Couplage de 2 plaques carrées

12 août 2022

1 Équations résolues par le solveur TH

1.1 Modèle continu

1.1.1 Sans rayonnement vers l'extérieur

Le problème physique posé est le suivant : on accole deux plaques carrées de côté L et d'épaisseur négligeable par un de leur côté. On chauffe les côtés libres de ces plaques : on assimile cela à des

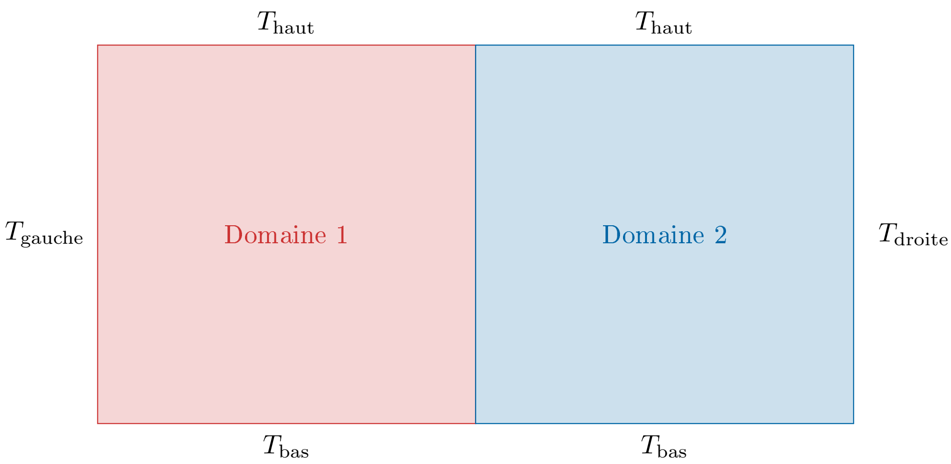

FIGURE 1 – Schéma du couplage entre deux plaques de longueur L

conditions aux limites en température de type :

— pour le premier domaine (plaque carrée entre $x = 0$ et $x = L$) :

$$T(x = 0) = T_{\text{gauche}}, T(y = 0) = T_{\text{bas}}, T(y = L) = T_{\text{haut}};$$

— pour le deuxième domaine (plaque carrée entre $x = L$ et $x = 2L$) :

$$T(x = 2L) = T_{\text{droit}}, T(y = 0) = T_{\text{bas}}, T(y = L) = T_{\text{haut}}.$$

La frontière entre les deux domaines donne lieu à un échange thermique. On se place en stationnaire. Si on note $T^{(1)}$ la température du premier domaine et $T^{(2)}$ celle du second, on doit avoir continuité de la température et continuité du flux. Pour cela, au domaine 1 une condition aux limites en températures :

$$T^{(1)}(x = L^-) = T^{(2)}(x = L^+),$$

ainsi qu'une condition pour la continuité du flux lors de la mise à jour du domaine 2 :

$$\hat{n}_2.h_2 \left.\frac{dT^{(2)}}{dx}\right|_{x=L^+} = -h_1 \left.\frac{dT^{(1)}}{dx}\right|_{x=L^-},$$

où on note $\hat{n}_1$ et $\hat{n}_2$ le vecteur normal dirigé vers l'extérieur pour chacun des sous-domaines et avec h_1 et h_2 les coefficients de diffusion thermique de chacun des domaines. À l'intérieur des domaines, on résout l'équation de la chaleur en stationnaire :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

1.1.2 Avec rayonnement vers l'extérieur

Pour ajouter des non-linéarités, on suppose également qu'on a un rayonnement de chacune des plaques vers l'extérieur du type :

$$\sigma(T^4 - T_{\text{extérieur}}).$$

On assimile ce rayonnement à une perte ou un gain de chaleur. On doit donc résoudre une équation du type :

$$k\Delta T + \sigma(T^4 - T_{\text{extérieur}}) = 0,$$

où on a noté σ la constante de Stefan (en $W/m^2/K^4$) et k le coefficient de conduction thermique (en $W/m/K$).

1.2 Résolution

On résout pour chaque domaine l'équation $F(T) = 0$ avec la méthode de Newton. On doit donc, à une itération $n+1$, connaissant la température $T^{(n)}$ du domaine considéré :

- Calculer $F\big(T^{(n)}\big)$;
- Calculer la jacobienne de F en $T^{(n)}$, qu'on note $J_F\big(T(n)\big)$;
- Résoudre en ΔT le problème linéaire $J_F\big(T^{(n)}\big)\Delta T = -F\big(T^{(n)}\big)$;
- Mettre à jour la nappe de température : $T(n+1) = T^{(n)} + \Delta T$

1.3 Discrétisation

À l'intérieur de chacun des domaines carrés de longueur L, on a $N \times N$ mailles. On résout pour une maille à l'intérieur du domaine l'équation de la chaleur discrétisée avec des différences finies (schéma centré d'ordre 2) :

$$-4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} = 0,$$

où on a noté $T_{i,j}$ la température à la maille (i,j). Prenons le domaine de gauche : il est couplé au second domaine sur son côté droit, et à trois conditions aux limites en haut, en bas et à gauche. On a pour les mailles sur ces trois côtés :

- Pour une maille en bas :

$$-4T_{N,j} + T_{N,j-1} + T_{N,j+1} + T_{N-1,j} = -T_{\text{bas}}.$$

- Pour une maille en haut :

$$-4T_{0,j} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} + T_{1,j} = -T_{\text{haut}}.$$

- Pour une maille à gauche :

$$-4T_{i,0} + T_{i,1} + T_{i+1,0} + T_{i-1,0} = -T_{\text{gauche}}.$$

- Pour une maille à droite : on explicitera ce cas par la suite

On a donc un système de la forme $A \times T = b$ avec A symétrique : c'est une matrice tridiagonale avec une diagonale de -4 et des diagonales supérieure et inférieure de 1.

On a aussi du rayonnement vers l'extérieur. On l'assimile à une production ou une perte de chaleur. Pour une maille quelconque dans le domaine, on aura :

$$-4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - \sigma C(T_{i,j}^4 - T_{\text{ext}}^4) = 0,$$

où on a noté σ la constante de Stefan (en $W/m^2/K^4$) et $C = dx/k$ (en $K.m/W$) avec k le coefficient de conduction thermique (en $W/m/K$).

Ici, on calcule F en deux étapes :

1. On calcule $A \times T - b$ et on obtient un vecteur de longueur $N \times N$.
2. On retranche à chacun des éléments $\ell = N * i + j$ de ce vecteur le rayonnement donné par $\sigma * C * (T_{i,j}^4 - T_{\text{ext}}^4)$ (i et j variant de 0 à $N - 1$)

1.4 Implémentation

Le calcul de F est réalisé à l'aide de la fonction `calcul_F`. Par ailleurs, la mise à jour de la jacobienne de F, construite explicitement, est donnée par la fonction `maj_jacobienne`. Ensuite, la résolution du problème linéaire issu de l'itération de Newton est faite via un gradient conjugué, avec la fonction `do_iteration`.

1.5 Couplage

On doit garantir la continuité du flux et de la température à l'interface. Pour cela, on impose une condition aux limites en température pour le domaine 1 et en flux pour le domaine 2. Concrètement, la température du domaine 2 est utilisée comme conditions aux limites pour la mise à jour de la température du domaine 1 tandis qu'on impose une égalité des flux sortant du domaine 1 et rentrant dans le domaine 2. Ce dernier point ce traduit par :

$$-T_{i,0}^{(2)} + T_{i,1}^{(2)} = \frac{h_1}{h_2}\big(T_{i,N}^{(1)} - T_{i,N-1}^{(1)}\big).$$