

# Teorie portfolia

Marek Bryša, Jan Kovář

Masarykova Univerzita  
Přírodovědecká fakulta

30. listopadu 2011

- Teorie portfolia je mikroekonomickou disciplínou, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je vhodné držet, aby takto vytvořené portfolio mělo předem určené vlastnosti. [1, str. 1]
  - očekávaný výnos
  - riziko, že se skutečný výnos od očekávaného odchýlí

# Výnosnost jako náhodná veličina

- konečná množina aktiv  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
- známe minulý vývoj
- ceny a výnosy v budoucnosti neznáme
- na budoucí výnosnosti aktiv nahlížíme jako na náhodné veličiny
- stejně tak je náhodnou veličinou budoucí výnosnost celého portfolia
- neznáme pravděpodobnostní rozdělení těchto náhodných veličin
- riziko měříme pomocí směrodatné odchylky náhodné veličiny představující budoucí výnosnost aktiva

# Výnosnost portfolia

- portfolio tvořené aktivy  $A_1, A_2, \dots, A_n$
- váha aktiva  $A_i$  v portfoliu je  $w_i$
- váhy musí splňovat následující omezení:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (1)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

- $R_i$  ... výnosnost aktiva  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$
- $R$  výnosnost celého portfolia
- pak

$$R = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_n R_n = \sum_{i=1}^n w_i R_i.$$

# Výnosnost portfolia a riziko

- hodnoty výnosností aktiv neznáme  $\Rightarrow$  budou nás zajímat jejich očekávané hodnoty
- z linearit střední hodnoty:

$$E \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i). \quad (3)$$

- riziko měříme pomocí rozptylu, či směrodatné odchylky
- k výpočtu rozptylu náhodné veličiny  $R$  potřebujeme kovariance náhodných veličin

$$\text{cov}(R_i, R_j) = E((R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

- Pro rozptyl náhodné veličiny  $R$  platí

$$D(R) = D \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j).$$

# Maximalizace očekávaného výnosu

- uvažme investora, který chce najít portfolio přinášející maximální očekávaný výnos
- hledá konstanty  $w_1, w_2, \dots, w_n$  splňující podmínky (1) a (2), pro něž nabývá střední hodnota  $E(R)$  maxima, tj. řeší úlohu

$$\max \left\{ E \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) \mid \sum_{i=1}^n w_i = 1 \wedge w_i \in \mathbb{R}, 0 \leq w_i \leq 1, i \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (4)$$

- řešením úlohy (4) je

$$\begin{aligned} w_j &= 1, & j &= \arg \max_{1 \leq i \leq n} E(R_i), \\ w_i &= 0, & i &\in \{1, \dots, n\}, i \neq j, \end{aligned}$$

- za předp., že mezi  $E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n)$  existuje jediné maximum
- portfolio z jediného aktiva - bez diverzifikace

- budoucí výnosnosti aktiv neznáme
- neznáme ani pravděpodobnostní rozdělení těchto náhodných veličin
- odhady charakteristik těchto náhodných veličin
  - historická metoda

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T r_{ij}, \quad s_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^T (r_{ij} - \bar{r}_i)^2},$$

$$s_{ik} = \frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^T (r_{ij} - \bar{r}_i)(r_{kj} - \bar{r}_k)$$

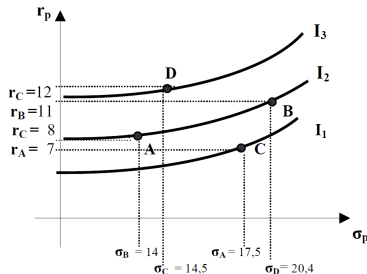
- expertní metoda

- Harry MARKOWITZ: *Portfolio Selection*. 1952.
- maximalizace očekávaného výnosu portfolia a současně minimalizace rizika
  - protichůdné cíle
  - odpor k riziku je velmi subjektivní
- o vztahu investora k riziku vypovídají indiferenční křivky
- pouze některých kombinací výnosnosti a rizika lze dosáhnout
- není potřeba uvažovat všechny kombinace - některé můžeme vyloučit



