페이저와 복소수 해석

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

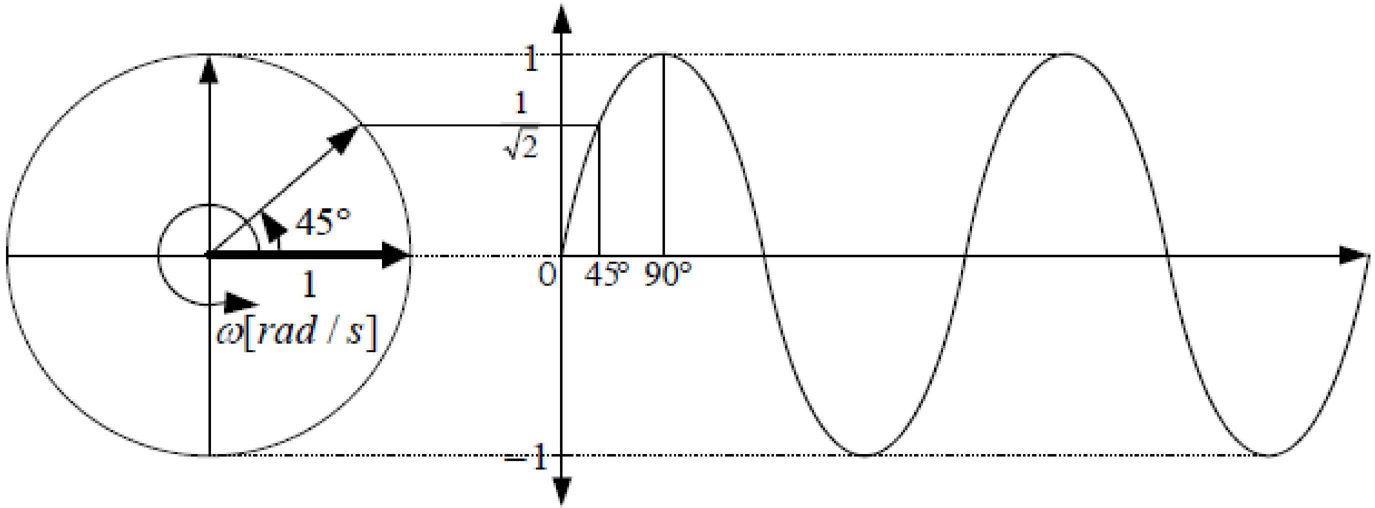


그림 6-1

Sinθ는 그림과 같이 t=0인 순간에 길이가 1인 막대가 수평축과 평행하게 놓여지고, 회전하는 동안 그 길이는 수직축에 투영한 것으로 생각하면 된다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

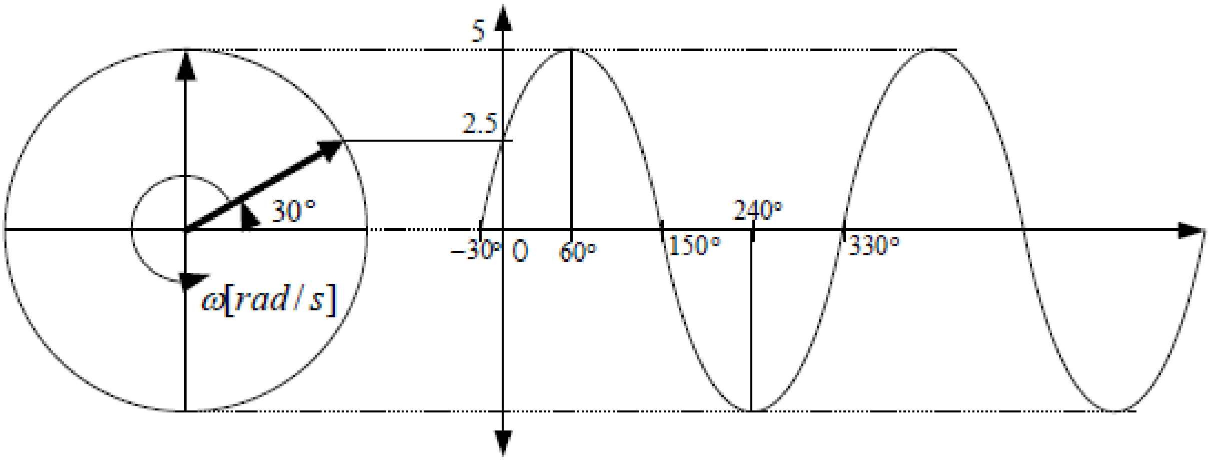


그림 6-2

그림 6-2와 같이 t=0일 때, 30°에서 출발한 경우,

시간이 아무리 지나도, 그림 6-1과 6-2의 막도 사이 각도는 변화하지 않는다.

<u>정현파의 페이저(**phasor**) 표시법</u>: t=0인 순간에 위상만큼 회전하여 정지한 실효값 크기의 막대로 사인파 표시

(전제) 모든 사인파의 각속도 ω는 같다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

페이저는 수학에서 나오는 벡터는 아니지만 벡터와 같은 방법으로 덧셈이나 뺄셈을 할 수 있다.

또한, 수학적으로 엄밀하게 증명된 것은 아니지만 정현파 함수를 손쉽게 합성하는데 불편함이 없기 때문에 매우 자주 사용된다.

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \theta)[V]$$

$$V_m = \sqrt{2}\, V \text{ : 최대값}$$

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ : 실효값}$$

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \theta) \rightarrow \boldsymbol{V} = V \angle \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta [V]$$

$$v = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45°)[V]$$

$$\boldsymbol{V} = 10 \angle 45° [V]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

[예제 6-1] 다음 정현파 전압 또는 전류를 페이저로 변환하고 같은 평면에 그리시오.

① $v_1 = 5\sqrt{2}\, sin(\omega t + 60^\circ)[V]$

② $i_2 = 3\sqrt{2}\, sin(\omega t + 30^\circ)[A]$

③ $v_3 = -5\sqrt{2}\, sin(\omega t + 60^\circ)[V]$

① $V_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle(\omega \times 0 + 60^\circ) = 5\angle 60^\circ\ [V]$

② $I_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle(\omega \times 0 + 30^\circ) = 3\angle 30^\circ\ [A]$

③ $V_3 = \dfrac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle(\omega \times 0 + 60^\circ) = -5\angle 60^\circ\ [V]$

$V_3 = -5\angle 60^\circ = -1 \times 5\angle 60 = 1\angle 180 \times 5\angle 60 = 5\angle 240^\circ\ [V]$

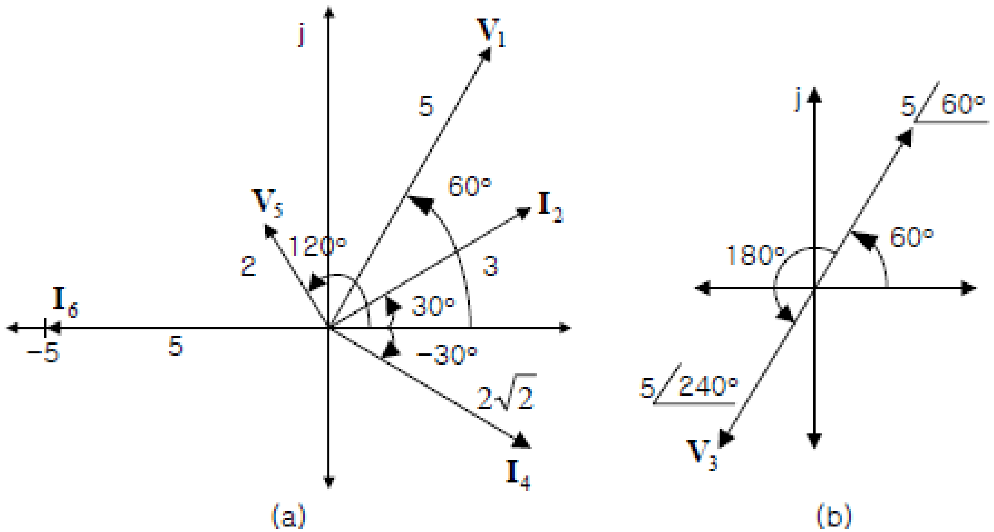


그림 6-3

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

[예제 6-1] 다음 정현파 전압 또는 전류를 페이저로 변환하고 같은 평면에 그리시오.

