Solutions

Michal Abaffy

PřF MU

21. listopadu 2011

Hry v strategickej forme

Časť 1: Každý sám za seba

Definícia

Nech X je množina stratégii i-teho hráča a Z je množina stratégii ostatných hráčov. Nech $u_i : X \times Z \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia i-teho hráča. Stratégia $x \in X$ **dominuje** *stratégii $y \in X$ ak pre všetky možné stratégie $z \in Z$ platí $u_i(x, z) \geq u_i(y, z)$ a existuje stratégia $z' \in Z$ taká, že $u_i(x, z') > u_i(y, z')$.*

Definícia

Stratégia $x \in X$ sa nazýva **nedominovaná***, ak neexistuje stratégia $x' \in X$, ktorá by jej dominovala.*

V hrách, kde každý hrá sám za seba nemá zmysel hrať dominované stratégie.

Hry v strategickej forme

Definícia

Nech X je množina stratégii hráčov, nech u_i je úžitková funkcia i-teho hráča. Situácia $x \in X$ **dominuje podľa Pareta** *situácii $x' \in X$, ak*

$$\forall i : u_i(x) \geq u_i(x') \ a \ \exists i : u_i(x) > u_i(x')$$

Definícia

Situácia $x \in X$ sa nazýva **optimálna podľa Pareta**, *ak neexistuje situácia, ktorá by jej dominovala podľa Pareta.*

Niektoré situácie optimálne podľa Pareta možu priniesť niektorému z hráčov menej, ako si sám dokáže zaručiť. Viď príklad neskor.
Možnost zaviesť *imputation set*, kde sú tie situácie, ktoré sú optimálne podľa Pareta a každý hráč dostane aspoň toľko, koľko si vie sám garantovať.

Hry v strategickej forme

Definícia

Nech X_i je množina stratégii i-teho hráča a Z_i je množina stratégii ostatných hráčov. Nech $u_i : X_i \times Z_i \to \mathbb{R}$ je úžitková funkcia i-teho hráča. Situácia $x = (y, z), y \in X_i, z \in Z_i$ sa nazýva **rovnovážna podľa Nasha**, *ak platí*

$$\forall i, \forall y' \in X_i : u_i(x) \geq u_i(y', z)$$

Pretlmočené: Situácia je rovnovážna podľa Nasha, ak si žiaden z hráčov sám nepomože k lepšej výhre. V [5], Nash dokázal nasledujúci teorém.

Teorém

Existujú hry, kde pri čistých stratégiách neexistuje situácia RPN, avšak pri zmiešaných stratégiách má každá hra situáciu RPN.

Hry v strategickej forme

Príklad

Uvažujme nasledujúce dve hry dvoch hráčov v strategickej forme:

Stratégie	*1*	*2*	*3*
1	*(1,6)*	*(0,2)*	*(1,3)*
2	*(2,3)*	*(2,2)*	*(2,3)*

Stratégie	*1*	*2*
1	*(6,6)*	*(2,0)*
2	*(0,2)*	*(5,5)*

Pre obe hry. Nájdite nedominované stratégie pre oboch hráčov, nájdite všetky situácie optimálne podľa Pareta a rovnovážne podľa Nasha a imputation sety.

Koaličné hry

Časť 2: Koaličné hry
Predpoklady:
- Máme množinu hráčov N. Majme ľubovolnú koalíciu $S \subseteq N$. Uvažujme, že hráči z S navzájom spolupracujú. Možu zvoliť spoločnú stratégiu, ktorá im garantuje istú sumu $v(S)$, o ktorú sa následne možu istým sposobom rozdeliť.
- Technický detail: výhry musia byť v spoločnej mene (alebo aspoň preveditelné do spoločnej meny), a každý hráč si každú výhru cení rovnako (úžitkové funkcie roznych hráčov su rovnaké).
- Zjavne: $S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.
- Požadujeme: $v(\emptyset) = 0$.

Aj iný typ koaličných hier: hráči možu spolupracovať v ľubovolnej koalícii, ale výhry nie sú prenosné. S takýmto typom hier sa pracuje zložitejšie, my sa nimi nebudeme zaoberať.

