Sada: 1
Jméno: Marek Bryša
UČO: 323771

1. (a) Ano patří, třída NP je uzavřená na průnik a sjednocení. Stroj pro sjednocení akceptuje, pokud aspoň jeden z M_1, M_2 akceptují vstup. Stroj pro průnik vyžaduje akceptaci obou M_1 a M_2.

   (b) Verifikátor pro $A(w, c)$ funguje takto: ($\bigstar$ je BÚNO oddělovník)

   - Pokud c není tvaru $c_1 \bigstar c_2$ zamítni.
   - Vyzkoušej všchny pozice, kde končí první a začína druhé slovo w_1, w_2.
   - Pokud je první i druhé slovo verifikováno svými $A_1(w_1, c_1)$, $A_2(w_2, c_2)$, akceptuje, jinak zamítá.

   A_1 i A_2 se volá maximálně $|w| + 1$ krát, takže A je polynomiální.

   Stroj $M(x)$ pro L_1^*:

   - Pokud je x prázdné slovo, akceptuj.
   - Nedeterministicky zvol $1 \leq n \leq |x|$:
   - Nedeterministicky zvol rozdělení x na $x_1 x_2 \ldots x_n$:
   - Pokud $M_1(x_i)$ akceptuje pro všechna $1 \leq i \leq n$, akceptuj.
   - Jinak zamítni.

   První dva kroky lze provést v lineárním čase, třetí v polynomiálním. Každý $M_i \in O(n^k)$ a celý cyklus je volán n-krát. Celkem je tedy algoritmus NP.

   (c) Rozhodovací stroj pro $L_1 \cdot L_2$ funguje zcela analogicky jako verifikátor v 1.(b), jen se vypustí certifikáty a místo verifikace se simulují M_1, M_2.

   Slovo w je z L_1^* právě tehdy, když platí jedno z:

   - $w = \epsilon$
   - $w \in L_1$
   - $w = uv$ takové, že $u, v \in L_1^*$

   Nechť $w = w_1 \ldots w_n$. Stroj buduje pole $P(i, j) = true \iff w_{i,j} \in L_1^*$. To udělá tak, že projde všechny podřetězce w postupně od délky 1 do n a simuluje na nich M_1. To jde pomocí 3 vnořených cyklů, přičemž M_1 je voláno n^2-krát na vstup délky nejvýše n, celková časová složitost tedy zůstává polynomiální. Stroj akceptuje, pokud $P(1, n) = true$.

   (d) Je třeba najít verifikátor V a zamítač Z pro $L_1 \oplus L_2$. $L_1, L_2 \in NP \cap co-NP \implies \exists V_1, V_2, Z_1, Z_2$ s polynomiální složitostí.
   V akceptuje $(x, c_1 \bigstar c_2)$ jestliže:
   ($V_1(x, c_1)$ akceptuje $\wedge$ $Z_2(x, c_2)$ akceptuje) nebo ($Z_1(x, c_1)$ akceptuje $\wedge$ $V_2(x, c_2)$ akceptuje). Jinak zamítá.
   Podobně Z akceptuje $(x, c_1 \bigstar c_2)$ jestliže:
   ($V_1(x, c_1)$ akceptuje $\wedge$ $V_2(x, c_2)$ akceptuje) nebo ($Z_1(x, c_1)$ akceptuje $\wedge$ $Z_2(x, c_2)$ akceptuje). Jinak zamítá.
   Oba stroje jsou zřejmě polynomiální. QED

2. Podle vět z přednášky:
   $NTIME(n^2) \subseteq NSPACE(n^2) \subseteq DSPACE(n^4)$
   Podle deterministické separace:
   $DSPACE(n^4) \subsetneq DSPACE(n^5)$, tj. existuje L takový, že $L \in DSPACE(n^5) \wedge L \notin DSPACE(n^4) \implies L \notin NTIME(n^2)$. QED

3. Formuli v CNF lze sice na ekvivalentní v DNF převést, ale obecnně ne v polynomiálním čase.

5. - Předpokládejme, že $x = y = z = 1$. Pak jsou zřejmě splněny klauzule 1,2,3. Žádná z 4,5,6 splněna není. Pokud zvolíme $w = 1$, jsou splněny také 7,8,9,10. Celkem 7.
   - Předpokládejme, že jsou pravdivé právě 2 z x, y, z. BÚNO $x = y = 1, z = 0$. Tím jsou splněny klauzule 1,2,4,5. Pokud zvolíme $w = 1$, jsou splněny také 7,8,9. Celkem 7.
   - Předpokládejme, že je pravdivá právě 1 z x, y, z. BÚNO $x = 1, y = z = 0$. Splníme tím klauzule 1,4,5,6 a volbou $w = 0$ také 8,9,10. Celkem 7.
   - Předpokládejme, že $x = y = z = 0$. Pak volbou $w = 1$ splníme klauzule 4,5,6,7, celkem 4. Volbou $w = 0$ splníme klauzule 4,5,6,8,9,10, celkem 6.

   Hledanou hodnotou je tedy $k = 7$. Pokud je splněno aspoň jedno z x, y, z v každé klauzuli z Φ, lze podle předchozího schematu volit w_i tak, aby bylo splněno právě $7n$ klauzulí $\overline{\Phi}$. Naopak pokud je splněno $7n$ klauzulí $\overline{\Phi}$, podle předchozího je aspoň jedno z x, y, z každé klauzuli Φ také splněno.