Teorie her

Michal Abaffy, Marek Bryša, Jan Kovář

Brno, 23. listopadu 2011

1 Úvod

Teorie her je matematická disciplína, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů.

1.1 Reprezentace hry

Hra je charakterizována dvěma nebo více hráči, množinami akcí (tahů), které tito hráči mohou vykonat v určitých okamžicích, a možnými zisky, kterých hráči mohou dosáhnout. Zisk každého hráče nezávisí pouze na jím vykonaných akcích, ale také na akcích ostatních hráčů. Formálněji, existuje několik odlišných herních reprezentací: *normální forma* (neboli *strategická forma*), *extenzivní forma* či *kooperativní forma* (neboli *forma charakteristické funkce*). Každé přináší jiný popis hry, a slouží tak k různým účelům. Hra v extenzivní formě může být využita ke specifikaci hry v normální formě a hra v normální formě může být použita k definici hry v kooperativní formě, nikoliv však naopak.

1.1.1 Klasifikace her

Rozlišujeme statické a dynamické hry. U statických her vykonávají hráči své tahy současně, případně neznají zvolené tahy protihráčů. U dynamických her hráči táhnou postupně, a mohou tedy reagovat na předchozí tahy protihráčů. Podle toho, zda každý z hráčů zná zisky všech hráčů ve všech možných výsledcích hry, rozlišujeme hry s úplnými a neúplnými informacemi.

Na základě tohoto členění klasifikujeme hry do čtyř skupin:

- statické hry s úplnými informacemi,
- dynamické hry s úplnými informacemi,
- statické hry s neúplnými informacemi,
- dynamické hry s neúplnými informacemi.

U her s neúplnými informacemi pracujeme s pravděpodobnostními rozděleními, kterými se řídí zisky protihráčů. Zde se budeme zabývat hrami s úplnými informacemi.

1.1.2 Statické hry a normální forma

Strategie hráče je kompletní plán akcí, který specifikuje, jaké tahy má hráč vykonat v závislosti na dosavadním průběhu hry. V případě statických her pojmy akce a strategie splývají.

Ke specifikaci statických her s úplnými informacemi slouží normální forma.

Hra v normální formě obsahuje následující prvky:

- množinu hráčů: $\{1, \ldots, n\}$,
- množinu strategií S_i pro každého hráče $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- výplatní funkci $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ pro každého hráče $i \in \{1, \ldots, n\}$.

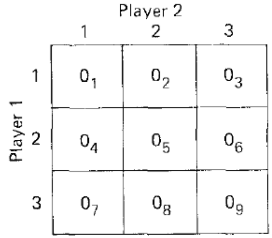
Hra dvou hráčů v normální formě je nejčastěji charakterizována pomocí *dvojmatice*.

Normální forma může být použita i k popisu dynamických her. Je však třeba specifikovat, kdy je který hráč na tahu, jaké akce může vykonat a jaké informace má o dosavadním průběhu hry. Pojmy akce a strategie se u dynamických her rozcházejí. Definujme nejprve extenzivní formu.

Příklad: Vězňovo dilema

1.1.3 Extenzivní forma

Extenzivní forma reprezentace hry specifikuje:

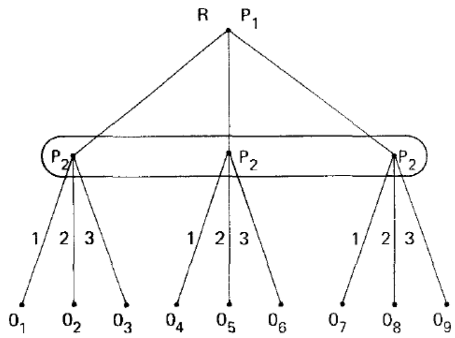


Obrázek 1: Hra v normální formě v podobě dvojmatice

- množinu hráčů,
- kdy je který hráč na tahu,
- jaké má hráč informace o dosavadním průběhu hry ve chvíli, kdy je hráč na tahu,
- množinu akcí, které může hráč podstoupit,
- výplatní funkci každého hráče jakožto funkci akcí podstoupených všemi hráči.

Jako první popsali hru pomocí extenzivní formy von Neumann a Morgenstern (1944) a poté Kuhn (1953). V obou případech se jednalo o konečné hry, tj. hry, ve kterých je konečný počet hráčů, tahů i akcí. Příkladem takových her jsou např. šachy nebo poker. Nicméně málokteré situace v ekonomice či politice jsou modelovány konečnými hrami.

