Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 7

EXGSE070 – EXGSE079

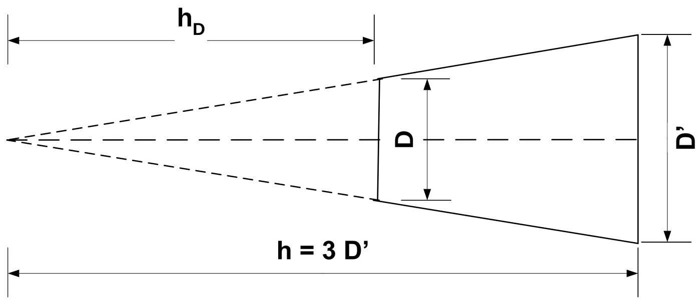
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 08

EXGSE070 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Un diabolo est conçu à partir d’un cylindre plein de diamètre D et de hauteur $L = 2D$, et de deux cônes pleins de diamètre de base D’ et de hauteur $h = 3D$’. Le cylindre et les deux cônes sont constitués de la même matière. Pour réaliser ce diabolo, on coupe la tête des deux cônes afin de pouvoir les ajuster parfaitement aux deux extrémités du cylindre. Les trois pièces sont collées bout-à-bout. Afin d’obtenir un bon diabolo, il convient que la masse du cylindre central soit égale à 1/8 de la masse totale du diabolo. Sachant que l’on dispose de cônes dont le diamètre est D’ = 4, on demande d’évaluer le diamètre du cylindre qu’il faut choisir pour réaliser le diabolo.



Evaluons le volume du tronc de cône tel que définit ci-dessus.

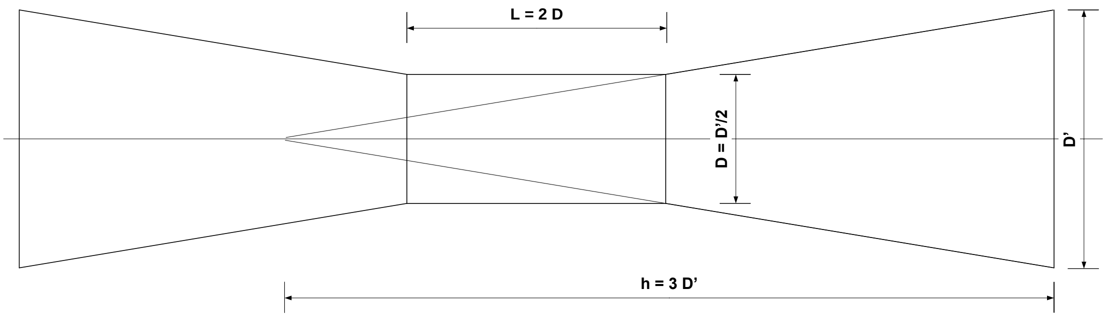
On a immédiatement : $\frac{h_D}{h} = \frac{D}{D'} \to \frac{h_D}{3D'} = \frac{D}{D'} \to h_D = 3D$

$$\to V_{TC} = \frac{\pi}{12}\left(D'^2\, h - D^2 h_D\right) = \frac{\pi}{12}\left(3D'^3 - 3D^3\right) = \frac{\pi}{4}\left(D' - D^3\right)$$

Le volume du cylindre est : $V_{cy} = \frac{\pi}{4} D^2 L = \frac{\pi}{4} D^2 .2D = \frac{\pi}{2} D^3$

Le volume du cylindre doit être le 1/8 du volume total du diabolo

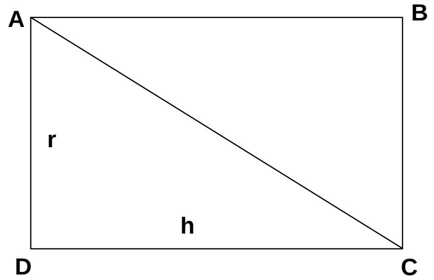
$$\to 8 \times \frac{\pi}{2} D^3 = 2 \times \frac{\pi}{4}\left(D'^3 - D^3\right) + \frac{\pi}{2} D^3 \to \boxed{D = \frac{D'}{2}}$$



Le 9 mars 05

EXGSE071 – Louvain, septembre 2005.

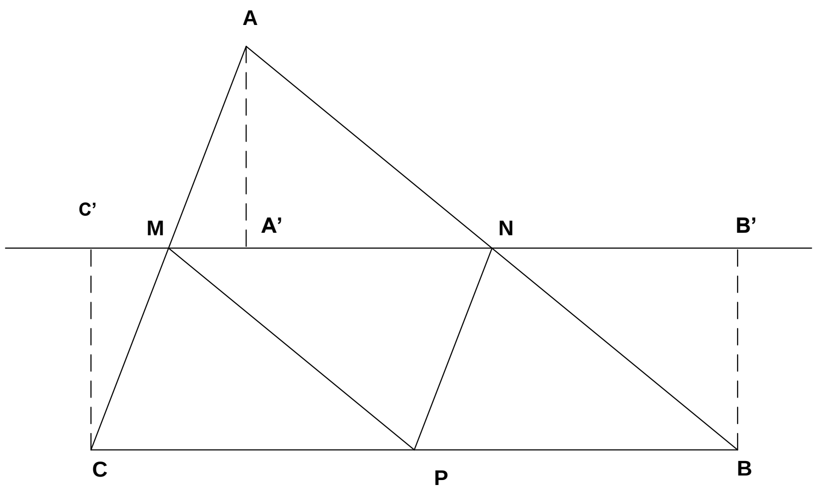
Un triangle quelconque tourne autour de la droite qui joint les milieux de deux de ses côtés. Les deux parties du triangle, situées de part et d'autre de la droite, engendrent chacune un volume. On vous demande de déterminer le rapport de ces deux volumes en expliquant votre démarche au moyen d'un dessin précis.