④ $i_4 = 4\sin(\omega t - 30°)[A]$

④ $I_4 = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\angle(\omega \times 0 - 30°) = 2\sqrt{2}\angle -30°\ [A]$

⑤ $v_5 = 2.828\sin(\omega t + 120°)[V]$

⑤ $V_5 = \dfrac{2.828}{\sqrt{2}}\angle(\omega \times 0 + 120°) = 2\angle 120°\ [V]$

⑥ $i_6 = 5\sqrt{2}\,sin(\omega t + 180°)[A]$

⑥ $I_6 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle(\omega \times 0 + 180°) = 5\angle 180° = -5\angle 0 = -5[V]$

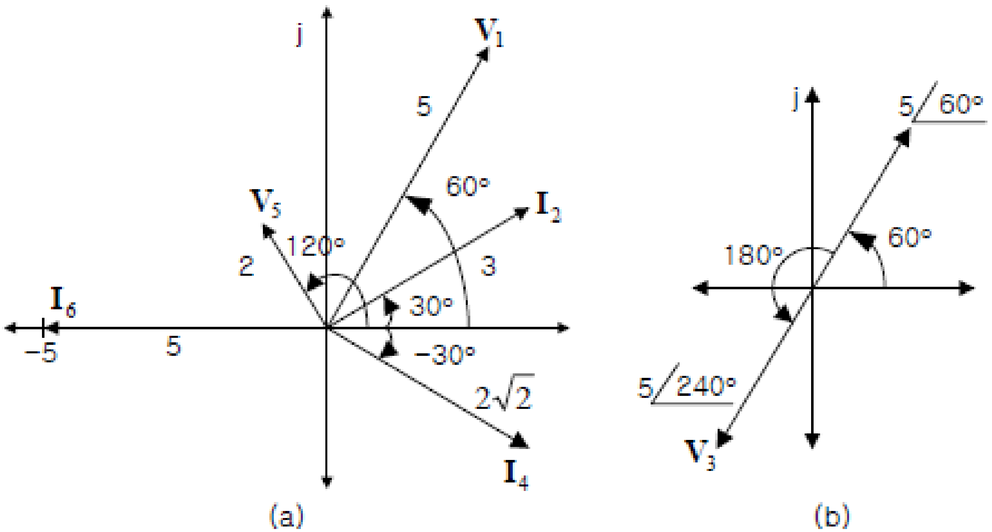


그림 6-3

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.1. 사인 함수의 페이저 표시법

[예제 6-2] 다음 페이저를 사인함수로 변환하시오.

① $V_1 = 5\angle 45°\ [V]$　② $I_2 = -30\angle 45°\ [A]$

③ $V_3 = 20\angle -30°\ [V]$　④ $I_4 = 5\angle 240°\ [A]$

① $v_1 = 5\sqrt{2}\,sin(\omega t + 45°)[V]$

② $i_2 = -30\sqrt{2}\,sin(\omega t + 45°) = 30\sqrt{2}\,sin(\omega t + 45 + 180)$

$= 30\sqrt{2}\,sin(\omega t + 225°)[A]$

(이 경우는 무리하게 $180°$를 더하는 것 보다는 그냥 (−)부호를 붙인 채 앞의 식으로 하는 게 좋다.)

③ $v_3 = 20\sqrt{2}\,sin(\omega t - 30°)[V]$

④ $i_4 = 5\sqrt{2}\,sin(\omega t + 240°)[A]$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.2. 복소수

2차 방정식 $x^2=4$를 풀어보자.

$$x^2-4=0,\ (x-2)(x+2)=0$$

$$\therefore x=2,-2$$

이제, 2차 방정식 $x^2+1=0$ 또는 $x^2=-1$를 풀어보자.

이 방정식의 해는 실수(real number)로는 구할 수 없다. 왜냐하면 실수의 제곱은 언제나 양수이기 때문이다.

"제곱을 하면 음수가 되는 상상 또는 가상의 수인 허수(imaginary number)"를 고안하게 되었다.

$$i^2=-1 \text{ 또는 } i=\sqrt{-1}$$

$$x^2=-1=i^2,\ x^2-i^2=0,\ (x-i)(x+i)=0$$

$$\therefore x=i,-i$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.2. 복소수

i는 허수단위라 부르며, 수학에서는 영문자 허수의 i를 사용하지만 전기 분야에서는 전류와 혼동되기 때문에 j로 사용한다. 이 책에서는 j를 사용하기로 한다.

실수 외에 모든 수를 포함하는 개념의 수인 복소수(complex number)

$$\boldsymbol{A} = \dot{A} = a + jb$$

$$b = 0 \ : \ \boldsymbol{A}\text{는 실수}$$

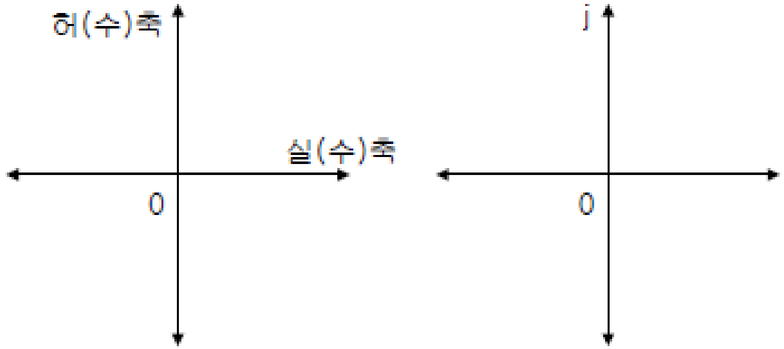
$$a = 0 \ \& \ b \neq 0 \ : \ \boldsymbol{A}\text{는 허수}$$

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \ : \ \boldsymbol{A}\text{는 복소수}$$

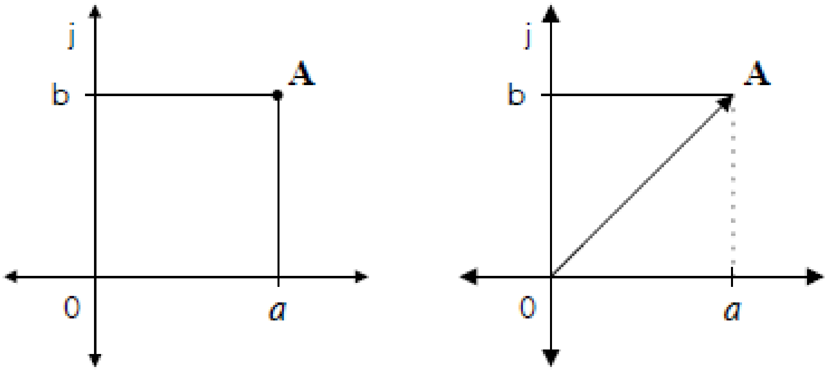
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.3. 복소평면과 직각좌표형식

복소수는 그림으로 표시하면 전체적인 관찰이 쉽기 때문에, 실수축과 이에 수직인 허수축으로 정의되는 복소평면(complex plane)을 자주 사용한다.



