Math3 CM

Cours de L. PASQUEREAU
Note de C. THOMAS

27 octobre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $D \in \mathbb{R}$, soit $f \in \mathbb{R}^D$

1.1 Limite

1.1.1 Adhérence

Définition 1.1.1
On appelle adhérence de D le plus petit ensemble fermé qui contient D. Noté $\bar{D}$

1.1.2 Limite

Soit f définie sur D, Soit $a \in \bar{D}$, Soit $l \ \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.2
On dit que f a pour limite l quand x tends vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0| \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

1.1.3 Fonctions négligeables

Définition 1.1.3
Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$ et $a \in \bar{D}$ on dit que $f = o_a(g)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to_a 0$

1.1.1
en 0 on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} \tag{1.1}$$

$$\rightarrow_{0^+} 0 \tag{1.2}$$
$$f = o_{O^+}(g) \tag{1.3}$$

1.1.4 Croissance comparée

Théorème 1.1.1 – Croissances Comparées
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^{+*}$ avec $\gamma > 1$ avec

$$f : x \mapsto (\log x)^\alpha$$
$$g : x \mapsto x^\beta$$
$$h : x \mapsto \gamma^x$$

alors on a

$$g = o_\infty(f)$$
$$h = o_\infty(g)$$

c'est à dire

$$\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \rightarrow_\infty 0$$
$$\frac{x^\beta}{\gamma^x} \rightarrow_\infty 0$$

1.1.5 Fonctions Équivalentes

Définition 1.1.4
Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$ et $a \in \bar{D}$ on dit que f est équivalente à g quand x tends vers a si $\dfrac{f}{g} \rightarrow_a 1$.
On note $f \sim_a g$

1.1.2 — Un polynome est équivalent à son monôme de plus haut degrès (resp bas) quand x tends vers ∞ (resp 0)
— $sinx \sim_0 x$
— $ln(1 + x) \sim_0 x$

1.1.6 Opération sur les équivalents

Soient $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathbb{R}^D$ soit $a \in \bar{D}$ soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_1 \sim_a g_1$$
$$f_2 \sim_a g_2$$

—

$$f_1 \cdot f_2 \sim_a g_1 \cdot g_2$$
$$\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$$
$$f_1^\alpha \sim_a g_1^\alpha$$

—

$$f = o_a g \Rightarrow f + g \sim_a g \tag{1.4}$$

— Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$

Proposition 1.1.1
Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_a f \neq 1$ alors $\log f \sim_a \log g$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{\log g(x)}{\log f(x)} - 1 &= \frac{\log g(x) - \log f(x)}{\log f(x)} \\ &= \frac{\log\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\log f(x)} && \text{or } f \sim_a g \\ &\to_a \frac{0}{\log f(a)} && \text{par passage à la limite car } \lim_a f \neq 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1$ donc $\log f \sim_a \log g$ □

Cas particulier où $l = 1$

1.1.3
$f(x) = 1 + x$ et $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ on a bien $f \sim_0 g$ et $f \to_0 1$ on a aussi $\log f(x) = \log 1 + x \sim_0 x$ et $\log g(x) = \log 1 + \sqrt{x} \sim_0 \sqrt{x}$ et $x \neq \sqrt{x}$

1.2 Continuité

Définition 1.2.1
Soit f définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues, c'est un espace vectoriel.

1.3 Dérivabilité

Définition 1.3.1
Soit f définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$. On note f' la fonction $a \mapsto \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur l'ensemble des valeurs dérivables de f.

1.3.1 Dérivée successives

On peut ensuite étudier la dérivabilité des dérivées successives de f

1.4 Développements Limités (DL)

Définition 1.4.1
On appelle Développement Limité (DL) à l'ordre n et au point $a \in I$ d'une fonction f défini sur un interval ouvert I de $\mathbb{R}$, un polynome P tel que

$$\begin{aligned} \deg P &= n \\ f(x) &= P(x-a) + o_0((x-a)^n) \end{aligned}$$

C'est une propriété **locale** de f en a

1.4.1 Taylor-Young

Théorème 1.4.1 – Formule de Taylor-Young
Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, n fois dérivable, alors f admet un DL_n pour un point a de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque 1.4.1
Dans la majorité des cas pratiques, on prend $a = 0$ ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + o(x^n)$$

1.4.1
En exemple on prend $f = \exp$, $\exp \in \mathcal{C}^\infty$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = \exp$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 1$ donc d'après le théorème de Taylor-Young, $\forall n \in \ \mathbb{N}, \exp$ admet un DL_n de la forme

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Remarque 1.4.2
La formule de Taylor-Young permet aussi de faire l'inverse, de trouver la valeur d'une dérivée en un point si l'on connaît le DL de la fonction.

1.4.2

Un exemple pour la valeur en 0 de la dérivée quatrième de $\dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Et d'après Taylor-Young on a

$$\frac{1}{1-x} = \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Or les deux DL sont égaux, donc les polynômes aussi, et donc par identification des coefficients on a

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 1$$

ce qui donne

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 1$$
$$f^{(4)}(0) = 4! = 24$$

On a donc la valeur de la dérivée quatrième en O sans avoir à dériver la fonction.

En pratique ça permet l'étude des dérivées en un point sur des fonctions bien plus complexes.

1.4.2 DL usuels

Proposition 1.4.1

Les développements limités usuels en 0 sont les suivants

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$
$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \sigma_\alpha(k) x^k + o(x^n) \qquad \text{avec}$$
$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{et}$$
$$\sigma_\alpha(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.4.3
Les DL de fonctions paires (resp impaires) ne contiennent que des coefficients sur les degrès pairs (resp impairs)

1.4.3
Exemple, la fonction cos est paire

1.4.3 Opération sur les DL

Sans perte de généralité, les DL sont ici en 0
Soit $P, Q \in R[X]$ et $f, g \in \mathbb{R}^I$ tels que

$$\deg P = \deg Q = n$$
$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

1.4.3.1 Troncage

Définition 1.4.2
On appelle "troncage" à l'ordre $k \leq n$ d'un DL, le polynome tronqué F_k de degrès k tel que tous les coefficients de F_k sont égaux à ceux de F jusqu'au

coefficient de x^k et tel que

$$f(x) = F_k(x) + o(x^k)$$

1.4.4

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

le DL_5 de exp alors on peut le "tronquer" à l'ordre $k = 3 \leq 5$ pour avoir le DL_3 de exp

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

1.4.3.2 Somme

Proposition 1.4.2

Le DL_n de la fonction $f + g$ est la somme des DL_n de f et de g

$$(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

1.4.3.3 Produit

Proposition 1.4.3

Le DL_n de la fonction fg est le produit des DL_n de f et de g tronqué à l'ordre n

$$(fg)(x) = PQ_n(x) + o(x^n)$$

1.4.3.4 Composée

Proposition 1.4.4

Si $g(0) = 0$ alors on peut composer les DL_n et le DL_n de $f \circ g$ est la composition des DL_n de f et de g tronqué à l'ordre n

$$(f \circ g)(x) = (P \circ Q)_n(x) + o(x^n)$$

1.4.5

Exemple DL_3 de $\sqrt{1 + \sin x}$. On a bien $\sin 0 = 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2}X^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}X^3 + o(X^3) \quad \text{donc}$$
$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{3}{48}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^9)$$
$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + o(x^3) \quad \text{tronquage}$$
$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

1.4.4 Application au calcul de dérivé

Les DL sont utiles pour résoudre des formes indéterminées lors du calcul de limite

1.4.6

Calcul de la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ On calcule les différents DL à l'ordre 4

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{tronquage, inutile au delà}$$
$$f(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$
$$f(x) = \frac{3}{2} + o(1) \quad \text{d'où}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2}$$

On voit après que l'ordre 2 aurait suffit, l'intuition peut aider pour savoir à quel ordre calculer.

Chapitre 2

Intégration

2.1 Intégrales de Riemann

Explication des notations,

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

2.1.1 Introduction

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f définie et bornée sur $[a, b]$ et $d = (x_1, \cdots, x_n) \subset [a, b]$ une subdivision de $[a, b]$ pour $n \in \mathbb{N}$. On définie

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$S(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$
$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Le but est double

— Approcher f par des fonctions en escalier

— Augmenter n pour augmenter la précision de l'approche

Et pour d' une subdivision plus fine que d on a

$$s(d) \leq s(d') \leq S(d') \leq S(d)$$

On peut définir des suites convergentes, et à l'infini on note

$$I = \sup_{[a,b]} S(d)$$
$$J = \inf_{[a,b]} s(d)$$

Définition 2.1.1

Une fonction f est Riemann-intégrable si $I_f = J_f = \displaystyle\int_a^b f$

2.1.2 Propriétés de l'intégrale

On prend f, g deux fonctions Riemann-intégrable définie sur $[a, b]$

Proposition 2.1.1
On a

$$\int_a^a f = 0$$
$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

Proposition 2.1.2 – Relation de Chales
Soit $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2.1.1
Exemple d'une fonction non-Riemann-intégrable. Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ sur $[0, 1]$ alors on a

$$M_i = \sup f = 1$$
$$m_i = \inf f = 0$$

D'où

$$S(d) = x_n - x_0 = 1$$
$$s(d) = 0$$

Donc

$$I \neq J$$

Par conséquence, f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$

Théorème 2.1.1
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$

1. Si f est $\mathcal{C}^0$ alors f est Riemann-intégrable
2. Théorème des singularités supprimable, si on modifie f sur un nombre fini de point, l'intégrale n'est pas modifiée
3. Par conséquence, les fonctions continues par morceaux ($\mathcal{M}^0$) sont aussi Riemann-intégrable

2.1.3 Opération sur les intégrales

Proposition 2.1.3
Soient f, g Riemann-intégrables sur I

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$

— La fonction $(f + g)$ est Riemann-intégrable et $\displaystyle\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$

— La fonction $|f|$ est Riemann-intégrable

— La fonction (fg) est Riemann-intégrable

2.1.4 Positivité de l'intégrale

Proposition 2.1.4
Soit f Riemann-intégrable sur I

— Si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_I f \geq 0$

— Si $\forall x \in I, f(x) \leq 0$ alors $\displaystyle\int_I f \leq 0$

Théorème 2.1.2 – Positivité de l'intégrale
Soit f, g Riemann-intégrable sur I telles que

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Alors il vient de la prop précédente que

$$\int_I f \leq \int_I g$$

Proposition 2.1.5 – Généralisation de l'inégalitée triangulaire
Soit f Riemann-intégrable sur I, on a alors

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

2.1.5 Moyenne

Soit f, g Riemann-intégrable sur I, on note

$$m = \inf_I f$$
$$M = \sup_I f$$

Proposition 2.1.6
Si g est de signe constant sur I alors $\exists \mu \in [m, M], \displaystyle\int_I fg = \mu \int_I g$

Démonstration. On a, $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$, on considère sans perte de généralité que $\forall x \in I, g(x) \geq 0$ et que $\displaystyle\int_I g \neq 0$ alors on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, & m \leq f(x) \leq M \\
& mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \\
& m \int_I g \leq \int_I fg \leq M \int_I g && \text{g est positive} \\
& m \leq \frac{\int_I fg}{\int_I g} \leq M && \text{car } \int_I g \neq 0
\end{aligned}$$

On pose $\dfrac{\int_I fg}{\int_I g} = \mu$, il vient que $\mu \in [m, M]$ et que $\mu \displaystyle\int_I g = \int_I fg$ □

Remarque 2.1.1

On prend le cas particulier où $g = 1$ on a $\int_a^b f = \mu \int_a^b 1$ ce qui donne finalement

$$\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f$$

On appelle alors μ la valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$

2.1.6 Théorème fondamental de l'analyse

Proposition 2.1.7
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable, et on définie $g : [a, b] \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b], g(x) = \int_a^x f$$

Alors

— Si f est Riemann-intégrable alors g est continue

— Si f est continue en $x_0 \in [a, b]$ alors g est dérivable en x_0

— Si f est continue sur $[a, b]$ alors g est dérivable sur $[a, b]$ et $g' = f$

Théorème 2.1.3 – Théorème fondamental de l'analyse
Soit f une fonction $\mathcal{C}^0$ sur I un interval de $\mathbb{R}$, et soit $\alpha \in I$ alors f admet une unique primitive F_α telle que $F'_\alpha = f$ s'annulant en $x = \alpha$. De plus pour toute fonction F primitive de f on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

2.1.7 Primitives usuelles

Proposition 2.1.8
Les primitives usuelles sont les suivantes, par abus de notation toutes les fonctions suivantes sont marquées selon leur procédure, par example x^α réfère à la fonction $(x \mapsto x^\alpha)$ sur son plus grand interval de définition, c désigne une constante réelle.

$$f = x^\alpha, F = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1$$

$$f = \frac{1}{x}, F = ln|x| + c$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{x}}, F = 2\sqrt{x} + c$$
$$f = e^x, F = e^x + c$$
$$f = \cos(ax+b), F = \frac{1}{a}\ \sin(ax+b) + c \qquad a \neq 0$$
$$f = \sin(ax+b), F = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c \qquad a \neq 0$$
$$f = \frac{1}{\cos^2 x}, F = \tan x$$
$$f = \frac{1}{x^2+a^2}, F = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c \qquad a \neq 0$$

Pour les fonctions, il faut pas oublier la règle de la composée qui donne par example

$$f = u^\alpha \cdot u', F = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1$$
$$f = \frac{u'}{u}, F = ln|u|$$
$$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}, F = 2\sqrt{u}$$

2.1.8 Changement de variable

Théorème 2.1.4 – Théorème de changement de variable
Soit $\varphi[a,b] \in \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et soit $f : I \in \mathbb{R}\mathcal{C}'$ sur I alors on a la formule suivante
$$\int_a^b f \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$$

2.1.2
Calculons, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{d - x^2}}$ On pose $t = 2 - x^2$ ce qui est bien $\mathcal{C}^1$ alors on a $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x$ donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^1 \frac{\mathrm{d}t}{-2\sqrt{t}} \\ &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^2$$
$$= \sqrt{2} - 1$$

2.1.9 Intégration par parties

Théorème 2.1.5 – Théorème d'intégration par parties
Soit u, v, $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors on a

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

2.1.3
Exemple calculons $I = \int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$ On pose $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et donc $v'(x) = e^x$ ce qui donne $v(x) = e^x$ ce qui sont bien C^1, donc par IPP on a

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x$$
$$= e - (e - 1)$$
$$= 1$$

2.2 Intégrales Généralisées

Il existe deux cas d'intégrales généralisées

1. Le cas où l'on intègre une fonction bornée sur un intervalle non borné (de forme $[a, b[$)
2. Le cas où l'on intègre une fonction non bornée sur un intervalle bornée (de forme $[a, b]$)

Définition 2.2.1
Soit $[a, b[$ tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. On prend l'application $I(\lambda) = \int_a^\lambda f$ définie sur $[a, b[$

— Si $I(\lambda)$ converge en b^- alors f est intégrable sur $[a, b[$, on note $\lim_{\lambda \to b^-} I(\lambda) = \int_a^b f$ et on appelle le scalaire $\int_a^b f$ **intégrale généralisée** de f sur $[a, b[$

— Si $I(\lambda)$ diverge en b^- alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$

2.2.1

On cherche à connaître la nature de l'intégrale de $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ sur $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ &= -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\lambda \\ &= -\frac{1}{\lambda} + 1 \to_\infty 1 \end{aligned}$$

Donc $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ existe et vaut 1

2.2.2

On cherche à connaître la nature de l'intégrale de $(x \mapsto \cos x)$ sur $[0, \infty[$.

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \cos x \mathrm{d}x \\ &= [\sin x]_1^\lambda \\ &= -\sin \lambda \qquad\qquad \text{DV} \end{aligned}$$

Donc $(x \mapsto \cos x)$ n'est pas intégrable sur $[0, \infty[$

Remarque 2.2.1

Soit $c \in [a, b[$ alors $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ sont de même nature, et sont notés en général $\int^b f$

Remarque 2.2.2

Si on a $a = \infty$ ou f non définie en a on sépare l'étude en plusieurs sous problèmes

2.2.1 Cas des fonctions réelles positives

Dans la section f est une fonction réelle positive définie sur $[a, b[$

2.2.1.1 Majoration

Proposition 2.2.1
l'intégrale de f sur $[a, b[$ CV $\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^\lambda f$ majorée

Démonstration.

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f$$

On a I qui est croissante sur $[a, b[$ d'après le théorème des limites monotones alors

- si I est majorée alors $I(\lambda) \to \mu \in \mathbb{R}$ et f est intégrable sur $[a, b[$
- si I n'est pas majorée alors $I(\lambda) \to \infty$ donc f n'est pas intégrable sur $[a, b[$

□

2.2.1.2 Comparaison

Proposition 2.2.2 – Théorème de comparaison
Soit $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ tel que $0 \leq f \leq g$ alors

- Si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f l'est
- Si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ alors g ne l'est pas

2.2.1.3 Equivalent

Proposition 2.2.3
Soit $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ tel que $f \sim_b g$ alors $\displaystyle\int^b f$ et $\displaystyle\int^b g$ sont de même nature

2.2.2 Cas des fonction réelles positives et où $b = \infty$

Proposition 2.2.4
Si $f \not\to 0$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, \infty[$

Démonstration. Supposons que $f \to l \neq 0$ alors $f \sim l$ donc $\displaystyle\int^\infty f$ est de même nature que $\displaystyle\int^\infty l \mathrm{d}x$ donc $\displaystyle\int^\infty f$ DV □

2.2.2.1 Critère de Riemann

Théorème 2.2.1 – Critère de Riemann

La fonction $(x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha})$ est :

- intégrable $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- pas intégrable $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} && \alpha \neq 1 \\ &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\lambda \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)\lambda^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Donc I ne converge que si $\alpha > 1$ et en retour si $\alpha > 1$ alors I converge. □

2.2.3

Cherchons la nature de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}}$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}} &\sim \frac{2x}{\sqrt{x^4}} \\ &\sim \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Donc d'après le critère de Riemann $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+8}}$ DV

2.2.2.2 Règle de Riemann

Proposition 2.2.5 – Règle de Riemann

Soit f une fonction définie sur $[a, \infty[$

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x) \to l \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int^\infty f$ CV
- Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que $x^\alpha f(x) \to l \in \bar{\mathbb{R}}^*$ alors f n'est pas intégrable

Démonstration. Conséquence du critère de Riemann. □

2.2.4

Est-ce que $(x \mapsto \sqrt{x}e^{-x})$ est intégrable sur $[0, \infty[$

$$\begin{aligned} x^2 * \sqrt{x}e^{-x} &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{e^x} \\ &\to 0 \qquad\qquad\qquad \text{CC} \end{aligned}$$

Donc d'après la règle de Riemann, $\displaystyle\int^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}$ CV

2.2.3 Cas où b est fini

On note

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \alpha > 0$$

Proposition 2.2.6

Nature de $\displaystyle\int_a^b g$.

$$I(\lambda) = -\frac{1}{(1-\alpha)}\left((b-\lambda)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right)$$

Donc

- si $\alpha < 1$ alors $(b-\lambda)^{1-\alpha} \to 0$ donc I CV
- si $\alpha > 1$ alors $(b-\lambda)^{1-\alpha} \to \infty$ donc I DV
- si $\alpha = 1$ alors $I \to \infty$ donc I DV

2.2.3.1 Critère de Riemann

Théorème 2.2.2 – Critère de Riemann - Version finie

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha < 1$$

.

Voir ci dessus. □

Proposition 2.2.7

Par conséquent si $f \sim \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$ alors $\displaystyle\int^b f$ CV ssi $\alpha < 1$

Démonstration. Conséquence directe du critère de Riemann. □

2.2.5

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ on a

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

or $\frac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ CV

2.2.3.2 Règle de Riemann

Proposition 2.2.8 – Règle de Riemann - Version finie
Soit f une fonction définie sur $[a, b[$

- Si il existe $\alpha < 1$ tel que $x^\alpha f(x) \to l \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int^\infty f$ CV
- Si il existe $\alpha \geq 1$ tel que $x^\alpha f(x) \to l \in \bar{\mathbb{R}}^*$ alors f n'est pas intégrable

Démonstration. Conséquence du critère de Riemann. □

2.2.4 Cas des fonctions de signes qql

Définition 2.2.2
On dit que l'intégrale de f est simplement convergente si et seulement si $I(\lambda)$ a une limite et si

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \in \mathbb{R}$$

Définition 2.2.3
On dit que l'intégrale de f est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^x |f| \to \mu \in \mathbb{R}$

Théorème 2.2.3 – Comparaison
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b[$

1. Si l'intégrale de f est absolument convergente alors l'intégrale de f est

simplement convergente

2. Le résultat $\left|\int f\right| \leq \int |f|$ est étendu aux intégrales généralisées

Démonstration. Cette preuve est ***hors du programme présenté lors du cours***, je la trouve utile mais on peut la sauter c'était juste pour donner une idée de à quoi peut ressembler ce genre de preuve.

1. Notons, $f^- = \max(-f, 0)$ et $f^+ = \max(f, 0)$. On observe que

$$\begin{aligned} f^- + f^+ &= \max(-f, 0) + \max(f, 0) \\ &= |f| \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} f^+ - f^- &= \max(f, 0) - \max(-f, 0) \\ &= f \end{aligned}$$

On suppose que $\int |f|$ est convergente donc

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \lim_{x \to b^-} \int_a^x (f^+ + f^-) = \mu$$

Or Les fonctions f^+ et f^- sont à valeurs positives, donc

$$\begin{aligned} \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \lim_{x \to b^-} \int_a^x (f^+) &= \mu_1 \qquad \text{et} \\ \lim_{x \to b^-} \int_a^x (f^-) &= \mu_2 \end{aligned}$$

Donc par linéarité,

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x (f^+ - f^-) = \mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Ce qui revient à

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \ \to b^-} \int_a^x f = \lambda$$

Donc l'intégrale de f est simplement convergente.

2. Supposons que l'intégrale de f est absolument convergente, rappelons d'abord que sur les intégrales de Riemann on a pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et g $\mathcal{M}^0$ sur $[a, b]$

$$\left|\int_\alpha^\beta g\right| \leq \int_\alpha^\beta |g| \tag{2.1}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a, b[, \left|\int_a^x f\right| &= \left|\int_a^x (f^+ - f^-)\right| \\
&\leq \left|\int_a^x f^+\right| + \left|\int_a^x f^-\right| && IT \\
&\leq \int_a^x |f^+| + \int_a^x |f^-| && (1) \\
&\leq \int_a^x f^+ + f^- && \text{valeurs positives} \\
&\leq \int_a^x |f|
\end{aligned}$$

Enfin par passage à la limite avec $x \to b^-$ (les limites existe avec la démonstration du 1.)

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

$\square$

2.2.6

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. On a

$$\forall x \in]0, 1] \leq 1$$

Donc l'intégrale est absolument convergente donc l'intégrale est convergente

2.2.7

Nature de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}$ par le même raisonnement absolument convergente donc convergente.

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Introduction aux séries numériques

Définition 3.1.1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général* u_n notée $\sum u_n$.

De plus si la suite (S_n) converge alors on note $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$, notée aussi $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ appelée *somme de la série.*

On dit alors que la série de terme général u_n est convergente. Dans le cas contraire on dit qu'elle est divergente.

Définition 3.1.2
On appelle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ somme partielle de la série de terme général u_n, et si la série est convergente alors on note $R_n = S - S_n$ le reste de la série.

Remarque 3.1.1
On a donc $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

Remarque 3.1.2
Les séries $\sum_{0} u_n$ et $\sum_{n_0} u_n$ sont de même nature d'où la notation $\sum u_n$

Proposition 3.1.1 – Condition nécessaire de convergence

$$\left(\sum u_n \text{ CV}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

On observe que

$$S_{n+1} - S_n = u_n$$

Donc, en supposant que $\sum u_n$ CV on a

$$\begin{aligned} u_n &\to S - S \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ □

Remarque 3.1.3
Cette condition est surtout utilisé pour montrer qu'il n'y a pas convergence (contraposée), lorsque $u_n \not\to 0$ (en pratique plutôt lorsque $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$) on dit que $\sum u_n$ est *grossièrement divergente*.

3.1.1
Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Soit $n \geq 1$ on a alors

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Donc par somme téléscopique on obtient que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} 1$$

Donc la série de terme générale u_n est convergente et sa somme vaut 1

3.1.2
Soit $u_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, alors on a

$$\begin{aligned} u_n &= \log \frac{n+1}{n} \\ &= \log n + 1 - \log n \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \log n+1-\log n \\ &= \log n+1-\log 1 && \text{somme téléscopique} \\ &= \log n+1 \\ &\to \infty\end{aligned}$$

Donc la série de terme générale u_n est divergente

3.1.1 Sommes de séries numériques

Proposition 3.1.2 – Somme
Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $w_n = u_n + v_n$

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum w_n$ converge

— Si $\sum u_n$ CV (resp DV) et $\sum v_n$ DV (resp CV) alors $\sum w_n$ diverge

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors on ne peut rien dire de $\sum w_n$

3.2 Séries géométriques

Définition 3.2.1
Soit $r \in \mathbb{R}$ alors on appelle suite géométrique une suite de la forme $u_n = r^n$ et alors la série de terme général u_n est appelée *série géométrique* de raison r

Théorème 3.2.1 – Théorèmes des Séries Géométriques
Soit $u_n = r^n$ et $\sum u_n$ la série associée, alors on a

$$\sum u_n \text{ CV } \Leftrightarrow |r| < 1$$

Et dans ce cas alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{1-r}$$

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(1-r)S_n &= (1-r) \cdot \sum_{i=0}^{n} r^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (1-r) r^n && (1-r) \in \mathbb{R} \\
&= \sum_{i=0}^{n} r^n - r^{n+1} \\
&= 1 - r^{n+1} && \text{somme téléscopique} \\
&\to \begin{cases} 1 & \text{si } |r| < 1 \\ \text{DV} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où dans le cas convergent

$$S = \frac{1}{1-r}$$

□

3.3 Séries À Termes Positifs (SATP)

Définition 3.3.1
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ on appelle alors la série de terme générale $\sum u_n$ une *série à terme positifs*, abrégés *SATP*

3.3.1 Introduction

Proposition 3.3.1
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$

$$\left(\sum u_n \text{ CV}\right) \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ majorée}$$

Démonstration. $\sum (u_n)$ est une série à terme positifsdonc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante donc par théorème des limites monotones $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée □

3.3.2 Comparaison

Théorème 3.3.1 – Théorème de Comparaison des SATP
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$$

On a,

1. Si $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV
2. Si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV

Démonstration. Conséquence du théorème des limites monotones □

Proposition 3.3.2
Soit $(u_n), (v_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$u_n \sim_\infty v_n$$

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

3.3.1
Soit $u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ on a $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ DV donc la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente

Remarque 3.3.1
La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*

3.3.3 Liaison séries intégrales

Théorème 3.3.2 – Comparaison Série/Intégrale
Soit $f \geq 0$, $\mathcal{C}^0$, et décroissante à partir d'un réel x_0, alors $\sum f(n)$ et $\int^\infty f$ sont de même nature

Démonstration. Soit $f \geq 0$, $\mathcal{C}^0$ et décroissante, soit $n \in \mathbb{N}$ on observe que

$$I(n+1) \leq S_n \qquad \textit{et}$$
$$S_n \leq f(0) + I(n)$$

Donc si $\sum f(n)$ converge alors par comparaison à termes positifs on a $I(n)$ qui converge par la première inégalité, et si $\sum f(n)$ diverge alors par la deuxième inégalité $I(n)$ diverge. Donc I et $\sum f(n)$ sont de même nature $\square$

3.3.4 Séries de Riemann

Théorème 3.3.3 – Critère de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ soit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, f est $\mathcal{C}^0$, à terme positifs et décroissante donc par comparaison série intégrale $\int f$ et $\sum f(n)$ sont de même nature, or par critère de Riemann dans les intégrales $\int f$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ donc $\sum f(n) = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

Remarque 3.3.2
Si $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ alors $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$

Proposition 3.3.3 – Règle de Riemann
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$, alors

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to l \in \mathbb{R}$ alors $\sum u_n$ CV
- Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \to l \in \bar{\mathbb{R}}^*$ alors $\sum u_n$ DV

Démonstration. Conséquence du critère de Riemann. $\square$

3.3.5 Règle de Cauchy

Théorème 3.3.4 – Règle de Cauchy
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad \in \mathbb{R}$$

On a

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ CV

— Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ DV

— Si $l = 1$ on ne peut pas déterminer la nature de $\sum u_n$ par cette méthode

Démonstration. Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\sqrt[n]{u_n} - l| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon$$

Supposons $l < 1$ alors prenons ε tel que $\varepsilon + l < 1$, on prend le n_0 associé, et soit $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon < 1$$

Donc

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{u_n})^n &\leq (l+\varepsilon)^n \\ u_n &\leq (l+\varepsilon)^n \end{aligned}$$

Or $|l + \varepsilon| < 1$ donc par théorème des séries géométriques $\sum (l+\varepsilon)^n$ converge, donc par comparaison de série à terme positifs, $\sum u_n$ converge.

Supposons maintenant que $l > 1$ alors prenons ε tel que $l - \varepsilon > 1$, et soit $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} (l-\varepsilon) &\leq \sqrt[n]{u_n} \\ (l-\varepsilon)^n &\leq \sqrt[n]{u_n}^n \\ (l-\varepsilon)^n &\leq u_n \end{aligned}$$

Or $|l - \varepsilon| > 1$ donc par théorèmes des séries géométriques $\sum (l-\varepsilon)^n$ diverge, donc par comparaisons de série à terme positifs, $\sum u_n$ diverge. □

3.3.6 Règle d'Alembert

Théorème 3.3.5 – Règle d'Alembert

Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$$

On a

— Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ CV

— Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ DV

— Si $l = 1$ alors on ne peut pas déterminer la nature de $\sum u_n$ par cette méthode

Démonstration. Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}$.

Supposons que $l > 1$ alors a que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$. Donc (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc par le théorème des limites monotones $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Supposons que $l < 1$ alors soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $l < q < 1$. On a qu'il existe un rang n_0 tel que $l < q$ ainsi on a à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$

Donc par produit téléscopique on a que la suite (u_n) est majorée par la suite $v = (u_{n_0} q^{n-n_0})$, or $|q| < 1$ donc par théorème des séries géométriques $\sum v_n$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum u_n$ converge. □

3.4 Séries de signes non constant

Définition 3.4.1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Soit $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

— Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lambda$ alors $\sum u_n$ est dite *simplement convergente*

— Si $\exists \mu \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \mu$ alors $\sum u_n$ est dite *absolument convergente*

Théorème 3.4.1
La convergence absolue implique la convergence simple

Démonstration. voir la preuve du théorème analogue pour les suites □

3.4.1
Soit $u_n = \dfrac{\cos n^2}{n^4}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\dfrac{\cos n^2}{n^4}\right| \leq \dfrac{1}{n^4}$, or par critère de Riemann la série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ converge donc par comparaison de série à terme positive la série $\sum \left|\dfrac{\cos n^2}{n^4}\right|$ converge donc la série $\sum \dfrac{\cos n^2}{n^4}$ est absolument convergente donc elle converge simplement.

3.4.1 Séries Alternées

Définition 3.4.2
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on dit que la série $\sum u_n$ est *alternée* si et seulement si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant

Théorème 3.4.2 – Critère Spécial des Séries Alternées (CSSA)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ soit une série alternée, si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge

Démonstration. Considérons, sans perte de généralitée que $u_0 > 0$ alors on a

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= |u_0| - \ |u_1| \cdots (-1)^n u_n \qquad\qquad \text{il vient} \\ S_n - S_{n-2} &= (-1)^{n-1}|u_{n-1}| + (-1)^n|u_n| \\ &= (-1)^n \left(|u_n| - |u_{n-1}|\right) \end{aligned}$$

Or par hypothèse $|u_n|$ est décroissante donc la quantité $|u_n| - |u_{n-1}|$ est négative.

— Si n est pair alors $n = 2p$ et la quantité $S_{2p} - S_{2p-2}$ est négative donc la suite (S_{2p}) est décroissante

- Si n est impair alors $n = 2p+1$ et la quantité $S_{2p+1} - S_{2p-1}$ est positive donc la suite (S_{2p+1}) est croissante
- De plus $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \to 0$

Donc les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacente, donc

$$\exists S \in \mathbb{R}, \lim_{p\to\infty} S_{2p} = \lim_{p\to\infty} S_{2p+1} = S \tag{3.1}$$

Donc par théorème des indices pair et impair la suite (S_n) converge donc la série $\sum u_n$ est convergente □

3.4.2

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ on a $|u_n| = \dfrac{1}{n+1}$ donc décroissante, et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ car $(-1)^n$ est bornée donc par critère spécial des séries alternées la série $\sum u_n$ converge

Chapitre 4

Séries Entières

Définition 4.0.1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on définie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} f_n \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n x^n. \end{aligned}$$

on appelle la série de terme générale $f_n(x)$ soit la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *série entière centrée en 0* ou plus simplement *série entière*.

Le but de l'étude est de trouver l'ensemble D pour lesquels $\forall x \in D, \sum f_n(x)$ converge, autrement dit l'ensemble de définition de la fonction $\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$

Remarque 4.0.1
Toute série entière converge pour $x = 0$

Remarque 4.0.2
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x_1| < \left|x^2\right|$ alors $|a_n x_1^n| < |a_n x_2^n|$ donc on en tire les conclusions suivantes

— Si $\sum a_n x_2^n$ est absolument convergente alors $\sum a_n x_1^n$ est ACV

— Si $\sum a_n x_1^n$ est divergente alors $\sum a_n x_2^n$ est DV

4.1 Domaine de convergence

Théorème 4.1.1 – Lemme d'Abel
Si il existe $x_0 \neq 0$ tel que $(a_n x_0^n)$ soit borné alors $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < |x_0|$, $\sum a_n x^n$ ACV

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$ alors

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\ &\leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \end{aligned}$$

Or $\sum \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ est ACV car $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ donc $\sum a_n x^n$ est absolument convergente. □

Remarque 4.1.1
Si il existe $x_0 \neq 0$ tel que $\sum (a_n x_0^n)$ soit simplement convergente alors $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < |x_0|$, $\sum a_n x^n$ ACV

Démonstration. La convergence simple implique que la suite est borné à partir d'un certain rang □

Remarque 4.1.2
Par contraposée on obtient que si il existe $x_0 \not 0$ tel que $\sum a_n x_0^n$ DV alors $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| > |x_0|$, $\sum a_n x^n$ DV

4.2 Rayon et intervalle de convergence

Définition 4.2.1
Pour toute série entière $\sum a_n x^n$ il existe $R \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $R >= 0$ et

— $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < R$ la série entière $\sum a_n x^n$ est ACV

— $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| > R$ la série entière $\sum a_n x^n$ est DV

On appelle R le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n x^n$ et l'intervalle $]-R, R[$ est appelé *intervalle de convergence*.

Remarque 4.2.1
Pour une petite apparté, d'un point de vue général pour $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{C}$ on a que la série $\sum c_n(z-a)^n$ est la série entière centrée en a de (c_n). On a alors convergence si $|z-a| < R$ et divergence si $|z-a| > R$ ce qui dans le plan complexe représente un disque de centre a et de rayon R (disque sans le bord), d'où l'appellation *rayon de convergence*

4.3 Calcul du rayon de convergence

On peut utiliser la règle d'Alembert (ou de la même manière la règle de cauchy) pour calculer l'inverse du rayon de convergence

Proposition 4.3.1
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \bar{\mathbb{R}}$, $l >= 0$, on a

- si $l|x| < 1$ alors $\sum |a_n x^n|$ CV
- si $l|x| > 1$ alors $\sum |a_n x^n|$ DV

Démonstration.

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \tag{4.1}$$

D'après les hypothèses on a que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $l >= 0$ on a alors d'après la règle d'Alembert on obtient le résultat donné en énoncé. □

Remarque 4.3.1
De la même manière on peut calculer l avec la règle de Cauchy.

Proposition 4.3.2
Soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$

- $R = \frac{1}{l}$ si $l \neq 0$
- $R = \infty$ si $l = 0$
- $R = 0$ si $l = \infty$

Démonstration. Conséquence de la proposition précédente □

4.3.1

Soit la série entière $\sum \frac{x^n}{n2^n}$ on a alors $a_n = \frac{1}{n2^n}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} \\ &= \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $l = \frac{1}{2}$ ce qui donne $R = 2$ donc la série entière est convergente sur au moins $]-2, 2[$

Observons maintenant en $x = 2$ on a alors

$$\begin{aligned}\left(\sum \frac{x^n}{n2^n}\right)(2) &= \sum \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ce qui est divergent par le critère de Riemann, donc la série entière est divergente en 2.

Enfin, en $x = -2$

$$\begin{aligned}\left(\sum \frac{x^n}{n2^n}\right)(-2) &= \sum \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum \frac{(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

Ce qui est convergent par le critère spécial des séries alternées, donc la série entière est convergente en -2.

On a donc enfin que l'intervalle de convergence de $\sum \frac{x^n}{n2^n}$ est $[-2, 2[$

4.4 Somme des Séries Entières

Définition 4.4.1

Soit $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors on note la *fonction somme de la série entière* $\sum a_n x^n$ la fonction suivante

$$\begin{aligned} S_a(x)\colon]-R, R[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.1
La fonction S_a est $\mathcal{C}^0$ sur $]-R, R[$.

Remarque 4.4.1
Si la SE est définie en $x = R$ (resp $x = -R$) alors on peut prolonger par continuité S_a en $x = R$ (resp $x = -R$)

4.4.1 Dérivation et Intégration des Séries Entières

Définition 4.4.2
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dispose de la série entière $SE = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence R alors

- La série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ est nommée *série dérivée* de SE, de rayon de convergence R_d
- La série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est nommée *série intégrée* de SE, de rayon de convergence R_i

Théorème 4.4.1

$$R = R_d = R_i$$

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, nous allons montrer que $R = R_d$

Démonstration. Soit x tel que $|x| < R_d$ donc $\sum n a_n x^{n-1}$ est ACV, $x \in \mathbb{R}$ donc une multiplication par x ne change pas la nature de la suite donc $\sum n a_n x^n$ est ACV. Or

$$\forall n \geq 1, |a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$$

Donc par comparaison de SATP, la série $\sum a_n x^n$ est ACV donc $|x| \leq R$ par propriété du rayon de convergence donc $R \leq R_d$

— Soit x tel que $|x| < R$ soit $\rho \in]|x|, R[\neq \emptyset$ on a

$$\left|na_n x^{n-1}\right| = |a_n \rho^n| \cdot \left|\frac{nx^{n-1}}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{1}{\rho}\right|$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx^{n-1}}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{1}{\rho}\right| = 0$$

car $\left|\frac{x}{\rho}\right| < 1$ donc

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \left|na_n x^{n-1}\right| \leq |a_n \rho^n|$$

Or $\rho < R$ donc $\sum a_n \rho^n$ est ACV donc par comparaison de SATP $\sum na_n x^{n-1}$ est ACV donc $R_d \leq R$

On a $R_d \leq R$ et $R \leq R_d$ donc $R = R_d$ par anti-symétrie de $(\leq)$.

La série SE est la série intégrée, puis dérivée donc naturellement on a $R = R_i$ par le point précédent, donc finalement

$$R = R_i = R_d$$

□

4.4.1
On a que $\sum \frac{x^n}{n2^n}$ est $R = 2$ donc $\sum \frac{x^{n-1}}{2^n}$ a $R = 2$ par dérivation etc.

Remarque 4.4.2
Attention, les propriétés aux bord R et $-R$ ne sont pas conservées.

4.5 Développement en Séries Entières

Définition 4.5.1
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est *développable en série entière*, si

$$\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f$$

4.5.1 Conditions nécessaires

Théorème 4.5.1
Soit f DSE, alors $\forall n \in \mathbb{N} f^n$ est définie en 0

Démonstration.

$$\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists R \in \mathbb{R}, \forall x \text{ tq } |x| < R, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

D'où

$$f(0) = a_0$$

Puis par dérivation

$$f'(0) = a_1$$

Enfin par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n! a_n \ \textit{(Taylor)}$$

□

4.5.1
Par exemple la fonction $(x \mapsto |x|)$ n'est pas dérivable en 0 donc elle n'est pas DSE

Remarque 4.5.1
En remaniant l'équation on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$$

Ce qui garantie l'unicité d'un développement en série entière

Proposition 4.5.1
Si f est DSE alors $f \in \mathcal{C}^{\infty}(]-R, R[)$

Démonstration. Conséquence du théorème précédent □

Remarque 4.5.2
La réciproque est fausse.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

, on suppose qu'elle est DSE. Alors on voit que par récurrence

$$\forall n \geq 1, \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

Donc toutes les dérivées peuvent être prolongées par continuité en 0 et on obtient (car $f(0) = 0$)

$$\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$$

Or d'après le point précédent ça veut dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$$

donc que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sum a_n x^n \\ &= \sum 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or f n'est pas la fonction nulle, par exemple $f(1) = e^{-1} \neq 0$ donc c'est absurde, donc f n'est pas DSE. □

4.6 Opération sur les DSE

Proposition 4.6.1
Soit f, g DSE on a

- $(f + g)$ DSE
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)$ DSE
- (fg) DSE
- $\forall k \in \mathbb{N}, f^k$ DSE
- $\forall k \in \mathbb{N}, \big(x \mapsto f(x^k)\big)$ DSE

Remarque 4.6.1
Attention aux intervalles de convergences quand $R_f \neq R_g$

4.7 DSE usuels

Proposition 4.7.1

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} && R = +\infty \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} && R = +\infty \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} && R = +\infty \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k && R = 1 \\
\log(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{x^k}{k} && R = 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k && R = 1 \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} && R = 1 \\
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} && R = 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} && R = 1 \\
(1+x)^\alpha &= DL_\infty && R = 1
\end{aligned}
$$

Remarque 4.7.1
Pour $\log(1-x)$ et $\arctan(x)$ par le CSSA elles convergent en $x = 1$

4.7.1 Application à la somme d'une série numérique

Remarque 4.7.2

On peut utiliser les DSE pour calculer une série numérique, exemple avec $\sum \frac{n}{2^n}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, \sum x^n &= \frac{1}{1-x} && \\
\sum n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} && \text{dérivation} \\
\sum n x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} && \text{multiplication par } x \\
&= 2 && \text{en } x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Applications Linéaires

5.1 Définition

Définition 5.1.1
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on dit que f est une application linéaire de E dans F si

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x + x') = f(x) + f(x') \qquad \text{et}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

On note l'ensemble des applications linéaire (*morphisme*) de E dans F, $\mathcal{L}(E, F)$

Remarque 5.1.1
Cette définition est équivalente à

$$(f \in \mathcal{L}(E, F)) \Leftrightarrow \forall (x, x') \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') \in F$$

Remarque 5.1.2
On déduit des axiomes que $f(0_E) = 0_F$

Remarque 5.1.3
Si $E = F$ alors on dit que f est un *endomorphisme* et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

5.2 Noyaux et Images

Définition 5.2.1
On définie

$$\ker f = \{x \in E | f(x) = 0_F\} \qquad \text{et}$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \ \in E\}$$

Proposition 5.2.1
On a que $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E et $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F

Démonstration. Conséquences de la linéarité de f □

5.2.1 Propriétés

Proposition 5.2.2
Soit E et F deux espace vectoriel , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

— Sens f injective $\Rightarrow \ker f = \{0_E\}$

$$f(0_E) = 0_F$$

Donc
$$0_E \in \ker f$$

Soit $x \in \ker f$ donc
$$f(x) = 0_E$$

Or par injectivité de f ce x est unique donc il n'existe pas de $y \neq x \in E$ tel que $f(y) = \ker E$ donc

$$\ker f \subset \{0_E\}$$

Par double inclusion on a donc

$$\ker f = \{0_E\}$$

— Sens $\ker f = \{0_E\} \Rightarrow f$ injective.

$$\text{Soit } (x, y) \in E^2 | f(x) = f(y)$$

Donc on a

$$f(x) - f(y) = 0_F$$

Donc par linéarité de f

$$f(x - y) = 0_F$$

Or $\ker f = \{0_E\}$ donc

$$\begin{aligned} x - y &= 0_E \\ x &= y \end{aligned}$$

Donc f est injective

Donc par double inclusion la propriété est démontrée. $\square$

5.3 Rang

Définition 5.3.1
Soit E, F deux espace vectoriel de dimension finie alors on définie le *rang* de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ comme

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f$$

Théorème 5.3.1 – Théorème du rang
Soit E, F deux espace vectoriel de dimension finie alors on a

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f$$

Proposition 5.3.1 – Corollaire
Soit E, F deux espace vectoriel de dimension finie alors

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \dim \mathrm{Im}\, f \leq \dim E$$

Le cas d'égalité est pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective

5.4 Matrice d'une application linéaire

Définition 5.4.1
Soit E, F deux espace vectoriel de dimensions finies tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de f alors la matrice de f exprimé de la base $\mathcal{B}$ dans

la base $\mathcal{V}$ est noté

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{V}} f = \begin{bmatrix} f(e_1) \cdots f(e_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 5.4.1
Par la méthode des pivots on se rend compte que

$$\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{V}} f\right)$$

5.4.1
Soit $B = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $C = (a, b, c)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \alpha i + \beta j &\mapsto (2\alpha - \beta)a + \alpha b + (7\alpha - 9\beta)c. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{B,C} f = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$$

Car

$$\begin{aligned} f(i) &= 2a + b + 7c \\ f(j) &= -3a - 9c \end{aligned}$$

5.4.2
Soit E, F deux espace vectoriel tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$ et $r = \mathrm{rang}(f)$ donc $\dim\ \ker f = p - r$ On prend comme base de $\ker f$

$$(k_1, \cdots, k_{p-r})$$

que l'on complète en une base de E grâce au théorème de completion des bases en dimension finie par $(s_1, \cdots, s_r)$ et finalement

$$\mathcal{B} = (k_1, \cdots, k_{p-r}, s_1, \cdots, s_r)$$

Base de E de la même manière on prend

$$\mathcal{V} = (f(s_1), \cdots, f(s_r), t_{r+1}, \cdots, t_n)$$

Base de F, la famille $(f(s_1), \cdots, f(s_r))$ étant libre car $(s_1, \cdots, s_r)$ l'est et f est un morphisme. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{p-r} \\ 0_{n-r} & 0 \end{bmatrix}$$

5.5 Matrice d'un endomorphisme

Définition 5.5.1
Soit E un espace vectoriel , f est un endomorphisme de E si $f \in \mathcal{L}(E, E)$ on note $f \in \mathcal{L}(E)$, si $\dim E = n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

5.5.1 Image d'un vecteur

Définition 5.5.2
Soit E deux espace vectoriel , de dimension p soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $x \in E$ alors on défini le vecteur associé de la base $\mathcal{B}$ à x comme ceci

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

où $(x_1, \cdots, x_p)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$

Proposition 5.5.1
Soit E, F deux espace vectoriel de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{V}$ une base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{V}} f(x)$, soit $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} x$ alors on a

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{V}} f \times X$$

5.6 Endomorphismes

5.6.1 Matrices de changement de base

Définition 5.6.1
Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E on cherche a exprimer les coordonnées de x d'une base à une autre.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} x = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} I_d \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} x$$

en pratique ce qui nous interesse est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ pour changer des coordonnées connues à la nouvelle base, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} I_d = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

on sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ car toutes les familles sont libres. Une telle matrice est appellée *matrice de changement de base*

5.6.1
Soit $B = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Soit $u = 2i + j$ et $v = -i + j$, on note $B' = (u, v)$

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Mat}_{B,B'} I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a

$$\det P = 2 + 1 = 3$$

Donc

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$x = 2u - v$$

Remarque 5.6.1
C'est équivalent à résoudre un système d'équation (l'inversion de matrice est essentiellement ça)

5.6.2 Matrices équivalentes

Définition 5.6.2
On dit que A et A' sont équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_m(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = Q^{-1}AP$$

5.6.3 Matrices semblables

Définition 5.6.3
On dit que A et A' sont semblable s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A' = P^{-1}AP$$

Remarque 5.6.2
Deux matrices semblables représente le même endomorphisme dans des bases différentes

Remarque 5.6.3

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A') = \mathrm{rang}(f)$$

5.6.4 Application

5.6.2
Soit

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 17x - 45y \\ 6x - 16y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la base canonique $B = (i, j)$ de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\mathrm{Mat}_B f = \begin{bmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{bmatrix}$$

Remarque 5.6.4
Mais que se passe-t-il si on veut calculer la matrice de f^5 ou f^{10} les calculs deviennent vites horrible

$$\mathrm{Mat}_B f^5 = \begin{bmatrix} 197 & -495 \\ 66 & -166 \end{bmatrix}$$

Il faut donc trouver une base dans lesquels c'est plus simple par exemple

$$B' = (u, v)$$

avec $u = 3i + j$ et $v = 5i + 2j$

$$P = \mathrm{Mat}_{B,B'} I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1} A P \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

cette matrice étant diagonale on peut facilement calculer f^5 et f^{10} dans B'.

La recherche d'une telle base est appelée *réduction des endomorphismes*

Chapitre 6

Notations, rappels, et Hors Programme (HP)

6.1 Ensembles

Remarque 6.1.1
Soit D un ensemble

- $\bar{D}$ est l'adhérence de D c'est à dire le plus petit ensemble fermé contenant D, par exemple $\bar{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Soit $\mathbb{K}$ un corps, alors $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynomes à coefficient dans $\mathbb{K}$ a une indéterminée (en gros, variable)
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est un groupe multiplicatif

6.2 Fonctions

6.2.1 Ensembles de fonctions

Remarque 6.2.1
Soit E, F deux ensembles, et soit I un interval de $\mathbb{R}$

- E^F est l'ensemble des applications (fonctions) de F dans E
- En particulier $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles
- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I

— Dans le cas général $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivable n fois sur I et dont la n-ème dérivée est continue sur I

— On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(I)$. En pratique ces fonctions sont dérivable une infinité de fois (par exemple les polynomes, exponentielle etc.)

— $\mathcal{M}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I

6.2.2 Opérations entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires

Remarque 6.2.2
Soit f, g deux fonctions, Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

— λf est la fonction $(x \mapsto \lambda \cdot f(x))$

— $f + g$ est la fonction $(x \mapsto f(x) + g(x))$

— fg est la fonction $(x \mapsto f(x)g(x))$

— $f \circ g$ est la fonction $(x \mapsto f(g(x)))$

6.2.3 Comparaison entre fonctions et fonctions et fonctions et scalaires

Remarque 6.2.3
Soit f, g deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$

— $f \geq \lambda$ (resp $>, \leq, <$) représente $\forall x \in I, f(x) \geq \lambda$ (resp $>, \leq, <$)

— $f \geq g$ (resp $>, \leq, <$) représente $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ (resp $>, \leq, <$)

— $f = o_a(g) \Leftrightarrow \displaystyle\lim_a \frac{f}{g} = 0$

— $f = \mathcal{O}_a(g) \Leftrightarrow \displaystyle\lim_a \frac{f}{g} \in \mathbb{R}$

— $f \sim_a g \Leftrightarrow \displaystyle\lim_a \frac{f}{g} = 1$

6.2.4 Limites, continuité et dérivabilité

Remarque 6.2.4
Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$

— Définition de la limite de f au point a

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\nu > 0, |x-a| < \nu \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

— $\lim_a f = \lim_{x\to a} f(x)$

— f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$

— f est continue sur I si $\forall x \in I, f$ est continue en x

— f est dérivable en a si le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$

— f est dérivable sur I si $\forall x \in I, f$ est dérivable en x

6.3 Bornes sup et bornes inf

Définition 6.3.1
On appelle la *borne supérieure* de $D \subset \mathbb{R}$ le nombre $M \in \mathbb{R}$ caractérisé par

$\forall x \in D, x \leq M$	M est un majorant de D
$\forall\lambda$ tq $(\forall x \in D, x \leq \lambda), M \leq \lambda$	M est le plus petit des majorants

On note alors

$$M = \sup A$$

Par analogie la *borne inférieure* est le plus grand des minorants, noté

$$m = \inf A$$

Ces définitions sont soumises à condition d'existences (il faut que A admette une borne sup/inf)

Remarque 6.3.1
Si $M = \sup A \in A$ (resp $m = \inf A \in A$) alors on dit que M est le maximum de A (resp m est le minimum de A) et on le note $M = \max A$ (resp $m = \min A$)

Remarque 6.3.2
Le maximum (resp minimum) s'il existe est unique

Démonstration. Soit M, M' deux maximum de A. On a alors par définition

$$\forall x \in A, x \leq M$$
$$\forall x \in A, x \leq M'$$

or $M \in A$ et $M' \in A$ donc en particulier on a

$$M' \leq M$$
$$M \leq M'$$

Par antisymétrie de $(\leq)$ on a $M = M'$ □

La preuve est analogue pour l'unicité du minimum de A

Théorème 6.3.1 – Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \neq \emptyset$ alors si E est majoré il admet une borne supérieure.
Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \neq \emptyset$ alors si E est minoré il admet une borne inférieure.

Théorème 6.3.2 – Caractérisation séquentielle de la borne sup/inf
Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide, et M un majorant de E (resp m un minorant de E) alors

$$M = \sup E \Leftrightarrow \exists (a_n) \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to \infty} a_n = M$$

et

$$m = \inf E \Leftrightarrow \exists (a_n) \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to \infty} a_n = m$$

6.4 Convergence

Remarque 6.4.1

— Pour la convergence on abbrège CV
— Pour l'absolue convergence on dit ACV
— Pour la convergence uniforme on dit CVU
— Pour la convergence normale on dit CVN

6.5 Suites, et séries

6.5.1 Suites de scalaires

Remarque 6.5.1
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexe (ou réels)

— L'ensemble de toutes les suites est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $E = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ où $(\cdot)$ est la loi de composition externe suivante

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, (a_n)) &\mapsto (\lambda a_n). \end{aligned}$$

est un espace vectoriel

— Une suite (u_n) est dite convergente si $u_n \to \lambda \in \mathbb{R}$

— Une suite (u_n) est dite absolument convergente si $|u_n| \to \lambda \in \mathbb{R}$

6.5.2 Suites et série d'application

Remarque 6.5.2
Soit I un interval de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{R}^I$ et $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite d'application.

— **HP** On dit que (f_n) converge simplement sur I vers f si

$$\forall x \in I, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

— **HP** On dit que (f_n) converge uniformément sur I vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La différence avec la définition de la convergence simple est dans l'emplacement du $\forall x \in I$ le N ne dépend plus de x c'est le même pour tous !

— **HP** On dit que $\sum f_n$ converge absolument en tout point de I si

$$\forall x \in I, \sum |f_n(x)| \text{ CV}$$

— **HP** On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur A si

$$\sum \|f_n\|_\infty^A \text{ CV}$$

La notation $\|f\|_\infty$ étant la **norme infinie** de f définie par

$$\|f\|_\infty^A = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

6.5.3 Séries

Remarque 6.5.3
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\sum u_n$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et est *la série de terme générale* u_n.
- Une SATP est une série dont tous les termes sont positifs
- On se ramène à l'étude d'une SATP en étudiant le module d'une série

6.5.4 Séries Entières

Remarque 6.5.4
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- On note $\sum a_n x^n$ la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée *série entière* de terme général a_n
- $\sum a_n x^n$ est une suite de **fonctions**, alors que pour $\lambda \in D$ la suite $\left(\left(\sum a_n x^n\right)(\lambda)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de **réel** des fonctions évalués en λ elle est égale à la suite de réelle $\left(\sum a_n \lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

6.6 Rappels d'Algèbre

6.6.1 Algèbre Générale

6.6.1.1 Loi de Composition Internes

Remarque 6.6.1
Soit E un ensemble

- On dit que $(\cdot)$ est une *loi de composition interne* sur E si

$$(\cdot)\colon E^2 \to E$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y.$$

— On dit que ε est un élement neutre pour $(\cdot)$ une lci si

$$\forall x \in E, \varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x$$

Il est par définition unique.

— On dit que $(\cdot)$ est associative si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

— On dit que $(\cdot)$ est commutative si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \cdot y = y \cdot x$$

— On dit que $x \in E$ est *inversible* pour la loi $(\cdot)$ si

$$\exists y \in E, x \cdot y = \varepsilon$$

On note alors $y = x^{-1}$

6.6.1.2 Magma et Monoïde

Remarque 6.6.2
Soit E un ensemble et $(\cdot)$ une lci sur E

— On appelle la donnée du couple $(E, \cdot)$ un *magma*

— On appelle la donnée du couple $(E, \cdot)$ où $(\cdot)$ possède un élément neutre un *magma unifère*

— Si $(\cdot)$ est associative alors la donnée du couple $(E, \cdot)$ est appelée un *magma associatif* ou plus rarement *demi-groupe*

— On appelle la donnée du couple $(E, \cdot)$ où $(\cdot)$ est associative et possède un élement neutre un *monoïde*

6.6.1.3 Groupe

Définition 6.6.1
Soit $\mathcal{G} = (E, \cdot)$ un monoïde d'élement neutre ε, on appelle $\mathcal{G}$ un *groupe* si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists y \in E, x \cdot y = y \cdot x = \varepsilon$$

autrement dit $\mathcal{G}$ est un monoïde où tous les élements sont inversibles (ou symétrisable)

Définition 6.6.2
Soit $F \subset E$ on dit que F est un *sous groupe* de $(E, \cdot)$ si

— $(E, \cdot)$ est un groupe
—
$$\forall y \in F, y^{-1} \in F$$

Remarque 6.6.3
Si $\mathcal{G} = (E, \cdot)$ est un groupe et que $(\cdot)$ est commutative alors on appelle $\mathcal{G}$ un *groupe abélien* ou *groupe commutatif*

6.6.1
On a comme groupes notables,

— $(\mathbb{C}, +)$ et ses sous groupes $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +)$ etc.
— $(\mathbb{N}, +)$ est un *monoïde* mais pas un groupe car aucun élement (autre que 0) n'est inversible pour $(+)$
— $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un groupe ainsi que ses sous groupes.

Théorème 6.6.1 – Théorème de caractérisation des sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$ HP
Soit $H \in \mathbb{R}$ tel que $(H, +)$ soit un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ alors

— Soit H est dense dans $\mathbb{R}$
— Soit $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, H = \alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha z, z \in \mathbb{Z}\}$

Démonstration. Encore une fois le théorème est **Hors Programme**, la preuve encore plus, mais la voilà pour les curieux,

Soit $H \subset \mathbb{R}$ tel que $(H, +)$ est un groupe, on suppose que

$$H = \{0\} \tag{6.1}$$

alors $H = 0\mathbb{Z}$ fin de la démonstration. Donc à partir de maintenant on suppose que

$$H \neq \{0\} \tag{6.2}$$

Autrement dit

$$\exists h \neq 0 \in H \tag{6.3}$$

Et par propriété des groupes on a aussi

$$-h \in H$$

On pose

$$\varepsilon = \{x > 0, x \in H\}$$

Or par (3) $\exists h \neq 0 \in H$ donc

si $h > 0, h \in \varepsilon$ et
si $h < 0, -h > 0 \in H, -h \in \varepsilon$

Donc

$$\varepsilon \neq \emptyset \tag{6.4}$$

Or $\varepsilon \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré par 0 donc par propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, ε admet une borne inf, on note

$$\alpha = \inf \varepsilon$$

On a que $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$.

— Supposons que $\alpha > 0$, on suppose que $\alpha \notin H$ alors

$$\exists x \in \varepsilon \in]\alpha, 2\alpha[$$

De même on a $y \in \varepsilon$ tel que

$$\alpha < y < x$$

donc

$$0 < x - y < \alpha$$

Et alors

$$(x - y) \in H \in \varepsilon < \alpha$$

or $\alpha = \inf \varepsilon$ ce qui est une absurdité donc

$$\alpha \in H \tag{6.5}$$

Or par propriété des groupes additifs

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \cdot \alpha \in H$$

Donc

$$\alpha Z \subset H$$

Réciproquement, prenons $h \in H$ on note alors

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n\alpha, (n+1)\alpha[$$

Il existe donc $\delta \ \in [0, \alpha[$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $h = n\alpha + \delta$ or

$$n\alpha \in H$$

donc par propriété de H on a

$$\delta = h - n\alpha \in H \cap R^+$$

Supposons alors que $\delta > 0$ on a alors $\delta \in \varepsilon$ et $\delta < \alpha$ ce qui est une absurdité car $\alpha = \inf \varepsilon$ donc par l'absurde on a

$$\delta = 0$$

ce qui revient à

$$h = n\alpha$$

Donc

$$H \subset \alpha\mathbb{Z}$$

ce qui par double inclusion

$$H = \alpha\mathbb{Z}$$

— Supposons maintenant que $\alpha = 0$. Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ tels que $v > u$ on note

$$I =]u, v[$$

Soit $\varepsilon = v - u > 0$ par définition de la borne inférieure on a

$$\exists h \in]\alpha, \varepsilon[\cap H$$

ce qui dans notre cas où $\alpha = 0$ revient à

$$\exists h \in]0, \varepsilon[\cap H$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(m-1)h \leq u \leq mh$$

par propriété des groupes additifs $mh \in H$ et

$$u < mh = (m-1)h + h \leq u + h < u + \varepsilon = v$$

Donc $mh \in I$ et $mh \in H$ et $I \cap H \neq \emptyset$ donc pour tout interval non trivial I de $\mathbb{R}$ il existe $h \in H \cap I$ donc

$$H \text{ est dense dans } \mathbb{R}$$

□

Remarque 6.6.4
Ce théorème est souvent utilisé lorsqu'on touche aux sous groupes de $\mathbb{R}$ et les irrationels comme $\mathcal{G} = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ par exemple, pour l'algèbre modulaire

6.6.1.4 Anneaux

Définition 6.6.3
On appelle la donnée de $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ anneaux si et seulement si

- $(A, +)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $(\cdot)$ admet un élement neutre (élement neutre multiplicatif)
- $(\cdot)$ est distributive sur $(+)$ c'est à dire

$$\forall (x, y, z) \in A^3 a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{et}$$
$$\forall (x, y, z) \in A^3 (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Remarque 6.6.5
Si $(\cdot)$ est commutative alors l'anneau est dit *commutatif*.

Définition 6.6.4
On note $A^\times$ l'ensemble des éléments de A inversible pour $\cdot$, on a

$$\mathcal{G} = (A^\times, \cdot)$$

qui forme un groupe (commutatif ou non selon la commutativité de $\cdot$)

Définition 6.6.5
Soit $B \subset A$, on dit que B est un sous anneau de A si et seulement si

— $(A, +, \cdot)$ est un anneaux
— B est stable par $(+)$ et $(\cdot)$

6.6.2
On a comme anneaux notables,
— $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ et ses sous anneaux
— $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (qui sont non commutatifs)

Définition 6.6.6
On dit que $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ est intègre si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, x \ \cdot y = 0_A \Leftrightarrow (x = 0_A) \wedge (y = 0_A)$$

6.6.3
Les anneaux $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ sont intègre mais dans le cas général les anneaux $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ ne le sont pas

Définition 6.6.7
On appelle $\mathcal{C}$ le centre d'un anneau $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{a \in A, (\forall b \in A, a \cdot b = b \cdot a)\}$$

C'est à dire l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les autres

6.6.4
Par exemple le centre de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $\mathcal{C} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$

Démonstration. Laissée à l'éxercice du lecteur (indice : par analyse synthèse) $\square$

6.6.1.5 Idéaux

Définition 6.6.8
Soit $I \subset A$ avec $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ un anneau commutatif intègre, on dit que I est un *idéal* de $\mathcal{A}$ si
— $(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$
—
$$\forall x \in I, \forall a \in A, x \cdot a = a \cdot x \in I$$

Remarque 6.6.6
$\{0_A\}$ et A sont appelés *idéaux triviaux* de $\mathcal{A}$

6.6.5
Pour $\mathbb{Z}$ les idéaux sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Définition 6.6.9
On appelle idéal premier P de $\mathcal{A}$ un idéal P tel que

— $P \neq A$

—
$$\forall (x, y) \in A^2, (xy) \in P \Rightarrow (x \in P) \vee (y \in P)$$

Définition 6.6.10
On appelle idéal maximal M de $\mathcal{A}$ un idéal M lorsque

$$\forall I \text{ idéal }, M \subset I \Rightarrow (I = M) \vee (I = A)$$

6.6.6
Dans $\mathbb{Z}$ les idéaux maximaux sont exactement de la forme $p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

6.6.1.6 Corps

Définition 6.6.11
On dit que $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ est un corps si et seulement si

— $\mathcal{A}$ est un anneaux intègre

— $A^\times = A - \{0_A\}$ (tous les élements sauf l'élement neutre additifs sont inversibles)

Remarque 6.6.7
Les corps sont les ensembles que l'on a l'habitude de manipuler tels que $\mathbb{R}$ où on peut faire "toutes les opération" (multiplier, additionner, diviser, soustraire)

6.6.7
Les corps les plus connus (écris souvents $\mathbb{K}$) sont $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais $\mathbb{Q}$ est aussi un corps et plus généralement les anneaux quotients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un entier premier.

6.6.2 Linéaire

6.6.2.1 Loi de Composition Externe

Définition 6.6.12
On appelle *loi de composition externe* (lce) de $\mathbb{K}$ sur E une application de la forme

$$\begin{aligned}(\cdot)\colon \mathbb{K}\times E &\to E\\ (\lambda,x)&\mapsto \lambda\cdot x.\end{aligned}$$

Remarque 6.6.8
Ces lois sont généralement d'un ensemble qu'on appelle ensemble des *scalaire* (en général : un corps commutatif) sur un *espace vectoriel*

6.6.2.2 Espaces vectoriels

Définition 6.6.13
On appelle *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-ev la donnée du triplet $(E,+,\cdot)$ tels que

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $(\cdot)$ est une lce de $\mathbb{K}$ sur E
- $(\cdot)$ est distributive à droite sur $+$ et à gauche sur $+_{\mathbb{K}}$, c'est à dire

$$\begin{aligned}\forall(u,v)\in E^2,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,&\lambda(u+v)=(\lambda\ \cdot u)+(\lambda\cdot v)\\ &(\lambda+\mu)\cdot u=(\lambda\cdot u)+(\mu\cdot v)\\ &(\lambda\mu)\cdot v=\lambda(\mu\cdot v)\\ &1_{\mathbb{K}}v=v\\ &\lambda u=0_E\Leftrightarrow(\lambda=0_{\mathbb{K}})\vee(u=0_E)\\ &-(\lambda u)=-\lambda(u)=\lambda(-u)\end{aligned}$$

Remarque 6.6.9
On a comme espaces vectoriels

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (les fonctions réelles)
- $\mathcal{C}^0$ (les fonctions continues)

— etc.

Définition 6.6.14
On appelle un sous espace vectoriel tout ensemble $F \subset E$ tels que
- $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev
- F est stable par combinaison linéaire c'est à dire

$$\forall (x, y) \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

Remarque 6.6.10
En pratique c'est cette caractérisation ci que l'on utilise pour savoir si E est un espace vectoriel

Proposition 6.6.1
Soit E, F deux espace vectoriel alors $E \times F$ est un espace vectoriel

Démonstration. Laissé à éxercice du lecteur (mais découle de la définition) □

Remarque 6.6.11
Donc R^2, R^3 etc. R^n sont des espaces vectoriels par produit

6.6.2.3 Familles libres/génératrices

Définition 6.6.15
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexé sur I on dit que x est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_i)_{i\ \in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0_E$$

Définition 6.6.16
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur de E indexée sur I, on dit que x est génératrice si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

Autrement dit $E = \mathrm{Vect}(x_i)$

Définition 6.6.17
Soit E un $\mathbb{K}$-ev soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur de E indexée sur I, on dit que x est une base de E si et seulement si

— x est libre

— x est génératrice

Remarque 6.6.12
Dans le cas général I est une partie de $\mathbb{N}$.

6.6.2.4 Dimension finie

Définition 6.6.18
On dit que E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie si et seulement si il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que $|B| \in \mathbb{N}$ on dit alors que

$$\dim E = |B|$$

Proposition 6.6.2 – Critère nécessaire de liberté

$$(x_i)_{i \in I} \text{ libre dans } E \Rightarrow |(x_i)| \leq \dim E$$

Proposition 6.6.3 – Critère nécessaire de génération

$$(x_i)_{i \in I} \text{ génératrice de } E \ \Rightarrow |(x_i)| \geq \dim E$$

Théorème 6.6.2
On a donc

$$\forall (\mathcal{B}, \mathcal{B}') \text{ base de } E, |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| = \dim E$$

6.6.2.5 Morphismes

Définition 6.6.19
Soit E, F deux espace vectoriel . Un *morphisme* de E dans F est une application linéaire de E dans F, on note l'ensemble des morphismes de E dans F $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 6.6.20 — Un morphisme de E dans E est appelé *endomorphisme*, on note l'ensemble des endomorphisme $\mathcal{L}(E)$

— Un morphisme bijectif de E dans F est appelé *isomorphisme*

— Un morphisme bijectif de E dans E est appelé *automorphisme*, on note leur ensemble $\mathcal{GL}(E)$ aussi appelé *groupe linéaire* de E

— Un morphisme de E dans $\mathbb{K}$ est appelé *forme linéaire* on note leur ensemble $\mathcal{L}(E,K)$ ou encore E^* appelé *espace dual* de E

Théorème 6.6.3 – Théorème d'isomorphie
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies

$$\dim E = \dim F \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ bijective}$$

Remarque 6.6.13
En particulier tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à R^n appelé *espace canonique de dimension n*

6.6.2.6 Espace pré-hilbertien, euclidien

Définition 6.6.21
Soit E un $\mathbb{R}$-ev, on dit que $f = (\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E si c'est une forme bilinéaire, définie, positive, symétrique

— forme bilinéaire : $f : E^2 \to \mathbb{R}^+$

— définie : $\forall x \in E, f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

— positive : $\forall x \in E, f(x,x) \geq 0$

— symétrique : $\forall (x,y) \in E^2, f(x,y) = f(y,x)$

Définition 6.6.22
Soit E un $\mathbb{K}$-ev on appelle *espace pré-hilbertien* E muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$

Définition 6.6.23
Un *espace euclidien* est un espace pré-hilbertien de dimension finie.

6.6.2.7 Espace vectoriel normés

Définition 6.6.24
Soit E un $\mathbb{K}$-ev on dit que $f = \|\cdot\|$ est une norme sur E si

— forme linéaire (positive) : $f : E \to \mathbb{R}^+$

— positivité : $\forall x \in E, f(x) \geq 0$

— définie : $\forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

— homogène : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$

— inégalité triangulaire, $\forall (x, y) \in E^2, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

6.6.8
Par exemple la *norme infinie* est une norme sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \|f\|_\infty = \sup x \in \mathbb{R}|f(x)|$$

Définition 6.6.25
On appelle (E, f) un *espace vectoriel normé* si E est un espace vectoriel et f une norme sur E

Dimension finie

Définition 6.6.26
Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes sont équivalentes, et toutes les endomorphismes de E sont continus

6.7 Autre

Remarque 6.7.1
Soit f une fonction définie sur I un interval de $\mathbb{R}$ tel que $I = [a, b]$

— $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Chapitre 7

Hors Programme - Supplément

7.1 Relation binaire

Définition 7.1.1
Soit E un ensemble, soit $\Gamma \subset E^2$ on lui associe la relation binaire suivante $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma$$

On dit que x *est en relation* avec y pour $\mathcal{R}$

7.1.1 Propriétés particulières

Définition 7.1.2
Soit E un ensemble, soit $\Gamma \subset E^2$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire associée

— si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ on dit que $\mathcal{R}$ est *reflexive* c'est équivalent à

$$\forall x \ \in E, (x, x) \in \Gamma$$

— si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ on dit que $\mathcal{R}$ est *symétrique* c'est équivalent à

$$\forall (x, y) \in E^2, (x, y) \in \Gamma \Rightarrow (y, x) \in \Gamma$$

— si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ on dit que $\mathcal{R}$ est *transitive* c'est équivalent à

$$\forall (x, y, z) \in E^3((x, y) \in \Gamma) \wedge ((y, z) \in \ \Gamma) \Rightarrow (x, z) \in \Gamma$$

— si $\forall (x, y) \in E^2(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ alors on dit que $\mathcal{R}$ est *antisymétrique*

7.2 Relations particulière

7.2.1 Relation d'ordre

Définition 7.2.1
Soit E un ensemble, soit $\Gamma \subset E^2$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire associé on dit que $\mathcal{R}$ est une relation de pré-ordre sur E si

— $\mathcal{R}$ est réflexive

— $\mathcal{R}$ est transitive

Définition 7.2.2
Soit E un ensemble, soit $\Gamma \subset E^2$ et $\mathcal{R}$ la relation associée, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si

— $\mathcal{R}$ est un pré-ordre sur E

— $\mathcal{R}$ est antisymétrique

7.2.1
Par exemple $(\leq)$ ou $(\geq)$ sont des ordres sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, on appelle la donnée d'un ensemble et d'une relation d'ordre sur cet ensemble un *ensemble ordonné*

Définition 7.2.3
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre on dit que $\mathcal{R}$ est totale si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x) \vee (x = y)$$

7.2.2
Par exemple la relation $|$ "divise" sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre non-totale, par exemple 2 et 3 ne sont pas en relation entre eux et $2 \neq 3$

7.3 Relation d'équivalence

Définition 7.3.1
Soit $\mathcal{R}$ un pré-ordre sur E alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{R}$ est symétrique, on note alors $\mathcal{R}$ en général par le symbole "tilde" $\sim$

7.3.1 Classes d'équivalence

Définition 7.3.2
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$ on note

$$\bar{x} = \{y \in E, x\mathcal{R}y\} = \{x \in E, y\mathcal{R}x\}$$

la *classe d'équivalence* de x.

Proposition 7.3.1
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E alors

$$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et soit $(x,y) \in E^2$

— On suppose que $x\mathcal{R}y$ alors soit $z \in \bar{x}$ donc $z\mathcal{R}x$ par transitivité on a $z\mathcal{R}y$ donc $z \in \bar{y}$ soit $z \in \bar{y}$ alors $y\mathcal{R}z$ donc par transitivité $x\mathcal{R}z$ donc $z \in \bar{x}$ par double inclusion on a $\bar{x} = \bar{y}$

— On suppose que $\bar{x} = \bar{y}$ alors soit $z \in \bar{x}$ on a $x\mathcal{R}z$ et comme $\bar{x} = \bar{y}$ on a $z \in \bar{y}$ donc $z\mathcal{R}y$ par transitivité on a $x\mathcal{R}y$

□

7.4 Ensemble quotient

Définition 7.4.1
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, on note l'ensemble des classes d'équivalences

$$E/\mathcal{R} = \{\bar{x}, x \in E\}$$

On appelle $E/\mathcal{R}$ ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$

Remarque 7.4.1
Pour $x \in E$, on appelle $y \in \bar{x}$ *représentant de la classe* $\bar{x}$

Proposition 7.4.1
Les classes d'équivalences sont disjointes c'est à dire,

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in (E/\mathcal{R})^2 (\bar{x} \neq \bar{y}) \Rightarrow x \cap y = \emptyset$$

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in (E/\mathcal{R})^2$ tel que $(\bar{x} \neq \bar{y})$, soit $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ donc par définition $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$ donc par transitivité $x\mathcal{R}y$ donc par le théorème précédent $\bar{x} = \bar{y}$ ce qui est absurde, donc $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ □

Proposition 7.4.2
Les classes d'équivalences forment une partition de E

Démonstration. Il a été précédamment prouvé que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont disjoints deux à deux, or

$$\forall x \in E, x \in \bar{x}$$

donc

$$\bigcup_{\bar{x} \in E} = E$$

puis comme l'union est disjointes les classes d'équivalences forment bien une partition de E □

7.5 Morphismes

7.5.1 Morphisme de Groupes

Définition 7.5.1
Soit $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ et $\mathcal{G}' = (G', \cdot_1)$ deux groupes soit $f : G \to G'$ on dit que g est un morphisme de groupe si et seulement si

— $\forall (x, y) \in G, f(x \ \cdot y) = f(x) \cdot_1 f(y)$

— $f(\varepsilon_G) = \varepsilon_{G'}$

7.5.1.1 Images et Noyaux

Définition 7.5.2
Soit f un morphisme de groupe entre G et G' alors on défini l'image de f par

$$\operatorname{Im} f = \{f(h), h \in G\}$$

Définition 7.5.3
Soit f un morphisme de groupe entre G et G' alors on défini le noyau de f par

$$\ker f = \{h \in G, f(h) = \varepsilon_{G'}\}$$

7.5.1.2 Morphisme de groupes finis

Théorème 7.5.1 – Formule des cardinaux
Soit G un groupe fini, soit G' un groupe, soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe alors

$$|G| = |\ker f| \cdot |\mathrm{Im}\, f|$$

Démonstration. Soit G un groupe fini, G' un groupe et f un morphisme de groupe alors

$$\exists p \in \mathbb{N}, \{y_1, \cdots, y_p\} \subset G' = \mathrm{Im}\, f$$

car G est fini Prenons maintenant l'application $f' : G \to \mathrm{Im}\, f$ par définition elle est surjective (toute application est surjective sur son image) donc il vient que

$$|G| \geq |\mathrm{Im}\, f| = p$$

On note

$$I = [1, p] \cap \mathbb{N}$$

Maintenant on note la famille (x_i) définie par

$$\forall i \in I, f(x_i) = y_i$$

On observe par définition d'une application que

$$G = \bigcup_{i=1}^{p} f^{-1}\{y_i\}$$

On note alors

$$\forall i \in I, G_i = f^{-1}\{y_i\}$$

On prouve ensuite que l'union est disjointe, soit $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on suppose qu'il existe $x \in G_i \cap G_j$ alors ça veut dire que

$$f(x) = y_i$$

et

$$f(x) = y_j$$

Or $y_i \neq y_j$ donc c'est une absurdité donc

$$G_i \cap G_j = \emptyset$$

Donc
$$G = \biguplus_{i=1}^{p} G_i$$
Il vient donc
$$|G| = \sum_{i=1}^{p} |G_i|$$
Il suffit donc de calculer le cardinal de G_i pour $i \in I$, pour cela soit $x \in G$ on défini
$$\begin{aligned} \varphi \colon \ker f &\to x \ker f \\ h &\mapsto xh. \end{aligned}$$

— On montre que φ est injective, en effet soit $h, h' \in G$ tels que
$$\begin{aligned} \varphi(h) = \varphi(h') \Leftrightarrow & \\ &\Leftrightarrow xh = xh' \\ &\Leftrightarrow x^{-1}xh = x^{-1}xh' && \text{car } x \ \in G \\ &\Leftrightarrow h = h' \end{aligned}$$
Donc φ est injective

— On montre maintenant que φ est surjective, soit $y \in x \ker f$ alors
$$\begin{aligned} \varphi(h) = y &\Leftrightarrow xh = y \\ &\Leftrightarrow x^{-1}xh = x^{-1}y \\ &\Leftrightarrow h = x^{-1}y \end{aligned}$$
Donc $\forall y \in x \ker f, \exists h \ \in \ker f, \varphi(h) = y$ donc φ est surjective

Donc φ est bijective, donc $|\ker f| = |x \ker f|$.
Montrons ensuite que pour un morphisme f, $x_0 \in G$ on a
$$f(x_0)^{-1} = f(x_0^{-1})$$

$$\begin{aligned} f(x_0)f(x_0^{-1}) &= f(x_0 \cdot x_0^{-1}) && \text{morphisme de groupe} \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon_{G'} \end{aligned}$$

Donc
$$f(x_0)^{-1} = f(x_0^{-1})$$
Soit $i \in I$
$$\begin{aligned} G_i &= f^{-1}\{y_i\} \\ &= \{x \in G, f(x) = y_i\} \\ &= \{x \ \in G, f(x) = f(x_i)\} \\ &= \{x \in G, f(x_i)^{-1} f(x) = \varepsilon_{G'}\} \\ &= \{x \in G, f(x_i^{-1}) f(x) = \varepsilon_[G']\} \\ &= \{x \in G, x_i^{-1} x \in \ker f\} \\ &= \{x \in G, x \in x_i \ker f\} \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} |G_i| &= |x_i \ker f| \\ &= |\ker f| \end{aligned}$$
Donc finalement
$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{i=1}^{p} |G_i| \\ &= \sum_{i=1}^{p} |\ker f| \\ &= p|\ker f| \\ &= |\mathrm{Im}\, f||\ker f| \end{aligned}$$
Donc enfin
$$|G| = |\mathrm{Im}\, f| \cdot |\ker f|$$
□

7.5.2 Morphismes d'Anneaux

Définition 7.5.4
Soit $\mathcal{A} = (A, +_1, \cdot_1)$ et $\mathcal{B} = (B, +_2, \cdot_2)$ deux anneaux, et $f : A \to B$ on dit que f est un morphisme d'anneaux si et seulement si

— $\forall (x, y) \in A^2, f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$

— $\forall (x, y) \in A^2, f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$

— $f(1_A) = 1_B$

7.5.2.1 Images et noyaux

Définition 7.5.5
Soit f un morphisme d'anneau entre A et B alors on défini l'image de f par

$$\operatorname{Im} f = \{f(a), a \in A\}$$

C'est un sous-anneau de B

Définition 7.5.6
Soit f un morphisme d'anneau entre A et B alors on défini le noyau de f par

$$\ker f = \{a \in A, f(a) = 0_B\}$$

C'est un sous groupe additif de $(A, +)$

7.5.2.2 Bijectivité

Théorème 7.5.2
Soit f un morphisme d'anneau entre A et B alors

— f est *injective* de A dans B si $\ker f = \{0_A\}$

— f est *surjective* de A dans B si $\operatorname{Im} f = B$

— f est *bijective* de A dans B si f est injective et surjective

Définition 7.5.7
On dit que f est une *isomorphie d'anneaux* si et seulement si f est un morphisme bijectif d'anneaux, dans ce cas là on dit que A est isomorphe à B

Remarque 7.5.1
La relation $\sim$ définie par

$$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \to B \ \textit{bijective}$$

est une relation d'équivalence

Démonstration. Soit $\sim$ définie comme ci dessus

— La fonction Id_A l'identité de A est un morphisme d'anneaux bijectif de A dans A donc $A \sim A$ donc $\sim$ est reflexive

- Soit A, B deux anneaux et f une isomorphie d'anneaux entre A et B alors f^{-1} est une isomorphie d'anneaux (par définition) entre B et A donc $B \sim A$ donc $\sim$ est symétrique
- Soit A, B, C trois anneaux, soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux isomorphie d'anneaux alors $f \circ g : A \to C$ est aussi une isomorphie d'anneaux donc $A \sim C$ donc $\sim$ est transitive

Donc $\sim$ est une relation symétrique, transitive et réfléxive, donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence □

7.5.2.3 Anneaux finis

Définition 7.5.8
Soit A un anneau, on dit que A est fini si son cardinal est un entier naturel, on note son cardinal $|A|$

Proposition 7.5.1 – Condition nécessaire

$$(A, +, \cdot) \text{ fini } \Rightarrow (A, +) \text{ groupe fini}$$

Théorème 7.5.3 – Formule des cardinaux
Soit A un anneau fini et B un anneau et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau alors on a

$$|A| = |\mathrm{Im}\, f| \cdot |\ker f|$$

Démonstration. Le groupe $(A, +)$ induit de A est fini car A est fini, c'est donc une conséquence de la formule des cardinaux pour les groupes finis □

Proposition 7.5.2
Soit A, B deux anneaux finis, et $f : A \to B$ deux anneaux finis alors

$$f \text{ est une isomorphie } \Rightarrow |A| = |B|$$

Démonstration. D'après la formule des cardinaux on a

$$|A| = |\mathrm{Im}\, f| \cdot |\ker f|$$

Or f est une isomorphie donc f est injective donc $|\ker f| = 1$ donc

$$|A| = |\mathrm{Im}\, f|$$

Or f est une isomorphie donc f est surjective donc $\operatorname{Im} f = B$ donc

$$|A| = |B|$$

□

Théorème 7.5.4
Soit A et B deux anneaux finis (i.e anneaux avec un nombre d'élement fini). On note $|\cdot|$ le cardinal d'un ensemble, soit f un morphisme d'anneaux entre A et B alors

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow (|A| = |B|) \wedge (\ker f = \{0_A\}) \Leftrightarrow (|A| = |B|) \wedge (\operatorname{Im} f = B)$$

ce qui est équivalent à, si $|A| = |B|$ alors

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Démonstration. Démontrons par démonstration circulaire c'est à dire $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)$

— Montrons $(A \Rightarrow B)$, on suppose que f est une isomorphie d'anneaux, alors par la condition nécessaire d'isomorphie on a

$$|A| = |B|$$

ensuite, f est une isomorphie donc f est injective

— Montrons $(C \Rightarrow A)$ on suppose que f est surjective et $|A| = |B|$, f est surjective donc

$$\operatorname{Im} f = B$$

or par formule des cardinaux on sait que

$$|A| = |\ker f| \cdot |\operatorname{Im} f|$$

or $|\operatorname{Im} f| = |B| = |A|$ donc

$$|\ker f| = \frac{|A|}{|A|}$$

d'où

$$|\ker f| = 1$$

Or on a forcément $\varepsilon \in \ker f$ par définition donc finalement

$$\ker f = \{\varepsilon\}$$

Donc f est injective, donc f est bijective

— Montrons finalement $(B \Rightarrow C)$, on suppose que f est injective et que $|A| = |B|$ par formule des cardinaux on a

$$|A| = |\ker f| \cdot |\operatorname{Im} f|$$

Or f est injective donc $|\ker f| = 1$ donc

$$|A| = |\operatorname{Im} f|$$

donc

$$|B| = |\operatorname{Im} f|$$

Or $\operatorname{Im} f \subset B$ et $|B| = |\operatorname{Im} f|$ donc $\operatorname{Im} f = B$ donc f est surjective

Par démonstration circulaire, la propriété est démontrée □

7.5.3 Anneaux quotient

Définition 7.5.9
Soit $\mathcal{A} = (A, +, \cdot)$ un anneau et $\mathcal{R}$ une relation compatible avec $(+)$ et $(\cdot)$ alors on appelle anneau quotient la donnée du triplet $(A/\mathcal{R}, +, \cdot)$ avec

$$\forall (x, y) \in A^2, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$
$$\forall (x, y) \in A^2, \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

7.6 Algèbre modulaire

7.6.1 Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Pour cette section $n \geq 2$ en effet $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ est juste le corps trivial réduit à 0

Définition 7.6.1
On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau des entier modulo n

Proposition 7.6.1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de cardinal n et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\bar{0}, \cdots, \overline{n-1}\right\}$

Démonstration. Conséquence directe de la congruence modulo n □

7.6.1.1 Inverses modulaires

Définition 7.6.2
Les inverses modulos n sont exactements les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 7.6.2
L'inverse de a modulo n existe si et seulement si a et n sont premiers entre eux.

Démonstration. L'inverse de a modulo n est un entier u vérifiant

$$au \sim 1 \mod n$$

ce qui est équivalent à s'il existe un entier v tel que

$$au + nv = 1$$

Or d'après le théorème de Bézout on a que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{N}^*, au+bv = 1$, donc d'après le théorème de bézout il faut que $a \wedge n = 1$ donc que a et n soient premier entre eux □

7.6.1.2 Les corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Théorème 7.6.1
L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier

Démonstration. D'après la définition on sait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \cdots, p \bar{-} 1\}$

— On suppose que p est premier, alors $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $p \wedge \bar{x} = 1$ si $\bar{x} \neq \bar{0}$, or $\bar{0}$ est l'élement neutre additif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors par la proposition précédente

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{x}^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

donc tous les éléments sauf l'élement neutre additif sont inversible donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps

— On suppose maintenant que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{x}^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Donc tous les éléments ont un inverse modulo p par la proposition précédente on a donc

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow p \wedge \bar{x} = 1$$

Donc

$$\forall i \in [1, p-1] \cap \mathbb{N}, i \wedge p = 1$$

Donc p est premier avec tous les entiers précédents, donc p est premier

Donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier □

7.6.2 Théorème des restes chinois

Théorème 7.6.2 – Théorème des restes chinois
Soit n et m tels que $n \wedge m = 1$ alors $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Démonstration. Soit n et m tels que $n \wedge m = 1$.

— Premièrement $|\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}| = nm$ et $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = nm$ donc les cardinaux sont égaux

— Ensuite soit

$$f : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$
$$\bar{x}_{nm} \mapsto (\bar{x}_n, \bar{x}_m).$$

Soit (x, y) tels que $\bar{x}_{nm} = \bar{y}_n m$ on a que $nm|\ x - y$ donc comme $n \wedge m = 1$ par théorème de Gauss, on a

$$(n|x - y) \wedge (m|\ x - y)$$

donc

$$\bar{x}_n = \bar{y}_n \wedge \bar{x}_m = \bar{y}_m$$

donc finalement

$$f(\bar{x}_{nm}) = f(\bar{y}_{nm})$$

Donc f est bien définie. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}_{nm} + \bar{y}_{nm}) &= f(\overline{x + y}_{nm}) && \text{addition dans } \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \\
&= (\overline{x + y}_n, \overline{x + y}_m) && \text{définition de } f \\
&= (\bar{x}_n + \bar{y}_n, \bar{x}_m + \bar{x}_m) && \text{addition dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\
&= (\bar{x}_n, \bar{x}_m) + (\bar{y}_n, \bar{y}_m) \\
&= f(\bar{x}_{nm}) + f(\bar{y}_{nm})
\end{aligned}$$

On prouve de la même manière la conservation de l'élément neutre multiplicatif. Donc f est linéaire donc f est un morphisme d'anneaux.

— Puis, soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_{nm}) &= (\bar{0}_n, \bar{0}_m) \\ (\bar{x}_n = \bar{0}_n) &\wedge (\bar{x}_m = \bar{0}_m) \\ (n|x) &\wedge (m|x) \\ (nm|x) & & \text{car } n \wedge m = 1 \\ \bar{x}_{nm} &= \bar{0}_{nm} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ donc f est injective

— Enfin, f est un morphisme injectif entre $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et les deux ensembles sont de cardinal égaux donc f est une isomorphie d'anneaux entre $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Donc $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ □

7.6.3 Décomposition des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 7.6.3
Le théorème fondamental de l'arithmétique dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, !\exists (p_i) \in \mathbb{P}^I \wedge (\alpha_i) \in \mathbb{N}^I, n = \sum_{i \in I} p_i^{\alpha_i}$$

Théorème 7.6.3 – Théorème fondamental de l'arithmétique, version algébrique
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, soit (p_i) et (α_i) l'unique Décomposition de n alors

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{i \in I} (\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^{\alpha_i}$$

Démonstration. Les premiers étants premier deux à deux, conséquences du théorème des restes chinois. □