

Sada: 1

Jméno: Marek Bryša

UČO: 323771

1. (a) Ano patří, třída NP je uzavřená na průnik a sjednocení. Stroj pro sjednocení akceptuje, pokud aspoň jeden z M_1, M_2 akceptují vstup. Stroj pro průnik vyžaduje akceptaci obou M_1 a M_2 .
- (b) Verifikátor pro $A(w, c)$ funguje takto: (\star je BÚNO oddělovník)

- Pokud c není tvaru $c_1 \star c_2$ zamítni.
- Vyzkoušej všechny pozice, kde končí první a začíná druhé slovo w_1, w_2 .
- Pokud je první i druhé slovo verifikováno svými $A_1(w_1, c_1), A_2(w_2, c_2)$, akceptuje, jinak zamítá.

A_1 i A_2 se volá maximálně $|w| + 1$ krát, takže A je polynomiální.

Stroj $M(x)$ pro L_1^* :

- Pokud je x prázdné slovo, akceptuj.
- Nedeterministicky zvol $1 \leq n \leq |x|$:
- Nedeterministicky zvol rozdělení x na $x_1 x_2 \dots x_n$:
- Pokud $M_1(x_i)$ akceptuje pro všechna $1 \leq i \leq n$, akceptuj.
- Jinak zamítni.

První dva kroky lze provést v lineárním čase, třetí v polynomiálním. Každý $M_i \in O(n^k)$ a celý cyklus je volán n -krát. Celkem je tedy algoritmus NP.

- (c) Rozhodovací stroj pro $L_1 \cdot L_2$ funguje zcela analogicky jako verifikátor v 1.(b), jen se vypustí certifikáty a místo verifikace se simulují M_1, M_2 .

Slovo w je z L_1^* právě tehdy, když platí jedno z:

- $w = \epsilon$
- $w \in L_1$
- $w = uv$ takové, že $u, v \in L_1^*$

Nechť $w = w_1 \dots w_n$. Stroj buduje pole $P(i, j) = \text{true} \iff w_{i,j} \in L_1^*$. To udělá tak, že projde všechny podřetězce w postupně od délky 1 do n a simuluje na nich M_1 . To jde pomocí 3 vnořených cyklů, přičemž M_1 je voláno n^2 -krát na vstup délky nejvýše n , celková časová složitost tedy zůstává polynomiální. Stroj akceptuje, pokud $P(1, n) = \text{true}$.

- (d) Je třeba najít verifikátor V a zamítač Z pro $L_1 \oplus L_2$. $L_1, L_2 \in NP \cap co-NP \implies \exists V_1, V_2, Z_1, Z_2$ s polynomiální složitostí.

V akceptuje $(x, c_1 \star c_2)$ jestliže:

$(V_1(x, c_1) \text{ akceptuje} \wedge Z_2(x, c_2) \text{ akceptuje})$ nebo $(Z_1(x, c_1) \text{ akceptuje} \wedge V_2(x, c_2) \text{ akceptuje})$. Jinak zamítá.

Podobně Z akceptuje $(x, c_1 \star c_2)$ jestliže:

$(V_1(x, c_1) \text{ akceptuje} \wedge V_2(x, c_2) \text{ akceptuje})$ nebo $(Z_1(x, c_1) \text{ akceptuje} \wedge Z_2(x, c_2) \text{ akceptuje})$. Jinak zamítá.

Oba stroje jsou zřejmě polynomiální. QED

2. Podle vět z přednášky:

$$NTIME(n^2) \subseteq NSPACE(n^2) \subseteq DSPACE(n^4)$$

Podle deterministické separace:

$$DSPACE(n^4) \subsetneq DSPACE(n^5), \text{ tj. existuje } L \text{ takový, že } L \in DSPACE(n^5) \wedge L \notin DSPACE(n^4) \implies L \notin NTIME(n^2). \text{ QED}$$

3. Formulí v CNF lze sice na ekvivalentní v DNF převést, ale ne v polynomiálním čase.

5.
 - Předpokládejme, že $x = y = z = 1$. Pak jsou zřejmě splněny klauzule 1,2,3. Žádná z 4,5,6 splněna není. Pokud zvolíme $w = 1$, jsou splněny také 7,8,9,10. Celkem 7.
 - Předpokládejme, že jsou pravdivé právě 2 z x, y, z . BÚNO $x = y = 1, z = 0$. Tím jsou splněny klauzule 1,2,4,5. Pokud zvolíme $w = 1$, jsou splněny také 7,8,9. Celkem 7.
 - Předpokládejme, že je pravdivá právě 1 z x, y, z . BÚNO $x = 1, y = z = 0$. Splníme tím klauzule 1,4,5,6 a volbou $w = 0$ také 8,9,10. Celkem 7.
 - Předpokládejme, že $x = y = z = 0$. Pak volbou $w = 1$ splníme klauzule 4,5,6,7, celkem 4. Volbou $w = 0$ splníme klauzule 4,5,6,8,9,10, celkem 6.

Hledanou hodnotou je tedy $k = 7$. Pokud je splněno aspoň jedno z x, y, z ve Φ , lze podle předchozího schematu zvolit w tak, aby bylo splněno právě 7 klauzulí Φ . Naopak pokud je splněno 7 klauzulí $\bar{\Phi}$, podle předchozího je aspoň jedno z x, y, z ve Φ také splněno.