복소수를 $\boldsymbol{A}=a+jb$ 형태로 표시하는 방식을 **복소수의 직각좌표형식**(rectangular form)이라 한다.



(a) (b)

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.3. 복소평면과 직각좌표형식

[예제 6-5] 다음 복소수를 복소평면에 그리시오.

① $A = 3 + j4$　　② $B = -2 + j3$

③ $C = -3 - j3$　　④ $D = 4 - j2$

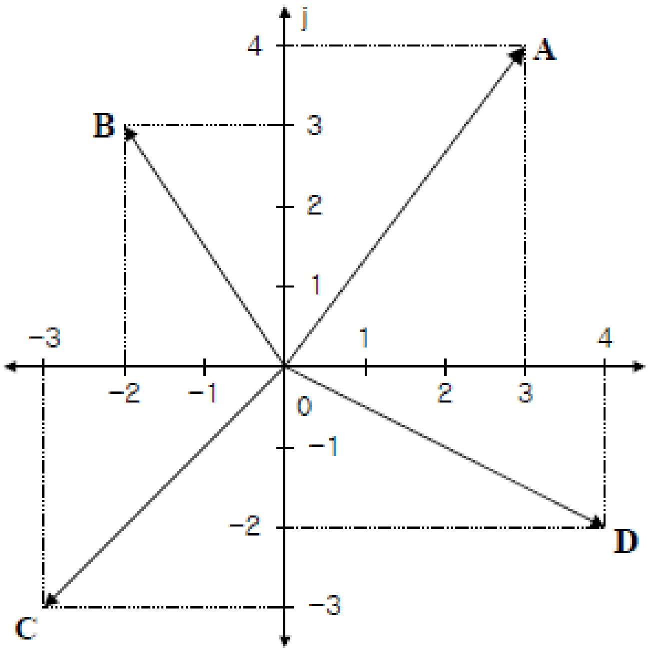


그림 6-6

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

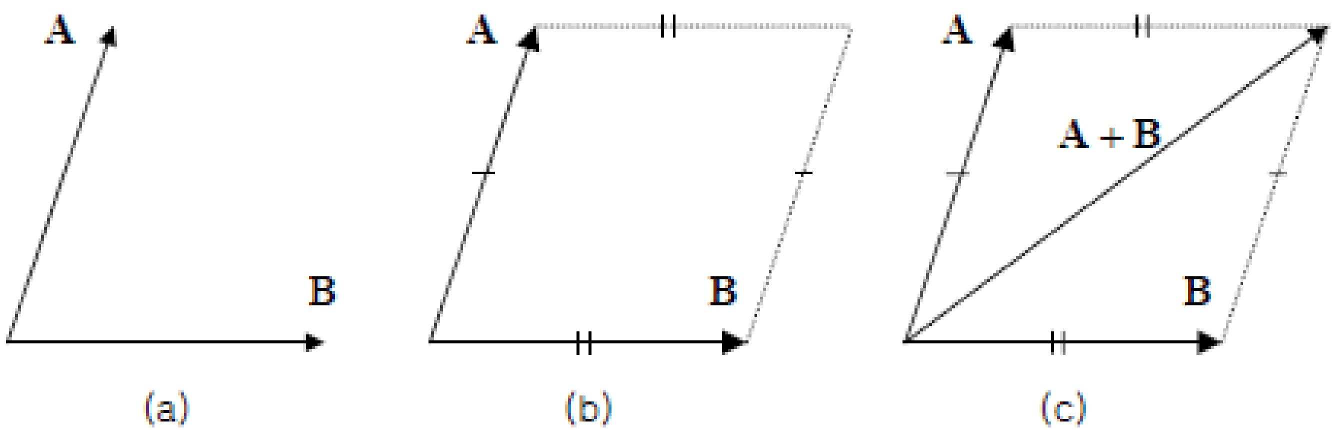
$X = a + jb,\ \ Y = c + jd$

$X + Y = a + jb + (c + jd) = a + c + jb + jd = (a + c) + j(b + d)$

$Y + X = c + jd + (a + jb) = c + jd + a + jb = (c + a) + j(d + b) = (a + c) + j(b + d)$

$X - Y = a + jb - (c + jd) = a + jb - c - jd = a - c + jb - jd = (a - c) + j(b - d)$

$Y - X = (c + jd) - (a + jb) = c + jd - a - jb = c - a + jd - jb = (c - a) + j(d - b)$

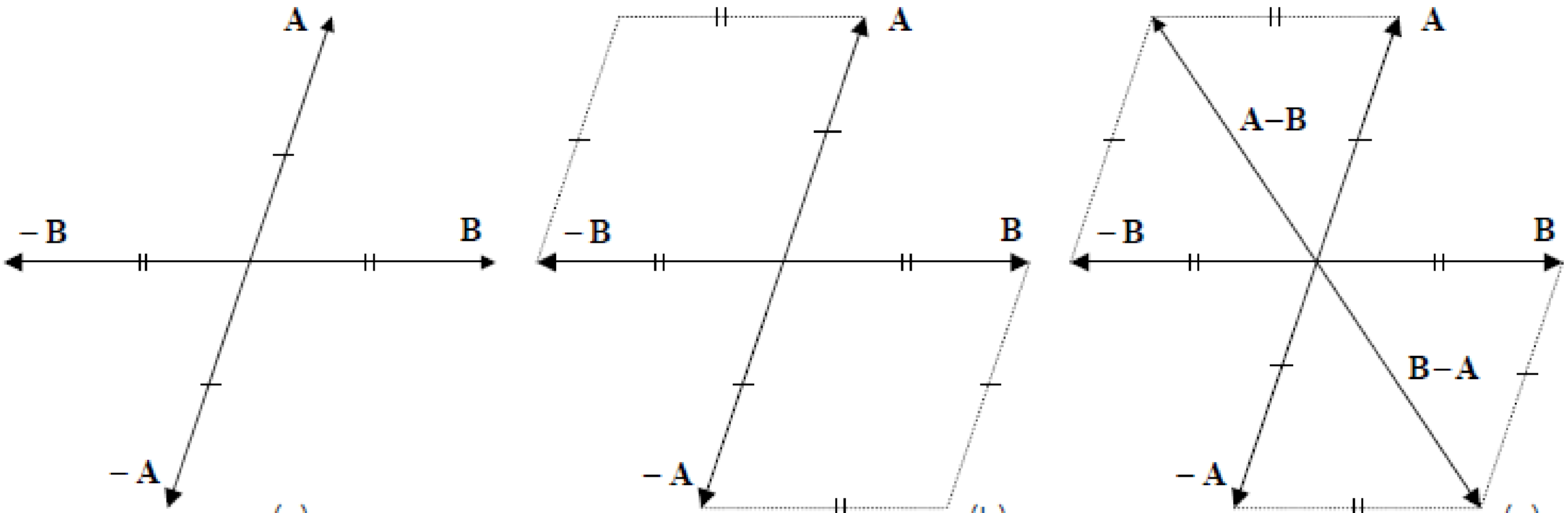


E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

$A - B = A + (-B)$

$B - A = B + (-A)$



(a) (b) (c)

