

Table des matières

1	Description du problème	2
2	Le projet initial	3
1	La modélisation	3
2	L'algorithme	3
3	L'implémentation	3
4	Résultats	4
3	Amélioration du modèle	5
1	Les valeurs des variables	5
2	Contraintes de coupes et inégalités valides	6
3	Étude de la structure des solutions	6
4	Cas Wagner-Whitin	6
5	Instance finale	6
4	Conclusion	7
A	Implémentation lpsolve	8

Partie 1

Description du problème

Le problème de planification de production étudié dans cet exercice est appelé *Uncapacitated Lot-Sizing Problem*. Comme son nom l'indique, il n'y a dans ce cas précis aucune contrainte de capacité ou de limite de production. Le plan de production est décomposé en T instances, dont on cherche à décider l'ouverture ou non (y_t), ainsi que la quantité d'éléments à produire x_t . L'ouverture d'une instance entraîne un coût fixe (f_t), ainsi qu'un coût unitaire de production (p_t). Il faut impérativement subvenir aux demandes des clients pour tout instant t , mais il est possible à une instance t de produire plus que nécessaire, et stocker l'ensemble de la "surproduction" (s_t) jusqu'à $t + 1$ moyennant un coût unitaire de h_t .

Nous tentons dans cette analyse de résoudre quelques instances de ce problème via un algorithme de **branch & bound**, et nous essayons de comprendre quelles sont les astuces de modélisation et les choix de résolution permettant d'améliorer au fur et à mesure notre rapidité de résolution.

Partie 2

Le projet initial

1 La modélisation

Les algorithmes de branch & bound sont très utiles pour résoudre des problèmes en variables entières, en effectuant une série de résolution du problème “relaché” et en introduisant à chaque étape une nouvelle contrainte d’intégrité sur une des variables de décision. Nous introduisons donc un modèle correspondant au problème ci-dessus, mais dont les variables entières ou binaires (y_t) ne possèdent pas de contraintes d’intégrité.

Voici le modèle proposé :

$$\left[\begin{array}{lll} \min z = & \sum_{t \in \{1 \dots T\}} y_t \times f_t + x_t \times p_t + s_t \times h_t & \\ s/c & s_{t-1} + x_t & = d_t + s_t \quad \forall t \in \{0 \dots T\} \\ & y_t * M & \geq x_t \\ & s_0 & = 0 \\ & s_t & = 0 \\ & y_t, x_t, s_t & \geq 0 \end{array} \right]$$

La première contrainte, que nous appelons contrainte d’équilibre, impose l’absence de perte de produit lors de la production. En effet, l’ensemble des éléments entrants (stock précédent et production) soit être égal à l’ensemble des éléments sortants (ventes et stock). La seconde contrainte implémente une constante M très grande imposant l’ouverture de l’instance si au moins un élément est produit par cette instance. Les contraintes (3) et (4) indiquent l’état du stock au départ et à l’arrivée, fixés ici à 0.

2 L’algorithme

Pour résoudre entièrement le problème, nous avons exécuté à la main l’algorithme du branch & bound en effectuant les choix suivants :

- Relâcher ou contraindre les variables y_t à 0 ou 1.
- Toujours choisir la variable y_t la plus proche de 0 et la fixer à 0 (dans un premier temps)

3 L’implémentation

Nous utilisons pour la résolution le solveur GLPK sous sa forme “lpsolve”. L’implémentation de la modélisation dans ce langage est donné en Annexe A Afin de contraindre une variable, nous ajoutons à chaque étape une ligne de type :

`s.t. contrX :y[A]=B;`

avec $A=t$ et $B \in \{0, 1\}$

Nous fixons également M à 100, valeur arbitrairement grande.

4 Résultats

L'exécution de l'algorithme de branch&bound nous permet d'obtenir l'arbre de la figure 2.1

