Úvod

Teorie her je matematická disciplína, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů.

1 Reprezentace hry

Hra je charakterizována dvěma nebo více hráči, množinami akcí (tahů), které tito hráči mohou vykonat v určitých okamžicích, a možnými zisky, kterých hráči mohou dosáhnout. Zisk každého hráče nezávisí pouze na jím vykonaných akcích, ale také na akcích ostatních hráčů. Formálněji, existuje několik odlišných herních reprezentací: *normální forma* (neboli *strategická forma*), *extenzivní forma* či *kooperativní forma* (neboli *forma charakteristické funkce*). Každé přináší jiný popis hry, a slouží tak k různým účelům. Hra v extenzivní formě může být využita ke specifikaci hry v normální formě a hra v normální formě může být použita k definici hry v kooperativní formě, nikoliv však naopak.

1.1 Klasifikace her

Rozlišujeme statické a dynamické hry. U statických her vykonávají hráči své tahy současně, případně neznají zvolené tahy protihráčů. U dynamických her hráči táhnou postupně, a mohou tedy reagovat na předchozí tahy protihráčů. Podle toho, zda každý z hráčů zná zisky všech hráčů ve všech možných výsledcích hry, rozlišujeme hry s úplnými a neúplnými informacemi.

Na základě tohoto členění klasifikujeme hry do čtyř skupin:

- statické hry s úplnými informacemi,
- dynamické hry s úplnými informacemi,
- statické hry s neúplnými informacemi,
- dynamické hry s neúplnými informacemi.

U her s neúplnými informacemi pracujeme s pravděpodobnostními rozděleními, kterými se řídí zisky protihráčů. Zde se budeme zabývat hrami s úplnými informacemi.

1.2 Statické hry a normální forma

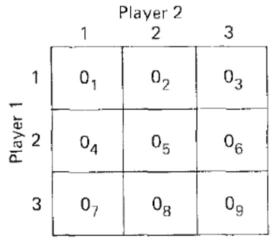
Strategie hráče je kompletní plán akcí, který specifikuje, jaké tahy má hráč vykonat v závislosti na dosavadním průběhu hry. V případě statických her pojmy akce a strategie splývají.

Ke specifikaci statických her s úplnými informacemi slouží normální forma.

Hra v normální formě obsahuje následující prvky:

- množinu hráčů: $\{1, \ldots, n\}$,
- množinu strategií S_i pro každého hráče $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- výplatní funkci $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ pro každého hráče $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Hra dvou hráčů v normální formě je nejčastěji charakterizována pomocí *dvojmatice*.



Obrázek 1: Hra v normální formě v podobě dvojmatice

Normální forma může být použita i k popisu dynamických her. Je však třeba specifikovat, kdy je který hráč na tahu, jaké akce může vykonat a jaké informace má o dosavadním průběhu hry. Pojmy akce a strategie se u dynamických her rozcházejí. Definujme nejprve extenzivní formu.

Příklad: Vězňovo dilema

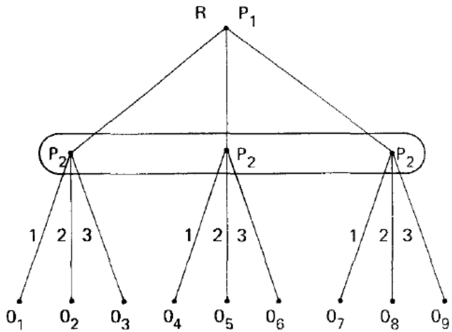
1.3 Extenzivní forma

Extenzivní forma reprezentace hry specifikuje:

- množinu hráčů,
- kdy je který hráč na tahu,
- jaké má hráč informace o dosavadním průběhu hry ve chvíli, kdy je hráč na tahu,
- množinu akcí, které může hráč podstoupit,
- výplatní funkci každého hráče jakožto funkci akcí podstoupených všemi hráči.

Jako první popsali hru pomocí extenzivní formy von Neumann a Morgenstern (1944) a poté Kuhn (1953). V obou případech se jednalo o konečné hry, tj. hry, ve kterých je konečný počet hráčů, tahů i akcí. Příkladem takových her jsou např. šachy nebo poker. Nicméně málokteré situace v ekonomice či politice jsou modelovány konečnými hrami.