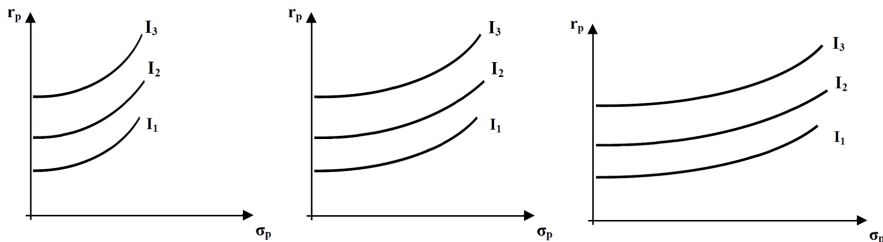
# Indiferenční křivky

- portfolio = bod v kartézské soustavě souřadnic
  - osa x: riziko měřené směrodatnou odchylkou
  - osa y: očekávaná výnosnost
- IC - všechny kombinace portfolioí, které investor považuje za stejně žádoucí



Obrázek: Příklad indiferenčních křivek, zdroj: [1]

# Indiferenční křivky dle míry odporu k riziku



(a) Investor s vysokým od-  
porem k riziku

(b) Investor s mírným od-  
porem k riziku

(c) Investor s nepatrným odpo-  
rem k riziku

**Obrázek:** Indiferenční křivky investora dle míry odporu k riziku, zdroj: vlastní vyobrazení

# Efektivní množina

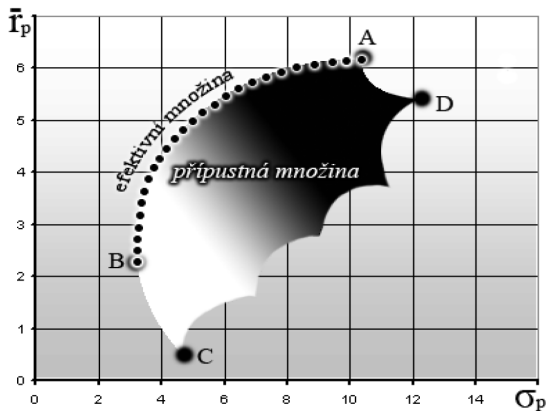
- nekonečně mnoho portfolií
- *přípustná množina* - mn. všech portfolií složených z aktiv  $A_1, A_2, \dots, A_n$
- stačí se omezit na efektivní množinu

## Efektivní množina

*Efektivní množina* je množina všech portfolií z přípustné množiny, které splňují obě dvě následujících podmínky:

- v přípustné množině neexistuje portfolio se stejným rizikem a vyšším očekávaným výnosem,
- v přípustné množině neexistuje portfolio se stejným očekávaným výnosem a nižším rizikem.

# Efektivní množina - příklad

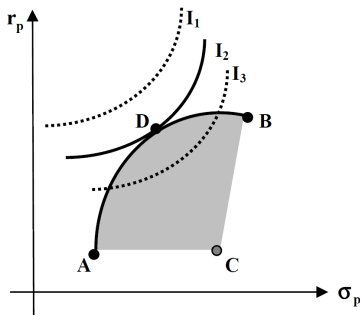


Obrázek: Připustná a efektivní množina, zdroj: [1]

- Hledání efektivní množiny můžeme popsat následovně:
  - pro každou fixní úroveň rizika nalezneme všechna dostupná portfolia s maximální očekávanou výnosností,
  - pro každou fixní úroveň očekávané výnosností nalezneme všechna dostupná portfolia s minimálním rizikem,
  - do efektivní množiny zařadíme právě ta portfolia, která byla vybrána v obou předchozích krocích.

# Výběr optimálního portfolia

- výběr z efektivní množiny na základě indiferenčních křivek
- investor vybere portfolio z efektivní množiny ležící na nejvyšší indiferenční křivce



Obrázek: Výběr optimálního portfolia, zdroj: [1]

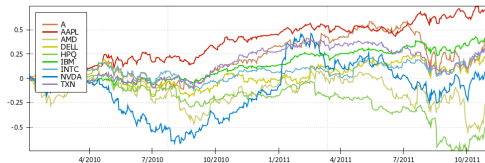
- Skript v Pythonu a NumPy, je rozšířenou a opravenou verzí originálu Travise Vaughta[3]
- Založen na MPT, historické metodě a metrikách z CAPM, výpočet probíhá numericky iterativně podle práce Williama Sharpa[5]
- Zdrojem dat je Yahoo! Finance[6]
- Výhradně akcie z S&P500 v období 1.1.2010 až 1.11.2011
- Tolerance k risku=0.05, bezrizikové aktivum má nulový výnos, není povolen obchod na krátko