Jadro (The core)

Chcené riešenie problému (nemusí existovať): pre každú koalíciu platí, že súčet výhier jej hráčov je aspoň toľko, koľko garantuje účasť v koalícii.
Formálne:
Riešenie je **payoff vector** $(x_1, ..., x_n)$, kde x_i predstavuje výhru i-teho hráča a platí $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Definícia

Jadro sú také payoff vectory, kde platí:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Jadro (The core)

Príklad

Nie vždy musí takéto riešenie existovať.

$v(\emptyset) = 0,$
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1,$
$v(\{1,2,3\}) = 1.$

Jadro (The core)

V jednoduchých prípadoch riešime tak, že zvolíme koalíciu všetkých hráčov a nakreslením.

Príklad

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1,2\}) = 1, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 3$
$v(\{1,2,3\}) = 4$

Riešenie: nakreslíme trojuholník $(4,0,0), (0,4,0), (0,0,4)$ a vkresľujeme doň nerovnosti.

V prípade, že jadro neexistuje, môžeme chcieť od riešenia aspoň, aby to bol takzvaný **rozumný payoff vector**, teda by malo spĺňať:

$$\forall i : x_i \leq \max_S \{v(S) - v(S - \{i\})\}$$

Jadro (The core)

Výhody:
- Satisfy all subgroup rationality, i.e., no subgroup is offered less than it could obtain by itself.

Nevýhody:
- Jadro nemusí existovať.
- Može nájsť množinu riešení a nie je jasné, ktorý hráč koľko dostane.

Dajú sa čiastočne odstrániť (no vzniknú nové nedostatky) zavedením silného (slabého) ϵ-core, kde riešenie x musí spĺňať:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \epsilon, \text{ respektíve}$$

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - |S|\epsilon$$

Simple games

Simple games spĺňajú nasledujúce axiómy:
(1) $\forall S \subseteq N : v(S) = 0$ or $v(S) = 1$.
(2) $v(\emptyset) = 0$
(3) $v(N) = 1$
(4) No losing set contains a winning subset. (Podľa mňa zbytočný, plynie z axiómov pre charakteristickú funkciu v.)

Významná podtrieda simple games (**rozhodujúce SG**) spĺňa i nasledovný axióm:
(5) $\forall S \subseteq N : v(S) + v(N - S) = 1$.

Shapley vector

Jednoduché hry vačšinou nemajú riešenie v podobe jadra.
Riešenie (nielen pre RSG): **Shapleyho vector** x

$$x_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}(v(S) - v(S - \{i\}))$$

Predpoklady vedúce k Shapleyho vectoru: aditivita na nezávislých hrách; symetria hráčov; linearita pri násobení skalárom (hra a vektor); $\sum_{i \in S} x_i(u) = u(S)$, kde $S \subseteq N$ je ľubovolná koalícia, ktorá obsahuje všetkých podstatných hráčov (hráč i je podstatný, ak existuje koalícia S, tž $v(S \cup \{i\}) > v(S) + v(\{i\})$).

Interpretácia: Each individual is assumed to enter every possible coalition in every way randomly, and he is then assigned the expected value of the incremental gain he brings to all.

Shapley vector

Príklad

Voľby do parlamentu. Zvolených 5 strán a nech A, B, C, D, E *značia počet poslancov jednotlivých strán.* $A = 55, B = 30, C = 25, D = 22, E = 18$. *Víťazné koalície sú tie, ktoré majú viac ako 75 poslancov. Spočítajte SV.*

Riešenie na ďalšej strane.

Shapley vector

Riešenie: Víťazne koalície (s čiarkou sú značení tí, ktorých príchod do koalície zmení nevíťaznú koalíciu na víťznú):
$A'B', A'C', A'D', A'BC, A'BD, A'B'E, A'CD, A'C'E, A'D'E, B'C'D', ABCD,$
$A'BCE, A'BDE, A'CDE, B'C'D'E, ABCDE.$
$x_A = 3\frac{3!1!}{5!} + 6\frac{2!2!}{5!} + 3\frac{1!3!}{5!} = \frac{18+24+18}{120} = \frac{1}{2}$
$x_B = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$
$x_C = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$
$x_D = 1\frac{3!1!}{5!} + 2\frac{2!2!}{5!} + 1\frac{1!3!}{5!} = \frac{6+8+6}{120} = \frac{1}{6}$
$x_E = 0$
Kontrola: $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 1 = v(N)$.

Stable set

Predpoklad: plne kooperatívna hra, zvolí sa veľká koalícia a jej zisk sa distribuuje pomocou payoff vectoru medzi hráčov.

Definícia

Imputation *je taký payoff vector x, kde žiaden hráč nedostane menej ako si dokáze sám zaručiť.*

$$\forall i : x_i \geq v(\{i\})$$

Definícia

Majme hru (N, v) a nech x, y sú dve imputations (N, v). x **dominuje** *y, ak $\exists S \neq \emptyset$, tž $\forall i \in S : x_i > y_i$ a $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ (Prečo nie radšej $\sum_{i \in S} y_i < v(S)$?).*

In other words, players in S prefer the payoffs from x to those from y, and they can threaten to leave the grand coalition if y is used because the payoff they obtain on their own is at least as large as the allocation they receive under x.

Stable set

Definícia

A **stable set** *is a set of imputations that satisfies two properties:*
Internal stability: No payoff vector in the stable set is dominated by another vector in the set.
External stability: All payoff vectors outside the set are dominated by at least one vector in the set.

Von Neumann povodne myslel, že každá plne kooperatívna koaličná hra má stable set riešenie. Nie je tomu tak.

Jadro (The kernel)

Definícia

Majme hru (N, v) a payoff vector x.

$$s_{ij}^{v}(x) := \max_{S \subseteq N - \{j\}; i \in S} \{v(S) - \sum_{k \in S} x_k\}$$

Čo $s_{ij}^{v}(x)$ predstavuje?
Predpokladajme, ze j chce vystúpiť z veľkej koalície, kde sa prerozdeľuje pod payoff vectorom x. Predpokladajme, že ostatní hráči sú spokojní so svojou časťou x_k. Takže ak j sa rozhodne nespolupracovať, hráč i može získať maximálne $s_{ij}^{v}(x)$, ak ostatní hráči budú súhlasiť s vytvorením koalície S, kde ich zisk zo zisku koalície bude rovný ich zisku v povodnom payoff vectore.
Intuitívne, ak $s_{ij}^{v}(x) > s_{ji}^{v}(x)$, i má vačšiu vyjednávaciu silu ako j pri payoff vectore x.

Jadro (The kernel)

Od dobrého riešenia očakávame, že každá dvojica hráčov bude mať voči sebe rovnakú vyjednávaciu silu. Platí ale, že hráč i je odolný voči hrozbám iných hráčov, ak $x_i - v(\{i\}) = 0$, pretože može zdrhnúť a spraviť si vlastnú koalíciu.

Definícia

Jadro hry obsahuje také imputations, kde žiadny hráč nemá nad žiadnym hráčom vyjednávaciu silu,

$$[s_{ij}^{v}(x) - s_{ji}^{v}(x)][x_j - v(\{j\})] \leq 0 \; and$$

$$[s_{ji}^{v}(x) - s_{ij}^{v}(x)][x_i - v(\{i\})] \leq 0$$

Platí nasledujúca veta [4]:

Teorém

Každá koaličná hra má neprázdny kernel.

References

[1] K. J. Arrow, M. D. Intriligator, Handbook of Mathematical Economics, Vol. 1, ISBN: 0444861262
[2] Wikipedia: Imputation (game theory), Cooperative game, Core (game theory), Transferable utility
[3] L. Polák: Teorie her, učebný text predmetu Teorie her, Masarykova univerzita
[4] M. Maschler and B. Peleg, Pacific J. Math. Volume 18, Number 2 (1966), 289-328.
[5] J. Nash, "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the National Academy of Sciences 36(1), (1950), 48-49.