Sada 2, Marek Bryša, 323771

1. Redukcí z 3-SAT. Stroj M pro jazyk H má jako vstup kódování 3-SAT forumule φ. Vyzkouší všech 2^n vstupů na formuli φ, a pokud je pro některý splněna, akceptuje, jinak cyklí. To samo o sobě nemá polynomiální složitost, ale redukční funkce pouze f generuje kód stroje M a to zvládne lineárně vzhledem k velikosti forumule φ. QED

2. Existuje polynomiální algoritmus. Za univerzálně kvantifikované proměnné dosadí 0, za existenčně kvantifikové 1 a vyhodnotí formuli. Platnost tohoto postupu lze ověřit při kvantifikaci $\exists e_1, e_2 \forall u_1, u_2$ na formulích $e_1 \wedge e_1, e_1 \vee e_1, e_1 \wedge e_2, e_1 \vee e_2, u_1 \wedge u_1, \ldots, u_1 \wedge e_1, \ldots$, přičemž složitější formule plynou ze strukturální indukce.

3. Problém černého cyklu (BC) je NP-úplný.

   - BC $\in$ NP: Analogicky jako HAM se algoritmus nedeterministicky rozhodne pro počateční vrchol a navazující vrcholy a kontroluje splnění podmínky.
   - BC je NP-těžký: Redukcí z HAM
     f přidá ke grafu $G(v, e)$ $|v|$ dalších samostatně ležících vrcholů, popř. k některému vrcholu připojí "had" délky $|v|$. f je lineární vzhledem k velikosti G.
     $G \in$HAM $\Rightarrow f(G) \in$BC: Pokud byl v G ham. cyklus, bude v $f(G)$ zřejmě právě jeden černý cyklus, a to ten, který byl v G hamiltonovský.
     $G \in$HAM $\Leftarrow f(G) \in$BC: Ten jediný černý cyklus v $f(G)$ bude zároveň hamiltonovský v G.

4. Kameny $\in$ NP: Algoritmus nedeterministicky volí následující tah a kontroluje výhru. Pro každý tah musí zvolit z $|v|$ vrcholů a max. $|e|$ hran, tedy je celkově NP.
   Kameny je NP-těžký: Redukcí z HAM. f zvolí "náhodně" vrchol v_0 z $G(v, e)$ s nejmenším počtem navazujících hran a provede:

   (a) Pokud v_0 má max. jednu hranu, $G \notin$ HAM, tedy na všechny vrcholy umístí 0 kamenů.

   (b) Pokud v_0 má 2 a více hran, přidá 2 vrcholy v_1, v_2 spojené hranou, spojí v_1 se sousedy v_0, umístí na v_0 2 kameny, na ostatní včetně v_1, v_2 jeden kámen.

   V případě (b) je zajištěno, že hra začne ve v_0, protože má jako jediný 2 kameny a bude pokračovat na další vrcholy, přičemž každý navštíví max. jednou. Pokud $G \in$ HAM, existuje taková posloupnost tahů, že se hra vrátí do sousedů v_0, pokračuje do v_1 a skončí úspěšně ve v_2. Naopak taková úspěšná hra je svědkem existence HC v G. Přidané "přemostění" (soused $v_0 \leftrightarrow v_1 \leftrightarrow$ jiný soused v_0) na tom nic nemění díky přidání "ocasu" v_2. f je vzhledem k velikosti G zřejmě lineární.

5. f přidá ke G kliku velikosti 6 a spojí 3 její vrcholy se všemi vrcholy G. Pro každý vrchol G tedy zbudou právě 3 možné barvy. f je lineární vzhledem k velikosti G. Implikace "$\Rightarrow$" i "$\Leftarrow$" zřejmě platí.

6. Redukcí z HAM. SHAM $\in$ NP zřejmě – oproti HAM stačí navíc nedeterministicky volit hranu, která jako jediná dostane ohodnocení 1, zbylé 0. f provede jedno z:

   (a) Pokud v G existuje osamocený vrchol nebo vrchol s jen jednou hranou, nedělá nic, protože takový graf nemá HC, tedy ani SHC.

   (b) Pokud v G existuje vrchol se dvěma hranami, jedné z nich dá ohodnocení 1, všem zbylým 0, neboť pokud v G HC existuje, musí jednou z těchto hran procházet.

   (c) Pokud v G mají všechny vrcholy minimálně 3 a více hran, vybere "náhodně" jeden vrchol v s nejmenším počtem hran a rozdělí ho na 2 vrcholy v_1, v_2 spojené jednou hranou a oba dále spojí se všemi vrcholy, se kterými byl spojen v. Hraně spojující v_1, v_2 přiřadí ohodnocení 1, všem ostatním 0. Pokud v G existoval HC, musel procházet vrcholem v. Nyní SHC v $f(G)$ musí procházet hranou spojující v_1, v_2.

   f je lineární vzhledem k velikosti G. Korektnost obou implikací redukce pro body (a), (b) je zřejmá z předchozí argumentace a toho, že neměníme strukturu grafu. U (c) byla zdůvodněna implikace "$\Rightarrow$". Zbývá vsvětlit "$\Leftarrow$", tedy že rozdělením vrcholu v na dva nevznikne HC, který v původním G nebyl. Může sice vzniknout, ale nebude obsahovat hranu mezi v_1, v_2 s ohodnocením 1, tudíž nebude SHC. Tuto hranu nebude obsahovat, protože jinak by měl i původní graf HC.