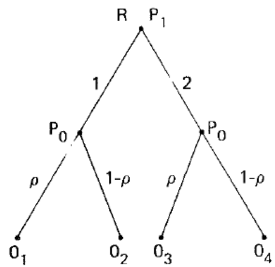
Hra v extenzivní formě je nejčastěji zobrazována pomocí stromu. Jednoduchý trh v prostředí duopolu je ilustrován Kuhnovým herním stromem. Jedná se o zjednodušený případ, kdy si každá ze dvou firem musí vybrat jednu ze tří možných úrovní produkce. Firmy se rozhodují současně. Jejich úrovně produkce určují tržní výstup a zisky obou firem. Na obrázku 2 je popis této hry v extenzivní formě. Každý uzel reprezentuje stav, ve kterém se hra může nacházet (z pohledu nezávislého pozorovatele). Hra začíná v kořeni stromu (označeným R). Každý uzel, který není listem, je označen P_i, což indikuje, že je na tahu hráč i a má na výběr z tahů odpovídajícím větvím stromu vycházejícím z tohoto uzlu. Listy stromu jsou označeny O_j a reprezentují všechny možné výsledky hry. Každá cesta z kořene do listu určuje možný průběh hry.



Obrázek 2: Kuhnův herní strom

V mnoha situacích můžeme vyžadovat, aby hráči táhli současně (statické hry). Nezajímá nás, zda hráči táhli přesně ve stejném okamžiku, podstatné je to, že hráči v okamžiku rozhodnutí o svém tahu nemají informace o tahu protihráčů. Nezáleží na tom, kdo táhne první, protože ostatní nejsou informováni. Tuto situaci znázorňujeme ve stromě tak, že propojíme (oválem či čárkovanou čarou) všechny uzly, o nichž hráč neví, ve kterém z nich se nachází. Tyto uzly tvoří tzv. *informační množinu.* Ze všech uzlů jedné informační množiny musí vycházet stejné hrany. Extenzivní forma tedy umožňuje reprezentovat i statické hry. Obrázky 1 a 2 reprezentují tutéž hru v normální a v extenzivní formě.

V některých případech je třeba do hry zahrnout exogenní nejistotu. V takové situaci přidáme do hry dalšího hráče P_0, nazývaného *Příroda.* Kdykoliv je tento hráč na tahu, s danými pravděpodobnostmi vybere jednu z větví. Příklad hry obsahující *Přírodu* je na obrázku 3.



Obrázek 3: Hra obsahující hráče *Příroda*

Hry, které obsahují pouze jednoprvkové informační množiny se nazývají hry s *perfektními informacemi*. Takovou hrou jsou šachy. V každém okamžiku hry znají všichni hráči všechny detaily cesty z kořene do současného uzlu. To neplatí pro poker, či pro aukce s uzavřenými nabídkami.

V terminologii stromů a informačních množin můžeme *strategii* definovat jako funkci, která každé informační množině hráče přiřadí jednu z alternativ (tj. hran) vycházejících z této informační množiny.

1.1.4 Dynamické hry a normální (strategická) forma

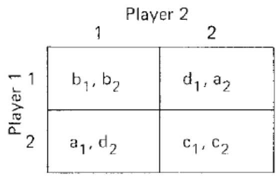
Dynamické hry je možné také reprezentovat v normální formě. Nyní ovšem rozlišujeme pojmy akce a strategie. V záhlavích tabulky (resp. dvojmatice) nyní již nebudou akce, ale kombinace akcí, přesněji strategie.

Uvažujme modifikaci hry v extenzivní formě na obrázku 2. Nahraďme informační množinu hráče P_2 dvěma informačními množinami, a to tak, že pokud hráč P_1 zvolí možnost 1, P_2 je informován, zvolí-li P_1 možnost 2 nebo 3, P_2 neví, ve kterém z těchto dvou uzlů se nachází. Tato hra je v normální formě reprezentována maticí 3×9, protože existuje 9 různých strategií pro P_2. Strategiemi hráče P_2 jsou uspořádané dvojice (i, j), $i, j \in \{1, 2, 3\}$, které chápeme: „jestliže P_1 hrál 1, hraj i, jinak hraj j“.

1.1.5 Kooperativní (koaliční) forma

V normální formě je kladen důraz na jedince, a to v tom smyslu, že zisk hráče závisí na jím zvolené strategii a na strategiích zvolených ostatními hráči. Není přikládán význam možnostem spolupráce mezi hráči. Při studiu tvorby kartelů, mezinárodního obchodu, vyjednávání nebo jiných skupinových jevů může být kladen důraz na možné zisky ze spolupráce mezi jednotlivými účastníky.

Uvažujme následující hru dvou hráčů v normální formě (jedná se o obecné vězňovo dilema), $a_i > b_i > c_i > d_i$.



Obrázek 4: Obecné vězňovo dilema v normální formě

Označme $v(S)$ zisk, kterého může dohromady dosáhnout koalice hráčů S, pokud hrají jako jeden hráč. v nazýváme *charakteristická funkce*. Je to funkce z podmnožin všech hráčů do reálných čísel. Pro hru n hráčů existuje $2^n - 1$ neprázdných koalic.