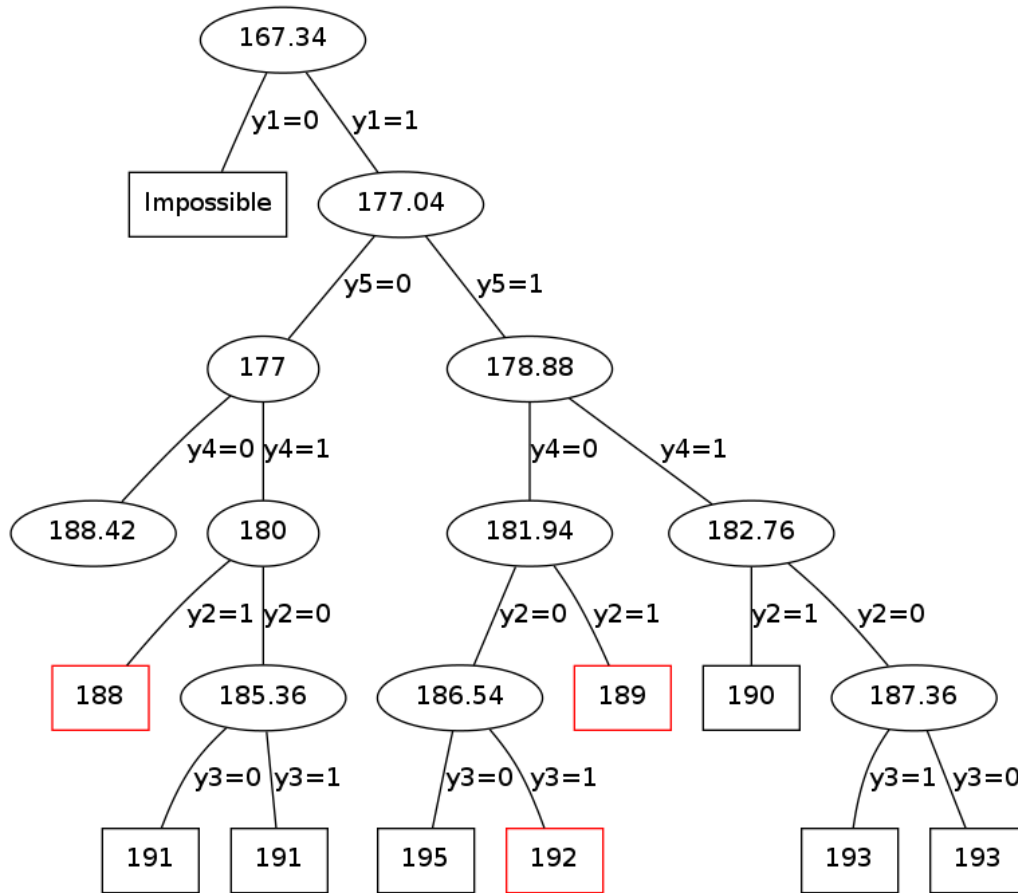


FIGURE 2.1 – Arbre initial

On obtient un résultat optimal égal à 188, avec de très nombreuses branches et nœuds parcourus. Les choix de variables et de valeurs (algorithme de branch&bound) ne sont pas optimaux, et il est sûrement possible d'améliorer notre modélisation ou notre système de résolution.

Partie 3

Amélioration du modèle

1 Les valeurs des variables

Le seul élément variable dans notre modélisation est M . En cherchant à améliorer la précision des résolutions du problème relâché dans notre branch&bound, nous arrivons à la conclusion suivante :

Plus M est petit, plus l'encadrement des valeurs possibles de chaque y_t est petite. La valeur retournée par le solveur est donc plus proche de la valeur maximum réelle. Il faut cependant toujours conserver un M supérieur à la production maximale de chaque instance. On remarque, que la production maximale d'une instance est égale à la demande totale des clients. En effet, nous pourrions choisir de produire tous les éléments lors de la première instance, puis de répartir la production sur toutes les instances suivantes. Dans l'instance donnée, M doit être supérieure ou égale à 25. En modifiant M à 25, nous obtenons un arbre très similaire à la première résolution.

Afin d'améliorer encore notre modélisation, nous observons que la valeur maximale de M dépend de l'instance t . En effet, on ne peut produire au maximum que la demande totale **restante**. Dans l'instance donnée, M devient donc un tableau de 5 valeurs égales à $\{25, 22, 17, 11, 8\}$. Nous reprenons alors l'algorithme de branch&bound, et nous obtenons l'arbre de la figure 3.1

