Cours de MP3 Mathématique

G. ROUSSEL
ronéo de la classe
scanné par Maxime D.
tapé par Charlotte T.

4 mars 2022

Table des matières

Chapitre 1

Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple d'une suite d'application

Soit $(f_n) \in \mathbb{K}^D$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.1.1 On dit que (f_n) converge simplement sur A vers f si il existe $f\colon A \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in A, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Proposition 1.1.1 Supposons que (f_n) converge simplement sur A vers g et h avec $g, h\colon A \to \mathbb{K}$ Montrons que $g = h$

Démonstration. Soit $x \in A$, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = h(x)$ donc $g = h$ □

Proposition 1.1.2 Supposons que (f_n) converge simplement sur A vers $f\colon A \to \mathbb{K}$

1. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$ (f_n) croît sur A. Montrons que f croît sur A

   Démonstration. Soient $(x, y) \in A^2$ tels que $x < y$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_n(y)$ (croissance de f_n) Donc par passage à la limite lorsque $n \to \infty$ $f(x) \leq f(y)$ Donc f croît sur A □

2. Supposons que A soit un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ Montrons que f est convexe sur A

   Démonstration. f_n est convexe sur A Soient $(x, y) \in A^2$ et $\lambda \in [0; 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)$ Donc par passage à la limite lorsque $n \to \infty$ $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ Or $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$ car A est un intervalle donc f est convexe sur A □

Exemples

1.1.1 · Soit $f_n\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0;1]\colon f(x) = x^n$

· Soit $x \in [0;1]$; $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ Donc (f_n) converge simplement sur $[0;1]$ vers $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1.1.2 Soit $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$ On a $(f_n)_{n\leq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ On a $(f_n)_{n\leq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

EF 1.1.1 Soit $x \ \in \mathbb{R}^*$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\dfrac{1}{n} < |x|$ cela car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ et $|x| > 0$ $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $n \leq N$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ **FEF**

1.1.3 Soit $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(z) = z^n$

- Soit $z \in \mathbb{C}$si $|z| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0$
- Si $|z| > 1$ alors la suite $(f_n(z))$ diverge dans $\mathbb{C}$
- Si $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ alors la suite $(f_n(z))$ diverge dans $\mathbb{C}$
- Si $z = 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 1$ Donc (f_n) converge simplement sur D' vers f définie par $D' = D \cup \{1\}$ avec $f\colon D' \to \mathbb{C}$ et $f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1.1.4 Soit $f_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x, y) = \sqrt[n]{x^2 + y^2}$

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \geq 0$
- Pour $n \geq 1\colon \sqrt[n]{x^2 + y^2} = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\left(x^2+y^2\right)}$ pour $(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$
- Pour $(x, y) = (0, 0)\colon f(0, 0) = 0$

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $(x,y) \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\left(x^2+y^2\right)} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0,0) = 0$
- Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^2$ vers f avec $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.2 Convergence uniforme d'une suite d'application

Proposition 1.2.1

$$\begin{aligned}(f_n) \text{ CVS sur A vers f} &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Le N_x dépend de x le but est de changer l'ordre des quantificateur pour établir la définition de la convergence uniforme

Définition 1.2.1

$$\begin{aligned}(f_n)\text{converge uniformément sur } A \text{ vers } f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ &\geq N, \\ \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)|| &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2

1. Soient $B \subset A \subset D$, $f_n\colon D \to \mathbb{K}$, $f\colon A \to \mathbb{K}$, et $f\big|_B\colon B \to \mathbb{K}$ Montrons que (f_n) converge uniformément sur B vers f

   Démonstration. Supposons que (f_n) converge uniformément sur A vers f.

   $$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon \\ \forall x \ \in B, |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

   donc (f_n) converge uniformément sur B vers f. □

2. Si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors (f_n) converge simplement sur

A vers f

Démonstration. Conséquence de la définition □

3. Supposons (f_n) converge uniformément sur A vers f.

$$\begin{aligned}(f_n) \text{ CVU sur A vers f} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, \\ &|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty^A \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \|f_n - f\|_\infty^A \right| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0\end{aligned}$$

4. Supposons que f_n converge uniformément sur A vers g et h alors f_n converge simplement sur A vers g et h puis $g = h$

1.2.1 Convergence uniforme et transfert de la continuité

Théorème 1.2.1 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$

1. Supposons $f\big|_A$ est C^0 au point a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (f_n) converge uniformément sur A vers f, montrons que f est continue au point a

Démonstration.

$$\begin{aligned}f\ C^0 \text{ au point } a &\Leftrightarrow \lim_a f = f(a) \\ &\Leftrightarrow \lim_a f\big|_A(a) = f(a) \text{ car } f\colon A \to \mathbb{K} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in A$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(a) + (f_n(a) - f(a)))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty^A + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_\infty^A\end{aligned}$$

et cela $\forall n \in \mathbb{N}$

(f_n) converge uniformément sur A vers f donc $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0$ Donc, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty^A \leq \frac{\varepsilon}{12}$ Alors, $|f(x) - f(a)| \leq 2 \|f_n - f\|_\infty^A + |f_N x - f_N(a)| \leq \frac{2\varepsilon}{12} + |f_N(x) - f_N(a)|$ Or, $f_N\big|_A$ est C^0 au point a donc $\exists\alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow \left|f_N\big|_A(x) - f_N\big|_A(a)\right| \leq \frac{\varepsilon}{12}$

On suppose $|x - a| \leq \alpha$ Alors $|f(x) - f(a)| \leq \frac{2\epsilon}{12} + |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{2\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} \leq \varepsilon$ Enfin on a $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ Donc f est C^0 en a. □

2. f C^0 sur $A \Leftrightarrow f$ C^0 en tout point de A donc 2) est une conséquence de 1)
3. **Corollaire** : on suppose que $A = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et on suppose $f_n\big|_I$ C^0 sur I et (f_n) CVU sur tout segment contenue dans I vers f

Alors f est C^0 sur I

EF 1.2.1 Soit $a \in I$, on considère $S_a \subset I$ un segment contenant a, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\big|_{S_a}$ est C^0 sur S_a
D'autre part (f_n) converge uniformément sur S_a vers f, $f_n\big|_{S_a}$ est C^0 sur S_a, donc en a, puis f est C^0 au point a car S_a est un voisinage de a.

1.2.2 Étude pratique de la CVU

Proposition 1.2.3 Soit $f_n\colon D \to \mathbb{K}$ et $f\colon A \to \mathbb{K}$, on pose $\delta_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$

1. Supposons $\exists(\varepsilon_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ Montrons que (f_n) converge uniformément sur A vers f

   Démonstration. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n - f\|_\infty^A \leq \varepsilon_n$ par propriété des BS Par encadrement, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0$ donc (f_n) converge uniformément sur A vers f. □

2. Supposons $\exists(a_n) \in A^{\mathbb{N}}, (\delta_n(a_n))$ ne tende pas vers O alors (f_n) ne converge pas uniformément sur A vers f

   Démonstration. Supposons (f_n) CVU sur A vers f, on a $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0$ donc, $0 \leq \delta_n(a_n) \leq \|f_n - f\|_\infty^A$ donc par encadrement, $\lim_{n\to\infty} \delta_n(a_n) = 0$ ce qui n'est pas □

Exemples

1.2.1 Soit $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ on a montré que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f avec $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ cependant (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

EF 1.2.2 Supposons (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^0 sur $[0,1]$ il vient que f est C^0 sur $[0,1]$ ce qui n'est pas **FEF**

1.2.2 Soit $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$ * On a (f_n) CVS sur $[0,1]$ mais (f_n) n'est pas CVU sur $[0,1]$ vers f

EF 1.2.3 Supposons (f_n) CVU sur $[0,1]$ vers f, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^0 sur $[0,1]$ donc *(TC)* f est C^0 sur $[0,1]$ ce qui n'est pas car $\lim\limits_{0^+} f = \infty \neq f(0)$ **FEF**

Cherchons une CVU sur $]0,1]$ on a $(f_n)_{n\geq 1}$ CVS sur $]0,1]$ vers $f\big|_{]0,1]}$

$$\begin{aligned} \left| f_n(\frac{1}{n^2}) - f(\frac{1}{n^2}) \right| &\leq \|f_n - f\|_\infty^{]0,1]} \\ \left|1 - n^2\right| &\leq \|f_n - f\|_\infty^{]0,1]} \\ n^2 - 1 &\leq \|f_n - f\|_\infty^{]0,1]} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$

Or $\|f_n - f\|_\infty^{]0,1]}$ ne tends pas vers 0 car $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - 1 = \infty$ donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$

1.2.3 Convergence simple et uniforme d'une série d'application

Introduction Soit $f_n\colon D \to \mathbb{K}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\colon D \to \mathbb{K}$ On a $S_n \in \left(\mathbb{K}^D\right)^{\mathbb{N}}$

Définition 1.2.2 La suite d'application (S_n) est notée $\sum f_n$ et est appelée série de terme générale f_n

Proposition 1.2.4 Montrons que $\sum f_n$ CVS sur $A \Leftrightarrow \sum f_n(x)$ convergente

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum f_n \text{ CVS sur} A &\Leftrightarrow (S_n)\text{C VS sur} A \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists l \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = l \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists l \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = l \\ &\Leftrightarrow \sum f_n(x) \text{ converge}\end{aligned}$$

□

Définition 1.2.3 On suppose $\sum f_n$ CVS sur A

1. On a la somme de la série est une application de A dans $\mathbb{K}$ définie par $\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$
2. Et le reste de la série est une application de A dans $\mathbb{K}$ définie par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

Proposition 1.2.5 Soit $\sum f_n$ CVS (resp CVU) sur A alors (f_n) CVS (resp CVU) sur A vers $0_{\mathbb{K}^A}$

Démonstration. ◦ On suppose $\sum f_n$ CVS sur A alors (S_n) CVS sur A vers S avec $\forall x \in A, S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ Alors, $\forall x \in A, \sum f_k(x)$ CV donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ puis (f_n) CVS sur A vers 0