Označení $v(\overline{ij})$ je použito ke specifikaci konkrétní koalice sestávající z hráčů i a j. Charakteristická funkce pro vězňovo dilema na obrázku 4 je následující:

$$\upsilon(\emptyset) = 0, \quad \upsilon(\overline{1}) = c_1, \quad \upsilon(\overline{2}) = c_2$$
$$\upsilon(\overline{12}) = \max\{(b_1 + b_2), (a_1 + d_2), (a_2 + d_1), \}.$$

Charakteristická funkce může být považována za počáteční řešení hry v tom smyslu, že její výpočet poskytne náhled do struktury hry. V tomto příkladě byly hodnoty spočteny jako odpovědi na otázku, jakého maximálního zisku může koalice dosáhnout za předpokladu, že ostatní hráči se snaží tento zisk minimalizovat. Nejlepší, co může udělat sám hráč P_1, resp. P_2, je hrát druhou strategii a získat c_1, resp. c_2. Dohromady mohou hráči získat $b_1 + b_2$. V tomto příkladě je oprávněné vyhodnotit $\upsilon(\overline{1})$ jako c_1, protože hráč P_2 tím, že minimalizuje zisk hráče P_1, současně optimalizuje své vlastní skóre. To nemusí být pravda obecně, jako protipříklad slouží následující hra.

		Player 2	
		1	2
Player 1	1	5, 5	0, -100
	2	10, 5	-1, -1000

Obrázek 5:

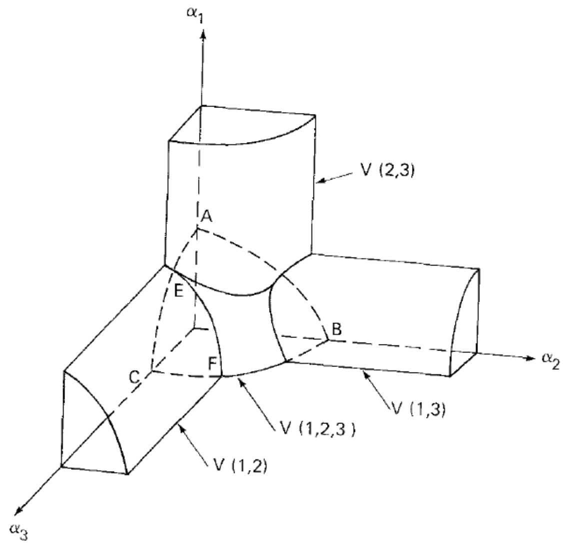
Zde charakteristická funkce nabývá hodnot

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\overline{1}) = 0, \quad v(\overline{2}) = 5, \quad v(\overline{12}) = 15.$$

Zde je poněkud nelogické považovat pozici hráče P_2 za nejvýhodnější. Paradox je v zacházení s hrozbami. Výpočet charakteristické funkce pro hráče P_1 nebere v úvahu vysoké náklady hráče P_2 spojené s výběrem strategie 2.

Můžeme definovat *zobecněnou charakteristickou funkci* (či *charakterizující funkci*) $V(S)$, která pro každou množinu hráčů S určuje množinu optimálních dosažitelných zisků.

Způsob definice zobecněné charakteristické funkce je ilustrován na obrázku 6, který zobrazuje příklad se třemi hráči. Osy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ znázorňují zisky obdržené po řadě hráči 1, 2 a 3. Zacházíme s $V(S)$, jako by to byl válec, který vyřízne část Paretovsky optimální plochy pro hru n hráčů jako celek. Například koalice $\overline{12}$ může získat alespoň tolik, kolik se jí dostává v libovolném bodě části Paretovsky optimální množiny ABC ohraničené EFC.



Obrázek 6: Zobecněná charakteristická funkce

2 Řešení

2.1 Hry v strategickej forme

Časť 1: Každý sám za seba

Definícia. *Nech X je množina stratégii i-teho hráča a Z je množina stratégii ostatných hráčov. Nech $u_i : X \times Z \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia i-teho hráča. Stratégia $x \in X$* **dominuje** *stratégii $y \in X$ ak pre všetky možné stratégie $z \in Z$ platí $u_i(x, z) \geq u_i(y, z)$ a existuje stratégia $z' \in Z$ taká, že $u_i(x, z') > u_i(y, z')$.*

Definícia. *Stratégia $x \in X$ sa nazýva* **nedominovaná***, ak neexistuje stratégia $x' \in X$, ktorá by jej dominovala.*

V hrách, kde každý hrá sám za seba nemá zmysel hrať dominované stratégie.