6.4. 복소수의 사칙연산

$$XY=(a+jb)(c+jd)=\overset{1}{ac}+\overset{2}{ajd}+\overset{3}{jbc}+\overset{4}{jbjd}=ac+jad+jbc+j^2bd=ac+j(bc+ad)-bd$$

$$=(ac-bd)+j(bc+ad)$$

$$YX=(c+jd)(a+jb)=ca+cjb+jda+jdjb=ca+jcb+jda+j^2db$$

$$=ac+jbc+jda-bd=(ac-bd)+j(bc+da)$$

$$X+Y=Y+X,\ XY=YX$$

$$X-Y\neq Y-X$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

[예제 6-6] 두 복소수 $A=3+j4$, $B=-2+j3$에 대하여

다음을 직각좌표형식으로 구하시오.

① $A+B$ ② $A-B$

③ $B-A$ ④ AB

① $A+B=(3+j4)+(-2+j3)$

$=3+j4-2+j3$

$=(3-2)+j(4+3)=1+j7$

② $A-B=(3+j4)-(-2+j3)$

$=3+j4+2-j3$

$=(3+2)+j(4-3)=5+j$

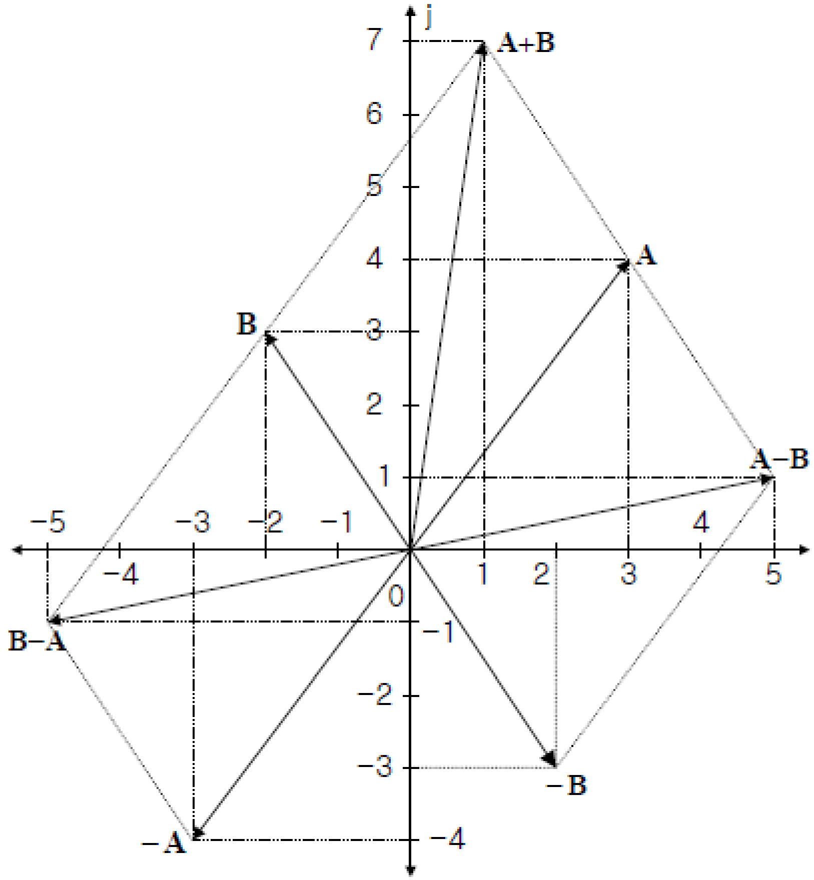
③ $B-A=(-2+j3)-(3+j4)$

$=-2+j3-3-j4=(-2-3)+j(3-4)$

$=-5-j$

④ $AB=(3+j4)(-2+j3)=3(-2)+3(j3)+j4(-2)+(j4)(j3)$

$=-6+j9-j8+j^2 12=(-6-12)+j(9-8)=-18+j$



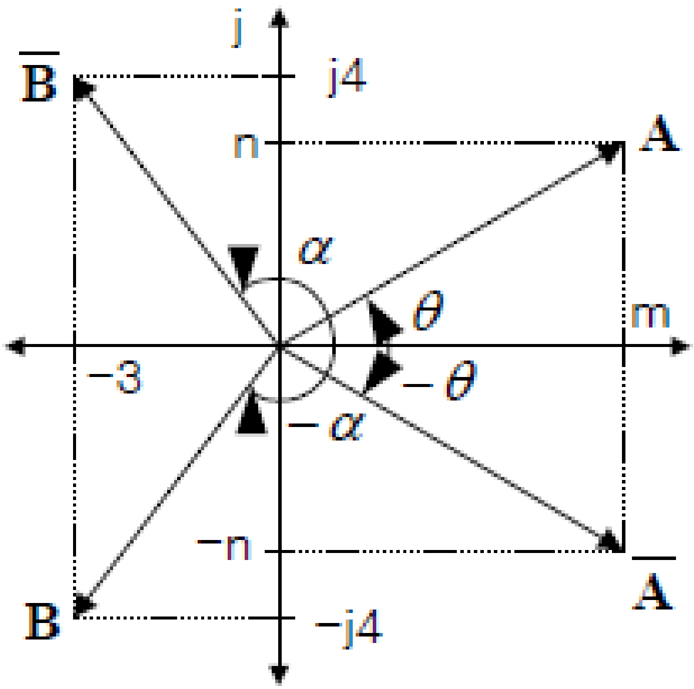
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

<u>공액 복소수(complex conjugate):</u> 원래의 복소수와 허수부의 부호가 반대인 복소수

$$\boldsymbol{A} = m + jn$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{m + jn} = m - jn$$



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

$$\overline{B} = \overline{-3 - j4} = -3 + j4$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{m + jn}} = \overline{m - jn} = m + jn = A$$

$$A\overline{A} = (m + jn)(m - jn)$$

$$= m^2 + jnm + m(-jn) + (jn)(-jn)$$

$$= m^2 - jmn + jmn - j^2 n^2$$

$$= m^2 + n^2$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

$X = a + jb,\ \ Y = c + jd$

$$\frac{X}{Y} = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{c+jd}{a+jb} = \frac{(c+jd)(a-jb)}{(a+jb)(a-jb)} = \frac{(ac+bd)+j(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + j\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

$$\frac{X}{Y} \neq \frac{Y}{X}$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.4. 복소수의 사칙연산

[예제 6-8] 두 복소수 $A=3+j4$, $B=-2+j3$일 때 다음을 직각좌표형식으로 구하시오.