# Portfolio výrobců hardware

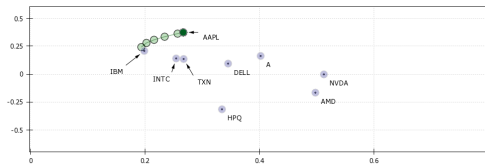
Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
A	Agilent Technologies	0.402	16.43%
AAPL	Apple Inc.	0.266	37.57%
AMD	Advanced Micro Devices	0.497	-16.46%
DELL	Dell Inc.	0.345	9.585%
HPQ	Hewlett-Packard	0.334	-31.4%
IBM	International Bus. Machines	0.198	20.96%
INTC	Intel Corp.	0.254	14.2%
NVDA	Nvidia Corporation	0.512	-0.09651%
TXN	Texas Instruments	0.267	13.72%



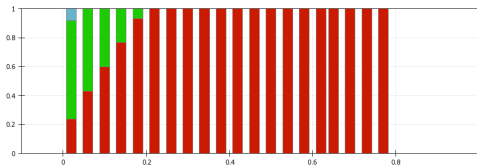
# Portfolio výrobců hardware



Efektivní množina



Alokace



# Portfolio výrobců hardware

Symbol	Název	Alokace
AAPL	Apple Inc.	0.346
IBM	International Bus. Machines	0.648
INTC	Intel Corp.	0.0069

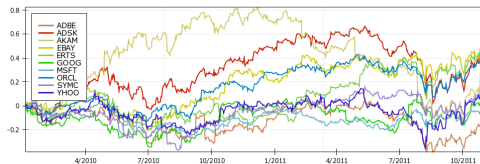
Výnos 24.37%

Volatilita 0.193

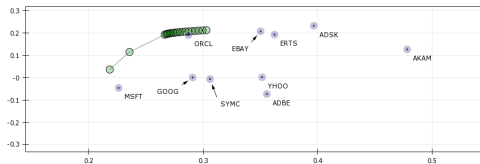
# Portfolio výrobců software

Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
ADBE	Adobe Systems	0.356	-7.255%
ADSK	Autodesk Inc.	0.397	23.36%
AKAM	Akamai Technologies Inc	0.478	12.77%
EBAY	eBay Inc.	0.35	20.87%
ERTS	Electronic Arts	0.362	19.38%
GOOG	Google Inc.	0.291	0.1524%
MSFT	Microsoft Corp.	0.226	-4.513%
ORCL	Oracle Corp.	0.287	19.16%
SYMC	Symantec Corp.	0.306	-0.5626%
YHOO	Yahoo Inc.	0.351	0.2939%

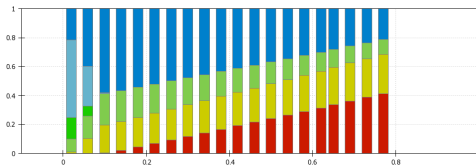
# Portfolio výrobců software



Efektivní množina



Alokace



# Portfolio výrobců software

Symbol	Název	Alokace
EBAY	eBay Inc.	0.0129
ERTS	Electronic Arts	0.0888
GOOG	Google Inc.	0.149
MSFT	Microsoft Corp.	0.534
ORCL	Oracle Corp.	0.216

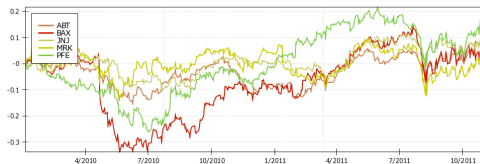
Výnos 3.736%

Volatilita 0.218

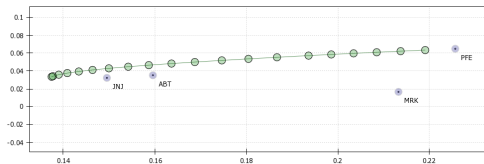
# Portfolio výrobců farmaceutik

Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
ABT	Abbott Labs	0.16	3.525%
BAX	Baxter International Inc.	0.244	1.14%
JNJ	Johnson & Johnson	0.15	3.236%
MRK	Merck & Co.	0.213	1.664%
PFE	Pfizer Inc.	0.226	6.494%