Definícia. *Nech X je množina stratégii hráčov, nech u_i je úžitková funkcia i-teho hráča. Situácia $x \in X$* **dominuje podľa Pareta** *situácii $x' \in X$, ak*

$$\forall i : u_i(x) \geq u_i(x') \text{ a } \exists i : u_i(x) > u_i(x')$$

Definícia. *Situácia $x \in X$ sa nazýva* **optimálna podľa Pareta***, ak neexistuje situácia, ktorá by jej dominovala podľa Pareta.*

Niektoré situácie optimálne podľa Pareta možu priniesť niektorému z hráčov menej, ako si sám dokáže zaručiť. Viď príklad neskor.

Možnost zaviesť *imputation set*, kde sú tie situácie, ktoré sú optimálne podľa Pareta a každý hráč dostane aspoň toľko, koľko si vie sám garantovať.

Definícia. *Nech X_i je množina stratégii i-teho hráča a Z_i je množina stratégii ostatných hráčov. Nech $u_i : X_i \times Z_i \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia i-teho hráča. Situácia $x = (y, z), y \in X_i, z \in Z_i$ sa nazýva* **rovnovážna podľa Nasha**, *ak platí*

$$\forall i, \forall y' \in X_i : u_i(x) \geq u_i(y', z)$$

Pretlmočené: Situácia je rovnovážna podľa Nasha, ak si žiaden z hráčov sám nepomože k lepšej výhre. V [5], Nash dokázal nasledujúci teorém.

Teorém. *Existujú hry, kde pri čistých stratégiách neexistuje situácia RPN, avšak pri zmiešaných stratégiách má každá hra situáciu RPN.*

Príklad. *Uvažujme nasledujúce dve hry dvoch hráčov v strategickej forme:*

Stratégie	*1*	*2*	*3*
1	*(1,6)*	*(0,2)*	*(1,3)*
2	*(2,3)*	*(2,2)*	*(2,3)*

Stratégie	*1*	*2*
1	*(6,6)*	*(2,0)*
2	*(0,2)*	*(5,5)*

Pre obe hry. Nájdite nedominované stratégie pre oboch hráčov, nájdite všetky situácie optimálne podľa Pareta a rovnovážne podľa Nasha a imputation sety.

2.2 Koaličné hry

Časť 2: Koaličné hry

Predpoklady:

- Máme množinu hráčov N. Majme ľubovolnú koalíciu $S \subseteq N$. Uvažujme, že hráči z S navzájom spolupracujú. Možu zvoliť spoločnú stratégiu, ktorá im garantuje istú sumu $v(S)$, o ktorú sa následne možu istým sposobom rozdeliť.

- Technický detail: výhry musia byť v spoločnej mene (alebo aspoň preveditelné do spoločnej meny), a každý hráč si každú výhru cení rovnako (úžitkové funkcie roznych hráčov su rovnaké).

- Zjavne: $S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

- Požadujeme: $v(\emptyset) = 0$.

Aj iný typ koaličných hier: hráči možu spolupracovať v ľubovolnej koalícii, ale výhry nie sú prenosné. S takýmto typom hier sa pracuje zložitejšie, my sa nimi nebudeme zaoberať.

2.3 Jadro (The core)

Chcené riešenie problému (nemusí existovať): pre každú koalíciu platí, že súčet výhier jej hráčov je aspoň toľko, koľko garantuje účasť v koalícii. Formálne:

Riešenie je **payoff vector** $(x_1, ..., x_n)$, kde x_i predstavuje výhru i-teho hráča a platí $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Definícia. *Jadro sú také payoff vectory, kde platí:*

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Príklad. *Nie vždy musí takéto riešenie existovať.*

$v(\emptyset) = 0,$
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1,$
$v(\{1, 2, 3\}) = 1.$

V jednoduchých prípadoch riešime tak, že zvolíme koalíciu všetkých hráčov a nakreslením.

Príklad. $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1, 2\}) = 1, v(\{1, 3\}) = 2, v(\{2, 3\}) = 3$
$v(\{1, 2, 3\}) = 4$

Riešenie: nakreslíme trojuholník $(4,0,0),(0,4,0),(0,0,4)$ a vkresľujeme doň nerovnosti.

V prípade, že jadro neexistuje, môžeme chcieť od riešenia aspoň, aby to bol takzvaný **rozumný payoff vector**, teda by malo spĺňať:

$$\forall i : x_i \leq \max_S \{v(S) - v(S - \{i\})\}$$

Výhody:

- Satisfy all subgroup rationality, i.e., no subgroup is offered less than it could obtain by itself.

Nevýhody:

- Jadro nemusí existovať.
- Može nájsť množinu riešení a nie je jasné, ktorý hráč koľko dostane.

Dajú sa čiastočne odstrániť (no vzniknú nové nedostatky) zavedením silného (slabého) ϵ-core, kde riešenie x musí spĺňať:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \epsilon, \text{ respektíve}$$

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - |S|\epsilon$$

2.4 Simple games

Simple games spĺňajú nasledujúce axiómy:

(1) $\forall S \subseteq N : v(S) = 0$ or $v(S) = 1$.