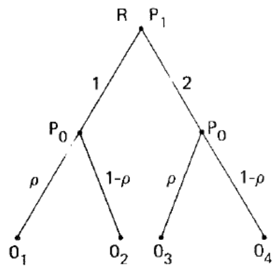
Hra v extenzivní formě je nejčastěji zobrazována pomocí stromu. Jednoduchý trh v prostředí duopolu je ilustrován Kuhnovým herním stromem. Jedná se o zjednodušený případ, kdy si každá ze dvou firem musí vybrat jednu ze tří možných úrovní produkce. Firmy se rozhodují současně. Jejich úrovně produkce určují tržní výstup a zisky obou firem. Na obrázku 2 je popis této hry v extenzivní formě. Každý uzel reprezentuje stav, ve kterém se hra může nacházet (z pohledu nezávislého pozorovatele). Hra začíná v kořeni stromu (označeným R). Každý uzel, který není listem, je označen P_i, což indikuje, že je na tahu hráč i a má na výběr z tahů odpovídajícím větvím stromu vycházejícím z tohoto uzlu. Listy stromu jsou označeny O_j a reprezentují všechny možné výsledky hry. Každá cesta z kořene do listu určuje možný průběh hry.



Obrázek 2: Kuhnův herní strom

V mnoha situacích můžeme vyžadovat, aby hráči táhli současně (statické hry). Nezajímá nás, zda hráči táhli přesně ve stejném okamžiku, podstatné je to, že hráči v okamžiku rozhodnutí o svém tahu nemají informace o tahu protihráčů. Nezáleží na tom, kdo táhne první, protože ostatní nejsou informováni. Tuto situaci znázorňujeme ve stromě tak, že propojíme (oválem či čárkovanou čarou) všechny uzly, o nichž hráč neví, ve kterém z nich se nachází. Tyto uzly tvoří tzv. *informační množinu*. Ze všech uzlů jedné informační množiny musí vycházet stejné hrany. Extenzivní forma tedy umožňuje reprezentovat i statické hry. Obrázky 1 a 2 reprezentují tutéž hru v normální a v extenzivní formě.

V některých případech je třeba do hry zahrnout exogenní nejistotu. V takové situaci přidáme do hry dalšího hráče P_0, nazývaného *Příroda*. Kdykoliv je tento hráč na tahu, s danými pravděpodobnostmi vybere jednu z větví. Příklad hry obsahující *Přírodu* je na obrázku 3.



Obrázek 3: Hra obsahující hráče *Příroda*

Hry, které obsahují pouze jednoprvkové informační množiny se nazývají hry s *perfektními informacemi*. Takovou hrou jsou šachy. V každém okamžiku hry znají všichni hráči všechny detaily cesty z kořene do současného uzlu. To neplatí pro poker, či pro aukce s uzavřenými nabídkami.

V terminologii stromů a informačních množin můžeme *strategii* definovat jako funkci, která každé informační množině hráče přiřadí jednu z alternativ (tj. hran) vycházejících z této informační množiny.

1.4 Dynamické hry a normální (strategická) forma

Dynamické hry je možné také reprezentovat v normální formě. Nyní ovšem rozlišujeme pojmy akce a strategie. V záhlavích tabulky (resp. dvojmatice) nyní již nebudou akce, ale kombinace akcí, přesněji strategie.

Uvažujme modifikaci hry v extenzivní formě na obrázku 2. Nahraďme informační množinu hráče P_2 dvěma informačními množinami, a to tak, že pokud hráč P_1 zvolí možnost 1, P_2 je informován, zvolí-li P_1 možnost 2 nebo 3, P_2 neví, ve kterém z těchto dvou uzlů se nachází. Tato hra je v normální formě reprezentována maticí 3×9, protože existuje 9 různých strategií pro P_2. Strategiemi hráče P_2 jsou uspořádané dvojice (i, j), $i, j \in \{1, 2, 3\}$, které chápeme: „jestliže P_1 hrál 1, hraj i, jinak hraj j“.

1.5 Kooperativní (koaliční) forma

V normální formě je kladen důraz na jedince, a to v tom smyslu, že zisk hráče závisí na jím zvolené strategii a na strategiích zvolených ostatními hráči. Není přikládán význam možnostem spolupráce mezi hráči. Při studiu tvorby kartelů, mezinárodního obchodu, vyjednávání nebo jiných skupinových jevů může být kladen důraz na možné zisky ze spolupráce mezi jednotlivými účastníky.