① $\dfrac{1}{A}$ ② $\dfrac{1}{B}$ ③ $\dfrac{B}{A}$ ④ $\dfrac{A}{B}$

① $$\frac{1}{A}=\frac{1}{3+j4}=\frac{(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)}=\frac{3-j4}{3^2+4^2}=\frac{3-j4}{25}=\frac{3}{25}-j\frac{4}{25}$$

② $$\frac{1}{B}=\frac{1}{-2+j3}=\frac{(-2-j3)}{(-2+j3)(-2-j3)}=\frac{-2-j3}{2^2+3^2}=\frac{-2-j3}{13}=-\frac{2}{13}-j\frac{3}{13}$$

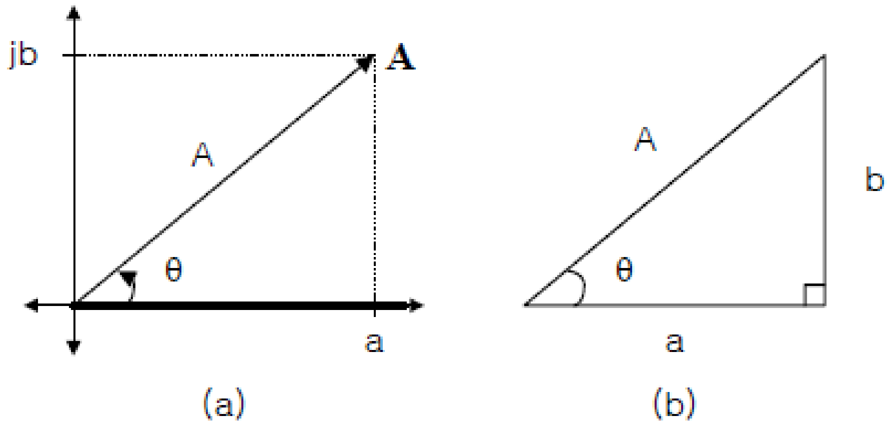
③ $$\frac{B}{A}=\frac{-2+j3}{3+j4}=\frac{(-2+j3)(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)}=\frac{-6+j8+j9-j^2 12}{3^2+4^2}=\frac{6+j17}{25}=\frac{6}{25}+j\frac{17}{25}$$

④ $$\frac{A}{B}=\frac{3+j4}{-2+j3}=\frac{(3+j4)(-2-j3)}{(-2+j3)(-2-j3)}=\frac{-6-j8-j9-j^2 12}{2^2+3^2}=\frac{6-j17}{13}=\frac{6}{13}-j\frac{17}{13}$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.5. 복소수의 극좌표형식

<u>복소수의 극좌표형식(polar form):</u> 복소수를 그 크기와 편각을 이용하여 나타내는 방법



$$|\boldsymbol{A}| = A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \therefore \theta = Tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{a^2 + b^2} \angle Tan^{-1}\frac{b}{a} = A \angle \theta$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.5. 복소수의 극좌표형식

[예제 6-9] 다음 복소수를 극좌표형식으로 변환하고 복소평면에 그리시오.

① $A = 4 + j3$ ② $F = -2 + j2$ ③ $Q = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $N = \sqrt{3} - j$

① $A = \sqrt{4^2 + 3^2} \angle Tan^{-1}\frac{3}{4} = 5\angle 36.9^\circ$ (I 상한)

② $F = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \angle Tan^{-1}\frac{2}{(-2)} = 2\sqrt{2}\angle 135^\circ$ (II 상한)

F 는 II 상한에 있기 때문에 계산기로는 정확하게 구할 수 없다. 계산기에서는

$Tan^{-1} 2/(-2) = Tan^{-1}(-2)/2 = Tan^{-1}(-1) = -45^\circ$

$\theta_F = 180 - 45 = 90 + 45 = 135^\circ$

③ $Q = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \angle Tan^{-1}\frac{(-1/2)}{(-\sqrt{3}/2)} = 1\angle 240^\circ$ (III 상한)

④ $N = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \angle Tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{(-1)} = 2\angle -30^\circ$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

극좌표형식을 직각좌표형식으로 변환하려면

$$\mathbf{A} = a + jb = A\angle\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{A},\ \cos\theta = \frac{a}{A} \rightarrow a = A\cos\theta,\ b = A\sin\theta$$

$$\mathbf{A} = A\angle\theta = a + jb = A\cos\theta + jA\sin\theta = \underline{A(\cos\theta + j\sin\theta)}$$

복소수의 삼각함수 형식

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

[예제 6-10] $10\angle -36.9^\circ + 10\angle 53.1^\circ - 13\angle 202.62^\circ$ 를 극좌표형식으로 표시하시오.

$$10\angle -36.9^\circ = 10\{\cos(-36.9) + j\sin(-36.9)\} = 10(0.8 - j0.6) = 8 - j6$$

$$10\angle 53.1^\circ = 10\{\cos(53.1) + j\sin(53.1)\} = 10(0.6 + j0.8) = 6 + j8$$

$$13\angle 202.62^\circ = 13\{\cos(202.62) + j\sin(202.62)\} = 13(-0.923 - j0.385)$$

$$= -12 - j5$$

$$10\angle -36.9^\circ + 10\angle 53.1^\circ - 13\angle 202.62^\circ$$

$$= (8 - j6) + (6 + j8) - (-12 - j5) = (8 + 6 + 12) + j(-6 + 8 + 5)$$

$$= 26 + j7 = \sqrt{26^2 + 7^2}\angle Tan^{-1}\frac{7}{26} = 26.93\angle 15.1^\circ$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

오일러(Euler) 정리: 복소수 계산에 있어서 지수함수의 지수부에 허수가 대입되면 삼각함수형식과 같다.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

따라서,

$$\boldsymbol{A} = A\angle\theta = A(\cos\theta + j\sin\theta) = \underline{Ae^{j\theta}}$$

복소수의 지수함수 형식

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

두 복소수의 곱셈과 나눗셈

$$\boldsymbol{X} = X\angle\alpha = Xe^{j\alpha},\ \boldsymbol{Y} = Y\angle\beta = Ye^{j\beta}$$

$$\boldsymbol{XY} = Xe^{j\alpha}\,Ye^{j\beta} = XYe^{j(\alpha+\beta)} = XY\angle\alpha+\beta$$

$$\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}} = \frac{Xe^{j\alpha}}{Ye^{j\beta}} = \frac{X}{Y}e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{X}{Y}\angle\alpha-\beta$$

$$\boldsymbol{X}^n = (X\angle\alpha)^n = X^n(e^{j\alpha})^n = X^n e^{jn\alpha} = X^n\angle n\alpha$$

[예제 6-11] $10\angle-36.9^\circ \times 10\angle 53.1^\circ \div 13\angle 202.62^\circ$ 를 직각좌표형식으로 표시하시오.

$$10\angle-36.9^\circ \times 10\angle 53.1^\circ \div 13\angle 202.62^\circ$$

$$= \frac{10\times10}{13}\angle-36.9+53.1-202.62 = \frac{100}{13}\angle-186.42^\circ$$

$$= \frac{100}{13}\{\cos(-186.42)+j\sin(-186.42)\} = \frac{100}{13}(-0.994-j0.112)$$

$$= -7.64 - j0.86$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

[예제 6-12] 다음 복소수를 직각좌표 형식으로 구하시오.

① $-4e^{j120^\circ}$ ② $(-2\angle 30^\circ)^3$ ③ $(3\angle 60^\circ)^4$ ④ $(-2\angle 120^\circ)^5$

① $-4e^{j120^\circ} = -4(\cos 120 + j\sin 120) = -4(-0.5 + j0.866) = 2 - j3.46$

② $(-2\angle 30^\circ)^3 = (-2e^{j30})^3 = (-2)^3(e^{j30})^3 = -8e^{j90} = -8\angle 90$

$= -8(\cos 90 + j\sin 90) = -j8$

③ $(3\angle 60^\circ)^4 = 3^4\angle 60\times 4 = 81\angle 240 = 81(\cos 240 + j\sin 240)$

$= -40.5 - j70.15$

④ $(-2\angle 120^\circ)^5 = (-2)^5\angle 120\times 5 = -32\angle 600 = -32(\cos 600 + j\sin 600)$

$= 16 + j27.71$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.6. 복소수의 삼각함수 형식과 지수함수 형식

$$\sin 1255^\circ = \sin(360 \times 3 + 175) = \sin 175^\circ$$

$$e^{j1255} = 1\angle 1255 = \cos 1255 + j\sin 1255 = \cos 175 + j\sin 175 = e^{j175}$$

$$|e^{j\theta}| = |1\angle\theta| = |1(\cos\theta + j\sin\theta)| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$e^{j\theta}$는 아무리 많이 곱해도 복소수의 원래 크기에는 영향을 미치지 못하고 단지 편각의 크기만을 변화시킬 수 있다.

[예제 6-13] 다음 복소수를 직각좌표형식으로 변환하시오.

① $A = 5e^{j\frac{\pi}{3}}$ ② $B = -5e^{-j\frac{\pi}{3}}$ ③ $C = 5e^{j\frac{3\pi}{4}}$ ④ $D = -5e^{j\frac{2\pi}{3}}$

① $A = 5e^{j\frac{\pi}{3}} = 5(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 5(0.5 + j0.87) = 2.5 + j4.33$

② $B = -5e^{-j\frac{\pi}{3}} = -5[\cos(-\frac{\pi}{3}) + j\sin(-\frac{\pi}{3})] = -5(0.5 - j0.87) = -2.5 + j4.33$

③ $C = 5e^{j\frac{3\pi}{4}} = 5(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}) = 5(-0.707 + j0.707) = -3.54 + j3.54$

④ $D = -5e^{j\frac{2\pi}{3}} = -5(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}) = -5(-0.5 + j0.87) = 2.5 - j4.33$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.7. 허수 단위 *j*의 의미

복소수 $\mathbf{A}=a+jb$에 허수단위 j를 곱하면,

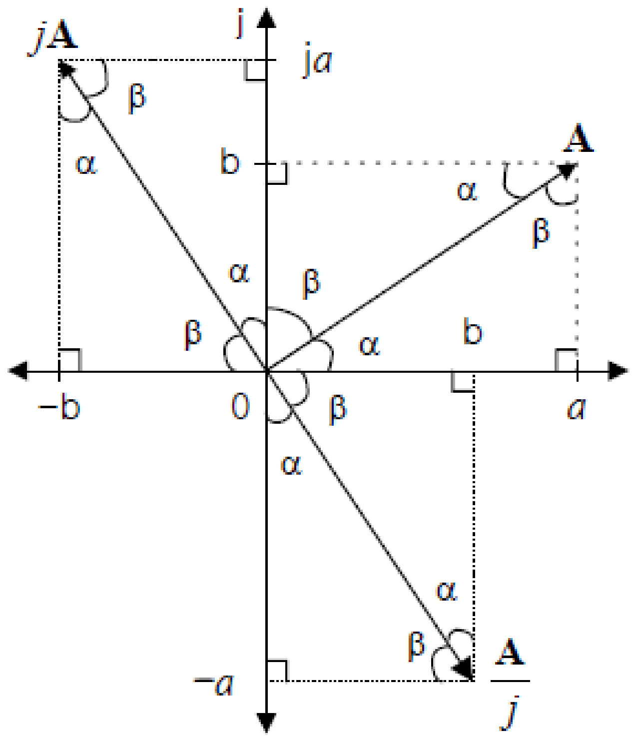
$$A\times j=(a+jb)j=ja+j^2b=-b+ja$$

두 복소수 $\mathbf{A}$와 $j\mathbf{A}$ 사이는 직각이 된다.

즉, 임의 복소수에 허수단위 j를 곱하면 원래 복소수를 반시계 방향으로 90° 회전한 것이 된다.

$$j=1\angle 90^\circ$$

$$A\times j=A\angle\theta\times 1\angle 90=A\angle\theta+90^\circ$$



$$\alpha+\beta=90^\circ$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.7. 허수 단위 *j*의 의미

복소수 **A**=*a*+*jb*를 허수단위 *j*로 나누면,

$$\frac{A}{j} = \frac{a+jb}{j} = b + \frac{a}{j} = b - ja = \frac{A(-j)}{j(-j)} = \frac{-jA}{-j^2} = -jA$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1\times(-j)}{j\times(-j)} = \frac{-j}{-j^2} = \frac{-j}{1} = -j = 1\angle -90^\circ$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1\angle 0}{1\angle 90} = \frac{1}{1}\angle 0 - 90 = 1\angle -90^\circ = 1\{\cos(-90) + j\sin(-90)\} = 1(0-j) = -j$$

$$\frac{A}{j} = -jA = 1\angle -90 A\angle\theta = A\angle\theta - 90^\circ$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.7. 허수 단위 j의 의미

$$j^2 = (1\angle 90)^2 = 1^2 \angle 90 \times 2 = 1\angle 180^\circ = -1$$

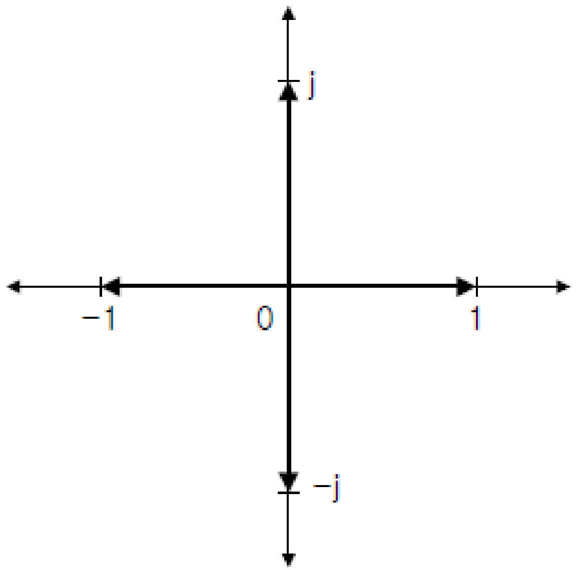
$$j^2 = -1 = 1\angle 180^\circ$$

$$j^3 = j^2 \times j = -1 \times j = -j = 1\angle 270^\circ = 1\angle -90^\circ$$

$$j^3 = 1\angle 90 \times 1\angle 90 \times 1\angle 90 = 1\angle 270 = 1\angle -90^\circ$$

$$j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = 1\angle 0^\circ$$

$$j^4 = 1\angle 90 \times 1\angle 90 \times 1\angle 90 \times 1\angle 90 = 1\angle 360 = 1\angle 0^\circ$$



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.7. 허수 단위 j의 의미

[예제 6-14] 다음을 간단히 정리하시오.

① $-j^{25}$ ② $\dfrac{1}{j^5}$ ③ j^7 ④ $\dfrac{1}{-j^8}$

① $-j^{25} = -j \times j^{24} = -j \times (j^4)^6 = -j \times 1^6 = -j$

② $\dfrac{1}{j^5} = \dfrac{1}{j \times j^4} = \dfrac{1}{j \times 1} = \dfrac{1}{j} = -j$

③ $j^7 = j^3 \times j^4 = j^2 \times j \times 1 = -1 \times j = -j$

④ $\dfrac{1}{-j^8} = \dfrac{1}{-(j^4)^2} = \dfrac{1}{-(1)^2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

정현파 교류 전압이나 전류를 페이저로 표시하면 그 형식이 복소수의 극좌표 표시법과 같음을 알 수 있다.

정현파 교류 전압이나 전류를 페이저로 변환하고 그 페이저를 복소수에서 배운 극좌표 형식과 같은 것으로 취급하면 예상보다 훨씬 간단하게 정현파 교류회로에서의 복잡한 수식을 계산할 수 있다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-15] 두 정현파 교류전압 $v_1 = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t - 36.9^\circ)$, $v_2 = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t + 53.1^\circ)[V]$에서

$v_1 + v_2$와 $v_1 - v_2$를 구하시오.

$V_1 = 10\angle -36.9^\circ$, $V_2 = 10\angle 53.1^\circ$

$$V_1 + V_2 = 10\{\cos(-36.9) + j\sin(-36.9)\} + 10(\cos 53.1 + j\sin 53.1)$$

$$= 8 - j6 + (6 + j8)$$

$$= 14 + j2 = \sqrt{14^2 + 2^2}\angle\tan^{-1}\frac{2}{14}$$

$$= 10\sqrt{2}\angle 8.13^\circ$$

$$\therefore v_1 + v_2 = 10\sqrt{2}\sqrt{2}\,sin(\omega t + 8.13^\circ)$$

$$= 20\sin(\omega t + 8.13^\circ)[V]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-15] 두 정현파 교류전압 $v_1 = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t - 36.9^\circ)$, $v_2 = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t + 53.1^\circ)[V]$에서

$v_1 + v_2$와 $v_1 - v_2$를 구하시오.

$V_1 = 10\angle -36.9^\circ$, $V_2 = 10\angle 53.1^\circ$

$$V_1 - V_2 = 8 - j6 - (6 + j8)$$

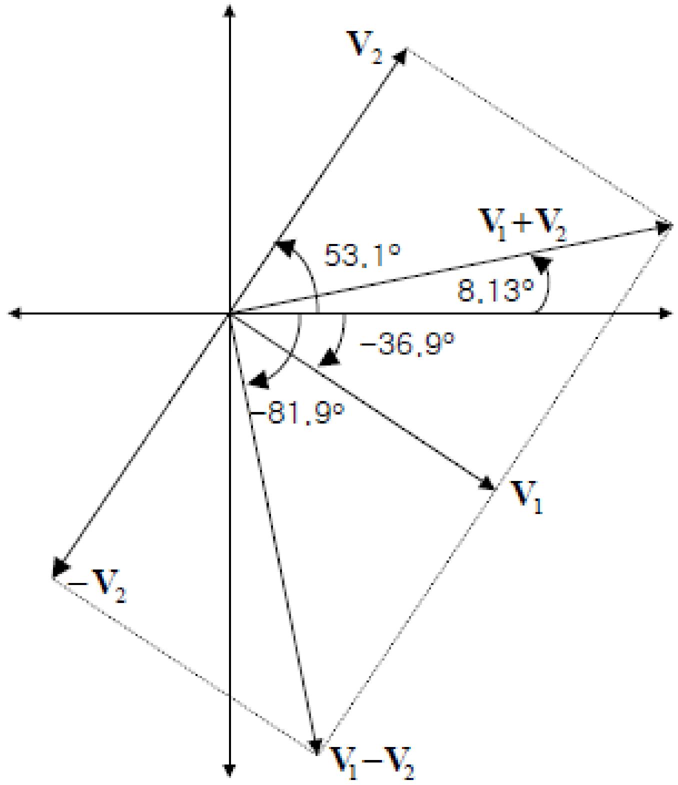
$$= 2 - j14$$

$$= \sqrt{2^2 + (-14)^2}\angle \tan^{-1}\frac{-14}{2}$$

$$= 10\sqrt{2}\angle -81.9^\circ$$

$$\therefore v_1 - v_2 = 10\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,sin(\omega t - 81.9^\circ)$$

$$= 20\sin(\omega t - 81.9^\circ)[V]$$



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-16] 두 정현파 교류전류 $i_1 = 100\sin(\omega t + 45^\circ)$, $i_2 = 80\sin(\omega t - 30^\circ)[A]$의 합을 구하시오.

$$I_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 50\sqrt{2} \angle 45^\circ,$$

$$I_2 = \frac{80}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ$$
$$= 40\sqrt{2} \angle -30^\circ$$

$$I_1 + I_2 = 50\sqrt{2}\{\cos 45 + j\sin 45\} + 40\sqrt{2}\{\cos(-30) + j\sin(-30)\}$$

$$= 50 + j50 + 48.99 - j28.28$$

$$= 98.99 + j21.72 = \sqrt{98.99^2 + 21.72^2} \angle \tan^{-1}\frac{21.72}{98.99} = 101.34 \angle 12.38^\circ$$

$$\therefore i_1 + i_2 = 101.34\sqrt{2}\sin(\omega t + 12.38) = 143.32\sin(\omega t + 12.38^\circ)[A]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-16] 두 정현파 교류전류 $i_1 = 100\sin(\omega t + 45^\circ)$, $i_2 = 80\sin(\omega t - 30^\circ)[A]$의 합을 구하시오.

실효값 대신 최대값을 사용해도 같은 결과를 얻게 된다.

$$I_1 = 100\angle 45^\circ, \; I_2 = 80\angle -30^\circ$$

$$I_1 + I_2 = 100\{\cos 45 + j\sin 45\} + 80\sqrt{2}\{\cos(-30) + j\sin(-30)\}$$

$$= 70.71 + j70.71 + 69.28 - j40$$

$$= 140 + j30.71 = \sqrt{140^2 + 30.71^2}\angle \tan^{-1}\frac{30.71}{140} = 143.33\angle 12.37^\circ$$

$$\therefore i_1 + i_2 = 143.33\sin(\omega t + 12.37^\circ)[A]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-17] 교류전압 $v_1 = 20\sqrt{2}\,sin(\omega t + 30^\circ)$, $v_2 = 10\sqrt{2}\,cos\,\omega t\,[V]$의 합을 구하시오.