(2) $v(\emptyset) = 0$

(3) $v(N) = 1$

(4) No losing set contains a winning subset. (Podľa mňa zbytočný, plynie z axiómov pre charakteristickú funkciu v.)

Významná podtrieda simple games (**rozhodujúce SG**) spĺňa i nasledovný axióm:

(5) $\forall S \subseteq N : v(S) + v(N - S) = 1$.

2.5 Shapley vector

Jednoduché hry vačšinou nemajú riešenie v podobe jadra.

Riešenie (nielen pre RSG): **Shapleyho vector** x

$$x_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}(v(S) - v(S - \{i\}))$$

Predpoklady vedúce k Shapleyho vectoru: aditivita na nezávislých hrách; symetria hráčov; linearita pri násobení skalárom (hra a vektor); $\sum_{i \in S} x_i(u) = u(S)$, kde $S \subseteq N$ je ľubovolná koalícia, ktorá obsahuje všetkých podstatných hráčov (hráč i je podstatný, ak existuje koalícia S, tž $v(S \cup \{i\}) > v(S) + v(\{i\}))$.

Interpretácia: Each individual is assumed to enter every possible coalition in every way randomly, and he is then assigned the expected value of the incremental gain he brings to all.

Príklad. *Voľby do parlamentu. Zvolených 5 strán a nech A, B, C, D, E značia počet poslancov jednotlivých strán. $A = 55, B = 30, C = 25, D = 22, E = 18$. Víťazné koalície sú tie, ktoré majú viac ako 75 poslancov. Spočítajte SV.*

Riešenie: Víťazne koalície (s čiarkou sú značení tí, ktorých príchod do koalície zmení nevíťaznú koalíciu na víťznú): $A'B', A'C', A'D', A'BC, A'BD, A'B'E, A'CD, A'C'E, A'D'E, B'C'D', ABCD, A'BCE, A'BDE, A'CDE, B'C'D'E, ABCDE$.

$x_A = 3\frac{3!1!}{5!} + 6\frac{2!2!}{5!} + 3\frac{1!3!}{5!} = \frac{18+24+18}{120} = \frac{1}{2}$

$x_B = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$

$x_C = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$

$x_D = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$

$x_E = 0$

Kontrola: $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 1 = v(N)$.

2.6 Stable set

Predpoklad: plne kooperatívna hra, zvolí sa veľká koalícia a jej zisk sa distribuuje pomocou payoff vectoru medzi hráčov.

Definícia. **Imputation** *je taký payoff vector x, kde žiaden hráč nedostane menej ako si dokáze sám zaručiť.*

$$\forall i : x_i \geq v(\{i\})$$

Definícia. *Majme hru (N, v) a nech x, y sú dve imputations (N, v). x* **dominuje** *y, ak $\exists S \neq \emptyset$, tž $\forall i \in S : x_i > y_i$ a $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ (Prečo nie radšej $\sum_{i \in S} y_i < v(S)$?).*

In other words, players in S prefer the payoffs from x to those from y, and they can threaten to leave the grand coalition if y is used because the payoff they obtain on their own is at least as large as the allocation they receive under x.

Definícia. *A* **stable set** *is a set of imputations that satisfies two properties:*

Internal stability: No payoff vector in the stable set is dominated by another vector in the set.

External stability: All payoff vectors outside the set are dominated by at least one vector in the set.

Von Neumann povodne myslel, že každá plne kooperatívna koaličná hra má stable set riešenie. Nie je tomu tak.

2.7 Jadro (The kernel)

Definícia. *Majme hru (N, v) a payoff vector x.*

$$s_{ij}^v(x) := \max_{S \subseteq N - \{j\}; i \in S} \{v(S) - \sum_{k \in S} x_k\}$$

Čo $s_{ij}^v(x)$ predstavuje?

Predpokladajme, ze j chce vystúpiť z veľkej koalície, kde sa prerozdeľuje pod payoff vectorom x. Predpokladajme, že ostatní hráči sú spokojní so svojou časťou x_k. Takže ak j sa rozhodne nespolupracovať, hráč i može získať maximálne $s_{ij}^v(x)$, ak ostatní hráči budú súhlasiť s vytvorením koalície S, kde ich zisk zo zisku koalície bude rovný ich zisku v povodnom payoff vectore.

Intuitívne, ak $s_{ij}^v(x) > s_{ji}^v(x)$, i má vačšiu vyjednávaciu silu ako j pri payoff vectore x.

Od dobrého riešenia očakávame, že každá dvojica hráčov bude mať voči sebe rovnakú vyjednávaciu silu. Platí ale, že hráč i je odolný voči hrozbám iných hráčov, ak $x_i - v(\{i\}) = 0$, pretože može zdrhnúť a spraviť si vlastnú koalíciu.