Préambule

Soit un rectangle $ABCD$. Il engendre un cylindre de volume $\pi r^2 h$ en tournant autour de DC. De même le triangle ADC engendre un cône de volume $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

On en déduit aue le triangle ABC engendre en tournant autour de DC engendre un volume : $\frac{2}{3}\pi r^2 h$



<u>Méthode 1</u>

Soit MP qui joint le milieu de AC et CB, et NP qui joint le milieu de AB et CB

Il est immédiat que l'on détermine ainsi 4 triangles égaux. (même base et même hauteur)

Le triangle MNP engendre un volume égal à celui engendré par le triangle AMN

Les triangles CMP et PNB engendrent eux des volumes doubles (voir préambule)

On conclut : $\dfrac{\text{Vol engendré par } CMNB}{\text{Vol engendré par } MAN} = 5$

<u>Méthode 2</u>

De A, B et C on abaisse les perpendiculaires qur l'axe MN

Les triangles $MA'A$ et $CC'M$ sont égaux. De même les triangles NAA' et $NB'N$ sont aussi égaux.

$CB'BC$ est un rectangle qui engendre un volume : $\pi.|CC'|^2.2|MN|$

Le triangle AMN engendre un cône de volume : $\dfrac{1}{3}\pi.|AA'|^2.|MN|$

Et comme $|CC'| = |AA'|$, on déduit

$$\frac{\text{Vol engendré par } CB'BC - \text{Vol engendré par } CMC' \text{ et } MB'B}{\text{Vol engendré par } AMN} = 5$$

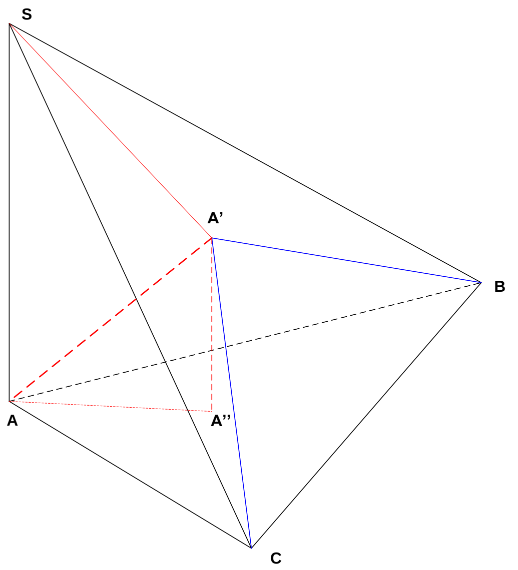
Le 9 mars 05

EXGSE072 – Liège, juillet 2005.

Soit *SABC* un tétraèdre tel que *SA* soit perpendiculaire à *ABC*. On note *A'* la projection orthogonale de *A* sur *SBC*. Démontrer la relation

$$\frac{\mathcal{A}(SBC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'BC)}$$

Où $\mathcal{A}(XYZ)$ désigne l'aire du triangle *XYZ*.



Exprimons le volume du tétraèdre $SABC$ de deux façons différentes :

$$\begin{cases} V_{SABC} = |SA|.\mathcal{A}(ABC) \\ V_{SABC} = |AA'|.\mathcal{A}(SBC) \end{cases} \rightarrow \frac{\mathcal{A}(SBC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{|SA|}{|AA'|} \qquad (1)$$

Soit A'' la projection orthogonale de A' sur le plan ABC

Exprimons le volume du tétraèdre $AA'BC$ de deux façons différentes :

$$\begin{cases} V_{AA'BC} = |AA'|.\mathcal{A}(A'BC) \\ V_{AA'BC} = |A'A''|.\mathcal{A}(ABC) \end{cases} \rightarrow \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'BC)} = \frac{|AA'|}{|A'A''|} \qquad (2)$$

D'autre part, AA' et SA sont parallèles puisque perpendiculaires au même plan ABC

Les angles $\widehat{SAA'}$ et $\widehat{AA'A''}$ sont donc des angles alternes-internes, et ils sont égaux.

$\rightarrow$ Les triangles rectangles $SA'A$ et $AA''A'$ sont semblables $\rightarrow \dfrac{|SA|}{|AA'|} = \dfrac{|A'A|}{|A''A'|}$

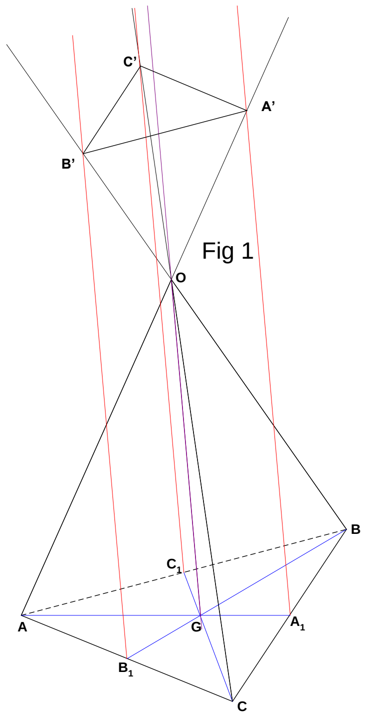
Ce qui signifie que $(1) = (2) \rightarrow \dfrac{\mathcal{A}(SBC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'BC)}$

Le 19 juillet 2006

EXGSE073 – Liège, juillet 2005.

On considère un tétraèdre *OABC* et on note *G* le centre de gravité de la face *ABC*. On note respectivement A_1, B_1, C_1 les milieux de [*B,C*] , [*C,A*], [*A,B*].
Un plan π parallèle à *ABC* coupe *OA, OB* et *OC* en respectivement *A',B', C'*

1. Démontrer qu'il existe une unique position de π pour laquelle les droites $A'A_1$, $B'B_1$ et $C'C_1$ sont parallèle à *OG*
2. Démontrer que pour toutes les autres positions, ces droites sont concourantes en un point *P* de la droite *OG*



Dans le plan OAG, on ne peut tracer qu'une et une seule parallèle à OG par A_1.
Cette parallèle coupe AO en A'. De même, on trouve A' et C' (Voir fig 1)
Montrons que $A'B'C'$ déterminent un plan parallèle à ABC.