- On suppose $\sum f_n$ CVU sur A alors (S_n) CVU sur A vers $S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$

$$\begin{aligned}\|f_n - 0_{\mathbb{K}^A}\|_\infty^A &= \|f_n\|_\infty^A \\ &= \|(S_n - S) + (S - S_{n-1})\|_\infty^A \\ &\leq \|S_n - S\|_\infty^A + \|S - S_{n-1}\|_\infty^A\end{aligned}$$

Comme (S_n) CVU sur A vers S on a par encadrement $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty^A = 0$ puis (f_n) CVU sur A vers $0_{\mathbb{K}^A}$

$\square$

Théorème 1.2.2 On suppose $\sum f_n$ CVS sur A on dispose donc de S et R_n, montrons que $\sum f_n$ CVU sur $A \Leftrightarrow (R_n)$ CVU sur A vers $0_{\mathbb{K}^A}$

EF 1.2.4

$$\begin{aligned}\sum f_n \text{ CVU sur } A &\Leftrightarrow \sum f_n \text{ CVU sur } A \text{ vers } S \\ &\Leftrightarrow (S_n) \text{ CVU sur } A \text{ vers } S \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty^A \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|R_n\|_\infty^A = 0\end{aligned}$$

Car $S - S_n \colon A \to \mathbb{K}$, soit $x \in A$, $(S - Sn)(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = R_n(x)$ donc $R_n = S - S_n$ donc (R_n) CVU sur A vers $0_{\mathbb{K}^A}$

Théorème 1.2.3 – Transfert de la continuité

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n\big|_A$ est C^0 en $a \in A$ et $\sum f_n$ CVU sur A alors S est C^0 en a
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n\big|_A$ est C^0 sur A et $\sum f_n$ CVU sur A alors S est C^0 sur A
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n\big|_I$ est C^0 sur tous les segment contenus dans I alors S est C^0 sur I

Directe par Théorème de Transfert pour les suites d'applications □

1.3 Convergence absolue et convergence normale d'une suite d'application

Introduction Soit $f_n \colon D \to \mathbb{K}$

Définition 1.3.1 $\sum f_n$ converge absolument (CVA) en tout point de A si $\forall x \in A, \sum |f_n(x)|$ est convergente

Définition 1.3.2 $\sum f_n$ converge normalement (CVN) sur A si $\sum \|f_n\|_\infty^A$ est convergente

Proposition 1.3.1

1. On suppose $\sum f_n$ CVA en tout point de A, alors $\sum f_n$ CVS sur A

   EF 1.3.1 $\forall x \in A, \sum |f_n(x)|$ CV alors $\forall x \in A \sum f_n(x)$ converge absolument donc converge puis $\sum f_n$ CVS sur A

2. On suppose $\sum f_n$ CVN sur A, alors $\sum f_n$ CVS sur A et CVA en tout point de A

   EF 1.3.2 $\forall x \in A, 0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty^A \sum f_n$ CVN sur A donc $\sum |f_n(x)|$ CV donc $\sum f_n$ CV, et ce pour tout $x \in A$ donc $\sum f_n$ CVS sur A

   On dispose de R_n ; $\|R_n - 0\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty^A$ donc (R_n) CVU sur A vers O donc $\sum f_n$ CVU sur A. **FEF**

1.4 Approximations polynomiales et en escalier

Définitions Déjà vues

Théorème 1.4.1 Si $f \in M^0([a,b], \mathbb{K})$ alors $\exists (f_n)$ suite d'application en escalier CVU sur $[a,b]$ vers f

Démonstration. MPSI □

Théorème 1.4.2 – Théorème de Weierstrass Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$ alors $\exists (P_n)$ une suite de fonctions polynomiales CVS sur $[a,b]$ vers f

Démonstration. cf DL07 □

Chapitre 2

Rayon de convergence d'une suite complexe

Définition 2.0.1 On note $l^\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes bornées

Définition 2.0.2 Soit $a = (a_n)$ une suite complexe on pose $I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})\}$ Le rayon de convergence R_a de la suite a est l'élement de $[0, +\infty]$ définie par $R_a = \sup_{[0,+\infty]} I_a$

Proposition 2.0.1 Soit $a = (a_n)$ une suite complexe et $r \in \mathbb{R}^+$

1. Si $r < R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ est bornée et si $(a_n r^n)$ est bornée alors $r \leq R_a$
2. Si $r > R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée et si $(a_n r^n)$ n'est pas bornée alors $r \geq R_a$

Démonstration. Déjà vue □

Proposition 2.0.2

1. Le rayon de convergence de la suite nulle est égal à $+\infty$
2. Le rayon de convergence d'une suite constante non nulle est égal à 1

Déjà vue □

Proposition 2.0.3

1. Si $(a_n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ alors $R_a \geq 1$
2. Si (a_n) converge et $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ alors $R_a = 1$
3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors $R_a \leq 1$

Déjà vue □

Proposition 2.0.4 Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux suites complexes

1. Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$

   Démonstration. On suppose $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$, montrons que $R_a \geq R_b$.

   EF 2.0.1 Soit $r \in [0, R_b[$, $r < R_b$ donc $(b_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$, $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |b_n r^n| \leq M$ Pour $n \in \mathbb{N}$ $|a_n r^n| = |a_n| r^n \leq |b_n| r^n \leq M$ donc $\forall r \in [0, R_b[, (a_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ donc $r \in R_a$ PPL quand $r \to R_b$ on a $R_b \leq R_a$

   □

2. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$ et si $a_n \equiv b_n$ alors $R_a = R_b$

   Démonstration. On suppose que $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ on a $\exists M \in R^{+*}, \forall n \in \mathbb{N} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M*$ puis $|a_n| \leq |Mb_n|$ ainsi $R_a \geq R_{Mb}$ mais $R_{Mb} = R_b$ puis $R_b \leq R_a$
   On suppose que $a_n \equiv b_n$ on a alors $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ par double inégalité $R_a = R_b$ □

Proposition 2.0.5 Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ des suites complexes et $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ et si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$

   Démonstration. On note $R = \min(R_a, R_b)$, soit $r \in [0, R[$, $r \leq R$ donc $r \leq R_a$ donc $(a_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ de même $(b^n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ donc $(a_n r^n + b_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ donc $r < R_{a+b}$ PPL quand $\lim\limits_{r \to R}$ on a $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ □

2. $R_{\alpha a} = \begin{cases} R_a & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$

   Démonstration. On suppose $R_a \neq R_b, R_a < R_b$ on a $R = R_a \leq R_{a+b}$. Supposons $R \neq R_{a+b}$ on a $R_a < R_b$ et $R_a < R_{a+b}$ donc $R_a < \min(R_b, R_{a+b})$. Soit $r \in]R_a, R'[$ avec $R' = R_{a+b}$, $R_a < r$ donc $(a_n r^n) \notin l^\infty(\mathbb{C})$. $r < R' < R_b$ donc $(b_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ et $((a_n + b_n) r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$. ainsi par CL $(a^n r^n) = ((a_n + b_n) r^n - b_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ ce qui est absurde Ainsi $R = R_{a+b}$ le reste est acquis □

Proposition 2.0.6 Soit $a = (a_n)$ une suite complexe

1. $D(a)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, D(a)_n = (n+1)a_{n+1}$ a le même rayon de convergence que (a_n) que (a_n)

Remarque 2.0.1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k X^k$ avec $(a_k) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$

$$P' = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\alpha_k X^{k-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} (k+1)\alpha_{k+1} X^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} O(\alpha)_k X^k Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \frac{X^{k-1}}{k+1} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha_{k-}}{k}$$

— Montrons que $R_{D(a)} \leq R_a$

Démonstration. Soit $r \in [0, R_{D(a)}[, r < R_{D(a)}$ donc $(D(a)_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \left|a_{n+1} r^{n+1}\right| = |a_{n+1}| r^{n+1} &\leq (n+1)|a_{n+1}| r^{n+1} \\ &\leq |(D(a)_n r^n) \cdot r| \\ &\leq M_r \end{aligned}$$

cela $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left|a_k r^k\right| \leq M_r$ donc $(a_k r^k) \in l^\infty(\mathbb{C})$ et $r \leq R_a$ cela $\forall r \in [0, R_{D(a)}[$ donc PPL quand $n \to R_{D(a)}^-$ il vient $R_{D(a)} \leq R_a$ □

— Montrons que $R_a \leq R_{D(a)}$

Démonstration. Soit $r \in]0, R_a[, r < R_a$ donc $\exists M \in R^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, |a^n r^n| \leq M$
$|D(a)_n r^n| = (n+1)|a_{n+1}| r^n$ $\forall h \in R^{+*}, \forall p \in \mathbb{N}, (r+h)^{p+1} \geq (p+1) r^p h$

EF 2.0.2 $(n+h)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} r^k h^{p+1-k} \geq \binom{p+1}{p} r^p h = \binom{p-1}{1} r^p h = (p+1) r^p h$ **FEF**

$r < R_a$ donc $\exists h_a \in \mathbb{R}^{+*}, r < r + h_a < R_a$
donc $(a_n (r+h)^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ et $\exists M \in R^+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n (r+h_a)^n| \leq M$
donc $|D(a)_n r^n| h_a = (n+1)|a_{n+1}| r^n h_a \leq M$ d'où $|D(a)_n r^n| \leq \dfrac{M}{h_a}$ d'où $(D(a)_n r^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ et $r \leq R_{D(a)}$ PPL quand $r \to R_a^-$ on a $R_a \leq R_{D(a)}$ par double inégalite $R_a = R_{D(a)}$ □

2. $I(a)$ définie par $I(a)_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I(a)_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ a le même rayon de convergence

Démonstration. $D(I(a)) = a$

EF 2.0.3 $D(I(a))_n = (n+1)I(a)_{n+1} = (n+1)\dfrac{a_n}{n+1} = a_n$ **FEF**

Donc $R_{I(a)} = R_{D(a)} = R_a$ □

Proposition 2.0.7 Corollaire
Soit $a = (a_n)$ une suite complexe alors les rayons de convergences de $(a_n), (na_n)$ et $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\ \geq 1}$ sont égaux

Soit $a = (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_n = a_n$$
$$b_n = na_n$$
$$c_n \begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & \text{si } n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$R_b = R_{(b_{n+1})} = R_{D(a)} = R_a$ et $R_{I(a)} = R_{(I(a)_{n+1})}$ on a $I(a)_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} \equiv \dfrac{a_n}{n} = C_n$ donc $R_{I(a)} = R_c$ □