Definícia. *Jadro hry obsahuje také imputations, kde žiadny hráč nemá nad žiadnym hráčom vyjednávaciu silu,*

$$[s_{ij}^v(x) - s_{ji}^v(x)][x_j - v(\{j\})] \leq 0 \textit{ and}$$

$$[s_{ji}^v(x) - s_{ij}^v(x)][x_i - v(\{i\})] \leq 0$$

Platí nasledujúca veta [4]:

Teorém. *Každá koaličná hra má neprázdny kernel.*

3 Aplikace v ekonomických experimentech

3.1 Hra diktátor

Diktátor je nejjednodušší možná hra nebo spíše situace individuálního rozhodnutí, která může osvětlit preference ohledu na druhé. Tato hra má dva hráče: navrhovatele a příjemce. Navrhovatel rozhodne, jak se má rozdělit obdaření dané velikosti mezi něho a příjemce, což se pak také stane. Role příjemce je čistě pasivní.

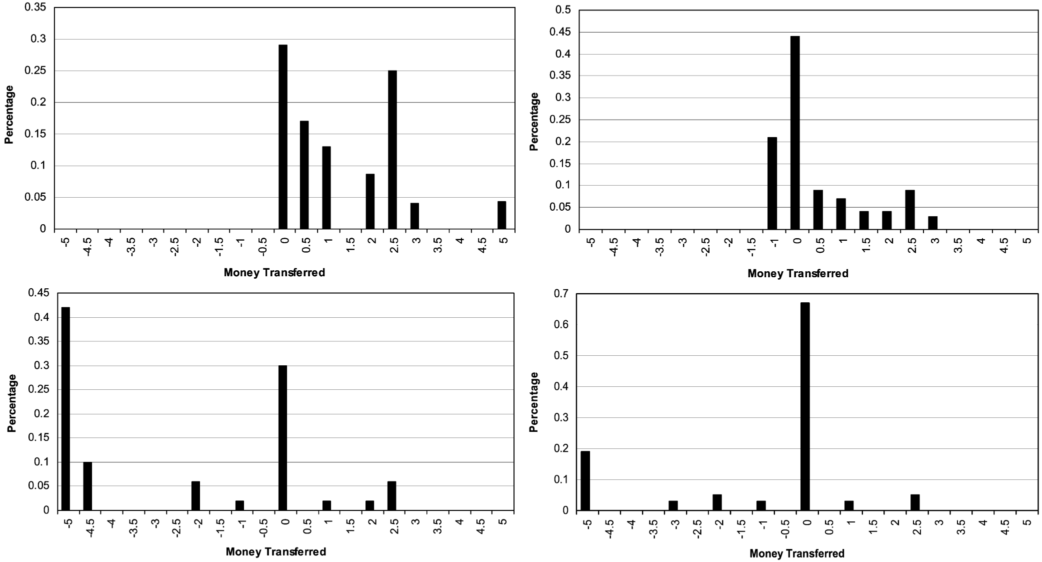
Implementace v laboratoři může vypadat takto: obdaření \$10 je poskytnuto experimentátorem jako „dar z nebes". Testované subjekty jsou náhodně náhodně rozděleny mezi navrhovatele a příjemce. Anonymita rozhodnutí a párování je zaručena.

Tento experiment byl poprvé uveden v Forsythe et al. (1994) s těmito výsledky:

- Je zjevné, že mnoho subjektů se nechová zcela sobecky, což odporuje konvenční teorii založené na ohledech na sebe.
- Tento výsledek byl od té doby mnohokrát ověřen. Typicky více než 60% subjektů předá kladnou částku, průměrné 20% obdaření. Toto je však velmi závislé na procedurálních detailech, viz dále.

Cherry et al. (2002) říka, že pokud je obdaření nutno „vydělat" např. tak, že navrhovately se stali ti, kteří uspěli ve vědomostním kvízu, převod kladných částek prakticky vymizí. (zde byla anonymita zaručena i vůči experimetátorovi)

List (2007) ukazuje, že pokud je navrhovateli navíc dána možnost vzít peníze příjemci, prevod kladných částek opět zmizí a nejčastějším návrhem se stane sebrání co nejvíc peněz od příjemce. Pokud dále je obdaření vyděláno, přibližne 70% navrhovatelů neprovode žádný převod, zbytek opět sebere, co může.



3.2 Vyjednávání s ultimátem

Tato hra rozšiřuje hru *Diktátor* o druhou fázi, ve které přijemce může buď akceptovat návrh rozdělení obdaření, nebo ho odmítnout, což znamená, že nikdo nedostane nic. Poprvé ji uvedl Guth et al. (1982). V této hře je příjemci dána nějaká strategická síla k ovlivnění výsledku rozdělení. Z předpokladu sobeckosti a použitím subgame-perfect rovnováhy vychází, že navrhovatel nabídne co nejmenší možnou částku a příjemce ji akceptuje, protože něco je lepší než nic.