Les triangles $AA'A_1$ et AOG sont semblables $\rightarrow \dfrac{|A'A_1|}{|OG|} = \dfrac{|AA_1|}{|AG|} \rightarrow |A'A_1| = \dfrac{3}{2}|OG|$

puisque G est le centre de gravité du triangle ABC

De même : $|B'B_1| = |C'C_1| = \dfrac{3}{2}|OG|$

$\rightarrow B'A'A_1B_1$ est un parallélogramme $\rightarrow B'A'$ est parallèle à B_1A_1
De même : $B'C' // B_1C_1$ et $C'A' // C_1A_1$
Le plan $A'B'C'$ est donc le plan π cherché et comme les points A', B', C' sont uniques le plan π est unique

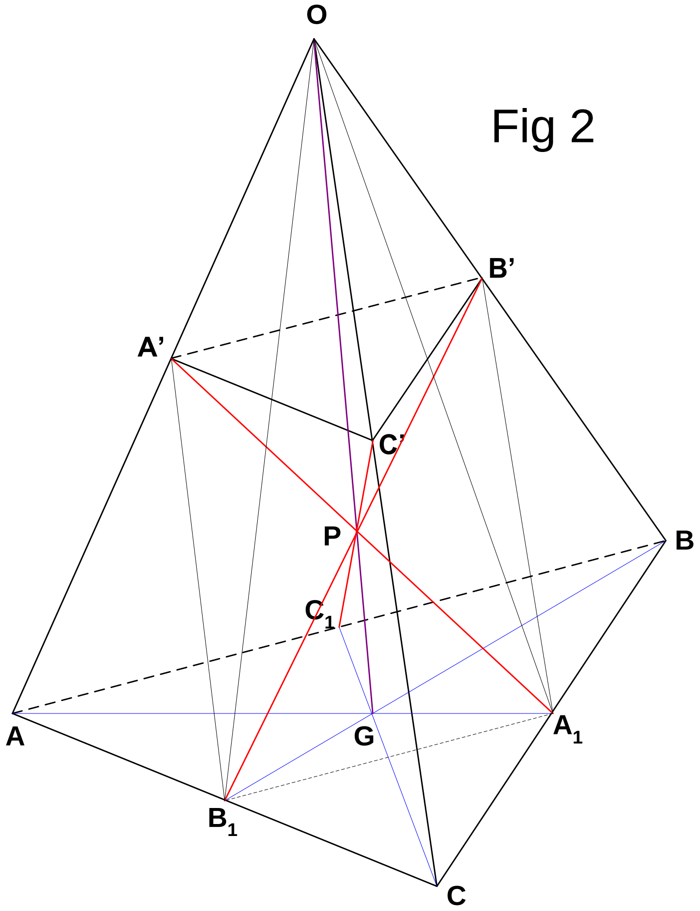


Fig 2

Les médianes AA_1, BB_1 et CC_1 se coupent au point G.
Considérons les plans AA_1O et BB_1O. Ils ont les points O et G en commun
$\rightarrow$ leur intersection est OG
B_1A_1 est parallèle à AB puisque B_1 et A_1 sont milieux de leurs segments respectifs.
$A'B'$ est parallèle à AB puisque le plan OAB est coupé par deux plans parallèles.
$\rightarrow A'B'A_1B_1$ est un parallélogramme dont les diagonales $A'A_1$ et $B'B_1$ se coupent en un point P.
Ce point P appartient à OG puisque $A'A_1 \subset$ plan AA_1O et puisque $B'B_1 \subset$ plan BB_1O c'est-à-dire que P est situé sur l'intersection des plans AA_1O et BB_1O

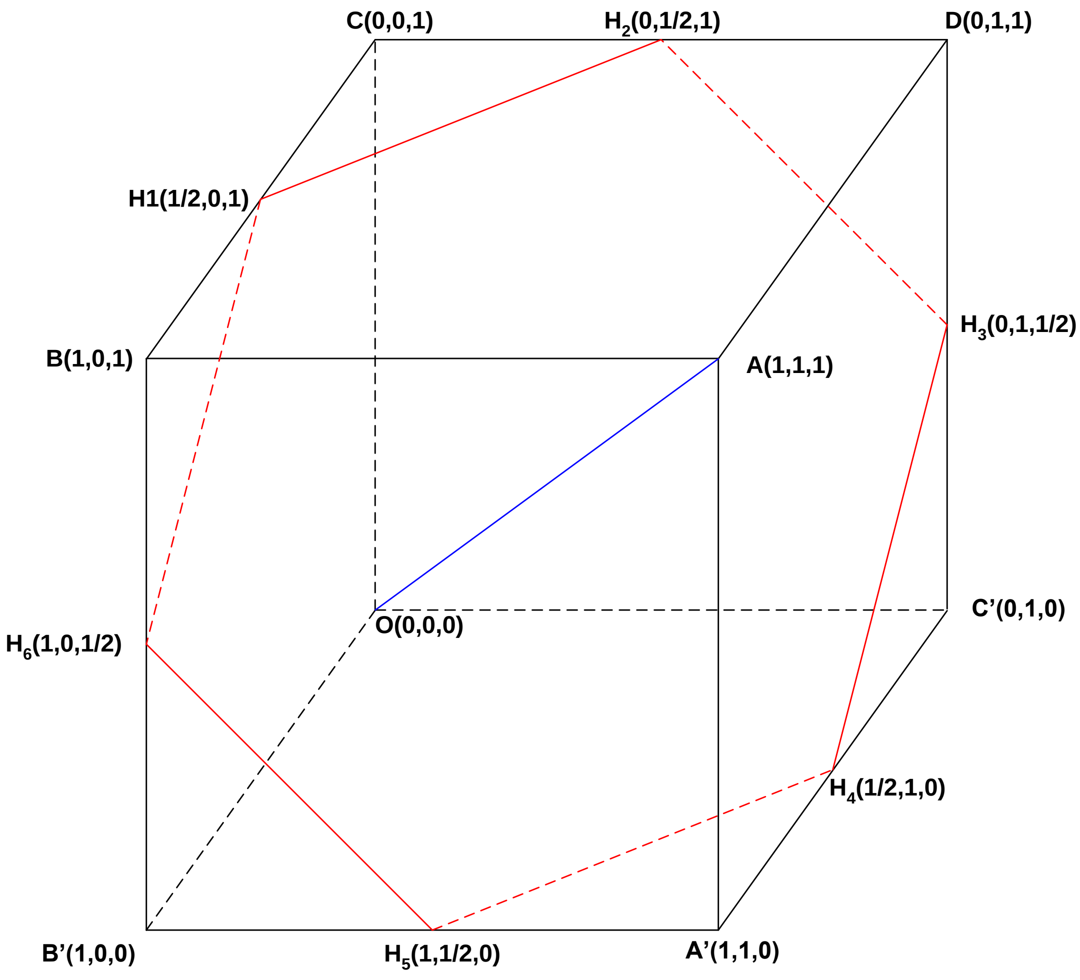
On recommence le même raisonnement en prenant les plans OAA_1 et OCC_1.
On arrive alors au parallèlogramme $A'C'A_1C_1$, dont les diagonales $A'A_1$ et $C'C_1$ se coupent au même point P.

Conclusion : les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point P situé sur OG

EXGSE074 - Bruxelles – Juillet 2006

Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé O et d'axes x,y et z, on donne le point $A(1,1,1)$. Soit Γ le cube de côté 1 dont une face est dans le plan Oxy et dont O et A sont deux sommets. On demande de déterminer un plan qui sépare le cube en deux parties de même volume et dont l'intersection avec le cube est un hexagone régulier. Formez une équation cartésienne de ce plan et déterminez les coordonnées des points d'intersection entre ce plan et les arêtes du cube

---



Hexagone

Le cube est représenté à la figure ci dessus. On choisit un répère : O étant l'origine, et $A(1,1,1)$

Soit OA une des diagonales du cube. Considérons le plan médiateur π du segment $[OA]$

Ce plan π coupe le cube en deux volumes égaux vu la symétrie du cube.

De plus π coupe BC en H_1 qui est donc équidistant de O et A.

Dés lors les triangles rectangles H_1CO et H_1BA sont égaux $\rightarrow |H_1C| = |H_1B|$

Autrement dit, H_1 est le milieu de CB.

On recommence le même raisonnement pour les points H_2, H_3, H_4, H_5, H_6

Considérons les triangles rectangles BH_1H_6 et CH_1H_2. Ils sont égaux $\rightarrow |H_6H_1| = |H_1H_2|$

On déduit de la même façon que : $|H_6H_1| = |H_1H_2| = |H_2H_3| = |H_3H_4| = |H_4H_5| = |H_5H_6|$

Finalement, $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ est un hexagone qui est régulier vu la symétrie du cube.

Equation du plan π

Les coordonnées de tous les points sont indiqués sur la figure.

Méthode 1

le plan π étant médiateur de $[OA] \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} : (1,1,1) \rightarrow \pi \equiv x + y + z + d = 0$

$$H_6 \in \pi \rightarrow 1 + 0 + \frac{1}{2} + d = 0 \rightarrow d = -\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$$

Méthode 2

Si on connaît trois points A, B, C du plan, son équation est donnée par :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & x_B & x_C & 1 \\ y_A & y_B & y_C & 1 \\ z_A & z_B & z_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Prenons, par exemple, les points H_6, H_1 et H_2

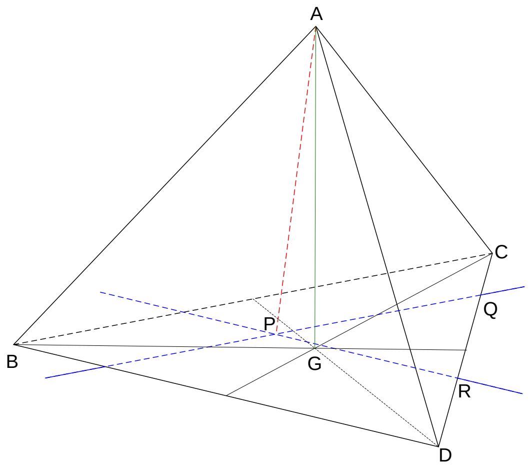
$$\pi = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$$

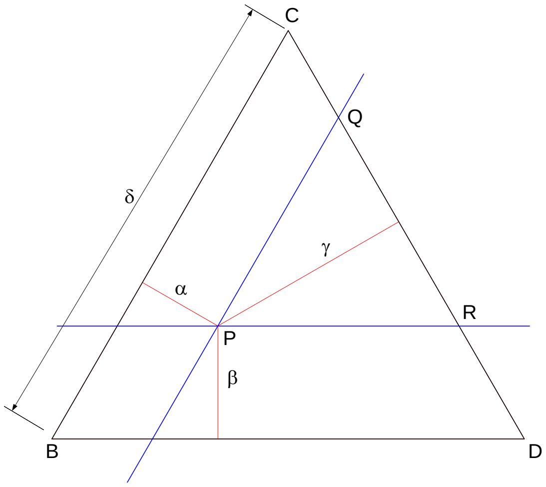
28 décembre 2006

EXGSE075 - Liège – septembre 2006

On considère un tétraèdre *ABCD* dont la base *BCD* est équilatérale, et tel que la droite déterminée par *A* est le centre de gravité de cette base est perpendiculaire au plan *BCD*.
Soit *P* un point intérieur au triangle *BCD*, et π et π' deux plans s'appuyant sur la droite *AP* et respectivement parallèles aux droites *BC* et *BD*. Les plans π et π' rencontrent l'arête [*C*,*D*] en deux points respectifs *Q* et *R*. Les distances du point *P* aux arêtes [*B*,*C*], [*B*,*D*] et [*C*,*D*] sont respectivement dénotées α, β et γ. La longueur de l'arête [*B*,*C*] est dénotée δ.

a) Montrer que le triangle *PQR* est équilatéral
b) Exprimer la longueur d'un côté du triangle *PQR* en fonction de α, β et γ.
c) Montrer que la valeur α + β + γ ne dépend pas de la position de *P*.
d) En déduire que la somme des distances de *P* aux quatre faces du tétraèdre *ABCD* est indépendante de *P*.





a) Le schéma de la base est repris séparément

$PR \,//\, BD \to QPR = CBD = 60°$ car angles correspondants

$PQ \,//\, BC \to PQR = BCD = 60°$ car angles correspondants.

Le triangle *PQR* est donc équilatéral car ces trois angles valent 60°.

b) $|QR| = |CD| - |CQ| - |RD| = \delta - \dfrac{\alpha}{\sin 60°} - \dfrac{\beta}{\sin 60°} = \delta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\alpha+\beta)$

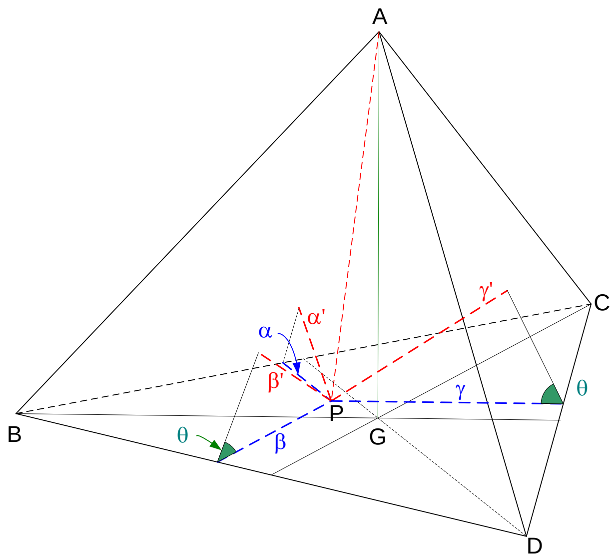
c) Dans le triangle $PQR \rightarrow \gamma^2 = |PQ|^2 - \left(\dfrac{|QR|}{2}\right)^2 = \dfrac{3|QR|^2}{4}$

$\rightarrow \gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|QR| \rightarrow |QR| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\gamma$

On remplace dans l'expression trouvée au point b)

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\gamma = \delta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\alpha+\beta) \rightarrow \boxed{\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\delta}$

Cette expression qui est indépendante de la position de P



d) Puisque la droite passant par A et le centre de gravité G la base est perpendiculaire au plan BCD, le tétraèdre possède GA comme axe de symétrie.

De plus, les angles des dièdres formés par les trois faces du tétraèdre et la base sont tous égaux. Soit θ cet angle.

La distance du point P à la base est nulle, puisque que P appartient à cette base.

Soit α', β' et γ', les distances de P aux trois autres faces du tétraèdre.

$$\alpha'+\beta'+\gamma' = \alpha\sin\theta+\beta\sin\theta+\gamma\sin\theta = \sin\theta(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\sin\theta$$

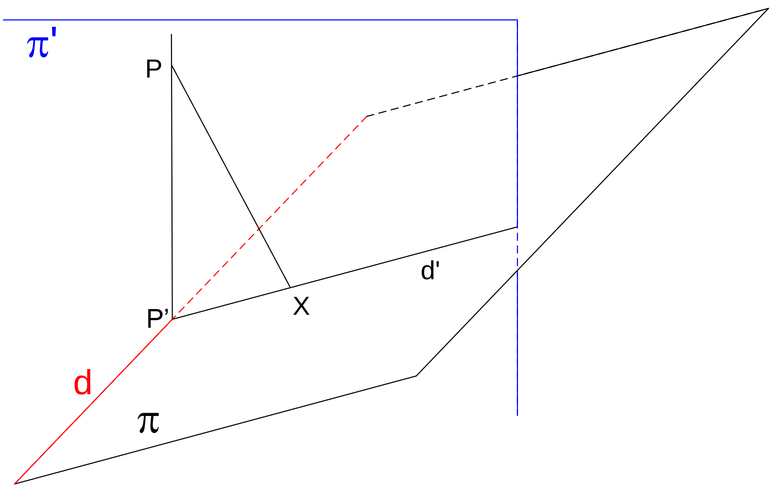
Expression qui est aussi indépendante de la position de P.

26 décembre 2006

EXGSE076 - Liège – septembre 2006

On considère une droite d de l'espace et un point P n'appartenant pas à d. Pour tout plan π contenant d , on note X la projection orthogonale de P sur π. Déterminer le lieu géométrique décrit par le point X quand π varie.

Suggestion : si on procède par géométrie analytique, on choisira un système d'axes où d est l'un des axes.



Soit le plan π' passant par P et perpendiculaire à d.

Soit P' le point de percée de d dans π'.

Les plans π et π' se coupent selon la droite d' qui passe par P'.

La projection orthogonale X de P sur π se trouve sur la droite d' et donc dans le plan π'.

Quand la position de π varie, X reste dans le plan π' et l'angle $\widehat{PXP'} = 90°$.

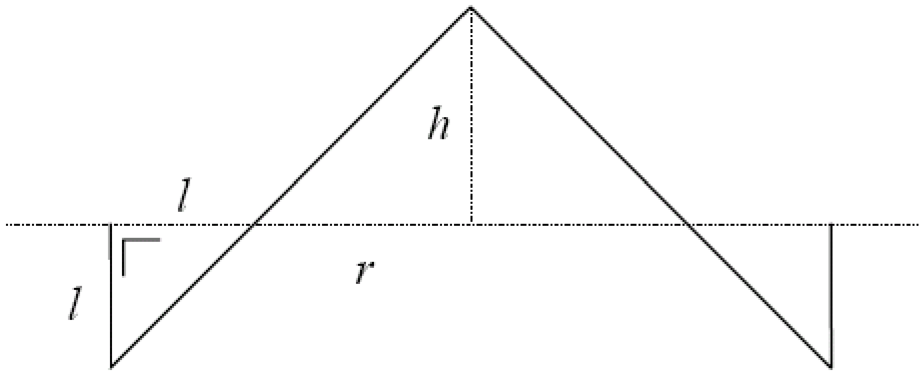
Conclusion : Le lieu de X est le cercle situé dans le plan π' et de diamètre PP'.