2.1 Une caractérisation du rayon de convergence via les séries numériques

Théorème 2.1.1 Soit $a = (a_n)$ une suite complexe. Le rayon R_a de la suite est l'unique élément de $[0, +\infty]$ qui possède les deux caractéristiques suivantes

1. Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R_a$ la série $\sum a_n z^n$ est ACV
2. Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R_a$ la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente (GDV)

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$,

1. Supposons que $|z| < R_a$ or $R_a = \sup(I_a)$ donc $|z|$ ne majore pas I_a ainsi, $\exists r \in I_a, |z| < r, r \neq 0$ mais $r \in I_a$ ainsi $(a_n r^n) \in l^{\infty}(\mathbb{C})$ et $\exists M \ \in \mathbb{R}^+, \forall n \in$

$\mathbb{N}, |a_n r^n| \leq M$, On a

$$0 \leq |a^n z^n| = |a^n r^n| \cdot \left|\frac{z}{n}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{z}{n}\right|^n$$

Or $\left|\frac{z}{n}\right| < 1$ donc $\sum \left(\frac{z}{n}\right)^n$ CV puis $\sum |a^n r^n|$ CV donc $\sum a_n r^n$ ACV

2. Supposons que $|z| > R_a$ on a $(a_n |z|^n) \in l^\infty(\mathbb{C})$ et $(|a_n z|^n) \notin l^\infty(\mathbb{C})$ donc $(a_n z^n)$ ne tends pas vers 0 donc $\sum a_n z^n$ est GDV

R_a est l'unique nombre qui vérifie les propriétés.

EF 2.1.1 Soit $R \in [0, +\infty]$ vérifiant 1) et 2) donc la première étape. On suppose $R \neq R_a$ avec sans perte de généralité $R < R_a$ on considère $r \in]R, R_a[$ $R < r < |r|$ donc $\sum a_n r^n$ est GDV donc DV $r < R_a$ donc $|r| < R_a$ donc $\sum a_n r^n$ ACV donc CV C'est absurde donc $R = R_a$ **FEF**

□

Proposition 2.1.1 Corollaire

Si $|z_0| > R_a$ alors $\sum a_n z^n$ GDV Si $|z_0| < R_a$ alors $\sum a_n z^n$ ACV

Proposition 2.1.2 Règle d'Alembert (Super HP) Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ avec $L \in [0, +\infty]$ Montrons que $R_a = \frac{1}{L}$

Soit $z \in \mathbb{C}$

Démonstration: Supposons que $|z| < \frac{1}{L}$ donc $L \neq \infty$ puis $L \cdot |z| < 1$

· Posons $u_n = a_n |z|^n$ si $z = 0$ alors $u_n = 0$ à pcr donc $\sum u_n$ est ACV si $z \neq 0$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ donc $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ et on a $L \cdot |z| < 1$ donc $\sum u_n$ ACV donc $\sum a_n z^n ACV$

· Supposons que $|z| > \frac{1}{L}$ donc $L \neq 0$ et $z \neq 0$ on pose $u_n = a_n z^n$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ donc $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ donc $\sum u_n$ GDV

· Par unicité, $R_a = \dfrac{1}{L}$

$\square$

Proposition 2.1.3 Si $a \in \mathbb{C}^*$ alors le rayon de convergence de (a^n) est égal à $\dfrac{1}{|a|}$

Proposition 2.1.4 Si F est une fraction rationelle non nulle à coefficient dans $\mathbb{C}$ n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{N}$ alors $R_{(F(n))} = 1$

Démonstration. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ qui va bien $\mathcal{P}(F) \in \mathbb{N} = \emptyset$ avec $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des pôles de F on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, F(n) \in \mathbb{C}$ on a $F(n) = 0 \Leftrightarrow P(n) = 0$ or $P \in \mathbb{C}[X]$ donc $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(P)$ est fini et $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, P(n) \neq 0$ donc $\forall n \geq N, F(n) \neq 0$ puis $\dfrac{F(n+1)}{F(n)} \to 1$

EF 2.1.2 On se muni de l'écriture polynomiale de P et Q on a $F(n) \equiv \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}$ puis $\dfrac{F(n+1)}{F(n)} \equiv \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^q \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p \equiv\ 1$ **FEF**

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{F(n+1)}{F(n)}\right| = 1$ d'où $R_{(F(n))} = \dfrac{1}{1} = 1$ $\square$

Proposition 2.1.5 Soit c le produit de convolution des suites a et b alors $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

Démonstration. · Soit $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ des suites complexes alors $c = (c_n)$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ Montrons que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

· Soit $r \in [0, R[$ avec $R = \min(R_a, R_b)$ on a $r = |r| < R \leq R_a$ donc $\sum a_n r^n$ est ACV

· on a $r = |r| < R \leq R_b$ donc $\sum b_n r^n$ est ACV ainsi $\sum U_n$ est ACV avec $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k r^k)(b_{n-k} r^{n-k})$

·

$$U_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) r^n = c_n r^n$$

- ainsi $\sum c_n r^n$ est ACV donc $\forall r \in [0, R[, r \leq R_c$ PPL quand $r \to R^-$ on a $R \leq R_c$

$\square$

Chapitre 3

Séries entières : premier contact

3.1 Séries entières de la variable complexe

Définition 3.1.1 Soit (f_a) une suite d'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ On dit que la série d'application $\sum f_a$ est une série entière de la variable complexe si et seulement si il existe une suite complexe (a_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, , \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = a_n z^n$

Remarque 3.1.1 — Une série entière est donc une série d'application d'un type particulier

— Soit (a_n) une suite complexe. On lui associe la série d'application $\sum f_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, , \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = a_n z^n$. La série d'application $\sum f_n$ est une série de la variable complexe est dite associée à la suite (a_n). Elle est abusivement notée $\sum a_n z^n$

— Via l'abus de notation précédent, le symbole $\sum a_n z^n$ peut désormais s'interpreter de deux manières. Il peut soit désigner la série numérique de terme général $a_n z^n$ ou bien désigner la série d'application $\sum f_n$ où $f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ définie par $f_n(z) = a_n z^n$

3.2 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 3.2.1 Soit $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite complexe $a = (a_n)$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le rayon de convergence R_a de la suite (a_n) Il est aussi noté $R\left(\sum a_n z^n\right)$ on a donc par définition $R\left(\sum a_n z^n\right) = R_a$

Théorème 3.2.1 Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R_a R_a est l'unique élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ qui possède les deux propriétés suivantes

1. Pout tout complexe z vérifiant $|z| < R_a$ la série $\sum a_n z^n$ est ACV
2. Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R_a$ la série $\sum a_n z^n$ est GDV

Démonstration. C'est acquis cf chap précédent □

Proposition 3.2.1 – Corollaire Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R_a et $z_0 \in \mathbb{C}$

1. Si la série $\sum a_n z_0^n$ CV alors $|z_0| \leq R_a$
2. Si la série $\sum a_n z_0^n$ DV alors $|z_0| \geq R_a$

Démonstration. C'est acquis cf chap précédent □

Proposition 3.2.2 Soit $\sum a_n z^n$ une SE.

$$1.\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, R\left(\sum \lambda z^n\right) = 1$$
$$2.\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, R\left(\sum \lambda a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$$
$$3.\forall p \in \mathbb{N}, R\left(\sum a_{n+p} z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$$
$$4.R\left(\sum |a_n| z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$$
$$5.R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}\right)$$
$$6.R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)$$

Démonstration. 1. $R_{(\lambda)} = 1$

2. $R_{(\lambda_a)} = a$
3. $R_{(a_{n+p})} = R_{(a_n)}$
4. $R_{(|a_n|)} = R_{(a_n)}$
5. $R_a = R_{\alpha a}$

6. $R_a = R_{I(a)}$

□

Proposition 3.2.3 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des SE de rayon de convergence R_a et R_b

1. Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$
2. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
3. Si $a_n \equiv b_n$ alors $R_a = R_b$

Démonstration. Déjà fait cf chap précédent □

Proposition 3.2.4 – Règle d'Alembert Soit $\sum a_n z^n$ une SE telle que $\forall n \in \mathbb{N}, , a_n \neq 0$

- si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ avec $L \in \overline{R^+}$ alors $R_a = L^{-1}$

Démonstration. déjà fait cf chap précédent □

Proposition 3.2.5 Si $a \in \mathbb{C}^*$ alors le rayon de convergence de la SE $\sum a_n z^n$ est égal à $|a|^{-1}$ Si F est une fraction rationelle à coefficient dans $\mathbb{C}$ n'ayant pas de pôle entier alors le rayon de convergence de la SE $\sum F(n) z^n$ est égal à 1.

Démonstration. déjà fait cf chap précédent □

3.3 Somme d'une série entière

Définition 3.3.1 Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R_a

- l'ensemble E_a des nombre $z \in \mathbb{C}$pour laquelle la série $\sum a_n z^n$ est convergente est appelée ensemble de convergence de la SE $\sum a_n z^n$
- L'ensemble $D_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R_a\}$ est appelé disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$
- L'ensemble $C_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R_a\}$ est appelé cercle d'incertitude de la SE $\sum a_n z^n$

Remarque 3.3.1 $D_a \cup C_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R_a\}$. Si $R_a = 0$ alors $D_a = \emptyset$ et $C_a = \{0\}$. Si $R_a = \infty$ alors $D_a = \mathbb{C}$ et $C_a = \emptyset$

Proposition 3.3.1 Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R_a.

1. $0 \in E_a$ et en particulier $E_a \neq \emptyset$
2. $D_a \subset E_a \subset (D_a \cup C_a)$

Démonstration. · $E_a = \{z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{CV}\} = \{z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n \text{existe dans } \mathbb{C}\}$

· On dispose de $R_a \in \overline{\mathbb{R}^+}$ Si $z \in D_a$ alors $\sum a_n z^n$ est ACV donc CV donc $z \in E_a$ d'où $D_a \subset E_a$

·

$$D_a \cup C_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R_a\} = \mathcal{D}(0, R_a) = \mathcal{B}(0, R_a)$$

· Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (D_a \cup C_a)$ alors $|z| > R_a$ et $\sum a_n z^n$ GDV donc DV et $z \notin E_a$.