To se nicméně v laboratoři nepotvrdilo. Typickým výsledkem v rozvinutých zemích je nejčastější nabídka 40-50% obdaření, téměř žádné nabídky nad 50%, málo nabídek 20-40%, které jsou v polovině případů zamítnuty. Zjevně empirické výsledky neodpovídají teoretickým přepokladům.

Existuje však vysoká citlivost na detaily provedení:

- Hoffman et al. (1994): představení hry jako obchodní transakce místo rozdělení daru znamená pokles nejčastějšího návrhu na 40%.
- Pokud jsou role navrhovatele a příjemce rozděleny podle objektivního kritéria výkonu (kvíz, zručnost), klesá nejčastější návrh na 30%.
- Bornstein, Yaniv (1998): Pokud se rozhodují skupiny po 3-7 lidech je nejčastější návrh 35% oproti 44% v případě individuálního rozhodování za jinak stejných okolností.
- Slonim, Roth (1998): Čím vyšši je velikost obdaření, tím nižší je procentní návrh a ten je pravděpodobněji akceptován. To znamená, že příjemce se rozhoduje spíše podle absolutní

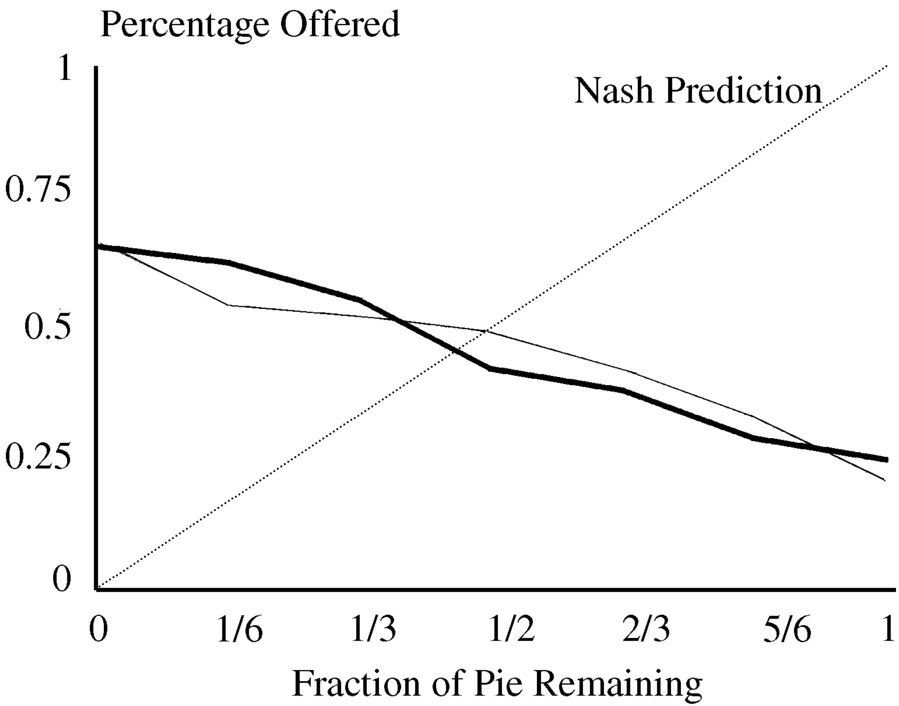
hodnoty návrhu. Např. přijme 1% z \$1000=\$10, ale ne 1% z \$10=\$0.1.

3.3 Dvoukrokové vyjednávání

Navrhovatel navrhne částku, příjmece může ihned akceptovat, nebo odmítnout. V tom případě navrhne příjemci, ten opět může akceptovat, nebo odmítnout, což by znamenalo, že nikdo nedostane nic. Zároveň se uvažuje nižší obdaření v druhém kroku.

Velikost obdaření v prvním kroku je X, v druhém Y, $X > Y$. Předpokládejme sobeckost a opět aplikací subgame-perfect rovnováhy dostáváme: v druhém kroku příjemce nabídne navrhovateli téměř 0 a navrhovatel přijme. Přijemce tedy ví, že v druhém kroku je schopen získat minimálne $Y - \epsilon$, tím pádem odmítne jakýkoukoliv nižší nabídku navhrhovatele. Takže nejlepší, co může udělat navrhovatel, je, že nabídne Y, příjemce přijme a nechá si tak $X - Y$.