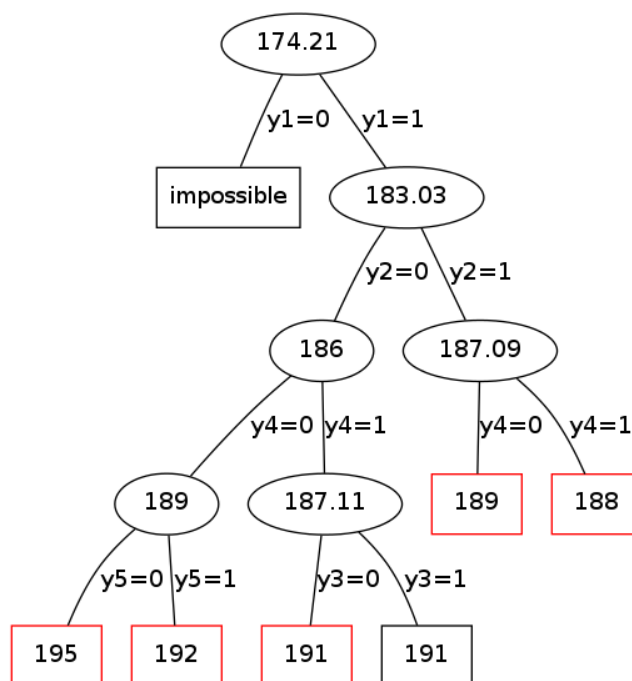


FIGURE 3.1 – Modification de la valeur de M : tableau

2 Contraintes de coupes et inégalités valides

Dans cette section, nous avons intégré à notre modèle une contrainte de type inégalité valide présenté par Laurence Wolsey. (3.1)

$$s_{t-1} \leq d_t * (1 - y_t) \quad (3.1)$$

L'inéquation (3.1) exprime la volonté, pour une date t , de produire et de stocker à l'instance $t - 1$ l'intégrité de la demande de la date t . En effet, il est irrationnel dans un problème sans contrainte de capacité (*ULS*) de se limiter en quantité à l'instance la moins coûteuse. Il est donc inutile d'ouvrir une instance dès que l'on a réussi à stocker suffisamment à l'instance précédente.

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \geq d_t \quad (3.2)$$

&

$$y_t = 0 \Rightarrow x_t = 0 \quad (3.3)$$

Ainsi (3.1) est toujours valide, et élague l'arborescence des solutions en forçant des variables y_t relâchées à se fixer à 0 .

Les résultats ont confirmé l'amélioration du modèle puisque l'arbre obtenue par Branch and Bound est réduit à deux feuilles.

3 Étude de la structure des solutions

4 Cas Wagner-Whitin

Nous sommes dans un cas de coûts de Warner-Within lorsqu'il est systématiquement plus coûteux de produire et de stocker un produit pour une instance ultérieure, que de produire directement à l'instance t (unitairement). Un exemple de cas est donné dans le tableau 3.1

t	1	2	3	4	5
d_t	3	5	6	3	8
p_t	3	4	4	8	3
h_t	2	1	5	1	-
f_t	10	8	6	4	2

TABLE 3.1 – Exemple de cas : Warner-Within

La logique nous amène alors à une résolution simple : On ne stocke jamais de produit, et on produit pour chaque instance t la demande d_t associée. Néanmoins, nous ne pouvons pas appliquer cette méthode directement. En effet, si le gain total obtenu $((p_t - s_{t-1}) \times d_t)$ est inférieur au coût initial de l'instance t (f_t), alors il est plus intéressant de stocker.

5 Instance finale

Partie 4

Conclusion

Annexe A

Implémentation lpsolve

```
#Données
param nbpostes;

set T:=1..nbpostes;
set T2:=0..nbpostes;
param M:=100;

param d{T};
param h{T};
param p{T};
param f{T};

#Variables de décision
var x{T} >=0;
var y{T} >=0;
var s{T2}>=0;

#Fonction objectif
minimize couts : sum{i in T} (y[i]*f[i] + x[i]*p[i] + h[i]*s[i]);

#Contraintes

s.t. Equilibre{i in T} : (s[i-1]+x[i])=(s[i]+d[i]);
s.t. Activation{i in T}: y[i]*M >= x[i];
s.t. contr1 :s[0]=0;
s.t. contr2 :s[nbpostes]=0;

#Résolution
solve;

#Affichage des res
display : s;
display : x;
display : y;
display : sum{i in T} (y[i]*f[i] + x[i]*p[i] + h[i]*s[i]); #fonction objectif à recopier

data;

param nbpostes:= 5;
param d:= 1 3 2 5 3 6 4 3 5 8;
```



```
param p:= 1 2 2 4 3 6 4 8 5 10 ;  
param h:= 1 3 2 2 3 3 4 2 5 0;  
param f:= 1 10 2 8 3 6 4 4 5 2;  
  
end;
```