· $z \notin (D_a \cup C_a) \Rightarrow z \notin E_a$ d'où $z \ \in E_a \Rightarrow z \in (D_a \cup C_a)$ par contraposition d'où $E_a \subset (D_a \cup C_a)$ et donc $D_a \subset E_a \subset (D_a \cup C_a)$ puis $\sum a^n O^n$ CV donc $O \in E_a$

□

Définition 3.3.2 On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$ l'application $S_a \colon E_a \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in E_a, S_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Remarque 3.3.2 Il est à noté que S_a n'est rien d'autre que l'application somme de la série d'application $\sum f_n$ où $f_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$.

Proposition 3.3.2 Soit $\sum a_n z^n$ une SE.

1. La somme S_a de la SE $\sum a_n z^n$ est définie au moins sur D_a avec $S_a(0) = a_0$.
2. La somme S_a de la SE $\sum a_n z^n$ n'est définie en aucun point de $\mathbb{C} \ \setminus (D_a \cup C_a)$

Démonstration. conséquence de la proposition précédente et $S_a(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 + 0 = a_0$ □

Théorème 3.3.1 Soit $\sum a_n z^n$ une SE

1. La série entière $\sum a_n z^n$ ACV en tout point de son disque ouvert de convergence
2. $\forall r \in [0, R_a[$ la SE $\sum a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur le disque fermé $D_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$. Autrement dit la SE $\sum a_n z^n$ CV normalement et donc uniformément sur tout disque fermé contenu dans son disque ouvert de convergence D_a

Démonstration. 1. Acquis

2. Soit $r \in [0, R_a[$, $\forall z \in D_r, |f_n(z)| = |a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n|r^n$ or $0 \leq \|f_n\|_\infty^{D_r} \leq |a_n|r^n$ par propriété des BN et $|a_n|r^n = |a^n r^n|$ et $\sum a_n r^n$ est ACV par $r = |r| \leq R_a$ d'où $\sum |a_n r^n|$ CV puis $\sum \|f_n\|_\infty^{D_r}$ CV donc enfin $\sum f_n$ converge normalement (CVN) sur D_r ainsi $\forall r \in [0, R_a[, \sum f_n$ CVU sur D_r cependant $\sum f_n$ n'est pas nécessairement CVU sur $\bigcup_{r \in [0, R_a[} D_r = D_a$

□

Remarque 3.3.3 La SE $\sum a_n z^n$ n'est pas nécessairement CVU sur D_a

Démonstration. Soit $a = (1)$ la suite unité, on a $R_a = 1$

- $R\left(\sum z^n\right) = R_a = 1, f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_n(z) = z^n$
  Supposons que $\sum f_n$ CVU sur D_a
- Ainsi (R_n) CVU sur D_a vers 0, pour $z \in D_a, \sum f_n$ CVU sur D_a donc CVS sur D_a et $R_n(z)$ existe. On a $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k = z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^{n+1} \frac{1}{1-z}$ car $|z| < 1$ on pose $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ on a $R_n(\alpha_n) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} (n+1)$ donc $\lim R_n(\alpha_n) = \infty$ et $R_n(\alpha_n) = |R_n(\alpha_n)| \leq \|R_n\|_\infty$ puis $\lim_{n\to\infty} \|R_n\|_\infty = \infty$
- et il y a contradiction car par hypothèse $\lim_{n\to\infty} \|R_n\|_\infty^{D_a} = 0$

□

3.4 Opération sur les séries entières

Définition 3.4.1 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et $\alpha \in \mathbb{C}$

- La sommes des SE $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la SE $\sum (a_n + b_n) z^n$.
- La SE produit de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la SE $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Proposition 3.4.1 Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n, \sum b_n z^n$ des SE de rayon R_a et R_b

1. $R_{\alpha a} = \infty$ si $\alpha = 0$ et $R_{\alpha a} \neq R_a$ si $\alpha \neq 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_a$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
2. $R_{a+b} \leq \min(R_a, R_b)$ et $R_{a+b} = min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$
3. $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$

Démonstration. Déjà prouvée cf chap précédent □

3.5 Sommes de quelques séries entières classiques

Proposition 3.5.1 On considère $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

1. Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
2. Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1)) z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$

3. Si $|z| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

Démonstration. · 3. Soit $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ on a $\mathcal{P}(p) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

et $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^(0+1)}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai

· On suppose $P(n-1)$ $z \neq 1$ donc $\displaystyle(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$

avec $a_0 = 1, a_1 = 1, et \forall n \geq 2, a_n = 0$ et $b_n = \displaystyle\binom{n+p}{p}$

Remarque 3.5.1 $b_n = \dfrac{(n+p)!}{n!p!} = F(n)$ avec

$F = \dfrac{(X+p)\cdots(X+1)}{p!}$ on a $R_b = 1$ et $|z| < R_b$ donc $\sum b_n z^n$ est ACV

· $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont ACV donc $\displaystyle(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec

$\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + b_n - b_{n-1}$ donc $c_n = \displaystyle\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p} =$

$\displaystyle\binom{n+p-1}{p-1}$ donc $\displaystyle(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n = \frac{1}{((1-z)^p)}$ par

(HR) puis donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

· 2. $\displaystyle\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)\cdots(n+1)}{p!}$ et on a $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)\cdots(n-}{p!}$

$\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-(p-1))}{p!} z^{n-p}$ d'où

$$\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1)) z^n = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$

Remarque 3.5.2 – Moyen mnémotechnique de dérivation $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ donc $\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$ puis $\frac{3\cdot 2}{(1-z)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)z^{n-2}$ et enfin $\frac{p!}{(1-z)^(p+1)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1))z^{n-p}$

□

Proposition 3.5.2 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } z$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh } z$

3.6 Série entières de la variable réelle

Définition 3.6.1 Soit (f_n) une suite d'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$

On dit que la série d'application $\sum f_n$ est uen SE de la variable réelle si et seulement si il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, , \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = a_n t^n$

Remarque 3.6.1 Soit (a_n) une suite complexe. On lui associe la série d'application $\sum f_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, , \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = a_n t^n$. La série d'application $\sum f_n$ est une SE de la variable réelle. Elle est dites associée à la suite complexe (a_n) et notée $\sum a_n t^n$ Le symbole $\sum a_n t^n$ peut désigner la série de TG $a_n t^n$ ou la série d'application $\sum f_n$ avec $f_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}, f_n(t) = a_n t^n$.

3.6.1 Rayon de convergence, intervalle de convergence, ensemble de convergence

Introduction

Soit $\sum a_n t^n$ la SER de (a_n), on a $R\left(\sum a_n t^n\right) = R_a$. Ce qui a été fait pour les SEC restent vrais pour les rayons de convergence. On appelle $]-R_a, R_a[$ l'intervalle ouvert de convergence de la SER $\sum a_n t^n$

Proposition 3.6.1 On a $]-R_a, R_a[\subset E_a \subset [-R_a, R_a]$

Démonstration. $\forall r \in]-R_a, R_a[= D_a, \sum r_n z^n$ CV donc $D_a \in E_a$, et $\forall r \in \mathbb{R}, |r| > R_a \Rightarrow \sum r_n z^n$ GDV donc $E_a \in [-R_a, R_a]$. donc $D_a \in E_a \in [-R_a, R_a]$ □

Exemple

3.6.1 Soit $(a_n) = 1$ on a $S_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ on a $]-1, 1[\subset D_{S_a} \subset [-1, 1]$ or $\sum 1^n$ et $\sum(-1)^n$ GDV donc DV donc $-1 \notin D_{S_a}$ et $1 \notin D_{S_a}$ donc $D_{S_a} =]-1, 1[$ et $\forall t \in D_{S_a}, S_a(t) = \frac{1}{1-t}$

3.6.2 Soit $\forall n \in N^*, a_n = \frac{1}{n}$ et $a_0 = 0$ on a $a_n = F(n)$ avec $F = \frac{1}{X}$ $R_a = 1$ $S_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \infty \frac{t^n}{n}$ on a $]-1, 1[\subset D_{S_a}$, ensuite $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $1 \notin D_{S_a}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (CSSA) donc $-1 \in D_{S_a}$ donc $D_{S_a} = [-1, 1[$

3.6.3 $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n^2}$ on a $a_n = F(n)$ avec $F = \frac{1}{X}$ donc $R_a = 1$ on a ensuite $S_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ donc $]-1, 1[\in D_{S_a}$ on a que $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann) donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est ACV donc CV donc $D_{S_a} = [-1, 1]$

Théorème 3.6.1 Soit $\sum a_n t^n$ une SER de rayon $R_a > 0$ et de somme S_a

1. La SE $\sum a_n t^n$ ACV sur $]-R_a, R_a[$

2. La SE $\sum a_n t^n$ CVN sur tout segment contenu dans $]-R_a, R_a[$
3. S_a est C^0 sur $]-R_a, R_a[$

Démonstration. 1. $\sum f_n$ CVA en tout point de $]-R_a, R_a[$ car $\forall t \in]-R_a, R_a[, |t| < R_a$ et $\sum f_n(t)$ est ACV.
2. Soit S un segment de $]-R_a, R_a[$ On a $\exists r \in [0, R_a[, S \subset [-r, r], \forall t \in [-r, r], \forall n \in \mathbb{N}, , |f_n(t)| = |a_n t^n| = |a_n||t^n| \leq |a_n| r^n$ donc $0 \leq \|f_n\|_\infty^{[-r,r]} \leq |a_n r^n|$ or $r < R_a$ donc $\sum a_n r^n$ est ACV donc $\sum \|f_n\|_\infty^{[-r,r]} CV$ donc $\sum f_n$ CVN (donc CVU) sur S.
3. $S_a = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C^0 sur $]-R_a, R_a[$, on a $\sum f_n$ CVU sur tout segment S de $]-R_a, R_a[$ donc par le (TC) $S_a = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est C^0 sur $]-R_a, R_a[$

$\square$

Chapitre 4

Intégrale généralisée

4.1 Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a, \infty[$

4.1.1 Introduction

On fixe $a \in \mathbb{R}$

Définition 4.1.1 On considère $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{K} M^0$ sur cet intervalle, on lui associe l'application $F\colon [a,\infty[\to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \int_a^x f$

1. On dit que l'intégrale de f sur $[a,\infty[$ est CV si et seulement si l'application admet une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$ on pose alors $\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$. On appelle alors le scalaire $\int_a^\infty f$ intégrale généralisée de f sur $[a,\infty[$
2. Pour exprimer que l'intégrale de f sur $[a,\infty[$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Remarque 4.1.1 — Préciser la nature de l'intégrale de f sur $[a,\infty[$ revient à statuer sur l'existence de la limite de la quantité $\int_a^x f$ quand $x \to \infty$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors l'intégrale de f sur $[a,\infty[$ peut être divergente si la limite n'existe pas ou si elle vaut ∞ en module.

— On appelle aussi une intégrale généralisée une intégrale impropre.

Théorème 4.1.1 On considère $\varphi\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}^+ \ M^0$ et positive sur $[a,\infty[$ on lui associe l'application $\Phi\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}^*$ définie par $\Phi(x) = \int_a^x \varphi$

1. Φ croît sur $[a, \infty[$
2. L'intégrale de φ sur $[a, \infty[$ CV si et seulement si Φ est majorée sur $[a, \infty[$

Démonstration. 1. Soit $(x, y) \in [a, \infty[^2, x < y$ on a $\Phi(y) - \Phi(x) = \int_a^y \varphi - \int_a^x \varphi = \int_x^y \varphi \leq 0$ car φ est positive et $x < y$ donc Φ croît sur $[a, \infty[$

2. $\int_a^\infty f$ CV $\Leftrightarrow \lim\limits_{\infty} \Phi$ existe dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Phi$ majorée sur $[a, \infty[$ (TLM)

$\square$

Proposition 4.1.1 Soient $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, \infty[$ et $c \in [a, \infty[$

1. L'intégrale de f sur $[a, \infty[$ est de même nature que l'intégrale de f sur $[c, \infty[$ et en cas de CV on a $\int_a^\infty = \int_a^c f + \int_c^\infty f$
2. L'intégrale de f sur $[a, \infty[$ CV ssi les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ CV et en cas de CV on a $\int_a^\infty f = \int_a^\infty \operatorname{Re} f + i \int_a^\infty \operatorname{Im} f$ Avec $\int_a^\infty \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^\infty f\right)$

Démonstration. 1. Vrai par propriété des limites.

2. Soit $x \in [a, \infty[$ on a $\int_a^x f = \int_a^x (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) = \int_a^x \operatorname{Re} f + i \int_a^x \operatorname{Im} f$ on a donc $\int_a^\infty f$ CV $\Leftrightarrow \int_a^\infty \operatorname{Re} f$ CV et $\int_a^\infty \operatorname{Im} f$ CV.

$\square$

Proposition 4.1.2 Soit $f, g\colon [a, \infty[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, \infty[$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

1. . Si les intégrales de f et g CV alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ CV et $\int_a^\infty \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g$
2. Si $f \leq 0$ et si l'intégrale de f sur $[a, \infty[$ CV alors $\int_a^\infty f \leq 0$ et si $f \leq g$ et les intégrales de f, g CV sur $[a, \infty[$ alors $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$

Démonstration. 1. Soit $x \in [a, \infty[$ on a $\int_a^x \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^x f + \beta \int_a^x g$ les limites existent car f, g CV donc PPL quand $x \to \infty$ on a la proposition.

2. Supposons $f \leq 0$ on a pour $x \in [a, \infty[$, $\int_a^x f \leq 0$ PPL on a la proposition Si $f \leq g$ on a $\forall x \in [a, \infty[$, $\int_a^x f \leq \int_a^x g$ PPL on a la proposition.

□

Théorème 4.1.2 ∘ Soit $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, \infty[$ on suppose que l'intégrale de f sur $[a, \infty[$ CV.

∘ Soit $R\colon [a, \infty[\to \mathbb{K}$ définie par $R(x) = \int_x^\infty f$

$\forall x \in [a, \infty[, R(x) = \int_a^\infty f - \int_a^x f$ et $\lim_{x \to \infty} R(x) = 0$

2. Si f est C^0 sur $[a, \infty[$ alors R est de classe C^1 sur $[a, \infty[$ et $R' = -f$

Remarque 4.1.2 La quantité $R(x)$ est alors appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $[a, \infty[$

On suppose l'énoncé. alors $\forall x \in [a, \infty[$, $\int_x^\infty x$ CV et $\int_a^\infty f = \int_a^x f + \int_x^\infty f$

Démonstration. 1. $R(x) = \int_a^\infty f - \int_a^x f \xrightarrow[x \to \infty]{} \int_a^\infty f - \int_a^\infty f = 0$

2. Supposons que f soit C^0 sur $[a, \infty[$
$R(x) = \int_a^\infty f - F(x)$ avec $F(x) = \int_a^x f$; f est C^0 sur $[a, \infty[$ donc F est dérivable sur $[a, \infty[$ et $F' = f$
Donc R est dérivable sur $[a, \infty[$ et $R' = 0 - f = -f$ donc R' est C^0 sur $[a, \infty[$ car f est C^0 donc R est C^1 sur $[a, \infty[$ et $R' = -f$

□

4.2 Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme [a,b[

4.2.1 Introduction

On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$

Définition 4.2.1 On considère $f\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, b[$ et on lui associe l'application $F\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \int_a^x f$

1. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ CV si et seulement si l'application admet une limite dans $\mathbb{K}$ au point b on note alors $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f$

   Remarque 4.2.1 Le scalaire $\displaystyle\int_a^b f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $[a, b[$

2. Pour exprimer que l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente

Théorème 4.2.1 Soit $\varphi \colon [a, b[\to \mathbb{R}^+$ M^0 et positive sur $[a, b[$ on lui associe l'application $\Phi \colon [a, b[\to \mathbb{R}^+$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi$

1. Φ est croissante sur $[a, b[$
2. L'intégrale de φ sur $[a, b[$ CV ssi Φ est majorée sur $[a, b[$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Proposition 4.2.1 Soient $f \colon [a, b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, b[$ et $c \in [a, b[$

1. L'intégrale de f sur $[a, b[$ est de même nature que l'intégrale de f sur $[c, b[$ et si CV on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
2. L'intégrale de f sur $[a, b[$ CV ssi les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ CV sur $[a, b[$ en cas de CV on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$. Avec $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f\right)$ et $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(\int_a^b f\right)$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Proposition 4.2.2 Soient $f, g \colon [a, b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, b[$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

1. Si les intégrales de f et de g CV sur $[a, b[$ alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ sur $[a, b[$ CV et $\displaystyle\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
2. Si $f \geq 0$ et l'intégrale de f sur $[a, b[$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ et si $f \leq g$ et intégrales

de f, g sur $[a, b[$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Théorème 4.2.2 Soit $f\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $[a, b[$ et l'intégrale de f sur $[a, b[$ CV. Soit $R\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ définie par $R(x) = \displaystyle\int_x^b f$

1. $\forall x \in [a, b[, R(x) = \displaystyle\int_a^b f - \int_a^x f$ et $\displaystyle\lim_{x \to b} R(x) = 0$
2. Si f est C^0 sur $[a, b[$ alors R est C^1 sur $[a, b[$ avec $R' = -f$

Remarque 4.2.2 $R(x) = \displaystyle\int_x^b f$ est alors appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Théorème 4.2.3 Si $f\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ est M^0 sur $[a, b]$ alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ CV et $\displaystyle\int_a^b = \int_{[a,b]} f$

Démonstration. On suppose l'énoncé, $f\big|_{[a,b[}$ est M^0 montrons que $\displaystyle\int_a^b f$ CV et que $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

- Soit $x \in [a, b[$, $\displaystyle\underset{MPSI}{\int_{[a,b]}} = \underset{MPSI}{\int_a^b} f = \underset{MPSI}{\int_a^x} f + \underset{MPSI}{\int_x^b} f$ et $\displaystyle\int_a^x f = \int_{[a,b]} - \int_x^b f$
- On a $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_x^b f = 0$

EF 4.2.1 $\left|\int_x^b f\right| \leq \int_x^b |f|$ ensuite f est M^0 sur $[a,b]$ donc f est bornée sur $[a,b]$ et $\|f\|_\infty^{[a,b]} < \infty$.

puis $|f| < \|f\|_\infty^{[a,b]}$ donc $\int_x^b |f| \leq \int_x^b \|f\|_\infty^{[a,b]} = (b-x)\|f\|_\infty^{[a,b]}$; Donc $0 \leq \left|\int_x^b f\right| \leq (b-x)\|f\|_\infty^{[a,b]}$ donc par encadrement $\lim\limits_{x\to b^-} f = 0$ **FEF**

donc $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x = \int_{[a,b]} f - 0 = \int_{[a,b]} f$ donc $\underset{IG}{\int_a^b} f = \int_{[a,b]} f = \underset{MPSI}{\int_a^b} f$

□

4.2.2 Exemples

4.2.1 $f(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$ f est C^0 sur $[0,1[$

Pour $x \in [0,1[$, $\displaystyle\int_0^x f = \int_0^x \frac{\mathfrak{d}t}{1-t^2} = \left[\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}\right]_0^x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 0$

EF 4.2.2

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathfrak{d}t}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(1+t)+(1-t)}{(1+t)(1-t)}\mathfrak{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathfrak{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[-\log|1-t| + \log|1+t|\right] \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|
\end{aligned}$$

FEF

ensuite $\displaystyle\int_0^x f = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty$ Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathfrak{d}t}{1-t^2}$ DV et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathfrak{d}t}{1-t^2}$ n'existe pas.

4.2.2 $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ on a g est C^0 sur $[0,1[$

Soit $x \in [0,1[$

$\int_0^x \frac{\mathfrak{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{asin}(t)]_0^x = \text{asin}(x) - 0 \xrightarrow[x \to 1^-]{} \text{asin}(1) = \frac{\pi}{2}.$

Donc $\int_0^1 g$ CV et $\int_0^1 = \frac{\pi}{2}$

4.2.3 $h(t) = \frac{\log t}{t-1}$ on a h est C^0 sur $[\frac{1}{2}, 1[$

$\lim_{1^-} h = 1$ car $\frac{\log t}{t-1} \equiv \frac{t-1}{t-1} = 1$ on pose $h(1) = 1$

Dès lors h est C^0 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc d'après le cours l'intégrale généralisée de h sur $]0,1[$ converge et vaut $\int_{\underset{MPSI}{0}}^1 h$

4.3 Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme]a,b]

4.3.1 Introduction

On considère $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $b < \infty$

Définition 4.3.1 On considère $f\colon]a,b] \to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b]$ et on lui associe l'application $F\colon]a,b] \to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \int_x^a f$

1. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ CV si et seulement si l'application admet une limite dans $\mathbb{K}$ au point a on note alors $\int_a^b f = \lim_{x \to a} \int_x^b f$

   Remarque 4.3.1 Le scalaire $\int_a^b f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $]a,b]$

2. Pour exprimer que l'intégrale de f sur $]a,b]$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente

Théorème 4.3.1 Soit $\varphi\colon]a,b] \to \mathbb{R}^+$ M^0 et positive sur $]a,b]$ on lui associe l'application $\Phi\colon]a,b] \to \mathbb{R}^+$ définie par $\Phi(x) = \int_x^b \varphi$

1. Φ est croissante sur $]a, b]$
2. L'intégrale de φ sur $]a, b]$ CV ssi Φ est majorée sur $]a, b]$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Proposition 4.3.1 Soient $f\colon]a, b] \to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a, b]$ et $c \in]a, b]$

1. L'intégrale de f sur $]a, b]$ est de même nature que l'intégrale de f sur $[c, b]$ et si CV on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
2. L'intégrale de f sur $]a, b]$ CV ssi les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ CV sur $]a, b]$ en cas de CV on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$. Avec $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f\right)$ et $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(\int_a^b f\right)$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Proposition 4.3.2 Soient $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a, b]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

1. Si les intégrales de f et de g CV sur $]a, b]$ alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ sur $]a, b]$ CV et $\displaystyle\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
2. 2. Si $f \geq 0$ et l'intégrale de f sur $]a, b]$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ et si $f \leq g$ et intégrales de f, g sur $]a, b]$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Théorème 4.3.2 Soit $f\colon]a, b] \to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a, b]$ et l'intégrale de f sur $]a, b]$ CV. Soit $R\colon]a, b] \to \mathbb{K}$ définie par $R(x) = \displaystyle\int_a^x f$

1. $\forall x \in]a, b], R(x) = \displaystyle\int_a^b f - \int_x^b f$ et $\displaystyle\lim_{x \to a} R(x) = 0$
2. Si f est C^0 sur $]a, b]$ alors R est C^1 sur $]a, b]$ avec $R' = -f$

Remarque 4.3.2 $R(x) = \int_a^x f$ est alors appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Théorème 4.3.3 Si $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ est M^0 sur $[a, b]$ alors l'intégrale de f sur $]a, b]$ CV et $\int_a^b = \int_{[a,b]} f$

Démonstration. cf partie précédente □

4.3.2 Exemples

4.3.1 e_1 est C^0 sur $\mathbb{R}$ donc sur R^-

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $\int_x^0 e^t \mathfrak{d}t = \left[e^t\right]_x^0 = 1 - e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$. Donc $\int_{-\infty}^0 e_1$ CV et $\int_{-\infty}^0 = 1$

4.3.2 log est C^0 sur $]0, 1]$

Pour $x \in]0, 1]$, $\int_x^1 \log = [t \log t - t]_x^1 = -1 - x \log x + x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$ Donc $\int_0^1 \log$ CV et $\int_0^1 \log = -1$

4.3.3 Soit $s_c(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

s_c est C^0 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$ donc d'après le théorème du cours on a $\int_0^1 s_c(t)\mathfrak{d}t$ CV et $\int_0^1 s_c = \int_{[0,1]} s_c$

4.4 Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert]a,b[

4.4.1 Introduction

On prend $(a, b) \in \overline{R}^2$

Théorème 4.4.1 – Lemme Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b[$

— Si $\exists c \in]a,b[$ tel que l'intégrale de f sur $]a,c]$ et l'intégrale de f sur $[c,b[$ convergent alors $\forall d \in]a,b[$ l'intégrale de f sur $]a,d$ et l'intégrale de f sur $[d,b[$ convergent et on a $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$

Démonstration. Supposons $c \in]a,b[$ comme dans l'énoncé. Soit $d \in]a,b[$ avec par exemple $d \leq c$ on a $\displaystyle\int_a^c f$ CV donc $\displaystyle\int_a^d$ CV et $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^d f + \underset{MPSI}{\int_d^c f}$

Soit $x \in [d,b[$. $\displaystyle\int_d^b f = \int_d^c f + \int_c^x f \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_d^c f + \int_c^b f$ car $\displaystyle\int_c^b f$ CV Ainsi $\displaystyle\int_d^b$ CV et $\displaystyle\int_d^b f = \int_d^c f + \int_c^b f$ On a donc le résultat. □

Définition 4.4.1 On considère $f\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b[$

1. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ CV si et seulement si il existe $c \in]a,b[$ tel que l'intégrale de f sur $]a,c]$ et l'intégrale de f sur $[c,b[$ sont convergente. On pose alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

   Remarque 4.4.1 Le scalaire $\displaystyle\int_a^b f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ et avec le lemme précédent il est indépendant de c

2. Pour exprimer que l'intégrale de f sur $]a,b]$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente

Proposition 4.4.1 Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b[$. L'intégrale de f sur $]a,b[$ DV ssi $\exists c \in]a,b[$ tel que l'intégrale de f sur $]a,c]$ DV ou l'intégrale de f sur $[c,b[$ DV

Démonstration. conséquence de la définition. □

Proposition 4.4.2 Soient $f\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$

— L'intégrale de f sur $]a,b[$ CV ssi les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ CV sur $]a,b[$ en cas de CV on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i\int_a^b \operatorname{Im} f$. Avec $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f\right)$ et $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(\int_a^b f\right)$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Proposition 4.4.3 Soient $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ M^0 sur $]a,b[$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$

1. 1. Si les intégrales de f et de g CV sur $]a,b[$ alors l'intégrale de $\alpha f+\beta g$ sur $]a,b[$ CV et $\displaystyle\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$
2. 2. Si $f\geq 0$ et l'intégrale de f sur $]a,b[$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f\geq 0$ et si $f\leq g$ et intégrales de f,g sur $]a,b[$ CV alors $\displaystyle\int_a^b f\leq\int_a^b g$

Démonstration. cf partie précédente (demo identique) □

Théorème 4.4.2 1. Si $f\colon [a,b[\to\mathbb{K}$ est M^0 sur $[a,b[$ et si l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente alors l'intégrale de f sur $]a,b[$ CV et les IG resultantes sont égales. (d'où la notation identique)

2. Si $f\colon]a,b]\to\mathbb{K}$ est M^0 sur $]a,b]$ et si l'intégrale de f sur $]a,b]$ CV alors l'intégrale de f sur $]a,b[$ CV et les IG résultantes sont égales

cf les deux parties précédentes. □

Théorème 4.4.3 – Changement de variable Soit $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ si $\varphi\colon]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement monotone de classe dans $C^1(]\alpha,\beta[,]a,b[)$ et si $f\colon]a,b[\to\mathbb{K}$ est C^0 alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ sont de même nature et en cas de convergence on a

$$\int_a^b f(x)\mathfrak{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathfrak{d}t$$

Démonstration. Conséquence du théorème de changement de variable de MPSI par PPL □

Théorème 4.4.4 – Intégration Par Parties Soit $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$. Soit $u,v\colon]a,b[\to\mathbb{K}$ de classe C^1 sur $]a,b[$ admettant des limites dans $\mathbb{K}$ en a et en b alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b u'v$ et $\displaystyle\int_a^b uv'$ sont de même nature et on a en cas de convergence

$$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv';[uv']_a^b=\lim_b uv-\lim_a uv$$

Démonstration. Conséquence du théorème d'IPP MPSI par PPL □

4.5 Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

4.5.1 Introduction

Soit I un intervalle semi-ouvert ou ouvert on a $I \neq \emptyset$ de la forme $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou encore $]a, b[$ Dans tous les cas on a $f : I \to \mathbb{K}$ M^0 sur I et on a la notion de l'intégrale de f sur I et en cas de convergence de l'intégrale généralisée de f sur I notée $\displaystyle\int_a^b f$

Définition 4.5.1 Soit $f : I \to \mathbb{K}$ M^0

- L'intégrale de f sur I est dites absolument convergente si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.
- L'intégrale de f sur I est dite semi-convergente si l'intégrale de f sur I CV mais n'est pas ACV.

Théorème 4.5.1 Soit $\varphi, \psi : I \to R^+$ M^0 sur I et $0 \leq \varphi \leq \psi$

1. Si l'intégrale de ψ sur I CV alors l'intégrale de φ sur I CV et on a $0 \leq \displaystyle\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$
2. Si l'intégrale de φ sur I DV alors l'intégrale de ψ sur I DV.

Démonstration. On prouve le cas $I = [a, \infty[$.

1. On suppose que $\displaystyle\int_a^\infty \psi$ CV donc Ψ majorée, On a $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ on a $0 \leq \varphi \leq \psi$ donc $\forall x \in [a, \infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq Psi(x)$ donc Φ est majorée sur $[a, \infty[$ donc comme $\varphi \geq 0$ on a $\displaystyle\int_a^\infty \phi$ CV
2. Supposons que $\displaystyle\int_a^\infty \varphi$ DV, Φ n'est pas majorée (TLM) or $\Psi \leq \Phi$ donc Ψ n'est pas majorée donc $\displaystyle\int_a^\infty \psi$ DV.

□

Théorème 4.5.2 Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ M^0 sur I. Si l'intégrale de f sur I ACV alors l'intégrale de f sur I CV et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Démonstration. On suppose $\int_a^\infty |f|$ CV

1. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ par suite f^+ et f^- sont M^0 dans I et $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$ puis $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$ donc $\int_a^\infty f$ CV donc $\int_a^\infty f^+$ et $\int_a^\infty f^-$ CV.