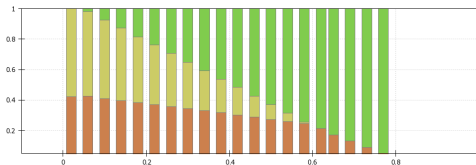
# Portfolio výrobců farmaceutik



Efektivní množina



Alokace



# Portfolio výrobců farmaceutik

Symbol	Název	Alokace
ABT	Abbott Labs	0.424
JNJ	Johnson & Johnson	0.576

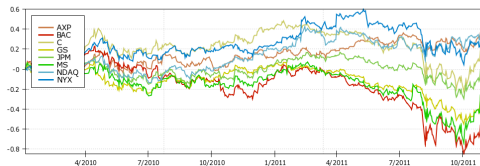
Výnos 3.359%

Volatilita 0.137

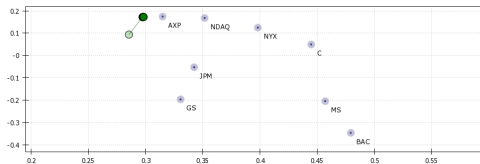


Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
AXP	American Express	0.315	17.55%
BAC	Bank of America Corp.	0.479	-34.62%
C	Citigroup Inc.	0.445	5.03%
GS	Goldman Sachs Group	0.331	-19.59%
JPM	JPMorgan Chase & Co.	0.343	-5.188%
MS	Morgan Stanley	0.457	-20.4%
NDAQ	NASDAQ OMX Group	0.352	16.9%
NYX	NYSE Euronext	0.398	12.58%

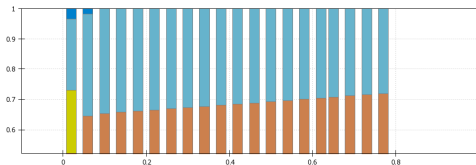
# Finanční sektor



Efektivní množina



Alokace

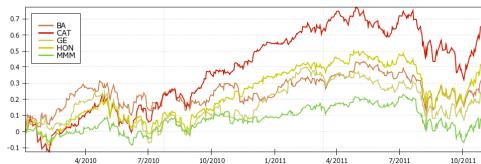


Symbol	Název	Alokace
AXP	American Express	0.522
GS	Goldman Sachs Group	0.209
NDAQ	NASDAQ OMX Group	0.235
NYX	NYSE Euronext	0.0341

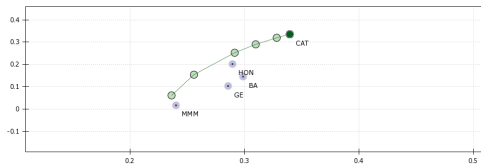
Výnos 9.456%

Volatilita 0.286

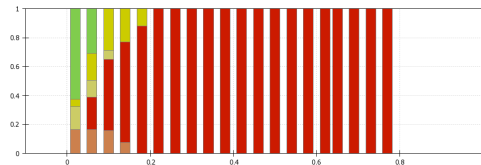
Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
BA	Boeing Company	0.299	14.5%
CAT	Caterpillar Inc.	0.34	33.5%
GE	General Electric	0.286	10.3%
HON	Honeywell Int'l Inc.	0.29	20.14%
MMM	3M Company	0.24	1.624%



Efektivní množina



Alokace



Symbol	Název	Alokace
BA	Boeing Company	0.165
GE	General Electric	0.16
HON	Honeywell Int'l Inc.	0.0501
MMM	3M Company	0.624

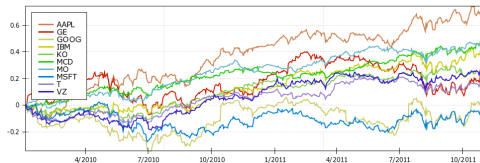
Výnos 6.073%

Volatilita 0.236

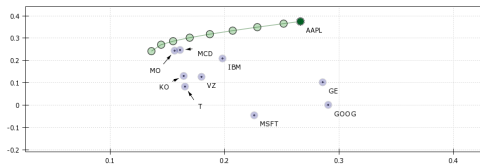
## 10 nejcennějších značek podle Financial Times[7]

Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
AAPL	Apple Inc.	0.266	37.57%
GE	General Electric	0.286	10.3%
GOOG	Google Inc.	0.291	0.1524%
IBM	International Bus. Machines	0.198	20.96%
KO	Coca Cola Co.	0.164	13.13%
MCD	McDonald's Corp.	0.161	24.78%
MO	Altria Group Inc.	0.157	24.47%
MSFT	Microsoft Corp.	0.226	-4.513%
T	AT&T Inc.	0.166	8.371%
VZ	Verizon Communications	0.18	12.74%

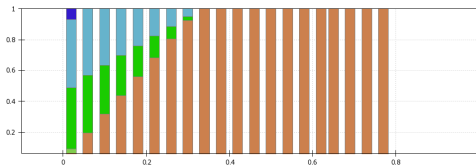
# Nejcennější značky



Efektivní množina



Alokace





# Nejcennější značky

Symbol	Název	Alokace
AAPL	Apple Inc.	0.0617
KO	Coca Cola Co.	0.0311
MCD	McDonald's Corp.	0.394
MO	Altria Group Inc.	0.444
VZ	Verizon Communications	0.0688

