{6}k \\ z=k\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \rightarrow D:\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}k,\frac{\sqrt{6}}{3}k\right)$$

2) Comme nous avons un tétraèdre régulier, le centre de gravité G est aussi le centre des cercles circonscrit et inscrit.

$$\rightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}+0+0}{4}=0 \quad \text{Ce qui était évident} \\ y_G=\dfrac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}k+\frac{\sqrt{3}}{6}k}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}k \\ z_G=\dfrac{0+0+0+\frac{\sqrt{6}}{3}k}{k}=\frac{\sqrt{6}}{12}k \end{cases} \rightarrow G:\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}k,\frac{\sqrt{6}}{12}k\right)$$

3) Le rayon de la sphère circonscrite est simplement donné par

$$R=D_z-G_z=\frac{\sqrt{6}}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

Remarquons aussi que le rayon de la sphère inscrite est $r=G_z=\frac{\sqrt{6}}{12}k$

Et que nous vérifions $\frac{R}{r}=3$

Le 1 septembre 05

EXGSE067 – Liège, septembre 2005.

On considère quatre points A, B, C, D de l'espace, non coplanaires. On suppose que les droites AB et CD sont orthogonales et qu'il en est de même pour AC et BD.

a) Démontrer que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$
b) Démontrer les relations :

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$a)$ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^{\,2} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}$

or $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BA} = 0$

$\rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^{\,2} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

or $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ et donc finalement $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

$b)$ Considérons la première égalité. Exprimons $\overrightarrow{AB}$ de deux manières

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} \rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

$\rightarrow \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)^2 \rightarrow \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2$

or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\rightarrow \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

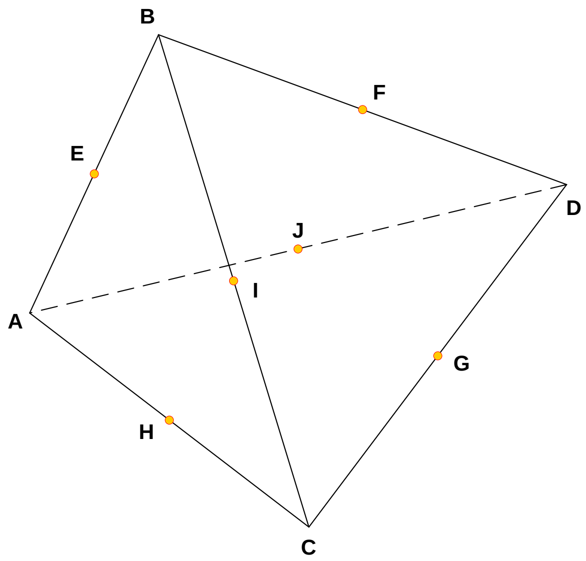
La deuxième égalité se démontre de la même façon.

Le 17 novembre 05

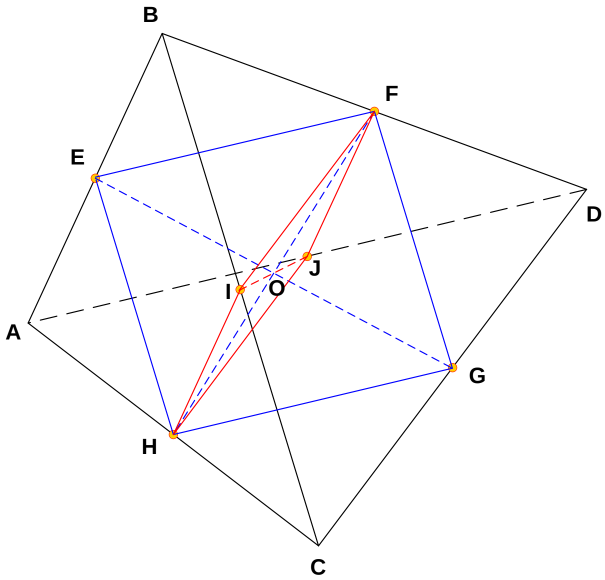
EXGSE068 – Liège, septembre 2005.

