

1. Redukcí z 3-SAT. Stroj M pro jazyk H má jako vstup kódování 3-SAT formule φ . Vyzkouší všech 2^n vstupů na formuli φ , a pokud je pro některý splněna, akceptuje, jinak cyklí. To samo o sobě nemá polynomiální složitost, ale redukční funkce pouze f generuje kód stroje M a to zvládne lineárně vzhledem k velikosti formule φ . QED
- 2.
3. Problém černého cyklu (BC) je NP-úplný.
 - $BC \in NP$: Analogicky jako HAM se algoritmus nedeterministicky rozhodne pro počáteční vrchol a navazující vrcholy a kontroluje splnění podmínky.
 - BC je NP-těžký: Redukcí z HAM
 f přidá ke grafu $G(v, e)$ $|v|$ dalších samostatně ležících vrcholů, popř. k některému vrcholu připojí "had" délky $|v|$. f je lineární vzhledem k velikosti G .
 $G \in HAM \Rightarrow f(G) \in BC$: Pokud byl v G ham. cyklus, bude v $f(G)$ zřejmě právě jeden černý cyklus, a to ten, který byl v G hamiltonovský.
 $G \in HAM \Leftarrow f(G) \in BC$: Ten jediný černý cyklus v $f(G)$ bude zároveň hamiltonovský v G .

QED

- 4.
5. f přidá ke G kliku velikosti 6 a spojí 3 její vrcholy se všemi vrcholy G . Pro každý vrchol G tedy zbudou právě 3 možné barvy. f je lineární vzhledem k velikosti G . Implikace " \Rightarrow " i " \Leftarrow " zřejmě platí. QED
6. Redukcí z HAM. SHAM $\in NP$ zřejmě – oproti HAM stačí navíc nedeterministicky volit hranu, která jako jediná dostane ohodnocení 1, zbylé 0. f provede jedno z:
 - (a) Pokud v G existuje osamocený vrchol nebo vrchol s jen jednou hranou, nedělá nic, protože takový graf nemá HC, tedy ani SHC.
 - (b) Pokud v G existuje vrchol se dvěma hranami, jedné z nich dá ohodnocení 1, všem zbylým 0, neboť pokud v G HC existuje, musí jednou z těchto hran procházet.
 - (c) Pokud v G mají všechny vrcholy minimálně 3 a více hran, vybere "náhodně" jeden vrchol v s nejmenším počtem hran a rozdělí ho na 2 vrcholy v_1, v_2 spojené jednou hranou a oba dále spojí se všemi vrcholy, se kterými byl spojen v . Hraně spojující v_1, v_2 přiřadí ohodnocení 1, všem ostatním 0. Pokud v G existoval HC, musel procházet vrcholem v . Nyní SHC v $f(G)$ musí procházet hranou spojující v_1, v_2 .

f je lineární vzhledem k velikosti G . Korektnost obou implikací redukce pro body (a), (b) je zřejmá z předchozí argumentace a toho, že neměníme strukturu grafu. U (c) byla zdůvodněna implikace " \Rightarrow ". Zbývá vysvětlit " \Leftarrow ", tedy že rozdělením vrcholu v na dva nevznikne HC, který v původním G nebyl. Může sice vzniknout, ale nebude obsahovat hranu mezi v_1, v_2 s ohodnocením 1, tudíž nebude SHC. Tuto hranu nebude obsahovat, protože jinak by měl i původní graf HC.