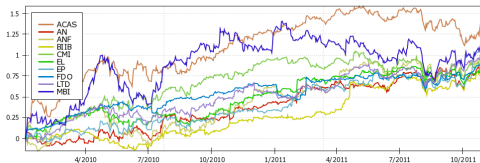
Výnos 24.24%

Volatilita 0.136

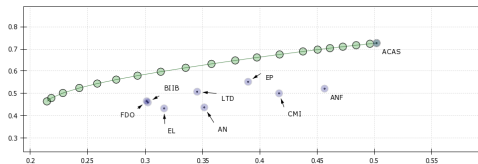
# Deset nejziskovějších titulů

Symbol	Název	Volatilita	Roční výnos
ACAS	American Capital Strategies Ltd	0.502	72.66%
AN	AutoNation Inc.	0.352	43.83%
ANF	Abercrombie & Fitch Co.	0.457	52.22%
BIIB	BIOGEN IDEC Inc.	0.303	46.06%
CMI	Cummins Inc.	0.417	50.12%
EL	Estee Lauder Cos.	0.317	43.38%
EP	El Paso Corp.	0.39	55.31%
FDO	Family Dollar Stores	0.302	46.62%
LTD	Limited Brands Inc.	0.346	50.85%
MBI	MBIA Inc.	0.644	60.09%

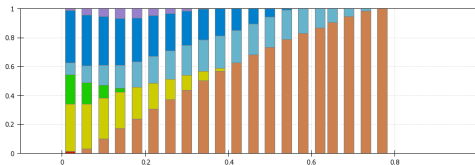
# Deset nejziskovějších titulů



Efektivní množina



Alokace



# Deset nejziskovějších titulů

Symbol	Název	Alokace
AN	AutoNation Inc.	0.0163
BIIB	BIOGEN IDEC Inc.	0.326
EL	Estee Lauder Cos.	0.201
EP	El Paso Corp.	0.0828
FDO	Family Dollar Stores	0.36
LTD	Limited Brands Inc.	0.014

Výnos 46.52%

Volatilita 0.214

# Celý S&P500

Symbol	Název	Alokace	Volatilita	Roční výnos
AZO	AutoZone Inc.	0.287	0.177	39.94%
BIIB	BIOGEN IDEC Inc.	0.0446	0.303	46.06%
FDO	Family Dollar Stores	0.0744	0.302	46.62%
HSY	The Hershey Company	0.127	0.198	28.72%
MCD	McDonald's Corp.	0.0317	0.161	24.78%
MO	Altria Group Inc.	0.105	0.157	24.47%
NEM	Newmont Mining Corp. (Hldg. Co.)	0.0161	0.3	22.29%
SO	Southern Co.	0.315	0.129	19.01%

Výnos 30.32%

Volatilita 0.119

# Seznam použité literatury

-  ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2. přeprac. a rozš. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2007. 115 s. ISBN 9788021042520.
-  MARKOWITZ, Harry. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance. Mar., 1952, Vol. 7, No. 1, s. 77-91.
-  VAUGHT, Travis. Travis Vaught Blog [online]. 2011-09-01 [cit. 2011-11-26]. Modern Portfolio Theory - A Python Implementation. Dostupné z WWW: <http://travisvaught.blogspot.com/2011/09/modern-portfolio-theory-python.html>.
-  VAUGHT, Travis. GitHub [online]. 2009-10-31 [cit. 2011-11-26]. Portfolio metrics. Dostupné z WWW: [https://github.com/tvaught/experimental/tree/master/portfolio\\_metrics](https://github.com/tvaught/experimental/tree/master/portfolio_metrics).
-  SHARPE, William F., William F. Sharpe personal page [online]. 2008 [cit. 2011-11-26]. The Gradient Method. Dostupné z WWW: [http://www.stanford.edu/~wfsarpe/mia/opt/mia\\_opt1.htm](http://www.stanford.edu/~wfsarpe/mia/opt/mia_opt1.htm).
-  Yahoo! Inc. Yahoo! Finance [online]. c2011 [cit. 2011-11-26]. Dostupné z WWW: <http://finance.yahoo.com/>.
-  Financial Times. Financial Times Special Report [online]. 2011-05-19 [cit. 2011-11-26]. Global Brands. Dostupné z WWW: [http://www.millwardbrown.com/Libraries/Optimor\\_BrandZ\\_Files/2011\\_BrandZ\\_FinancialTimes\\_SpecialReport.sflb.ashx](http://www.millwardbrown.com/Libraries/Optimor_BrandZ_Files/2011_BrandZ_FinancialTimes_SpecialReport.sflb.ashx).