$V_1 = 20\angle 30^\circ$

$\cos\phi = \sin(\phi + 90^\circ)$

$v_2 = 10\sqrt{2}\,cos\,\omega t = 10\sqrt{2}\,\sin(\omega t + 90^\circ)[V] \;\rightarrow\; V_2 = 10\angle 90^\circ$

$$V_1 + V_2 = 20\{\cos 30 + j\sin 30\} + 10(\cos 90 + j sin 90)$$

$$= 17.32 + j10 + (0 + j10)$$

$$= 17.32 + j20 = \sqrt{17.32^2 + 20^2}\,\angle \tan^{-1}\frac{20}{17.32} = 26.46\angle 49.11^\circ$$

$$\therefore v_1 + v_2 = 26.46\sqrt{2}\,sin(\omega t + 36.21) = 37.42\sin(\omega t + 49.11^\circ)[V]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.8. 페이저에 의한 삼각함수의 계산법

[예제 6-18] 두 정현파 교류전압

$v_1 = 10\sqrt{2}\,cos(\omega t - 36.9^\circ)$, $v_2 = 10\sqrt{2}\,cos(\omega t + 53.1^\circ)[V]$의 합을 구하시오.

$$v_1 = 10\sqrt{2}\,cos(\omega t - 36.9) = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t - 36.9 + 90)$$

$$= 10\sqrt{2}\,sin(\omega t + 53.1^\circ)[V]$$

$$v_2 = 10\sqrt{2}\,cos(\omega t + 53.1) = 10\sqrt{2}\,sin(\omega t + 53.1 + 90)$$

$$= 10\sqrt{2}\,sin(\omega t + 143.1^\circ)[V]$$

$V_1 = 10\angle 53.1^\circ$, $V_2 = 10\angle 143.1^\circ$

$$V_1 + V_2 = 10(\cos 53.1 + j\sin 53.1) + 10(\cos 143.1 + j sin 143.1)$$

$$= 6 + j8 + (-8 + j6)$$

$$= -2 + j14 = \sqrt{(-2)^2 + 14^2}\angle \tan^{-1}\frac{14}{-2} = 10\sqrt{2}\angle 98.13^\circ$$

$$\therefore v_1 + v_2 = 10\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,sin(\omega t + 98.13) = 20\sin(\omega t + 98.13^\circ)[V]$$

$$= 20\sin(\omega t + 90 + 8.13) = 20\cos(\omega t + 8.13^\circ)[V]$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.9. RLC 소자와 정현파 교류 전압, 전류의 페이저 해석법

R, L, C 각각에 정현파 교류 전류 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$ 가 흐른다고 하자.

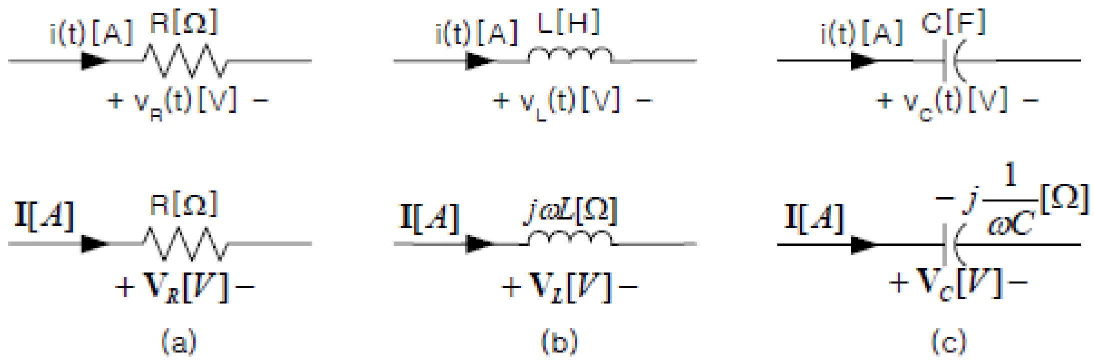


그림 6-21

$$v_R = Ri = \sqrt{2}\, RI \sin \omega t\, [V] \rightarrow \mathbf{V}_R = RI \angle 0^\circ\, [V]$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\, \omega LI \cos \omega t = \sqrt{2}\, \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)\, [V]$$

$$\rightarrow \mathbf{V}_L = \omega LI \angle 90^\circ\, [V]$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int i dt = -\sqrt{2}\,\frac{I}{\omega C}\cos \omega t = \sqrt{2}\,\frac{I}{\omega C}\sin(\omega t - 90^\circ)\, [V]$$

$$\rightarrow \mathbf{V}_C = \frac{I}{\omega C}\angle -90^\circ\, [V]$$

한양대학교 HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.9. RLC 소자와 정현파 교류 전압, 전류의 페이저 해석법

$I = I\angle 0^\circ\ [A]$이고 $j = 1\angle 90^\circ$, $1/j = 1\angle -90^\circ$이므로

$$V_R = RI\angle 0^\circ = RI\,[V]$$

$$V_L = \omega LI\angle 90^\circ = (\omega L)(I\angle 0^\circ)(1\angle 90^\circ) = j\omega LI\,[V]$$

$$V_C = \frac{I}{\omega C}\angle -90^\circ = \left(\frac{1}{\omega C}\right)(I\angle 0^\circ)(1\angle -90^\circ) = \frac{I}{j\omega C}[V]$$

$$\frac{V_R}{I} = R[\Omega]$$

$$jX_L = \frac{V_L}{I} = j\omega L[\Omega]$$

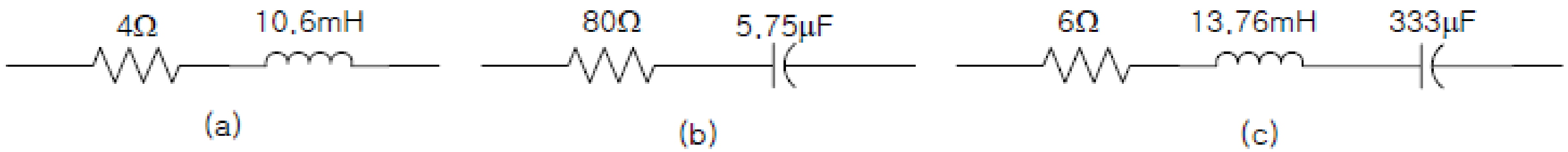
$$-jX_c = \frac{V_C}{I} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}[\Omega]$$

이 식에는 이미 전압과 전류의 위상차가 포함되어 있기 때문에 위상에 대한 추가의 고려가 전혀 필요 없다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

6.9. RLC 소자와 정현파 교류 전압, 전류의 페이저 해석법

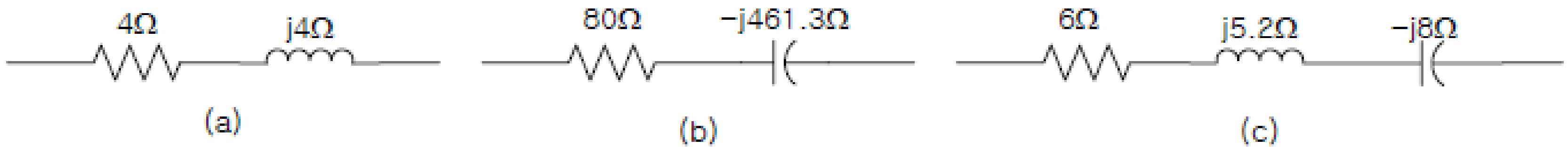
[예제 6-19] 60[Hz]의 정현파 교류 전원에 연결 된 그림 6-22 회로를 페이저로 사용할 수 있도록 변환하시오.



(a) $X_L = \omega L = 2\pi \times 60 \times 10.6 \times 10^{-3} = 4[\Omega]$

(b) $X_C = \dfrac{1}{2\pi \times 60 \times 5.75 \times 10^{-6}} = 461.3[\Omega]$

(c) $X_L = 2\pi \times 60 \times 13.76 \times 10^{-3} = 5.2[\Omega]$, $X_C = \dfrac{1}{2\pi \times 60 \times 333 \times 10^{-6}} = 8[\Omega]$



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung