

# Math3 CM

Cours de L. PASQUEREAU  
Note de C. THOMAS

22 octobre 2022



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fonctions de <math>\mathbb{R}</math> dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>5</b>
1.1	Limite . . . . .	5
1.1.1	Adhérence . . . . .	5
1.1.2	Limite . . . . .	5
1.1.3	Fonctions négligeables . . . . .	5
1.1.4	Croissance comparée . . . . .	6
1.1.5	Fonctions Équivalentes . . . . .	6
1.1.6	Opération sur les équivalents . . . . .	7
1.2	Continuité . . . . .	8
1.3	Dérivabilité . . . . .	8
1.3.1	Dérivée successives . . . . .	8
1.4	Développements Limités (DL) . . . . .	8
1.4.1	Taylor-Young . . . . .	8
1.4.2	DL usuels . . . . .	10
1.4.3	Opération sur les DL . . . . .	11
1.4.4	Application au calcul de dérivé . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Intégration</b>	<b>15</b>
2.1	Intégrales de Riemann . . . . .	15
2.1.1	Introduction . . . . .	15
2.1.2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	16
2.1.3	Opération sur les intégrales . . . . .	17
2.1.4	Positivité de l'intégrale . . . . .	17
2.1.5	Moyenne . . . . .	18
2.1.6	Théorème fondamental de l'analyse . . . . .	19
2.1.7	Primitives usuelles . . . . .	19
2.1.8	Changement de variable . . . . .	20
2.1.9	Intégration par parties . . . . .	21
2.2	Intégrales Généralisées . . . . .	21
2.2.1	Cas des fonctions réelles positives . . . . .	22
2.2.2	Cas des fonction réelles positives et où $b = \infty$ . . . . .	23
2.2.3	Cas où b est fini . . . . .	25

2.2.4	Cas des fonctions de signes qql . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction aux séries numériques . . . . .	29
3.1.1	Sommes de séries numériques . . . . .	31
3.2	Séries géométriques . . . . .	31
3.3	Séries À Termes Positifs (SATP) . . . . .	32
3.3.1	Introduction . . . . .	32
3.3.2	Comparaison . . . . .	32
3.3.3	Liaison séries intégrales . . . . .	33
3.3.4	Séries de Riemann . . . . .	34
3.3.5	Règle de Cauchy . . . . .	34
3.3.6	Règle d'Alembert . . . . .	35
3.4	Séries de signes non constant . . . . .	36
3.4.1	Séries Alternées . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Séries Entières</b>	<b>39</b>
4.1	Domaine de convergence . . . . .	39
4.2	Rayon et intervalle de convergence . . . . .	40
4.3	Calcul du rayon de convergence . . . . .	41
4.4	Somme des Séries Entières . . . . .	42
4.4.1	Dérivation et Intégration des Séries Entières . . . . .	43
4.5	Développement en Séries Entières . . . . .	44
4.5.1	Conditions nécessaires . . . . .	45
4.6	Opération sur les DSE . . . . .	46
4.7	DSE usuels . . . . .	47
4.7.1	Application à la somme d'une série numérique . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Notations, rappels, et Hors Programme (HP)</b>	<b>49</b>
5.1	Ensembles . . . . .	49
5.2	Fonctions . . . . .	49
5.2.1	Ensembles de fonctions . . . . .	49
5.2.2	Opérations entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires	50
5.2.3	Comparaison entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires	50
5.2.4	Limites, continuité et dérivabilité . . . . .	50
5.3	Bornes sup et bornes inf . . . . .	51
5.4	Convergence . . . . .	52
5.5	Suites, et séries . . . . .	52
5.5.1	Suites de scalaires . . . . .	52
5.5.2	Suites et série d'application . . . . .	53
5.5.3	Séries . . . . .	53
5.5.4	Séries Entières . . . . .	54

5.6	Autre . . . . .	54
-----	-----------------	----



# Chapitre 1

## Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit  $D \in \mathbb{R}$ , soit  $f \in \mathbb{R}^D$

### 1.1 Limite

#### 1.1.1 Adhérence

**Définition 1.1.1**

On appelle adhérence de  $D$  le plus petit ensemble fermé qui contient  $D$ . Noté  $\bar{D}$

#### 1.1.2 Limite

Soit  $f$  définie sur  $D$ , Soit  $a \in \bar{D}$ , Soit  $l \in \mathbb{R}$

**Définition 1.1.2**

On dit que  $f$  a pour limite  $l$  quand  $x$  tends vers  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

#### 1.1.3 Fonctions négligeables

**Définition 1.1.3**

Soit  $f, g \in \mathbb{R}^D$  et  $a \in \bar{D}$  on dit que  $f = o_a(g)$  si  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_a 0$

**1.1.1**  
en 0 on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} \tag{1.1}$$

$$\rightarrow_{0+} 0 \quad (1.2)$$

$$f = o_{0+}(g) \quad (1.3)$$

### 1.1.4 Croissance comparée

#### **Théorème 1.1.1 – Croissances Comparées**

Soient  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+*}$  avec  $\gamma > 1$  avec

$$f : x \mapsto (\log x)^\alpha$$

$$g : x \mapsto x^\beta$$

$$h : x \mapsto \gamma^x$$

alors on a

$$g = o_\infty(f)$$

$$h = o_\infty(g)$$

c'est à dire

$$\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \rightarrow_\infty 0$$

$$\frac{x^\beta}{\gamma^x} \rightarrow_\infty 0$$

### 1.1.5 Fonctions Équivalentes

#### **Définition 1.1.4**

Soit  $f, g \in \mathbb{R}^D$  et  $a \in \bar{D}$  on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  quand  $x$  tends vers  $a$

si  $\frac{f}{g} \rightarrow_a 1$ .

On note  $f \sim_a g$

**1.1.2** — Un polynome est équivalent à son monôme de plus haut degrés (resp bas) quand  $x$  tends vers  $\infty$  (resp 0)

—  $\sin x \sim_0 x$

—  $\ln(1+x) \sim_0 x$



### 1.1.6 Opération sur les équivalents

Soient  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathbb{R}^D$  soit  $a \in \bar{D}$  soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_1 \sim_a g_1$$

$$f_2 \sim_a g_2$$

$$f_1 \cdot f_2 \sim_a g_1 \cdot g_2$$

$$\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$$

$$f_1^\alpha \sim_a g_1^\alpha$$

$$f = o_a g \Rightarrow f + g \sim_a g \quad (1.4)$$

— Si  $f \sim_a g$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

#### Proposition 1.1.1

Si  $f \sim_a g$  et  $\lim_a f \neq 1$  alors  $\log f \sim_a \log g$

*Démonstration.*

$$\frac{\log g(x)}{\log f(x)} - 1 = \frac{\log g(x) - \log f(x)}{\log f(x)}$$

$$= \frac{\log \left( \frac{g(x)}{f(x)} \right)}{\log f(x)}$$

or  $f \sim_a g$

$$\xrightarrow{a} \frac{0}{\log f(a)}$$

par passage à la limite car  $\lim_a f \neq 1$

$$= 0$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1$  donc  $\log f \sim_a \log g$

□

Cas particulier où  $l = 1$

#### 1.1.3

$f(x) = 1 + x$  et  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$  on a bien  $f \sim_0 g$  et  $f \rightarrow_0 1$  on a aussi  $\log f(x) = \log 1 + x \sim_0 x$  et  $\log g(x) = \log 1 + \sqrt{x} \sim_0 \sqrt{x}$  et  $x \neq \sqrt{x}$

## 1.2 Continuité

### Définition 1.2.1

Soit  $f$  définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . On note  $\mathcal{C}^0$  l'ensemble des fonctions continues, c'est un espace vectoriel.

## 1.3 Dérivabilité

### Définition 1.3.1

Soit  $f$  définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in D$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  la fonction  $a \mapsto \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  définie sur l'ensemble des valeurs dérivables de  $f$ .

### 1.3.1 Dérivée successives

On peut ensuite étudier la dérivabilité des dérivées successives de  $f$

## 1.4 Développements Limités (DL)

### Définition 1.4.1

On appelle Développement Limité (DL) à l'ordre  $n$  et au point  $a \in I$  d'une fonction  $f$  défini sur un interval ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , un polynome  $P$  tel que

$$\begin{aligned} \deg P &= n \\ f(x) &= P(x - a) + o_0((x - a)^n) \end{aligned}$$

C'est une propriété **locale** de  $f$  en  $a$

### 1.4.1 Taylor-Young

#### Théorème 1.4.1 – Formule de Taylor-Young

Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n$  fois dérivable, alors  $f$  admet un  $DL_n$  pour un point  $a$  de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

**Remarque 1.4.1**

Dans la majorité des cas pratiques, on prend  $a = 0$  ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + o(x^n)$$

**1.4.1**

En exemple on prend  $f = \exp$ ,  $\exp \in \mathcal{C}^\infty$  et on a  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = \exp$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 1$  donc d'après le théorème de Taylor-Young,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exp$  admet un  $DL_n$  de la forme

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Remarque 1.4.2**

La formule de Taylor-Young permet aussi de faire l'inverse, de trouver la valeur d'une dérivée en un point si l'on connaît le DL de la fonction.

**1.4.2**

Un exemple pour la valeur en 0 de la dérivée quatrième de  $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Et d'après Taylor-Young on a

$$\frac{1}{1-x} = \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Or les deux DL sont égaux, donc les polynômes aussi, et donc par identification des coefficients on a

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 1$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{f^{(4)}(0)}{4!} &= 1 \\ f^{(4)}(0) &= 4! = 24 \end{aligned}$$

On a donc la valeur de la dérivée quatrième en  $O$  sans avoir à dériver la fonction.

En pratique ça permet l'étude des dérivées en un point sur des fonctions bien plus complexes.

**1.4.2 DL usuels****Proposition 1.4.1**

Les développements limités usuels en 0 sont les suivants

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\
\log(1+x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \sigma_\alpha(k) x^k + o(x^n) \quad \text{avec} \\
\alpha &\in \mathbb{R} \quad \text{et} \\
\sigma_\alpha(k) &= \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!}, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

**Remarque 1.4.3**

Les DL de fonctions paires (resp impaires) ne contiennent que des coefficients sur les degrés pairs (resp impairs)

**1.4.3**

Exemple, la fonction cos est paire

**1.4.3 Opération sur les DL**

Sans perte de généralité, les DL sont ici en 0

Soit  $P, Q \in R[X]$  et  $f, g \in \mathbb{R}^I$  tels que

$$\begin{aligned}
\deg P &= \deg Q = n \\
f(x) &= P(x) + o(x^n) \\
g(x) &= Q(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

**Troncage****Définition 1.4.2**

On appelle "troncage" à l'ordre  $k \leq n$  d'un DL, le polynome tronqué  $F_k$  de degrés  $k$  tel que tous les coefficients de  $F_k$  sont égaux à ceux de  $F$  jusqu'au

coefficient de  $x^k$  et tel que

$$f(x) = F_k(x) + o(x^k)$$

#### 1.4.4

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

le  $DL_5$  de  $\exp$  alors on peut le "tronquer" à l'ordre  $k = 3 \leq 5$  pour avoir le  $DL_3$  de  $\exp$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

### Somme

#### Proposition 1.4.2

Le  $DL_n$  de la fonction  $f + g$  est la somme des  $DL_n$  de  $f$  et de  $g$

$$(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

### Produit

#### Proposition 1.4.3

Le  $DL_n$  de la fonction  $fg$  est le produit des  $DL_n$  de  $f$  et de  $g$  tronqué à l'ordre  $n$

$$(fg)(x) = PQ_n(x) + o(x^n)$$

### Composée

#### Proposition 1.4.4

Si  $g(0) = 0$  alors on peut composer les  $DL_n$  et le  $DL_n$  de  $f \circ g$  est la composition des  $DL_n$  de  $f$  et de  $g$  tronqué à l'ordre  $n$

$$(f \circ g)(x) = (P \circ Q)_n(x) + o(x^n)$$

#### 1.4.5

Exemple  $DL_3$  de  $\sqrt{1 + \sin x}$ . On a bien  $\sin 0 = 0$ .

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha - 1)x^2}{2}X^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6}X^3 + o(X^3) \quad \text{donc}$$

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{8} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{3}{48} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^9)$$

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + o(x^3) \quad \text{tronquage}$$

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

### 1.4.4 Application au calcul de dérivé

Les DL sont utiles pour résoudre des formes indéterminées lors du calcul de limite

#### 1.4.6

Calcul de la limite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$  On calcule les différents DL à l'ordre 4

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{tronquage, inutile au delà}$$

$$f(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + o(1) \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$$

On voit après que l'ordre 2 aurait suffi, l'intuition peut aider pour savoir à quel ordre calculer.





# Chapitre 2

## Intégration

### 2.1 Intégrales de Riemann

Explication des notations,

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

#### 2.1.1 Introduction

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Soit  $f$  définie et bornée sur  $[a, b]$  et  $d = (x_1, \dots, x_n) \subset [a, b]$  une subdivision de  $[a, b]$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On définit

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$S(d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$
$$s(d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Le but est double

- Approcher  $f$  par des fonctions en escalier
- Augmenter  $n$  pour augmenter la précision de l'approche

Et pour  $d'$  une subdivision plus fine que  $d$  on a

$$s(d) \leq s(d') \leq S(d') \leq S(d)$$

On peut définir des suites convergentes, et à l'infini on note

$$I = \sup_{[a,b]} S(d)$$

$$J = \inf_{[a,b]} s(d)$$

### Définition 2.1.1

Une fonction  $f$  est Riemann-intégrable si  $I_f = J_f = \int_a^b f$

## 2.1.2 Propriétés de l'intégrale

On prend  $f, g$  deux fonctions Riemann-intégrable définie sur  $[a, b]$

### Proposition 2.1.1

On a

$$\int_a^a f = 0$$

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

### Proposition 2.1.2 – Relation de Chales

Soit  $c \in [a, b]$ ,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

### 2.1.1

Exemple d'une fonction non-Riemann-intégrable. Soit  $f$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$  sur  $[0, 1]$  alors on a

$$M_i = \sup f = 1$$

$$m_i = \inf f = 0$$

D'où

$$S(d) = x_n - x_0 = 1$$

$$s(d) = 0$$

Donc

$$I \neq J$$

Par conséquence,  $f$  n'est pas Riemann-intégrable sur  $[0, 1]$

### Théorème 2.1.1

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$

1. Si  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  alors  $f$  est Riemann-intégrable
2. Théorème des singularités supprimable, si on modifie  $f$  sur un nombre fini de point, l'intégrale n'est pas modifiée
3. Par conséquence, les fonctions continues par morceaux ( $\mathcal{M}^0$ ) sont aussi Riemann-intégrable