   Pour $x \in [a, \infty[$, $\int_a^x f = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^- \xrightarrow[x\to\infty]{} \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^-$ donc $\int_a^\infty f$ CV et $\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f = \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^-$ d'autre part on dispose de $\int_a^\infty |f| = \int_a^\infty f^+ + \int_a^\infty f^-$. et on a $\forall x \in [a, \infty[$, $\left|\int_a^x f\right| \leq \int_a^x |f|$ donc PPL quand $x \to \infty$, $\left|\int_a^\infty f\right| \leq \int_a^\infty |f|$

2. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ On a $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, et $0 \leq |\operatorname{Re} f| \leq |f|$ et $0 \leq |\operatorname{Im} f| \leq |f|$ or $\int_a^\infty |f|$ CV donc $\int_a^\infty |\operatorname{Re} f|$ et $\int_a^\infty |\operatorname{Im} f|$ CV donc d'après 1. $\int_a^\infty \operatorname{Re} f$ et $\int_a^\infty \operatorname{Im} f$ CV de même que le cas 1. $\int_a^\infty f$ CV et $\left|\int_a^\infty f\right| \leq \int_a^\infty |f|$

□

4.5.2 Exercice

Exercice 4.5.1 8.1

Chapitre 5

Intégration sur un intervalle quelconque des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Introduction Dans le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$

5.1 Notion d'application intégrable sur l'intervalle I

5.1.1 Définition

Introduction

Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ M^0 sur I. I est soit un segment ou I est un semi ouvert, ou I est un ouvert. Donc $I = [a,b[\overset{ou}{=}]a,b] \overset{ou}{=}]a,b[\overset{ou}{=} [a,b]$

Si $I = [a,b]$ on dispose de l'intégrale MPSI $\displaystyle\int_a^b f$ sinon en cas de convergence on dispose de l'intégrale généralisée de f sur I $\displaystyle\int_a^b f$

Définition 5.1.1 Une application $f\colon I \to \mathbb{K}$ est intégrable sur I ssi si elle est M^0 et ou bien I est un segment ou bien l'intégrale de f sur I est ACV. On note l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

Proposition 5.1.1 Soient $f\colon I \to \mathbb{K}$ et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^+$ M^0 sur I

1. Si $|f| \leq \varphi$ et si $\varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

2. $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ ssi l'application $|f| \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
3. $f \in L$ ssi les applications $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

Démonstration. On suppose l'énoncé.

1. Soit $|f| \leq \varphi$ et $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   Si I est un segment alors f est intégration sur I (def) Sinon $I = |a, b|$ avec a, b QVB. $\int_a^b |\varphi|$ CV donc $\int_a^b \varphi$ CV ainsi $\int_a^b |f|$ CV donc $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
2. Si I est un segment alors CLF. Sinon
$$\begin{aligned} |f| \in L &\Leftrightarrow \int_a^b ||f|| \text{ CV} \\ &\Leftrightarrow \int_a^b |f| \text{ CV} \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \end{aligned}$$
3. $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ donc si f M^0 alors $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ aussi
$$0 \leq |\operatorname{Re} f| \leq |f| 0 \leq |\operatorname{Im} f| \leq |f| \tag{5.1}$$
   Si I est un segment alors CLF Sinon $I = |a, b|$ a, b QVB
   Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ puis avec (1) $\operatorname{Re} f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   Si $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^2$ alors $\int_a^b |\operatorname{Re} f|$ et $\int_a^b |\operatorname{Im}| f$ CV puis $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Re} f|$ et $\int_a^b |f|$ CV donc $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

□

Théorème 5.1.1 $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev

Démonstration. $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \subset M^0(I, \mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-ev.

- $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$. Si I est un segment alors CLF, sinon $I = |a, b|$ et $\int_a^b |f|, \int_a^b |g|$ CV ainsi $\int_a^b |\alpha||f| + |\beta||g|$

et $|\alpha||f| + |\beta||g| \geq 0$ ainsi $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

Donc $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sev de $M^0(I, \mathbb{K})$ □

5.1.2 Exemples de références

Théorème 5.1.2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]0, a]$ ssi $\alpha < 1$
2. L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[a, \infty[$ ssi $\alpha > 1$
3. L'application précédente n'est pas intégrable sur R^{+*}

Démonstration. $f_\alpha(t) = e^{-\alpha \log t}$, f_α est M^0 sur $]0, a]$ et sur $[a, \infty[$

1. $$f_\alpha \in \mathcal{L}^1(]0, a], \mathbb{K}) \Leftrightarrow \int_0^a |f_\alpha| \text{ CV} \Leftrightarrow \int_0^a f_\alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \int_x^a f_\alpha \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

   Soit $x \in]0, a]$

   $$\int_x^a f_\alpha = \begin{cases} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log a - \log x & \text{sinon} \end{cases}$$

   $$\text{d'où } \lim_{x \to O^+} \int_x^a f_\alpha = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

   Donc $f \in \mathcal{L}^1(]0, a, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \alpha < 1$
2. par le même raisonement on obtient $f \in \mathcal{L}^1([a, \infty[, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \alpha > 1$
3. On s'apperçoit vite que $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ ne sont pas satisfiable en même temps

□

Théorème 5.1.3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$

1. L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[a, b[$ ssi $\alpha < 1$.
2. L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]a, b]$ ssi $\alpha < 1$.

Démonstration. 1. On répète le raisonnement du théorème précédent

2. idem

$\square$

Exemple

5.1.1 1. On a $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ donc f est C^0 sur $[0,1[$ et $\dfrac{1}{2} < 1$ donc f est intégrable sur $[0,1[$

2. de même f est intégrable sur $]1,2]$

5.2 Intégrale d'une application $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

5.2.1 Définition

Définition 5.2.1 Soit $f\colon I \to \mathbb{K} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

- Si $I = [a,b]$ alors on pose $\displaystyle\int_I f = \underbrace{\int_a^b f}_{MPSI}$
- Si I est semi ouvert ou ouvert on pose $\displaystyle\int_I f = \underbrace{\int_a^b f}_{IG}$

Dans tous les cas on appelle $\displaystyle\int_I f$ intégrale de f sur I

5.2.2 Calcul

Théorème 5.2.1 1. Si $-\infty < a < b \leq +\infty$ et si $f \in \mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b}\int_a^x$

2. Si $-\infty \leq a < b < +\infty$ et si $f \in \mathcal{L}^1(]a,b],\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^b f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to a}\int_x^b$

3. Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et si $f \in \mathcal{L}^1(]a,b[,\mathbb{K})$ alors $\forall c \in]a,b[$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^c f$ et $\displaystyle\lim_{y\to b}\int_c^y f$ existent dans $\mathbb{K}$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to a}\int_x^c + \lim_{y\to b}\int_c^y f$

Conséquence des définitions. $\square$

Proposition 5.2.1 Soit f M^0 de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$

- Si $f \geq 0$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ ssi $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$ si f n'est pas positive on a pas la réciproque.
- C'est aussi vrai sur $]a,b]$

5.2.1 Exemple fondamental Soit $s_c(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ on a s_c C^0 sur $\mathbb{R}$

Remarque 5.2.1 Lemme 1 $\displaystyle\int_1^\infty s_c$ CV.

s_c est C^0 donc M^0 sur $[1,\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^\infty s_c$ CV $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x s_c$ existe dans $\mathbb{R}$

·

$$\begin{aligned}\text{Pour } x\in[1,\infty[,\ \int_1^x s_c &= \int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathfrak{d}t\\ &= \int_1^x \frac{1}{t}\sin t\mathfrak{d}t\\ &= \left[-\cos t\times t^{-1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathfrak{d}t(*)\end{aligned}$$

$$\textit{Donc}, \int_1^x s_c = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathfrak{d}t$$

- Or $0 \leq \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $2>1$ donc $\left(t\mapsto\dfrac{1}{t^2}\right)\in\mathcal{L}^1([1,\infty[,\mathbb{K})$ et $\left(\dfrac{\cos t}{t^2}\right)\in\mathcal{L}^1([1,\infty],\mathbb{K})$
- Ainsi $\displaystyle\int_1^\infty \frac{cost}{t^2}\mathfrak{d}t$ ACV donc $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\mathfrak{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$
- par encadrement $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x} = 0$
- Donc d'après $(*)$ on a $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_1^x s_c = 0+\cos 1 + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathfrak{d}t$ donc $\displaystyle\int_1^\infty s_c$ CV et $\displaystyle\int_1^\infty s_c = \cos 1 - \int_{[1,\infty[}\frac{\cos t}{t}\mathfrak{d}t$

Nous allons voir que $\int_{[1,\infty[} s_c$ n'existe pas

Remarque 5.2.2 Lemme 2 $s_c \notin \mathcal{L}^1([1,\infty[,\mathbb{K})$

Supposons que $s_c \in \mathcal{L}^1([1,\infty],\mathbb{K})$

- $\int_1^\infty |s_c|$ CV posons $S(x) = \int_1^x |s_c|$ pour $x \in [1,\infty[$ $|s_c| \leq 0$ donc S est majorée sur $[1,\infty[$ donc $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [1,\infty[, |S(x)| \leq M$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S((n+1)\pi) \leq M$
-

$$\begin{aligned} S((n+1)\pi) &= \int_1^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathfrak{d}t \\ &= \int_1^\pi |s_c| + \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |s_c(t)| \mathfrak{d}t \\ &\geq \int_1^\pi |s_c| + \sum_{k=1}^n I_k \end{aligned}$$

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} \mathfrak{d}t$$

$$\begin{aligned} S((n+1)\pi) &\geq \int_1^\pi |s_c| + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi} \\ &= \int_1^\pi |s_c| + \frac{2}{\pi}(H_{n+1} - 1) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

- Donc $\lim_{n+1} S((n+1)\pi) = +\infty$ absurde donc $s_c \notin \mathcal{L}^1([1,\infty[,\mathbb{K})$

avec

EF 5.2.1

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \mathfrak{d}t \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u + k\pi| \mathfrak{d}u \end{aligned}$$

$t = u + k\pi = \varphi(u) \in C^1, dt = du$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \left| \sin u \underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin k\pi}_{=0} \cos u \right| \mathfrak{d}u \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |(-1)^k| |\sin u| \mathfrak{d}u \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u \mathfrak{d}u \\ &= \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

FEF

Par le lemme 1 et 2 on a $s_c \notin \mathcal{L}^1([1, \infty[, \mathbb{K})$ mais $\int_1^{s_c} s_c$ CV

5.2.3 Propriétés fondamentales

Théorème 5.2.2 Soient f, g intégrables sur I à valeurs dans K, soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

1. $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I et $\int_I \alpha f + \beta g = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$
2. $|f|$ est intégrable sur I et $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$
3. $\overline{f}$ est intégrable sur I et $\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$
4. Si f, g sont à valeur dans $\mathbb{R}$ et $f \leq g$ alors $\int_I f \leq int_I g$

Démonstration. conséquence de la definition □

Théorème 5.2.3 Si $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ si $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ est C^0 positive et intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \varphi = 0$ alors $\varphi = O_{\mathbb{R}^I}$

Démonstration. On suppose l'énoncé.

