비정현파의 해석

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.1. 비정현파의 푸리에 급수 전개

고조파 (harmonic wave): 기본파의 정수배 주파수를 갖는 파.

기본파와 다양한 진폭을 가진 고조파를 더하거나 빼서 우리가 알고 있는 모든 종류의 주기파를 합성할 수 있다.

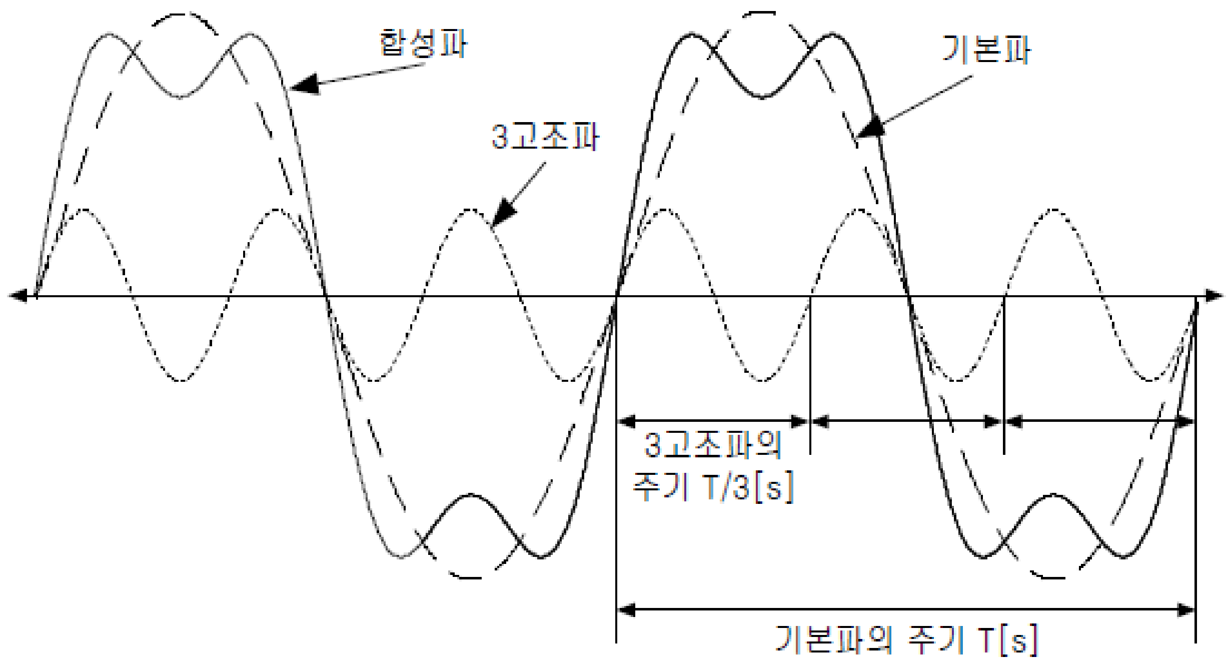


그림 12-1 기본파 $\sin(2\pi \times 60t)$와 3고조파 $0.3\sin(2\pi \times 180t)$의 합성

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.2. 푸리에 급수 전개

주기가 T인 비정현 주기파는 다음과 같은 성질이 있다.

$$f(t) = f(t+T)$$

비정현 주기파는 다음과 같이 푸리에 급수(Fourier series expansion)로 전개할 수 있다.

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots + a_n \cos n\omega_0 t + \cdots$$

$$+ b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots + b_n \sin n\omega_0 t + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$\therefore a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.2. 푸리에 급수 전개

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t]dt = a_0 T \qquad \therefore a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt = \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t]\cos n\omega_0 t dt$$

$$= \int_0^T \left\{ a_0 \cos n\omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \right\} dt$$

$$= \int_0^T \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{1}{2}(\cos(m+n)\omega_0 t + \cos(m-n)\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2}(\sin(m+n)\omega_0 t + \sin(m-n)\omega_0 t) \right\} dt$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{1}{2}\int_0^T (\cos(m+n)\omega_0 t + \cos(m-n)\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2}\int_0^T (\sin(m+n)\omega_0 t + \sin(m-n)\omega_0 t)dt$$

$$= \begin{cases} 0, m \neq n \\ a_n \frac{T}{2}, \ m = n \end{cases} \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