Goeree, Holt (2000) provedli tento experiment a zjistili, zcela opačný výsledek:


Percentage Offered
1
0.75
0.5
0.25
0
Nash Prediction
0
1/6
1/3
1/2
2/3
5/6
1
Fraction of Pie Remaining

3.4 Hra investice

V této hře jsou dva hráči: investor a makléř. Investor na začátku dostane obdaření X a může část $Y \leq X$ odeslat makléři. Peníze jsou u makléře zhodnoceny vynásobením koeficientem α. Makléř může investorovi zpět vrátit $Z \leq \alpha Y$. To si lze představit tak, že makléř pošle zpět zisk snížený o poplatek, nebo jednoduše vše ukradne. Celkový výdělek investora je $X - Y + Z$, makléře $\alpha Y - Z$.

Za předpokladu sobeckosti a aplikací subgame-perfect rovnováhy zjistíme, že makléř nepošle nic zpátky. Investor s tím počítá, takže nic nepošle makléři. Není tedy vytvořen žádný ekonomický přebytek. Maximálního přebytku lze dosáhnout pokud investor pošle vše. Z tohoto pohledu už rozhodnutí makléře nic neovlivní.

Berg et el. (1995) provedli tento experiment s parametry $X = \$10$, $\alpha = 3$. Jedním z výsledků je tento graf:

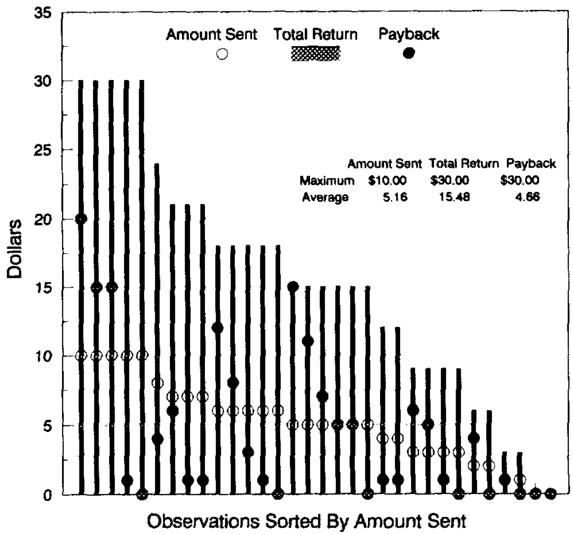


FIG. 2. Trust experiment results showing amount sent (○), total return (■), and payback (●). No history was provided to the subjects.

Reference

[1] K. J. Arrow, M. D. Intriligator, Handbook of Mathematical Economics, Vol. 1, ISBN: 0444861262

[2] Wikipedia: Imputation (game theory), Cooperative game, Core (game theory), Transferable utility

[3] L. Polák: Teorie her, učebný text predmetu Teorie her, Masarykova univerzita

[4] M. Maschler and B. Peleg, Pacific J. Math. Volume 18, Number 2 (1966), 289-328.

[5] J. Nash, "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the National Academy of Sciences 36(1), (1950), 48-49.

[6] Experimental Economics, lecture notes, Peter Katuščák, M.A., M.B.A., Ph.D.

[7] Robert Forsythe, Joel L. Horowitz, N.E. Savin, Martin Sefton, Fairness in Simple Bargaining Experiments, Games and Economic Behavior, Volume 6, Issue 3, May 1994, Pages 347-369, ISSN 0899-8256, 10.1006/game.1994.1021. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825684710219)

[8] Hardnose the Dictator, Todd L. Cherry, Peter Frykblom and Jason F. Shogren, The American Economic Review, Vol. 92, No. 4 (Sep., 2002), pp. 1218-1221

[9] List, John A., On the Interpretation of Giving in Dictator Games. Journal of Political Economy, Vol. 115, No. 3, 2007. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1076569

[10] Werner Güth, Rolf Schmittberger, Bernd Schwarze, An experimental analysis of ultimatum bargaining, Journal of Economic Behavior & Organization, Volume 3, Issue 4, December 1982, Pages 367-388, ISSN 0167-2681, 10.1016/0167-2681(82)90011-7. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167268182900117)

[11] Learning in High Stakes Ultimatum Games: An Experiment in the Slovak Republic, Robert Slonim and Alvin E. Roth, Econometrica, Vol. 66, No. 3 (May, 1998), pp. 569-596

[12] Jacob K. Goeree, Charles A. Holt, Asymmetric inequality aversion and noisy behavior in alternating-offer bargaining games, European Economic Review, Volume 44, Issues 4-6, May 2000, Pages 1079-1089, ISSN 0014-2921, 10.1016/S0014-2921(99)00048-3. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014292199000483)

[13] Joyce Berg, John Dickhaut, Kevin McCabe, Trust, Reciprocity, and Social History, Games and Economic Behavior, Volume 10, Issue 1, July 1995, Pages 122-142, ISSN 0899-8256, 10.1006/game.1995.1027. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825685710275)