- Si I est un segment CLF
- Si I n'est pas un segment, par exemple $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^\infty \varphi = \lim_{x\to\infty} \int_a^x \varphi = \lim_{x\to\infty} \Phi(x)$ Φ est croissante sur $[a, \infty[$ donc $\Phi(x) \leq \lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$ or $\Phi(x) \geq 0$ donc $0 \leq \Phi(x) \leq 0$
- donc $\forall x \in [a, \infty[, \Phi(x) = 0 = \displaystyle\int_{[a,x]} \varphi$
- φ est C^0 positive sur $[a, x]$ donc $\forall t \in [a, x], \varphi(t) = 0$, soit $t \in [a, \infty[, t \in [a, t], \varphi(t) = 0$
- donc $\forall t \in [a, \infty[, \varphi(t) = 0$ donc $\varphi = 0$

$\square$

Proposition 5.2.2 Additivité

Si $-\infty < a < b \leq +\infty$ si $f \in M^0([a, b[, \mathbb{K})$ et si $c \in]a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ ssi f est intégrable sur $[c, b[$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$

2. idem avec $]a, b]$
3. idem avec $]a, b[$

Conséquence des définitions $\square$

Proposition 5.2.3 Négligabilité

Si $-\inf < a < b \leq +\inf$ et si $f \in LI[a, b[$ alors $f \in LI]a, b[$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$

2. idem avec $]a, b]$
3. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ alors f est intégrable sur $[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f$

Conséquence des définition $\square$

5.2.4 EV des application C^O et intégrable sur I

Définition 5.2.2 On suppose que l'intérieur de I est on vide, on note $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des application intégrables et continues sur I. On a $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ par intersection c'est un sev de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et si I est un segment alors $\mathcal{L}_c^1 = \mathcal{C}^0$

Proposition 5.2.4 Pour $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I f$

1. $\|\cdot\|_1$ est une seminorme sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $(\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ est un ev semi normé
2. $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}_c^1$ et $(\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ est un evn

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ a $\|\cdot\|_1$

1. sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   - $\|\cdot\|_1 \colon \mathcal{L}_c^1 \to \mathbb{R}^+$ est une application à valeur positive car $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   - Soit f, g dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

     $$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda f| = |\lambda| \int_I f = |\lambda| \|f\|_1 \; \|f + g\|_1 = \int_I |f + g| \leq \int_I f + \int_I g = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

   - Donc $\|\cdot\|_1$ est bine une semi norme sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
2. sur $\mathcal{L}_c^1$
   - On suppose que $\|f\|_1 = 0$, $|f|$ étant continue positive intégrable sur I donc $|f| = 0$ puis $f = 0$
   - $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathcal{L}_c^1$

□

5.2.5 Relation de Chasle

Définition 5.2.3 Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $]\min(a, b), \max(a, b)[\subset I$ Si $-\infty \leq a < b \leq \infty$ alors $f \in \mathcal{L}^1(]a, b[, \mathbb{K})$ et on pose $\displaystyle\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. Si $-\infty \leq b < a \leq \infty$ alors $f \in \mathcal{L}^1(]b, a[, \mathbb{K})$ et on pose $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{]b,a[} f$. Et si $-\infty \leq a \leq \infty$ on pose $\displaystyle\int_a^a f = 0$

Proposition 5.2.5 Soient $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ tel que $]\min(a, b, c), \max(a, b, c)[\subset I$ on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Démonstration. juste une histoire de vérification □

5.3 Critère de comparaison pour les fonctions à valeurs positives

Théorème 5.3.1 Soient $\varphi, \psi \colon I \to R^+$ M^0 et positive sur I

- Si $0 \leq \varphi \leq \psi$ et si ψ est intégrable sur I alors φ l'est aussi et on a $0 \leq \displaystyle\int_I \varphi \leq \int_I \psi$
- Si $0 \leq \varphi \leq \psi$ et si φ n'est pas intégrable sur I alors ψ ne l'est pas non plus.

Démonstration. analogue aux séries numériques □

Proposition 5.3.1 Soient a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\inf < a < b \leq +\inf$ et φ, ψ dans $M^0([a, b[, \mathbb{R}^+)$

1. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}(\psi)$ et si ψ intégrable alors φ est intégrable. et si φ non intégrable alors ψ non intégrable
2. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}(\psi)$ et si ψ intégrable alors φ intégrable, de même si φ n'est pas intégrable alors ψ ne l'est pas
3. Si $\varphi \underset{b}{\equiv} \psi$ alors φ est intégrable ssi ψ l'est

Démonstration. analogues aux séries numériques □

Proposition 5.3.2 Soient a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\inf \leq a < b < +\inf$ et φ, ψ dans $M^0(]a, b], \mathbb{R}^+)$

1. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}(\psi)$ et si ψ intégrable alors φ est intégrable. et si φ non intégrable alors ψ non intégrable
2. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}(\psi)$ et si ψ intégrable alors φ intégrable, de même si φ n'est pas intégrable alors ψ ne l'est pas
3. Si $\varphi \underset{b}{\equiv} \psi$ alors φ est intégrable ssi ψ l'est

Démonstration. analogues aux séries numériques □

Théorème 5.3.2 Règle de Riemann - HP

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*} et \varphi \colon]0, a] \to \mathbb{R}^+$ M^0 et positive.

1. — Si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha \varphi(t) = 0$ alors $\varphi(t) = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et φ est intégrable
   — Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha \varphi(t) = \infty$ alors $\frac{1}{t^\alpha} = \mathfrak{o}(\varphi(t))$ et φ n'est pas intégrable
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \colon [a, \infty[\to R^+$ M^0 et positive
   — Si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to \infty} t^\alpha \varphi(t) = 0$ alors $\varphi(t) = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et φ est intégrable
   — Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t \to \infty} t^\alpha \varphi(t) = \infty$ alors $\frac{1}{t^\alpha} = \mathfrak{o}(\varphi(t))$ et φ n'est pas intégrable

On suppose l'énoncé, on suppose $\exists \alpha < 1, \lim\limits_{t \to O^+} t^\alpha \varphi(t) = 0$ et $\varphi(t) = \wr(t^{-\alpha})$ alors on a $\alpha < 1$ donc $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right) \in \mathcal{L}^1(]0, a], \mathbb{R})$ le reste est du même tonneau □

Utile lorsqu'on gère des exponentielles/logarithmes

Théorème 5.3.3 Comparaison Série/IG Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \colon [p, \infty[\to \mathbb{R}$ M^0 positive et décroissante

La série $\sum\limits_{n \geq p} \varphi(n)$ est de même nature que l'IG $\int_p^\infty \varphi$

2. La série $\sum\limits_{n \geq p} \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi\right)$ est CV

$\int_p^\infty \varphi$ CV $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \int_p^x \varphi$ existe dans $\mathbb{R}$ $\varphi \geq 0$ donc Φ est croissante sur $[p, \infty[$ avec $\Psi(x) = \int_p^x \varphi$ Supposons que $\sum\limits_{n \geq p} \varphi(n)$ CV ainsi (I_n) CV dans $\mathbb{R}$ $\int_p^\infty \varphi$ CV $\Leftrightarrow \lim\limits_\infty \Phi$ existe dans $\mathbb{R}$ or Φ est croissante donc d'après le TLM $\lim\limits_\infty \Phi$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ $\lim n = \infty$ donc $\lim \Phi(n) = \lim \Phi \in \mathbb{R}$ i.e $\lim I_n \in \mathbb{R}$ et $\lim \Phi = \lim I_n \in \mathbb{R}$ donc $\int_p^\infty \varphi$ CV.

Supposons que $\displaystyle\int_p^{\infty} \varphi$ CV on a $\lim \Phi \in \mathbb{R}$ et $\lim n = \infty$ donc $\lim \Phi(n) = \lim \Phi \in \mathbb{R}$ la suite (I_n) converge et ainsi $\displaystyle\sum_{n \geq p} \varphi(n)$ CV la suite est acquise

$\square$

Remarque 5.3.1 Le théorème est une conséquence de l'inégalité $\varphi(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi \leq \varphi(k)$ valable pour tout entier $k \geq p$. L'idée est d'encadrer l'intégrale.

5.4 Intégration des relations de comparaison pour les fonctions à valeurs positives

Théorème 5.4.1 Intégration des comparaison : le cas non intégrable Soient (a, b) dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $-\infty < a < b \leq \infty$ et $\varphi, \psi \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ M^0 et positives. on suppose ψ non intégrable.

Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}(\psi)$ alors $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}\left(\int_a^x \psi\right)$

2. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}(\psi)$ alors $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}\left(\int_a^x \psi\right)$

3. Si $\varphi \underset{b}{\equiv} \psi$ alors $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{\equiv} \int_a^x \psi$

Comme pour les séries numériques $\square$

Théorème 5.4.2 Intégration des comparaison : cas intégrable Soient (a, b) dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $-\infty < a < b \leq \infty$ et $\varphi, \psi \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ M^0 et positives. on suppose ψ intégrable

Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}(\psi)$ alors φ est intégrable et $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{=} \mathfrak{O}\left(\int_a^x \psi\right)$

2. Si $\varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}(\psi)$ alors φ est intégrable et $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{=} \mathfrak{o}\left(\int_a^x \psi\right)$

3. Si $\varphi \underset{b}{\equiv} \psi$ alors φ est intégrable et $\displaystyle\int_a^x \varphi \underset{b}{\equiv} \int_a^x \psi$

Comme pour les séries numériques $\square$