한양대학교 HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.2. 푸리에 급수 전개

$$\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt = \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t]\sin n\omega_0 t dt$$

$$= \int_0^T \left\{ a_0 \sin n\omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t \right\} dt$$

$$= \int_0^T \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{1}{2}(\sin(m+n)\omega_0 t - \sin(m-n)\omega_0 t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left(-\frac{1}{2}\right)(\cos(m+n)\omega_0 t - \cos(m-n)\omega_0 t) \right\} dt$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{1}{2} \int_0^T (\sin(m+n)\omega_0 t - \sin(m-n)\omega_0 t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^T (\cos(m+n)\omega_0 t - \cos(m-n)\omega_0 t) dt$$

$$= \begin{cases} 0, m \neq n \\ b_n \frac{T}{2},\ m = n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt,\ \ (n = 1, 2,\ \cdots)$$

한양대학교 HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

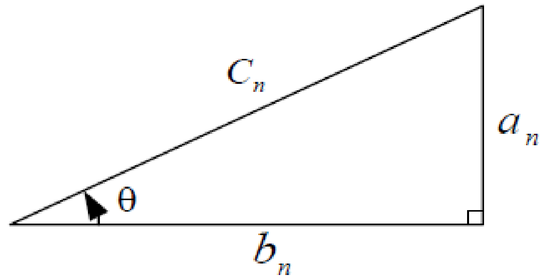
12.2. 푸리에 급수 전개

12.2.4. 주파수 스펙트럼

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \sin n\omega_0 t\right)$$

$$= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\sin\theta_n \cos n\omega_0 t + \cos\theta_n \sin n\omega_0 t\right) = c_n \sin\left(n\omega_0 t + \theta_n\right)$$

$$\text{단, } c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2},\ \ \theta_n = \tan^{-1}\frac{a_n}{b_n} \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$



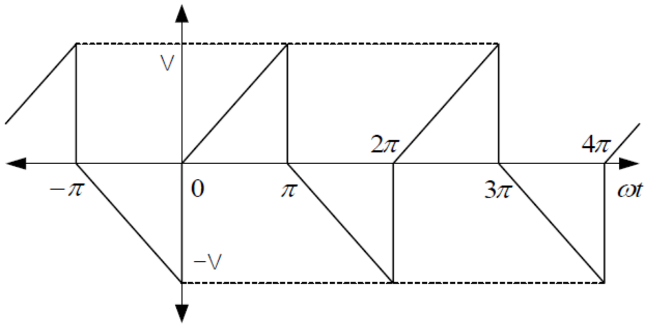
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\omega_0 t + \theta_n\right)$$

c_n을 $n\omega_0$에 대해서 그린 것을 **진폭 스펙트럼(amplitude spectrum)**, θ_n을 그린 것을 **위상 스펙트럼(phase spectrum)**이라 하며, 이 두 가지를 **주파수 스펙트럼(frequency spectrum)**이라 한다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

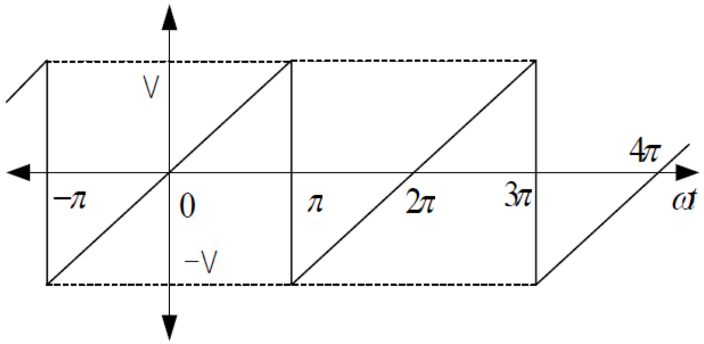
12.3. 대칭파형의 푸리에 급수 전개

반파 대칭파: $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$

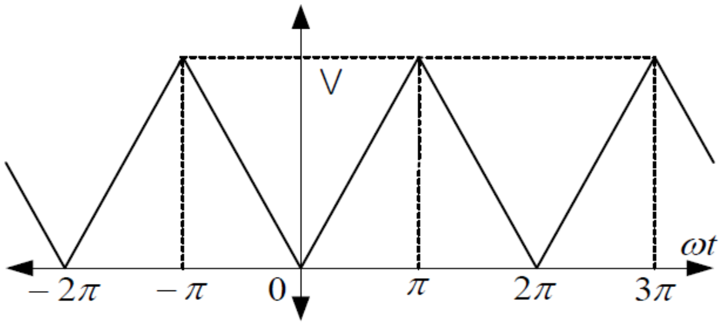


원점 대칭파: $f(t) = -f(T - t)$

$f(-t) = -f(t)$



세로축 대칭파: $f(t) = f(T - t)$, $f(-t) = f(t)$



…

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.4. 비정현파의 평균값과 실효값

비정현파의 평균값은 한 주기에 대한 적분값을 주기의 크기로 나누면 된다.

한 주기의 평균값이 0이 되는 경우에는 반주기만을 구해서 평균값으로 한다.

비정현파의 푸리에 급수 전개가 가능하다면 이 급수의 계수 중에서 a_0가 그대로 평균값이 된다.

$$F_a = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)]dt = a_0$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.4. 비정현파의 평균값과 실효값

푸리에 급수로 전개된 비정현파의 실효값

$$F_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)]^2 dt}$$

① a_0^2 : 평균값의 제곱항

② $c_n^2 \sin^2(n\omega_0 t + \theta_n)$: 정현파의 제곱항

③ $a_0 c_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$: 평균값과 정현파 곱의 항

④ $c_p \sin(p\omega_0 t + \theta_p) c_q \sin(q\omega_0 t + \theta_q),\ p \neq q$: 서로 다른 주파수의 정현파 곱의 항

① $\frac{1}{T}\int_0^T a_0^2 dt = a_0^2$

② $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n^2 \sin^2(n\omega_0 t + \theta_n) d(\omega_0 t) = \frac{c_n^2}{2} = (\frac{c_n}{\sqrt{2}})^2$

③ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_0 c_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) d(\omega_0 t) = 0$

④ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_p \sin(p\omega_0 t + \theta_p) c_q \sin(q\omega_0 t + \theta_q) d(\omega_0 t) = 0,\ p \neq q$

$$\therefore F_e = F = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}}$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.4. 비정현파의 평균값과 실효값

어떤 비정현파 교류 전압이 다음과 같은 형태의 푸리에 급수로 전개된다면,

$$e(t) = E_0 + E_{m1}\sin(\omega t + \theta_1) + E_{m2}\sin(2\omega t + \theta_2) + E_{m3}\sin(3\omega t + \theta_3) + \cdots$$

$$= E_0 + \sqrt{2}\,E_1\sin(\omega t + \theta_1) + \sqrt{2}\,E_2\sin(2\omega t + \theta_2) + \sqrt{2}\,E_3\sin(3\omega t + \theta_3) + \cdots$$

그 실효값은

$$\therefore E_e = E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \cdots}\ [V]$$

비정현파 교류의 실효값은 푸리에 급수로 전개한 다음, 직류분(평균값) 및 각 고조파의 실효값을 제곱해서 더한 전체 값의 제곱근을 구하면 된다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.4. 비정현파의 평균값과 실효값

Parseval's theorem

In physics and engineering, Parseval's theorem is often written as:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

where $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ represents the continuous Fourier transform (in normalized, unitary form) of $x(t)$ and f represents the frequency component (not angular frequency) of x.

The interpretation of this form of the theorem is that the total energy contained in a waveform $x(t)$ summed across all of time t is equal to the total energy of the waveform's Fourier Transform $X(f)$ summed across all of its frequency components f.

For discrete time signals, the theorem becomes:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{i\phi})|^2 d\phi$$

where X is the discrete-time Fourier transform (DTFT) of x and Φ represents the angular frequency (in radians per sample) of x.

Alternatively, for the discrete Fourier transform (DFT), the relation becomes:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

where $X[k]$ is the DFT of $x[n]$, both of length N.

http://en.wikipedia.org/wiki/Parseval's_theorem

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.4. 비정현파의 평균값과 실효값

[예제 12-9] 어느 회로에 $i = 10 + 10\sqrt{2}\,sin(\omega t - 25^\circ) + 20\sin(2\omega t + 30^\circ)[A]$가 흐르는 경우 이 전류의 실효값 $[A]$을 구하시오.

$$I = \sqrt{10^2 + 10^2 + (\frac{20}{\sqrt{2}})^2} = 20[A]$$

<u>왜형률(**distortion ratio**)</u>: 정현파에 비해서 얼마나 찌그러져 있는지에 대한 평가

$$\text{왜형률} = \frac{\text{고조파의 실효값}}{\text{기본파의 실효값}} = \frac{\sqrt{E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 + \cdots}}{E_1}$$

[예제 12-10] $v = 110\sqrt{2}\,sin\omega t + 45\sqrt{2}\,sin(3\omega t - 45^\circ) + 40\sin(5\omega t + 30^\circ)[V]$인 전압의 왜형률$[\%]$을 구하시오.

$$\text{왜형률} = \frac{\sqrt{45^2 + (\frac{40}{\sqrt{2}})^2}}{110} \times 100 = 48.32[\%]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.5. 비정현파 회로의 해석

비정현파 신호이 대한 회로 해석은 중첩의 원리를 이용한다.

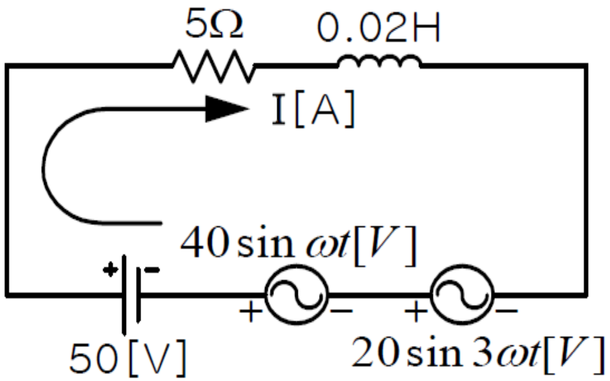
비정현파를 푸리에 급수로 전개하고 각 고조파에 대한 응답을 구해서 더한다.

이때, 리액턴스는 주파수에 따라서 그 크기와 위상이 변하기 때문에 주의해야 한다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.5. 비정현파 회로의 해석

[예제 12-11] $v=50+40\sin\omega t+20\sin 3\omega t[V]$, $R=5[\Omega]$, $L=0.02[H]$인 RL 직렬회로에 회로에 흐르는 전류의 순시값 및 실효값$[A]$을 구하시오. 단, $\omega=500[rad/s]$이다.



$$I_0=50/5=10[A]$$

$$Z_1=R+j\omega L=5+j10=\sqrt{125}\angle 63.435^\circ\,[\Omega]$$

$$\therefore I_1=(\frac{40}{\sqrt{2}}\angle 0)/(\sqrt{125}\angle 63.43)=\frac{3.578}{\sqrt{2}}\angle -63.43^\circ\,[A]$$

$$Z_3=R+j3\omega L=5+j30=\sqrt{925}\angle 80.538^\circ\,[\Omega]$$

$$\therefore I_3=(\frac{20}{\sqrt{2}}\angle 0)/(\sqrt{925}\angle 80.54)=\frac{0.658}{\sqrt{2}}\angle -80.538^\circ\,[A]$$

$$i=10+3.578\sin(\omega t-63.43^\circ)+0.658\sin(3\omega t-80.54^\circ)[A]$$

$$I=\sqrt{10^2+(\frac{3.58}{\sqrt{2}})^2+(\frac{0.66}{\sqrt{2}})^2}=10.326[A]$$

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

$$v = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t \,[V]$$

V_{mn}, I_{mn}: 각 고조파 전압, 전류의 최대값

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n) \,[A]$$

$$\Downarrow$$

$$p = vi = [V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t][I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n)]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

$$p = vi = [V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t][I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n)]$$

① $V_0 I_0$: 직류분 곱의 항

② $V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n) + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t$: 고조파와 직류분 곱의 항

③ $\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t \, I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n)$: 같은 주파수의 전압, 전류 고조파 사이의 곱의 항

④ $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} V_{mp} \sin p\omega t \;\; I_{mq} \sin(q\omega_0 t - \theta_{pq}),\;\; p \neq q$

: 서로 다른 주파수를 갖는 전압, 전류 고조파 사이의 곱의 항이며,

θ_{pq}는 서로 다른 고조파 전압, 전류 사이의 위상차이다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

$$p = vi = [V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t][I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n)]$$

① $\frac{1}{T}\int_0^T V_0 I_0 dt = V_0 I_0$

② $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [V_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n) + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t] = 0$

③ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin n\omega t \, I_{mn} \sin(n\omega t - \theta_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{mn} I_{mn}}{2} cos\theta_n = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos\theta_n$

④ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} V_{mp} \sin p\omega t \;\; I_{mq} \sin(q\omega_0 t - \theta_{pq})] = 0, \;\; p \neq q$

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos\theta_1 + V_2 I_2 \cos\theta_2 + V_3 I_3 \cos\theta_3 + \cdots$$

$$= V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos\theta_n [W]$$

비정현파의 평균전력은 직류전력과 각 고조파의 유효전력의 합과 같다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

피상전력 : $S = VI = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 + \cdots}\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}\,[VA]$

$$\text{역률} = \frac{\text{유효전력}}{\text{피상전력}} = \frac{V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos\theta_1 + V_2 I_2 \cos\theta_2 + V_3 I_3 \cos\theta_3 + \cdots}{\sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 + \cdots}\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}}$$

등가 정현파: 비정현파의 기본파와 같은 주파수를 갖고, 실효값이 같은 정현파.

전류와 전압을 동시에 등가 정현파로 변환할 땐, 전압과 전류의 위상차를 비정현파의 역률로 계산한다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

[예제 12-12] 다음의 전압, 전류가 흐르는 회로에서의 유효전력, 피상전력 및 역률을 구하고, 전압이 전류보다 앞선다고 가정하여 등가 정현파 전압 및 전류를 구하시오.

$$v = 80\sqrt{2}\,sin\omega t + 40\sin(3\omega t - 30^\circ) - 20\sqrt{2}\,sin(5\omega t + 60^\circ)[V]$$

$$i = 20\sqrt{2}\,sin(\omega t + 30^\circ) + 15\sqrt{2}\,sin(3\omega t - 30^\circ) + 10\sqrt{2}\,sin(5\omega t + 15^\circ)[A]$$

전압의 실효값 : $V = \sqrt{80^2 + (\frac{40}{\sqrt{2}})^2 + (-20)^2} = 87.2[V]$

전류의 실효값 : $I = \sqrt{20^2 + 15^2 + 10^2} = 25[A]$

피상전력 : $S = VI = 2180[VA]$

유효전력 : $= 80 \times 20\cos(0-30) + \frac{40}{\sqrt{2}} \times 15\cos\{(-30)-(-30)\} + (-20) \times 10\cos(60-15) = 1668.48[W]$

역률 : $\frac{유효전력}{피상전력} = \frac{1668.48}{2180} = 0.7654$ $\theta = Cos^{-1}0.7654 = 40.06^\circ$

등가 정현파 전압 $= \sqrt{2} \times$ 비정현파 전압의 실효값 $\times \sin$(기본파의 주파수 및 위상)

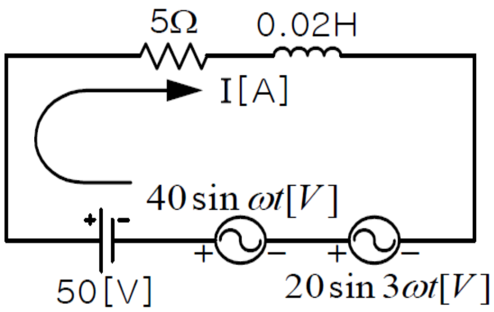
$$v = 87.2\sqrt{2}\,sin\omega t[V]$$

$$i = 25\sqrt{2}\,sin(\omega t - 40.06^\circ)[A]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

12.6. 비정현파의 전력 및 등가 정현파

[예제 12-13] 예제 12-11 결과를 이용해서 등가 정현파 전압 및 전류를 나타내는 식을 구하시오.



$$v = 50 + 40\sin\omega t + 20\sin 3\omega t\,[V]$$

$$i = 10 + 3.578\sin(\omega t - 63.43^\circ) + 0.658\sin(3\omega t - 80.54^\circ)\,[A]$$

전압의 실효값 : $E = \sqrt{50^2 + (\frac{40}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{20}{\sqrt{2}})^2} = 59.16\,[V]$

$$I = \sqrt{10^2 + (\frac{3.58}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{0.66}{\sqrt{2}})^2} = 10.326\,[A]$$

유효 전력 : $P = 50 \times 10 + \frac{40}{\sqrt{2}} \times \frac{3.58}{\sqrt{2}} cos63.43$

$$+ \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{0.66}{\sqrt{2}} cos80.54 = 533.11\,[W]$$

피상전력 : $S = EI = 59.16 \times 10.33 = 612.12\,[VA]$

역률 : $\cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{533.11}{612.12} = 87.23\,[\%]$

역률각 $\theta = Cos^{-1}0.8723 = 29.27^\circ$

$$\therefore v = 59.16\sqrt{2}\,sin\omega t,\ i = 10.33\sqrt{2}\,sin(\omega t - 29.27^\circ)[A]$$

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung