Math3 CM

Cours de L. PASQUEREAU
Tapé par C. THOMAS

2 septembre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $D \in \mathbb{R}$, soit $f \in \mathbb{R}^D$

1.1 Limite

1.1.1 Adhérence

Définition 1.1.1 On appelle adhérence de D le plus petit ensemble fermé qui contient D. Noté $\bar{D}$

1.1.2 Limite

Soit f définie sur D, Soit $a \in \bar{D}$, Soit $l \ \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.2 On dit que f a pour limite l quand x tends vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 | \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

1.1.3 Fonctions négligeables

Définition 1.1.3 Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$ et $a \in \bar{D}$ on dit que $f = o_a(g)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_a 0$

1.1.1 en 0 on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} \tag{1.1}$$

$$\rightarrow_{0^+} 0 \tag{1.2}$$
$$f = o_{O^+}(g) \tag{1.3}$$

1.1.4 Croissance comparée

Théorème 1.1.1 Croissances Comparées
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^{+*}$ avec $\gamma > 1$ avec

$$f : x \mapsto (\log x)^\alpha$$
$$g : x \mapsto x^\beta$$
$$h : x \mapsto \gamma^x$$

alors on a

$$g = o_\infty(f)$$
$$h = o_\infty(g)$$

c'est à dire

$$\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \rightarrow_\infty 0$$
$$\frac{x^\beta}{\gamma^x} \rightarrow_\infty 0$$

1.1.5 Fonctions Équivalentes

Définition 1.1.4 Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$ et $a \in \bar{D}$ on dit que f est équivalente à g quand x tends vers a si $\frac{f}{g} \rightarrow_a 1$.

On note $f \equiv_a g$

1.1.2
— Un polynome est équivalent à son monôme de plus haut degrès (resp bas) quand x tends vers ∞ (resp 0)
— $sinx \equiv_0 x$
— $ln(1+x) \equiv_0 x$

1.1.6 Opération sur les équivalents

Soient $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathbb{R}^D$ soit $a \in \bar{D}$ soit $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\begin{gathered} f_1 \equiv_a g_1 \\ f_2 \equiv_a g_2 \end{gathered}$$

alors

—
$$\begin{gathered} f_1 \cdot f_2 \equiv_a g_1 \cdot g_2 \\ \frac{f_1}{f_2} \equiv_a \frac{g_1}{g_2} \\ f_1^\alpha \equiv_a g_1^\alpha \end{gathered}$$

—
$$f = o_a g \Rightarrow f + g \equiv_a g \tag{1.4}$$

— Si $f \equiv_a g$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = l$

Proposition 1.1.1 Si $f \equiv_a g$ et $\lim_a f \neq 1$ alors $\log f \equiv_a \log g$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\log g(x)}{\log f(x)} - 1 &= \frac{\log g(x) - \log f(x)}{\log f(x)} \\ &= \frac{\log\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\log f(x)} && \text{or } f \equiv_a g \\ &\to_a \frac{0}{f(a)} && \text{par passage à la limite car } \lim_a f \neq 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \to a} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1$ donc $\log f \equiv_a \log g$ □

Cas particulier où $l = 1$

1.1.3 $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ on a bien $f \equiv_0 g$ et $f \to_0 1$ on a aussi $\log f(x) = \log 1 + x \equiv_0 x$ et $\log g(x) = \log 1 + \sqrt{x} \equiv_0 \sqrt{x}$ et $x \neq \sqrt{x}$

1.2 Continuité

Définition 1.2.1 Soit f définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues, c'est un espace vectoriel.

1.3 Dérivabilité

Définition 1.3.1 Soit f définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$. On note f' la fonction $a \mapsto \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur l'ensemble des valeurs dérivables de f.

1.3.1 Dérivée successives

On peut ensuite étudier la dérivabilité des dérivées successives de f