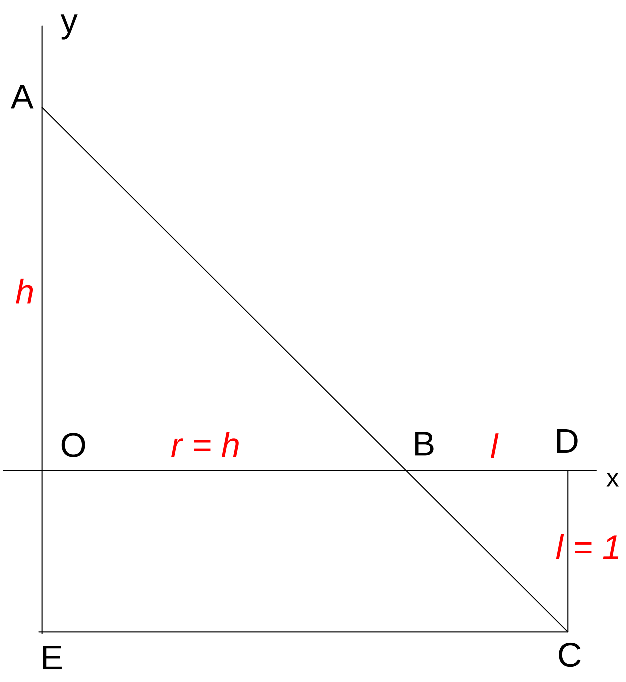
---

26 décembre 2006

EXGSE077 - Louvain, série 1 – juillet 2006

Des enfants réalisent un château de sable de forme conique de hauteur *h* et de rayon *r* = *h*, voir figure. Pour ce faire, ils creusent autour du château une tranchée de profondeur *l* et de largeur *l*, dont la section est également représentée sur la figure. Le sable constituant le château est intégralement prélevé de la tranchée. On vous demande de calculer la hauteur du château de sable pour une tranchée de profondeur *l* = 1. (Note : les longueurs des segments sur la figure ne correspondent pas à la solution du problème !)





Méthode 1

Volume du cylindre engendré par la rotation du rectangle $ODCE$ autour de l'axe OA:

$$V_C = \pi(h+l)^2 l = \pi(h+1)^2$$

Volume du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze $OBCE$ autour de l'axe OA:

$$V_{TC} = \frac{\pi l}{3}\left(h^2 + h(h+l) + (h+l)^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(h^2 + h(h+1) + (h+1)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(3h^2 + 3h + 1\right)$$

Volume engendré par la rotation du triangle BDC autour de l'axe OA:

$$V_T = V_C - V_{TC} = \pi(h+1)^2 - \frac{\pi}{3}\left(3h^2+3h+1\right) = \frac{\pi}{3}\left(3h^2+6h+3-3h^2-3h-1\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}(3h+2)$$

Ce dernier volume doit être égal au volume du cône engendré par le triangle OAB

$$\rightarrow \frac{\pi}{3}h^3 = \frac{\pi}{3}(3h+2) \rightarrow h^3 - 3h - 2 = 0$$

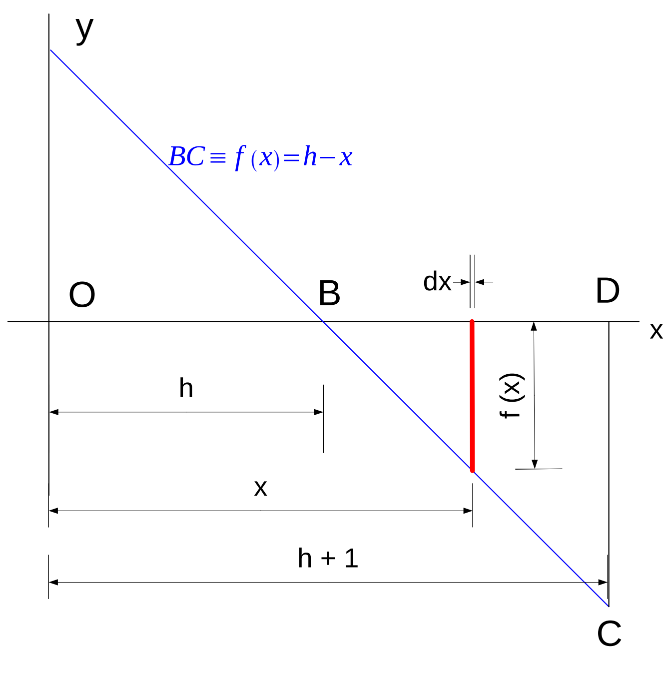
On factorise par Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & +1 & +2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow h^3 - 3h - 2 = 0 \rightarrow (h+1)\left(h^2 - h - 2\right) = (h+1)^2(h-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} h = -1 < 0 & \text{à rejeter} \\ h = 2 \end{cases}$$

Conclusion $\boxed{h=2}$



Méthode 2

Méthode alternative pour le calcul de V_T

La droite BC a pour équation : $BC \equiv f\left(x\right) = h - x$

Considérons un élément de largeur dx et de hauteur $f\left(x\right)$. Ce rectangle engendre par rotation un volume dV_T assimilable à celui d'un parallélépipède rectangle :

$$\rightarrow dV_T = \underbrace{2\pi x}_{\text{La longueur}} . \underbrace{\left(h-x\right)}_{\text{La hauteur}} . \underbrace{dx}_{\text{La largeur}}$$

Il reste à intégrer de h à $h+1$. On prendra la valeur absolue de l'intégrale puisque la surface BDC est en dessous de l'axe des x.

$$V_T = -2\pi\int_h^{h+1} x\left(h-x\right)dx = 2\pi\left(\int_h^{h+1} x^2 dx - h\int_h^{h+1} xdx\right)$$

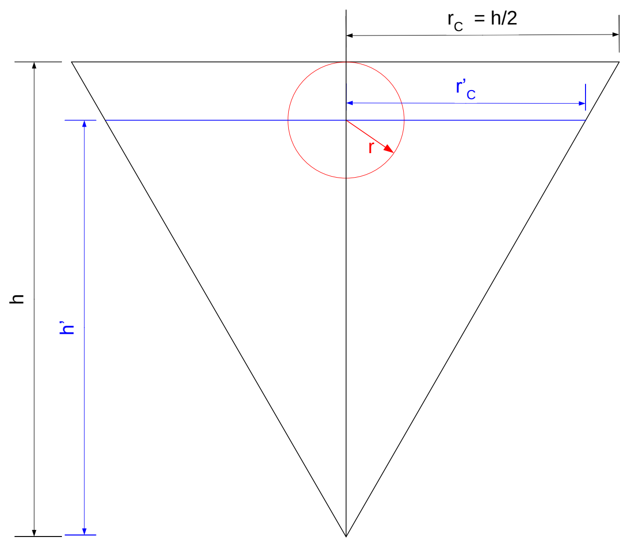
$$= 2\pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_h^{h+1} - h\left[\frac{x^2}{2}\right]_h^{h+1}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3}\left(\left(h+1\right)^3 - h^3\right) - \frac{h}{2}\left(\left(h+1\right)^2 - h^2\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2\left(\cancel{h^3} + 3h^2 + 3h + 1 \cancel{- h^3}\right) - 3h\left(\cancel{h^2} + 2h + 1 \cancel{- h^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\cancel{6h^2} + 6h + 2 \cancel{- 6h^2} - 3h\right) = \frac{\pi}{3}\left(3h+2\right)$$

EXGSE078 - Louvain, série 2 – juillet 2006

On demande à des ingénieurs de concevoir un réservoir fermé destiné à contenir un liquide dangereux. Le réservoir conique est creusé dans le sol avec le sommet en bas et la base en haut. La hauteur du réservoir est notée h, et le rayon de la base est $r_c = h/2$. Pour pouvoir contrôler que la contenance de ce réservoir ne dépasse jamais un certain niveau critique, les ingénieurs ont imaginé le système de contrôle suivant. Un ballon sphérique de rayon $r = r_c/5$ et de densité égale à la moitié de la densité du liquide est introduit dans le réservoir (le ballon s'enfonce donc de moitié dans le liquide). Grâce à un système de capteurs, le remplissage s'arrête lorsque le ballon entre en contact avec la plaque supérieure du réservoir. On vous demande d'estimer la fraction volumique de liquide dans le réservoir, càd le rapport du volume de liquide sur le volume total du réservoir.



Soit V_C la capacité totale du réservoir : $V_C = \frac{\pi}{3} \underbrace{h}_{\text{Sa hauteur}} \underbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{\text{Son rayon}} = \frac{\pi}{12} h^3$ (1)

Quand le réservoir est remplit à son maximum, la hauteur de liquide est alors h'

$$h' = h - r = h - \frac{r_C}{5} = h - \frac{h}{10} = \frac{9}{10} h$$

Soit $V_C^{'}$ la capacité du cône correspondant à la hauteur h': $V_C^{'} = \frac{\pi}{3} h' r_C^{'}$ (2)

Or : $\frac{r_C^{'}}{r_C} = \frac{h'}{h} \rightarrow r_C^{'} = r_C \frac{h'}{h} = \frac{h}{2} \frac{\frac{9}{10} h}{h} = \frac{9}{20} h$

Donc : $(2) \rightarrow V_C^{'} = \frac{\pi}{3} \frac{9h}{10} \left(\frac{9h}{20}\right)^2 = \frac{\pi}{12} \frac{9^3 h^3}{10^3}$ (3)

Le volume de la sphère est : $V_S = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{h}{10}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{h^3}{10^3}$ (4)

Le volume de liquide dans le réservoir est alors :

De (3) et $(4) \rightarrow V_L = V_C^{'} - \frac{V_S}{2} = \frac{\pi}{12} \frac{9^3 h^3}{10^3} - \frac{4\pi}{6} \frac{h^3}{10^3} = \frac{\pi h^3}{12.10^3} \left(9^3 - 8\right)$ (5)

La fraction volumique de liquide dans le réservoir est finalement

De (1) et $(5) \rightarrow \frac{V_L}{V_C} = \frac{\frac{\pi h^3}{12.10^3}\left(9^3 - 8\right)}{\frac{\pi}{12} h^3} = \frac{9^3 - 8}{1000} = \frac{729 - 8}{1000} = \boxed{0.721}$

EXGSE079 - Louvain, septembre 2006

Un producteur de liqueurs traditionnelles vend des carafes coniques contenant non seulement la liqueur mais également un fruit, ce dernier conférant deux avantages : un aspect esthétique apprécié des clients et une économie sur la quantité de liquide à y introduire. La technique consiste à faire grandir le fruit dans la carafe. Le fruit grandit en gardant toujours la même forme et atteint sa taille finale lorsque les parois de la carafe l'empêchent de grandir davantage. Le producteur chercher à savoir s'il doit préférer des fruits de forme sphérique ou de forme cubique* pour optimiser son gain. Les carafes ont le diamètre de la base de longueur égale à la génératrice du cône. La question revient donc à comparer les volumes des deux fruits. (Sans calculette, il vous sera nécessaire de réaliser un calcul approximatif pour décider.)

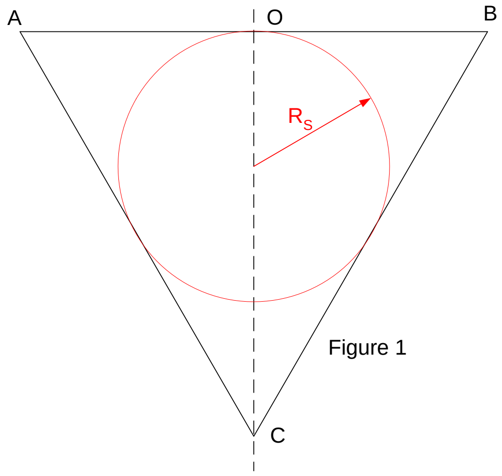
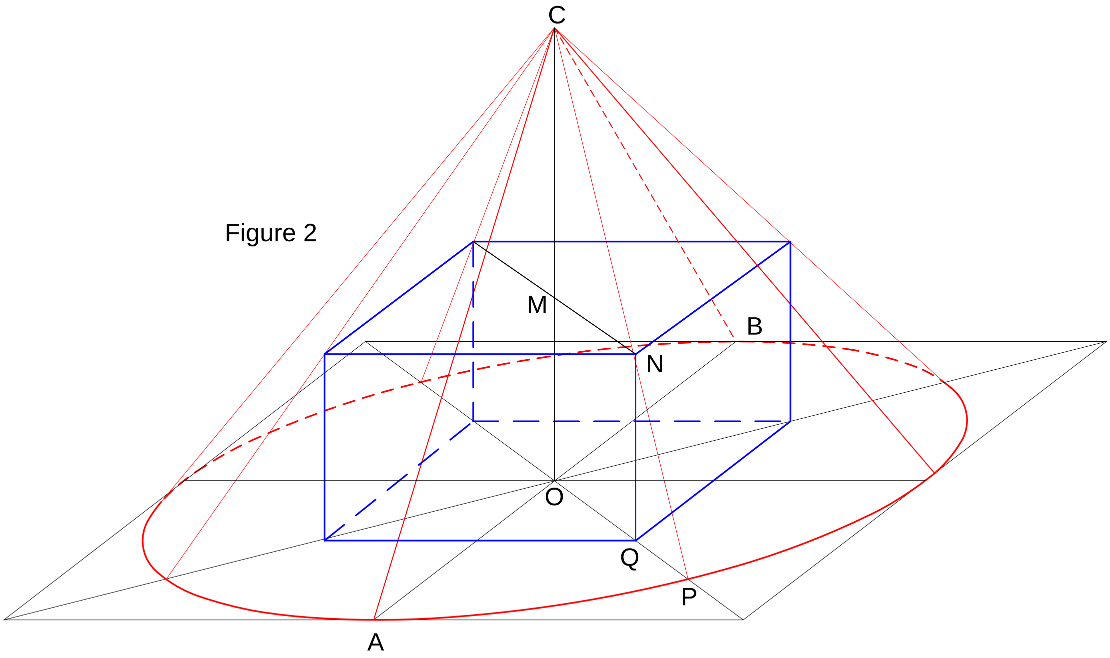


Figure 1

Le rayon de la sphère inscriptible est égal au tiers de la hauteur du cône.
En effet, la section du cône par un plan vertical est un triangle équilatérale puisque le diamètre de la base est égale à la génératrice du cône, et, dans un triangle équilatérale la hauteur est en même temps bissectrice, médiatrice et médiane.

$\rightarrow R_S = \dfrac{\sqrt{3}}{6} d$

$\rightarrow$ Le volume de la sphère : $V_S = \dfrac{4}{3}\pi R_S^3 = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} d\right)^3 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{54} d^3 \cong 0.1 d^3$

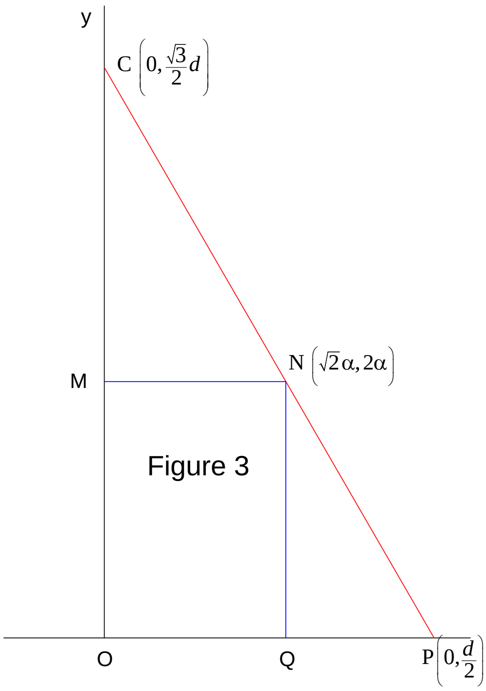


Le cas du cube est plus compliqué car comme le montre la figure 2, le cube touche le cône aux quatre sommets.

La longueur limitante sera la diagonale d'une des faces du cube.

Considérons le plan $CMOQPN$ et soit 2α la longueur de l'arête du cube.

Prenons comme axes $OP \equiv Ox$ et $OC \equiv Oy$. Voir figure 3



Dans ce repère, $CP \equiv \dfrac{x}{\frac{d}{2}} + \dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}d}{2}} = 1 \rightarrow CP \equiv 2x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} y = d$

Le sommet du cube $N\left(\sqrt{2}\alpha, 2\alpha\right)$ appartient à CP

$\rightarrow 2\sqrt{2}\alpha + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} 2\alpha = d \rightarrow \alpha = \dfrac{3d}{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}} = 0.195d$

Le volume du cube est alors : $V_C = \left(2 \times 0.195d\right)^3 = 0.059d^3$

Il nous reste à faire le rapport des volumes :

$\rightarrow \dfrac{V_S}{V_C} = \dfrac{0.1d^3}{0.059d^3} \cong 1.7$

La sphère est donc manifestement la forme qui permet d'économiser le plus de liquide.

---

30 juin 2007