Soit un tétraèdre $ABCD$. On note

$$\begin{array}{lll} E & \text{le milieu de} & [A,B] \\ F & \text{le milieu de} & [B,D] \\ G & \text{le milieu de} & [C,D] \\ H & \text{le milieu de} & [A,C] \\ I & \text{le milieu de} & [B,C] \\ J & \text{le milieu de} & [A,D] \end{array}$$



Démontrer que les EG, FH et IJ sont concourantes



$\triangle ABD : EF \,//\, AD$ car EF joint le milieu des côtés AB et BD

$\triangle ACD : HG \,//\, AD$ car HG joint le milieu des côtés AC et CD

Par conséquent : $EF \,//\, HG$

De même, on a $EH \,//\, FG$ et donc le quadrilatère $EFGH$ est un parallèlogramme dont les diagonales se coupent en leur milieu : le point O

On démontre de la même façon que $IFJH$ est un parallélogramme dont les diagonales se coupent aussi au point O

Conclusion : EG, FH et IJ sont concourantes

Le 17 novembre 05

EXGSE069 – Louvain, juillet 2005, série 1.

Les grands chefs coq prétendent qu'un oeuf sur le plat réussi est un cylindre (très plat) qui couvre l'intégralité de la poêle avec une épaisseur uniforme du blanc d'oeuf *h* égale à 2. Sachant que le volume d'un oeuf dans sa coquille est bien approximé par une sphère de diamètre égal à 30, et sachant que le jaune d'oeuf occupe un volume égal à 1/10 du volume total de l'oeuf, on vous demande d'estimer le diamètre *D* de la poêle qu'il convient d'utiliser pour réussir votre oeuf sur le plat. On vous demande de traiter deux cas (plus ou moins proches de la réalité !) :

- Cas 1 – le jaune d'oeuf est complètement superposé au blanc d'oeuf sous forme d'un petit dôme ;
- Cas 2 – le jaune d'oeuf se présente sous la forme d'un cylindre dont la hauteur est égale à son diamètre, cylindre qui est incorporé dans le blanc d'oeuf (mais peut en dépasser !) et dont la base est en contact avec la poêle.

Volume de l'oeuf : $V_S = \frac{\pi D_S^3}{6}$;Volume du jaune : $V_J = \frac{\pi D_S^3}{60}$;Volume du blanc : $V_B = \frac{3\pi D_S^3}{20}$

a) Le blanc forme un cylindre de hauteur h et de diamètre D_C

$$\rightarrow V_C = \frac{\pi D_C^2 h}{4}. \quad \text{Donc : } \frac{\pi D_C^2 h}{4} = \frac{3\pi D_S^3}{20} \rightarrow \boxed{D_C = \sqrt{\frac{3D_S^3}{5h}} = \sqrt{\frac{3\times 30^3}{5\times 2}} = 90}$$

b) Le jaune forme un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre

$$\rightarrow V_C = \frac{\pi D_C^2 . D_C}{4} = \frac{\pi D_C^3}{4}. \quad \text{Donc : } \frac{\pi D_C^3}{4} = \frac{\pi D_S^3}{60} \rightarrow D_C = D_S \sqrt[3]{\frac{1}{15}}$$

Le blanc forme un anneau autour du jaune. Le diamètre intérieur vaut D_C et le diamètre extérieur *D*.

$$V_{anneau} = \frac{\pi D^2 h}{4} - \frac{\pi D_C^2 h}{4} = \frac{\pi h}{4}\left(D^2 - D_C^2\right)$$

$$\text{Donc : } \frac{\pi h}{4}\left(D^2 - D_C^2\right) = \frac{3\pi D_S^3}{20} \rightarrow D^2 = \frac{3D_S^2}{5h} + D_C^2$$

$$\rightarrow \boxed{D = D_S\sqrt{\frac{3D_S}{5h} + \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{2}{3}}} = 30\sqrt{\frac{3\times 30}{5\times 2} + \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{2}{3}}} = 90.81}$$

La position du jaune n'a donc que peu d'influence

Le 9 mars 05