## 2.1.3 Opération sur les intégrales

### Proposition 2.1.3

Soient  $f, g$  Riemann-intégrables sur  $I$

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$
- La fonction  $(f + g)$  est Riemann-intégrable et  $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$
- La fonction  $|f|$  est Riemann-intégrable
- La fonction  $(fg)$  est Riemann-intégrable

## 2.1.4 Positivité de l'intégrale

### Proposition 2.1.4

Soit  $f$  Riemann-intégrable sur  $I$

- Si  $\forall x \in I, f(x) \geq 0$  alors  $\int_I f \geq 0$
- Si  $\forall x \in I, f(x) \leq 0$  alors  $\int_I f \leq 0$

### Théorème 2.1.2 – Positivité de l'intégrale

Soit  $f, g$  Riemann-intégrable sur  $I$  telles que

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Alors il vient de la prop précédente que

$$\int_I f \leq \int_I g$$

### Proposition 2.1.5 – Généralisation de l'inégalité triangulaire

Soit  $f$  Riemann-intégrable sur  $I$ , on a alors

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

## 2.1.5 Moyenne

Soit  $f, g$  Riemann-intégrable sur  $I$ , on note

$$m = \inf_I f$$

$$M = \sup_I f$$

### Proposition 2.1.6

Si  $g$  est de signe constant sur  $I$  alors  $\exists \mu \in [m, M], \int_I fg = \mu \int_I g$

*Démonstration.* On a,  $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$ , on considère sans perte de généralité que  $\forall x \in I, g(x) \geq 0$  et que  $\int_I g \neq 0$  alors on a

$$\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

$$m \int_I g \leq \int_I fg \leq M \int_I g$$

$g$  est positive

$$m \leq \frac{\int_I fg}{\int_I g} \leq M$$

car  $\int_I g \neq 0$

On pose  $\frac{\int_I fg}{\int_I g} = \mu$ , il vient que  $\mu \in [m, M]$  et que  $\mu \int_I g = \int_I fg$  □

### Remarque 2.1.1

On prend le cas particulier où  $g = 1$  on a  $\int_a^b f = \mu \int_a^b 1$  ce qui donne finalement

$$\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f$$

On appelle alors  $\mu$  la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$

### 2.1.6 Théorème fondamental de l'analyse

#### Proposition 2.1.7

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-intégrable, et on définit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in [a, b], g(x) = \int_a^x f$$

Alors

- Si  $f$  est Riemann-intégrable alors  $g$  est continue
- Si  $f$  est continue en  $x_0 \in [a, b]$  alors  $g$  est dérivable en  $x_0$
- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors  $g$  est dérivable sur  $[a, b]$  et  $g' = f$

#### Théorème 2.1.3 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  un interval de  $\mathbb{R}$ , et soit  $\alpha \in I$  alors  $f$  admet une unique primitive  $F_\alpha$  telle que  $F'_\alpha = f$  s'annulant en  $x = \alpha$ . De plus pour toute fonction  $F$  primitive de  $f$  on a  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

### 2.1.7 Primitives usuelles

#### Proposition 2.1.8

Les primitives usuelles sont les suivantes, par abus de notation toutes les fonctions suivantes sont marquées selon leur procédure, par exemple  $x^\alpha$  réfère à la fonction  $(x \mapsto x^\alpha)$  sur son plus grand interval de définition,  $c$  désigne une constante réelle.

$$f = x^\alpha, F = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$$

$$f = \frac{1}{x}, F = \ln|x| + c$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{x}}, F = 2\sqrt{x} + c$$

$$f = e^x, F = e^x + c$$

$$f = \cos(ax + b), F = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c \quad a \neq 0$$

$$f = \sin(ax + b), F = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c \quad a \neq 0$$

$$f = \frac{1}{\cos^2 x}, F = \tan x$$

$$f = \frac{1}{x^2 + a^2}, F = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c \quad a \neq 0$$

Pour les fonctions, il faut pas oublier la règle de la composée qui donne par exemple

$$f = u^\alpha \cdot u', F = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \quad \alpha \neq -1$$

$$f = \frac{u'}{u}, F = \ln|u|$$

$$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}, F = 2\sqrt{u}$$

### 2.1.8 Changement de variable

#### **Théorème 2.1.4 – Théorème de changement de variable**

Soit  $\varphi[a, b] \in \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , et soit  $f : I \in \mathbb{R}\mathcal{C}'$  sur  $I$  alors on a la formule suivante

$$\int_a^b f \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$$

#### **2.1.2**

Calculons,  $I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{d-x^2}}$  On pose  $t = 2 - x^2$  ce qui est bien  $\mathcal{C}^1$  alors on a  $dt = -2x dx$  donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^1 \frac{dt}{-2\sqrt{t}} \\ &= \int_1^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [2\sqrt{x}]_1^2 \\
 &= \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

### 2.1.9 Intégration par parties

#### Théorème 2.1.5 – Théorème d'intégration par parties

Soit  $u, v, \mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  alors on a

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

#### 2.1.3

Exemple calculons  $I = \int_0^1 xe^x dx$  On pose  $u(x) = x$  donc  $u'(x) = 1$  et donc  $v'(x) = e^x$  ce qui donne  $v(x) = e^x$  ce qui sont bien  $\mathcal{C}^1$ , donc par IPP on a

$$\begin{aligned}
 I &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\
 &= e - (e - 1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

## 2.2 Intégrales Généralisées

Il existe deux cas d'intégrales généralisées

1. Le cas où l'on intègre une fonction bornée sur un intervalle non borné (de forme  $[a, b[$ )
2. Le cas où l'on intègre une fonction non bornée sur un intervalle borné (de forme  $[a, b]$ )

#### Définition 2.2.1

Soit  $[a, b[$  tel que  $-\infty < a < b \leq +\infty$ . Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On prend l'application

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f \text{ définie sur } [a, b[$$

— Si  $I(\lambda)$  converge en  $b^-$  alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ , on note  $\lim_{\lambda \rightarrow b^-} I(\lambda) =$

$$\int_a^b f \text{ et on appelle le scalaire } \int_a^b f \text{ intégrale généralisée de } f \text{ sur } [a, b[$$

— Si  $I(\lambda)$  diverge en  $b^-$  alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b[$

### 2.2.1

On cherche à connaître la nature de l'intégrale de  $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$  sur  $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} \\ &= -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\lambda \\ &= -\frac{1}{\lambda} + 1 \rightarrow_\infty 1 \end{aligned}$$

Donc  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  existe et vaut 1

### 2.2.2

On cherche à connaître la nature de l'intégrale de  $(x \mapsto \cos x)$  sur  $[0, \infty[$ .

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \cos x dx \\ &= [\sin x]_1^\lambda \\ &= \sin \lambda - \sin 1 \end{aligned} \quad \text{DV}$$

Donc  $(x \mapsto \cos x)$  n'est pas intégrable sur  $[0, \infty[$

#### Remarque 2.2.1

Soit  $c \in [a, b[$  alors  $\int_a^b f$  et  $\int_c^b f$  sont de même nature, et sont notés en général  $\int_a^b f$

#### Remarque 2.2.2

Si on a  $a = \infty$  ou  $f$  non définie en  $a$  on sépare l'étude en plusieurs sous problèmes

## 2.2.1 Cas des fonctions réelles positives

Dans la section  $f$  est une fonction réelle positive définie sur  $[a, b[$



## Majoration

### Proposition 2.2.1

l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  CV  $\Leftrightarrow \int_a^\lambda f$  majorée

*Démonstration.*

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f$$

On a  $I$  qui est croissante sur  $[a, b[$  d'après le théorème des limites monotones alors

- si  $I$  est majorée alors  $I(\lambda) \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$  et  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$
- si  $I$  n'est pas majorée alors  $I(\lambda) \rightarrow \infty$  donc  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b[$

□

## Comparaison

### Proposition 2.2.2 – Théorème de comparaison

Soit  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq f \leq g$  alors

- Si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$  alors  $f$  l'est
- Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b[$  alors  $g$  ne l'est pas

## Equivalent

### Proposition 2.2.3

Soit  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f \sim_b g$  alors  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  sont de même nature

## 2.2.2 Cas des fonction réelles positives et où $b = \infty$

### Proposition 2.2.4

Si  $f \not\rightarrow 0$  alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, \infty[$

*Démonstration.* Supposons que  $f \rightarrow l \neq 0$  alors  $f \sim l$  donc  $\int_a^\infty f$  est de même nature que  $\int_a^\infty l dx$  donc  $\int_a^\infty f$  DV □

## Critère de Riemann

**Théorème 2.2.1 – Critère de Riemann**

La fonction  $(x \mapsto \frac{1}{x^\alpha})$  est :

- intégrable  $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- pas intégrable  $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \frac{dx}{x^\alpha} & \alpha \neq 1 \\ &= \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^\lambda \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)\lambda^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Donc  $I$  ne converge que si  $\alpha > 1$  et en retour si  $\alpha > 1$  alors  $I$  converge.  $\square$

**2.2.3**

Cherchons la nature de  $\int_0^\infty \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}}$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}} &\sim \frac{2x}{\sqrt{x^4}} \\ &\sim \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Donc d'après le critère de Riemann  $\int_0^\infty \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}} \text{ DV}$

**Règle de Riemann****Proposition 2.2.5 – Règle de Riemann**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, \infty[$

- Si il existe  $\alpha > 1$  tel que  $x^\alpha f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$  alors  $\int_a^\infty f \text{ CV}$
- Si il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $x^\alpha f(x) \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}^*$  alors  $f$  n'est pas intégrable

*Démonstration.* Conséquence du critère de Riemann.  $\square$

**2.2.4**

Est-ce que  $(x \mapsto \sqrt{x}e^{-x})$  est intégrable sur  $[0, \infty[$

$$\begin{aligned} x^2 * \sqrt{x}e^{-x} &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{e^x} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{CC}$$

Donc d'après la règle de Riemann,  $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}$  CV

**2.2.3 Cas où b est fini**

On note

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \alpha > 0$$

**Proposition 2.2.6**

Nature de  $\int_a^b g$ .

$$I(\lambda) = -\frac{1}{(1-\alpha)} ((b-\lambda)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha})$$

Donc

- si  $\alpha < 1$  alors  $(b-\lambda)^{1-\alpha} \rightarrow 0$  donc  $I$  CV
- si  $\alpha > 1$  alors  $(b-\lambda)^{1-\alpha} \rightarrow \infty$  donc  $I$  DV
- si  $\alpha = 1$  alors  $I \rightarrow \infty$  donc  $I$  DV

**Critère de Riemann****Théorème 2.2.2 – Critère de Riemann - Version finie**

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Voir ci dessus.

**Proposition 2.2.7**

Par conséquent si  $f \sim \frac{A}{(b-x)^\alpha}$  alors  $\int_a^b f$  CV ssi  $\alpha < 1$

*Démonstration.* Conséquence directe du critère de Riemann. □

### 2.2.5

Nature de  $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}$  on a

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x}} &\sim \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &\sim \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

or  $\frac{1}{2} < 1$  donc  $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}$  CV

## Règle de Riemann

### Proposition 2.2.8 – Règle de Riemann - Version finie

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b[$

- Si il existe  $\alpha < 1$  tel que  $x^\alpha f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$  alors  $\int^\infty f$  CV
- Si il existe  $\alpha \geq 1$  tel que  $x^\alpha f(x) \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}^*$  alors  $f$  n'est pas intégrable

*Démonstration.* Conséquence du critère de Riemann. □

## 2.2.4 Cas des fonctions de signes qql

### Définition 2.2.2

On dit que l'intégrale de  $f$  est simplement convergente si et seulement si  $I(\lambda)$  a une limite et si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f \in \mathbb{R}$$

### Définition 2.2.3

On dit que l'intégrale de  $f$  est absolument convergente si et seulement si  $\int_a^x |f| \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$

### Théorème 2.2.3 – Comparaison

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \bar{\mathbb{R}}$  tel que  $a < b$  et  $f$  une fonction définie sur  $[a, b[$

1. Si l'intégrale de  $f$  est absolument convergente alors l'intégrale de  $f$  est

simplement convergente

2. Le résultat  $\left| \int f \right| \leq \int |f|$  est étendu aux intégrales généralisées

*Démonstration.* Cette preuve est **hors du programme présenté lors du cours**, je la trouve utile mais on peut la sauter c'était juste pour donner une idée de à quoi peut ressembler ce genre de preuve.

1. Notons,  $f^- = \max(-f, 0)$  et  $f^+ = \max(f, 0)$ . On observe que

$$\begin{aligned} f^- + f^+ &= \max(-f, 0) + \max(f, 0) \\ &= |f| \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} f^+ - f^- &= \max(f, 0) - \max(-f, 0) \\ &= f \end{aligned}$$

On suppose que  $\int |f|$  est convergente donc

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x (f^+ + f^-) = \mu$$

Or Les fonctions  $f^+$  et  $f^-$  sont à valeurs positives, donc

$$\begin{aligned} \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x (f^+) &= \mu_1 & \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x (f^-) &= \mu_2 \end{aligned}$$

Donc par linéarité,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x (f^+ - f^-) = \mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Ce qui revient à

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \lambda$$

Donc l'intégrale de  $f$  est simplement convergente.

2. Supposons que l'intégrale de  $f$  est absolument convergente, rappelons d'abord que sur les intégrales de Riemann on a pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $g \mathcal{M}^0$  sur  $[a, b]$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g| \quad (2.1)$$

Puis,

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b[, \left| \int_a^x f \right| &= \left| \int_a^x (f^+ - f^-) \right| \\ &\leq \left| \int_a^x f^+ \right| + \left| \int_a^x f^- \right| && IT \\ &\leq \int_a^x |f^+| + \int_a^x |f^-| && (1) \\ &\leq \int_a^x f^+ + f^- && \text{valeurs positives} \\ &\leq \int_a^x |f| \end{aligned}$$

Enfin par passage à la limite avec  $x \rightarrow b^-$  (les limites existe avec la démonstration du 1.)

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

□

### 2.2.6

Nature de  $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$ . On a

$$\forall x \in ]0, 1] \leq 1$$

Donc l'intégrale est absolument convergente donc l'intégrale est convergente

### 2.2.7

Nature de  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}$  par le même raisonnement absolument convergente donc convergente.

# Chapitre 3

## Séries numériques

### 3.1 Introduction aux séries numériques

**Définition 3.1.1**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$  alors la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée *série de terme général*  $u_n$  notée  $\sum u_n$ .

De plus si la suite  $(S_n)$  converge alors on note  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$ , notée aussi  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  appelée *somme de la série*.

On dit alors que la série de terme général  $u_n$  est convergente. Dans le cas contraire on dit qu'elle est divergente.

**Définition 3.1.2**

On appelle  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  somme partielle de la série de terme général  $u_n$ , et si la série est convergente alors on note  $R_n = S - S_n$  le reste de la série.

**Remarque 3.1.1**

On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

**Remarque 3.1.2**

Les séries  $\sum_0 u_n$  et  $\sum_{n_0} u_n$  sont de même nature d'où la notation  $\sum u_n$

**Proposition 3.1.1 – Condition nécessaire de convergence**

$$\left(\sum u_n \text{ CV}\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

On observe que

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$$

Donc, en supposant que  $\sum u_n$  CV on a

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow S - S \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

□

**Remarque 3.1.3**

Cette condition est surtout utilisé pour montrer qu'il n'y a pas convergence (contraposée), lorsque  $u_n \not\rightarrow 0$  (en pratique plutôt lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ ) on dit que  $\sum u_n$  est *grossièrement divergente*.

**3.1.1**

Soit  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Soit  $n \geq 1$  on a alors

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Donc par somme télescopique on obtient que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc la série de terme générale  $u_n$  est convergente et sa somme vaut 1

**3.1.2**

Soit  $u_n = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , alors on a

$$\begin{aligned} u_n &= \log \frac{n+1}{n} \\ &= \log(n+1) - \log n \end{aligned}$$



Donc,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_n &= \sum_{k=1}^n \log n + 1 - \log n \\
 &= \log n + 1 - \log 1 && \text{somme télescopique} \\
 &= \log n + 1 \\
 &\rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Donc la série de terme générale  $u_n$  est divergente

### 3.1.1 Sommes de séries numériques

#### Proposition 3.1.2 – Somme

Soit  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $w_n = u_n + v_n$

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors  $\sum w_n$  converge
- Si  $\sum u_n$  CV (resp DV) et  $\sum v_n$  DV (resp CV) alors  $\sum w_n$  diverge
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent alors on ne peut rien dire de  $\sum w_n$

## 3.2 Séries géométriques

#### Définition 3.2.1

Soit  $r \in \mathbb{R}$  alors on appelle suite géométrique une suite de la forme  $u_n = r^n$  et alors la série de terme général  $u_n$  est appelée *série géométrique* de raison  $r$

#### Théorème 3.2.1 – Théorèmes des Séries Géométriques

Soit  $u_n = r^n$  et  $\sum u_n$  la série associée, alors on a

$$\sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow |r| < 1$$

Et dans ce cas alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{1-r}$$

*Démonstration.* Soit  $r \in \mathbb{R}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 (1-r)S_n &= (1-r) \cdot \sum_{i=0}^n r^i \\
 &= \sum_{i=0}^n (1-r)r^i && (1-r) \in \mathbb{R} \\
 &= \sum_{i=0}^n r^i - r^{n+1} \\
 &= 1 - r^{n+1} && \text{somme télescopique} \\
 &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } |r| < 1 \\ \text{DV} & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

D'où dans le cas convergent

$$S = \frac{1}{1-r}$$

□

### 3.3 Séries À Termes Positifs (SATP)

#### Définition 3.3.1

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  on appelle alors la série de terme générale  $\sum u_n$  une *série à terme positifs*, abrégés *SATP*

#### 3.3.1 Introduction

##### Proposition 3.3.1

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$

$$\left( \sum u_n \text{ CV} \right) \Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ majorée}$$

*Démonstration.*  $\sum (u_n)$  est une série à terme positifs donc la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles est croissante donc par théorème des limites monotones  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si elle est majorée □

#### 3.3.2 Comparaison

**Théorème 3.3.1 – Théorème de Comparaison des SATP**

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$$

On a,

1. Si  $\sum v_n$  CV alors  $\sum u_n$  CV
2. Si  $\sum u_n$  DV alors  $\sum v_n$  DV

*Démonstration.* Conséquence du théorème des limites monotones □

**Proposition 3.3.2**

Soit  $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  telles que

$$u_n \sim_{\infty} v_n$$

Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature

**3.3.1**

Soit  $u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  on a  $u_n \sim \frac{1}{n}$  et  $\sum u_n$  DV donc la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente

**Remarque 3.3.1**

La série  $\sum \frac{1}{n}$  est appelée *série harmonique*

**3.3.3 Liaison séries intégrales****Théorème 3.3.2 – Comparaison Série/Intégrale**

Soit  $f \geq 0$ ,  $\mathcal{C}^0$ , et décroissante à partir d'un réel  $x_0$ , alors  $\sum f(n)$  et  $\int^{\infty} f$  sont de même nature

*Démonstration.* Soit  $f \geq 0$ ,  $\mathcal{C}^0$  et décroissante, soit  $n \in \mathbb{N}$  on observe que

$$\begin{aligned} I(n+1) &\leq S_n & \text{et} \\ S_n &\leq f(0) + I(n) \end{aligned}$$

Donc si  $\sum f(n)$  converge alors par comparaison à termes positifs on a  $I(n)$  qui

converge par la première inégalité, et si  $\sum f(n)$  diverge alors par la deuxième inégalité  $I(n)$  diverge. Donc  $I$  et  $\sum f(n)$  sont de même nature  $\square$

### 3.3.4 Séries de Riemann

#### Théorème 3.3.3 – Critère de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  soit  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^0$ , à terme positifs et décroissante donc par comparaison série intégrale  $\int f$  et  $\sum f(n)$  sont de même nature, or par critère de Riemann dans les intégrales  $\int f$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  donc  $\sum f(n) = \sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .  $\square$

#### Remarque 3.3.2

Si  $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$  alors  $\sum u_n$  CV si et seulement si  $\alpha > 1$

#### Proposition 3.3.3 – Règle de Riemann

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ , alors

- Si il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  alors  $\sum u_n$  CV
- Si il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}^*$  alors  $\sum u_n$  DV

*Démonstration.* Conséquence du critère de Riemann.  $\square$

### 3.3.5 Règle de Cauchy

#### Théorème 3.3.4 – Règle de Cauchy

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ , telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in \mathbb{R}$$

On a

- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  CV

- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  DV
- Si  $l = 1$  on ne peut pas déterminer la nature de  $\sum u_n$  par cette méthode

*Démonstration.* Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in \mathbb{R}$  alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\sqrt[n]{u_n} - l| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon$$

Supposons  $l < 1$  alors prenons  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon + l < 1$ , on prend le  $n_0$  associé, et soit  $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon < 1$$

Donc

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{u_n})^n &\leq (l + \varepsilon)^n \\ u_n &\leq (l + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

Or  $|l + \varepsilon| < 1$  donc par théorème des séries géométriques  $\sum (l + \varepsilon)^n$  converge, donc par comparaison de série à terme positifs,  $\sum u_n$  converge.

Supposons maintenant que  $l > 1$  alors prenons  $\varepsilon$  tel que  $l - \varepsilon > 1$ , et soit  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon) &\leq \sqrt[n]{u_n} \\ (l - \varepsilon)^n &\leq \sqrt[n]{u_n}^n \\ (l - \varepsilon)^n &\leq u_n \end{aligned}$$

Or  $|l - \varepsilon| > 1$  donc par théorèmes des séries géométriques  $\sum (l - \varepsilon)^n$  diverge, donc par comparaisons de série à terme positifs,  $\sum u_n$  diverge.  $\square$

### 3.3.6 Règle d'Alembert

#### Théorème 3.3.5 – Règle d'Alembert

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$$

On a

- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  CV
- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  DV
- Si  $l = 1$  alors on ne peut pas déterminer la nature de  $\sum u_n$  par cette méthode

*Démonstration.* Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$ .

Supposons que  $l > 1$  alors a que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$ . Donc  $(u_n)$  est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc par le théorème des limites monotones  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$  donc la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.

Supposons que  $l < 1$  alors soit  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $l < q < 1$ . On a qu'il existe un rang  $n_0$  tel que  $l < q$  ainsi on a à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$

Donc par produit télescopique on a que la suite  $(u_n)$  est majorée par la suite  $v = (u_{n_0} q^{n-n_0})$ , or  $|q| < 1$  donc par théorème des séries géométriques  $\sum v_n$  converge, donc par comparaison de séries à termes positifs  $\sum u_n$  converge.  $\square$

## 3.4 Séries de signes non constant

### Définition 3.4.1

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , Soit  $\sum u_n$  la série de terme général  $u_n$ .

- Si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lambda$  alors  $\sum u_n$  est dite *simplement convergente*
- Si  $\exists \mu \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |u_k| = \mu$  alors  $\sum u_n$  est dite *absolument convergente*

**Théorème 3.4.1**

La convergence absolue implique la convergence simple

*Démonstration.* voir la preuve du théorème analogue pour les suites □

**3.4.1**

Soit  $u_n = \frac{\cos n^2}{n^4}$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{\cos n^2}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$ , or par critère de Riemann la série  $\sum \frac{1}{n^4}$  converge donc par comparaison de série à terme positive la série  $\sum \left| \frac{\cos n^2}{n^4} \right|$  converge donc la série  $\sum \frac{\cos n^2}{n^4}$  est absolument convergente donc elle converge simplement.

**3.4.1 Séries Alternées****Définition 3.4.2**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  on dit que la série  $\sum u_n$  est *alternée* si et seulement si la suite  $(-1)^n u_n$  est de signe constant

**Théorème 3.4.2 – Critère Spécial des Séries Alternées (CSSA)**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum u_n$  soit une série alternée, si la suite  $(|u_n|)$  est décroissante et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  alors  $\sum u_n$  converge

*Démonstration.* Considérons, sans perte de généralité que  $u_0 > 0$  alors on a

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= |u_0| - |u_1| + \cdots + (-1)^n u_n && \text{il vient} \\ S_n - S_{n-2} &= (-1)^{n-1} |u_{n-1}| + (-1)^n |u_n| \\ &= (-1)^n (|u_n| - |u_{n-1}|) \end{aligned}$$

Or par hypothèse  $|u_n|$  est décroissante donc la quantité  $|u_n| - |u_{n-1}|$  est négative.

— Si  $n$  est pair alors  $n = 2p$  et la quantité  $S_{2p} - S_{2p-2}$  est négative donc la suite  $(S_{2p})$  est décroissante

- Si  $n$  est impair alors  $n = 2p + 1$  et la quantité  $S_{2p+1} - S_{2p-1}$  est positive donc la suite  $(S_{2p+1})$  est croissante
- De plus  $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \rightarrow 0$

Donc les suites  $(S_{2p})$  et  $(S_{2p+1})$  sont adjacentes, donc

$$\exists S \in \mathbb{R}, \lim_{p \rightarrow \infty} S_{2p} = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{2p+1} = S \quad (3.1)$$

Donc par théorème des indices pair et impair la suite  $(S_n)$  converge donc la série  $\sum u_n$  est convergente  $\square$

### 3.4.2

Soit  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  on a  $|u_n| = \frac{1}{n+1}$  donc décroissante, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  car  $(-1)^n$  est bornée donc par critère spécial des séries alternées la série  $\sum u_n$  converge



# Chapitre 4

## Séries Entières

### Définition 4.0.1

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  on définit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n x^n. \end{aligned}$$

on appelle la série de terme générale  $f_n(x)$  soit la suite  $\left( \sum_{k=0}^n f_k(x) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  *série entière centrée en 0* ou plus simplement *série entière*.

Le but de l'étude est de trouver l'ensemble  $D$  pour lesquels  $\forall x \in D, \sum f_n(x)$  converge, autrement dit l'ensemble de définition de la fonction  $\left( x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$

### Remarque 4.0.1

Toute série entière converge pour  $x = 0$

### Remarque 4.0.2

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $|x_1| < |x_2|$  alors  $|a_n x_1^n| < |a_n x_2^n|$  donc on en tire les conclusions suivantes

- Si  $\sum a_n x_2^n$  est absolument convergente alors  $\sum a_n x_1^n$  est ACV
- Si  $\sum a_n x_1^n$  est divergente alors  $\sum a_n x_2^n$  est DV

## 4.1 Domaine de convergence

**Théorème 4.1.1 – Lemme d’Abel**

Si il existe  $x_0 \neq 0$  tel que  $(a_n x_0^n)$  soit borné alors  $\forall x \in \mathbb{R}$  tels que  $|x| < |x_0|$ ,  $\sum a_n x^n$  ACV

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < |x_0|$  alors

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \\ &\leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \end{aligned}$$

Or  $\sum \left( \frac{x}{x_0} \right)^n$  est ACV car  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$  donc  $\sum a_n x^n$  est absolument convergente.  $\square$

**Remarque 4.1.1**

Si il existe  $x_0 \neq 0$  tel que  $\sum (a_n x_0^n)$  soit simplement convergente alors  $\forall x \in \mathbb{R}$  tels que  $|x| < |x_0|$ ,  $\sum a_n x^n$  ACV

*Démonstration.* La convergence simple implique que la suite est borné à partir d’un certain rang  $\square$

**Remarque 4.1.2**

Par contraposée on obtient que si il existe  $x_0 \neq 0$  tel que  $\sum a_n x_0^n$  DV alors  $\forall x \in \mathbb{R}$  tels que  $|x| > |x_0|$ ,  $\sum a_n x^n$  DV

## 4.2 Rayon et intervalle de convergence

**Définition 4.2.1**

Pour toute série entière  $\sum a_n x^n$  il existe  $R \in \bar{\mathbb{R}}$  tel que  $R \geq 0$  et

- $\forall x \in \mathbb{R}$  tels que  $|x| < R$  la série entière  $\sum a_n x^n$  est ACV
- $\forall x \in \mathbb{R}$  tels que  $|x| > R$  la série entière  $\sum a_n x^n$  est DV

On appelle  $R$  le *rayon de convergence* de la série entière  $\sum a_n x^n$  et l’intervalle  $] -R, R[$  est appelé *intervalle de convergence*.

**Remarque 4.2.1**

Pour une petite apparté, d'un point de vue général pour  $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $a \in \mathbb{C}$  on a que la série  $\sum c_n(z - a)^n$  est la série entière centrée en  $a$  de  $(c_n)$ . On a alors convergence si  $|z - a| < R$  et divergence si  $|z - a| > R$  ce qui dans le plan complexe représente un disque de centre  $a$  et de rayon  $R$  (disque sans le bord), d'où l'appellation *rayon de convergence*

## 4.3 Calcul du rayon de convergence

On peut utiliser la règle d'Alembert (ou de la même manière la règle de Cauchy) pour calculer l'inverse du rayon de convergence

**Proposition 4.3.1**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \bar{\mathbb{R}}, l \geq 0$ , on a

- si  $l|x| < 1$  alors  $\sum |a_n x^n|$  CV
- si  $l|x| > 1$  alors  $\sum |a_n x^n|$  DV

*Démonstration.*

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \quad (4.1)$$

D'après les hypothèses on a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \bar{\mathbb{R}}$  et  $l \geq 0$  on a alors d'après la règle d'Alembert on obtient le résultat donné en énoncé.  $\square$

**Remarque 4.3.1**

De la même manière on peut calculer  $l$  avec la règle de Cauchy.

**Proposition 4.3.2**

Soit  $l \in \bar{\mathbb{R}}$

- $R = \frac{1}{l}$  si  $l \neq 0$
- $R = \infty$  si  $l = 0$
- $R = 0$  si  $l = \infty$

*Démonstration.* Conséquence de la proposition précédente  $\square$

**4.3.1**

Soit la série entière  $\sum \frac{x^n}{n2^n}$  on a alors  $a_n = \frac{1}{n2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} \\ &= \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc  $l = \frac{1}{2}$  ce qui donne  $R = 2$  donc la série entière est convergente sur au moins  $] -2, 2[$

Observons maintenant en  $x = 2$  on a alors

$$\begin{aligned} \left( \sum \frac{x^n}{n2^n} \right) (2) &= \sum \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ce qui est divergent par le critère de Riemann, donc la série entière est divergente en 2.

Enfin, en  $x = -2$

$$\begin{aligned} \left( \sum \frac{x^n}{n2^n} \right) (-2) &= \sum \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Ce qui est convergent par le critère spécial des séries alternées, donc la série entière est convergente en -2.

On a donc enfin que l'intervalle de convergence de  $\sum \frac{x^n}{n2^n}$  est  $[-2, 2[$

## 4.4 Somme des Séries Entières

### Définition 4.4.1

Soit  $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , alors on note la *fonction somme de la série entière*  $\sum a_n x^n$  la fonction suivante

$$S_a(x): ]-R, R[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

### Proposition 4.4.1

La fonction  $S_a$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $]-R, R[$ .

### Remarque 4.4.1

Si la SE est définie en  $x = R$  (resp  $x = -R$ ) alors on peut prolonger par continuité  $S_a$  en  $x = R$  (resp  $x = -R$ )

## 4.4.1 Dérivation et Intégration des Séries Entières

### Définition 4.4.2

Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , on dispose de la série entière  $SE = \sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$  alors

- La série entière  $\sum n a_n x^{n-1}$  est nommée *série dérivée* de SE, de rayon de convergence  $R_d$
- La série entière  $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est nommée *série intégrée* de SE, de rayon de convergence  $R_i$

### Théorème 4.4.1

$$R = R_d = R_i$$

Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , nous allons montrer que  $R = R_d$

*Démonstration.* Soit  $x$  tel que  $|x| < R_d$  donc  $\sum n a_n x^{n-1}$  est ACV,  $x \in \mathbb{R}$  donc une multiplication par  $x$  ne change pas la nature de la suite donc  $\sum n a_n x^n$  est ACV. Or

$$\forall n \geq 1, |a_n x^n| \leq |n a_n x^{n-1}|$$

Donc par comparaison de SATP, la série  $\sum a_n x^n$  est ACV donc  $|x| \leq R$  par propriété du rayon de convergence donc  $R \leq R_d$

— Soit  $x$  tel que  $|x| < R$  soit  $\rho \in ]|x|, R[ \neq \emptyset$  on a

$$|na_n x^{n-1}| = |a_n \rho^n| \cdot \left| \frac{nx^{n-1}}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{1}{\rho} \right|$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx^{n-1}}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{1}{\rho} \right| = 0$$

car  $\left| \frac{x}{\rho} \right| < 1$  donc

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |na_n x^{n-1}| \leq |a_n \rho^n|$$

Or  $\rho < R$  donc  $\sum a_n \rho^n$  est ACV donc par comparaison de SATP  $\sum na_n x^{n-1}$  est ACV donc  $R_d \leq R$

On a  $R_d \leq R$  et  $R \leq R_d$  donc  $R = R_d$  par anti-symétrie de  $(\leq)$ .

La série  $SE$  est la série intégrée, puis dérivée donc naturellement on a  $R = R_i$  par le point précédent, donc finalement

$$R = R_i = R_d$$

□

#### 4.4.1

On a que  $\sum \frac{x^n}{n2^n}$  est  $R = 2$  donc  $\sum \frac{x^{n-1}}{2^n}$  a  $R = 2$  par dérivation etc.

#### Remarque 4.4.2

Attention, les propriétés aux bord  $R$  et  $-R$  ne sont pas conservées.

## 4.5 Développement en Séries Entières

### Définition 4.5.1

Soit  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est *développable en série entière*, si

$$\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k = f$$

### 4.5.1 Conditions nécessaires

**Théorème 4.5.1**

Soit  $f$  DSE, alors  $\forall n \in \mathbb{N} f^n$  est définie en 0

*Démonstration.*

$$\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists R \in \mathbb{R}, \forall x \text{ tq } |x| < R, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

D'où

$$f(0) = a_0$$

Puis par dérivation

$$f'(0) = a_1$$

Enfin par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n! a_n \text{ (Taylor)}$$

□

**4.5.1**

Par exemple la fonction  $(x \mapsto |x|)$  n'est pas dérivable en 0 donc elle n'est pas DSE

**Remarque 4.5.1**

En remaniant l'équation on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$$

Ce qui garantit l'unicité d'un développement en série entière

**Proposition 4.5.1**

Si  $f$  est DSE alors  $f \in \mathcal{C}^\infty ]-R, R[$

*Démonstration.* Conséquence du théorème précédent

□

**Remarque 4.5.2**

La réciproque est fausse.

*Démonstration.* Soit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

, on suppose qu'elle est DSE. Alors on voit que par récurrence

$$\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

Donc toutes les dérivées peuvent être prolongées par continuité en 0 et on obtient (car  $f(0) = 0$ )

$$\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$$

Or d'après le point précédent ça veut dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$$

donc que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sum a_n x^n \\ &= \sum 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or  $f$  n'est pas la fonction nulle, par exemple  $f(1) = e^{-1} \neq 0$  donc c'est absurde, donc  $f$  n'est pas DSE.  $\square$

## 4.6 Opération sur les DSE

### Proposition 4.6.1

Soit  $f, g$  DSE on a

- $(f + g)$  DSE
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)$  DSE
- $(fg)$  DSE
- $\forall k \in \mathbb{N}, f^k$  DSE
- $\forall k \in \mathbb{N}, (x \mapsto f(x^k))$  DSE



**Remarque 4.6.1**

Attention aux intervalles de convergences quand  $R_f \neq R_g$

**4.7 DSE usuels****Proposition 4.7.1**

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & R &= +\infty \\
 \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} & R &= +\infty \\
 \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} & R &= +\infty \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k & R &= 1 \\
 \log(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{x^k}{k} & R &= 1 \\
 \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k & R &= 1 \\
 \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} & R &= 1 \\
 \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} & R &= 1 \\
 \arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} & R &= 1 \\
 (1+x)^\alpha &= DL_\infty & R &= 1
 \end{aligned}$$

**Remarque 4.7.1**

Pour  $\log(1-x)$  et  $\arctan(x)$  par le CSSA elles convergent en  $x = 1$

**4.7.1 Application à la somme d'une série numérique**

**Remarque 4.7.2**

On peut utiliser les DSE pour calculer une série numérique, exemple avec  $\sum \frac{n}{2^n}$

$$\begin{aligned}\forall x \in ]-1, 1[, \sum x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} && \text{dérivation} \\ \sum nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2} && \text{multiplication par } x \\ &= 2 && \text{en } x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

# Chapitre 5

## Notations, rappels, et Hors Programme (HP)

### 5.1 Ensembles

#### Remarque 5.1.1

Soit  $D$  un ensemble

- $\bar{D}$  est l'adhérence de  $D$  c'est à dire le plus petit ensemble fermé contenant  $D$ , par exemple  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Soit  $\mathbb{K}$  un corps, alors  $\mathbb{K}[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficient dans  $\mathbb{K}$  a une indéterminée (en gros, variable)

### 5.2 Fonctions

#### 5.2.1 Ensembles de fonctions

#### Remarque 5.2.1

Soit  $E, F$  deux ensembles, et soit  $I$  un interval de  $\mathbb{R}$

- $E^F$  est l'ensemble des applications (fonctions) de  $F$  dans  $E$
- En particulier  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est l'ensemble des suites réelles
- $\mathcal{C}^0(I)$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $I$
- Dans le cas général  $\mathcal{C}^n(I)$  est l'ensemble des fonctions dérivable  $n$  fois sur  $I$  et dont la  $n$ -ème dérivée est continue sur  $I$
- On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  l'ensemble  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(I)$ . En pratique ces fonctions sont dérivable une infinité de fois (par exemple les polynômes, exponentielle etc.)

—  $\mathcal{M}^0(I)$  est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $I$

### 5.2.2 Opérations entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires

#### Remarque 5.2.2

Soit  $f, g$  deux fonctions, Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lambda f$  est la fonction  $(x \mapsto \lambda \cdot f(x))$
- $f + g$  est la fonction  $(x \mapsto f(x) + g(x))$
- $fg$  est la fonction  $(x \mapsto f(x)g(x))$
- $f \circ g$  est la fonction  $(x \mapsto f(g(x)))$

### 5.2.3 Comparaison entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires

#### Remarque 5.2.3

Soit  $f, g$  deux fonctions et  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $f \geq \lambda$  (resp  $>, \leq, <$ ) représente  $\forall x \in I, f(x) \geq \lambda$  (resp  $>, \leq, <$ )
- $f \geq g$  (resp  $>, \leq, <$ ) représente  $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$  (resp  $>, \leq, <$ )
- $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 0$
- $f = \mathcal{O}_a(g) \Leftrightarrow \lim_a \frac{f}{g} \in \mathbb{R}$
- $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 1$

### 5.2.4 Limites, continuité et dérivabilité

#### Remarque 5.2.4

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $a \in I$

- Définition de la limite de  $f$  au point  $a$

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0, |x - a| < \nu \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

- $\lim_a f = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_a f = f(a)$
- $f$  est continue sur  $I$  si  $\forall x \in I, f$  est continue en  $x$
- $f$  est dérivable en  $a$  si le quotient  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow a$
- $f$  est dérivable sur  $I$  si  $\forall x \in I, f$  est dérivable en  $x$

## 5.3 Bornes sup et bornes inf

### Définition 5.3.1

On appelle la *borne supérieure* de  $D \subset \mathbb{R}$  le nombre  $M \in \mathbb{R}$  caractérisé par

$$\begin{array}{ll} \forall x \in D, x \leq M & M \text{ est un majorant de } D \\ \forall \lambda \text{ tq } (\forall x \in D, x \leq \lambda), M \leq \lambda & M \text{ est le plus petit des majorants} \end{array}$$

On note alors

$$M = \sup A$$

Par analogie la *borne inférieure* est le plus grand des minorants, noté

$$m = \inf A$$

Ces définitions sont soumises à condition d'existences (il faut que  $A$  admette une borne sup/inf)

### Remarque 5.3.1

Si  $M = \sup A \in A$  (resp  $m = \inf A \in A$ ) alors on dit que  $M$  est le maximum de  $A$  (resp  $m$  est le minimum de  $A$ ) et on le note  $M = \max A$  (resp  $m = \min A$ )

### Remarque 5.3.2

Le maximum (resp minimum) s'il existe est unique

*Démonstration.* Soit  $M, M'$  deux maximum de  $A$ . On a alors par définition

$$\begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall x \in A, x \leq M' \end{array}$$

or  $M \in A$  et  $M' \in A$  donc en particulier on a

$$M' \leq M$$

$$M \leq M'$$

Par antisymétrie de  $(\leq)$  on a  $M = M'$  □

La preuve est analogue pour l'unicité du minimum de  $A$

### **Théorème 5.3.1 – Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$**

Soit  $E \subset \mathbb{R}$  tel que  $E \neq \emptyset$  alors si  $E$  est majoré il admet une borne supérieure.

Soit  $E \subset \mathbb{R}$  tel que  $E \neq \emptyset$  alors si  $E$  est minoré il admet une borne inférieure.

### **Théorème 5.3.2 – Caractérisation séquentielle de la borne sup/inf**

Soit  $E \subset \mathbb{R}$  non vide, et  $M$  un majorant de  $E$  (resp  $m$  un minorant de  $E$ ) alors

$$M = \sup E \Leftrightarrow \exists (a_n) \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$$

et

$$m = \inf E \Leftrightarrow \exists (a_n) \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$$

## 5.4 Convergence

### **Remarque 5.4.1**

- Pour la convergence on abrège  $CV$
- Pour l'absolue convergence on dit  $ACV$
- Pour la convergence uniforme on dit  $CVU$
- Pour la convergence normale on dit  $CVN$

## 5.5 Suites, et séries

### 5.5.1 Suites de scalaires

#### **Remarque 5.5.1**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de complexe (ou réels)

- L'ensemble de toutes les suites est noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  $E = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$  où  $(\cdot)$  est la loi de composition externe suivante

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, (a_n)) &\mapsto (\lambda a_n). \end{aligned}$$

est un espace vectoriel

- Une suite  $(u_n)$  est dite convergente si  $u_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
- Une suite  $(u_n)$  est dite absolument convergente si  $|u_n| \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

### 5.5.2 Suites et série d'application

#### Remarque 5.5.2

Soit  $I$  un interval de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^I$  et  $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  une suite d'application.

- **HP** On dit que  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  si

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- **HP** On dit que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La différence avec la définition de la convergence simple est dans l'emplacement du  $\forall x \in I$  le  $N$  ne dépend plus de  $x$  c'est le même pour tous !

- **HP** On dit que  $\sum f_n$  converge absolument en tout point de  $I$  si

$$\forall x \in I, \sum |f_n(x)| \text{ CV}$$

- **HP** On dit que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$  si

$$\sum \|f_n\|_{\infty}^A \text{ CV}$$

La notation  $\|f\|_{\infty}$  étant la **norme infinie** de  $f$  définie par

$$\|f\|_{\infty}^A = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

### 5.5.3 Séries

**Remarque 5.5.3**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\sum u_n$  est la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et est la *série de terme générale*  $u_n$ .
- Une SATP est une série dont tous les termes sont positifs
- On se ramène à l'étude d'une SATP en étudiant le module d'une série

**5.5.4 Séries Entières****Remarque 5.5.4**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- On note  $\sum a_n x^n$  la suite de fonctions  $\left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée *série entière* de terme général  $a_n$
- $\sum a_n x^n$  est une suite de **fonctions**, alors que pour  $\lambda \in D$  la suite  $\left( \left( \sum a_n x^n \right) (\lambda) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de **réel** des fonctions évalués en  $\lambda$  elle est égale à la suite de réelle  $\left( \sum a_n \lambda^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$

**5.6 Autre****Remarque 5.6.1**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  un interval de  $\mathbb{R}$  tel que  $I = [a, b]$

- $\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$