Uvažujme následující hru dvou hráčů v normální formě (jedná se o obecné vězňovo dilema), $a_i > b_i > c_i > d_i$.

		Player 2	
		1	2
Player 1	1	b_1, b_2	d_1, a_2
	2	a_1, d_2	c_1, c_2

Obrázek 4: Obecné vězňovo dilema v normální formě

Označme $v(S)$ zisk, kterého může dohromady dosáhnout koalice hráčů S, pokud hrají jako jeden hráč. v nazýváme *charakteristická funkce*. Je to funkce z podmnožin všech hráčů do reálných čísel. Pro hru n hráčů existuje $2^n - 1$ neprázdných koalic.

Označení $v(\overline{ij})$ je použito ke specifikaci konkrétní koalice sestávající z hráčů i a j. Charakteristická funkce pro vězňovo dilema na obrázku 4 je následující:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\overline{1}) = c_1, \quad v(\overline{2}) = c_2$$
$$v(\overline{12}) = \max\{(b_1 + b_2), (a_1 + d_2), (a_2 + d_1), \}.$$

Charakteristická funkce může být považována za počáteční řešení hry v tom smyslu, že její výpočet poskytne náhled do struktury hry. V tomto příkladě byly hodnoty spočteny jako odpovědi na otázku, jakého maximálního zisku může koalice dosáhnout za předpokladu, že ostatní hráči se snaží tento zisk minimalizovat. Nejlepší, co může udělat sám hráč P_1, resp. P_2, je hrát druhou strategii a získat c_1, resp. c_2. Dohromady mohou hráči získat $b_1 + b_2$. V tomto příkladě je oprávněné vyhodnotit $v(\overline{1})$ jako c_1, protože hráč P_2 tím, že minimalizuje zisk hráče P_1, současně optimalizuje své vlastní skóre. To nemusí být pravda obecně, jako protipříklad slouží následující hra.

		Player 2: 1	Player 2: 2
Player 1	1	5, 5	0, -100
Player 1	2	10, 5	-1, -1000

Obrázek 5:

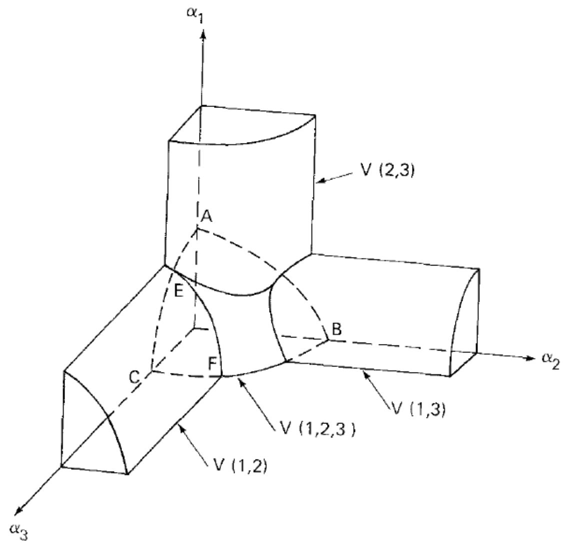
Zde charakteristická funkce nabývá hodnot

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\overline{1}) = 0, \quad v(\overline{2}) = 5, \quad v(\overline{12}) = 15.$$

Zde je poněkud nelogické považovat pozici hráče P_2 za nejvýhodnější. Paradox je v zacházení s hrozbami. Výpočet charakteristické funkce pro hráče P_1 nebere v úvahu vysoké náklady hráče P_2 spojené s výběrem strategie 2.

Můžeme definovat *zobecněnou charakteristickou funkci* (či *charakterizující funkci*) $V(S)$, která pro každou množinu hráčů S určuje množinu optimálních dosažitelných zisků.

Způsob definice zobecněné charakteristické funkce je ilustrován na obrázku 6, který zobrazuje příklad se třemi hráči. Osy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ znázorňují zisky obdržené po řadě hráči 1, 2 a 3. Zacházíme s $V(S)$, jako by to byl válec, který vyřízne část Paretovsky optimální plochy pro hru n hráčů jako celek. Například koalice $\overline{12}$ může získat alespoň tolik, kolik se jí dostává v libovolném bodě části Paretovsky optimální množiny ABC ohraničené EFC.



Obrázek 6: Zobecněná charakteristická funkce