Бум-тряс принцип за управления в симплекс

Александър Гудев

Дефиниция. Нека $I \subset \mathbb{R}, A(t) \in M_{n\times n} \forall t \in I$. *Фундаментална матрица* на линейната система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{1}$$

се нарича всяка матрица $\Phi : I \to M_n$, чиито стълбове са линейно независими решения на системата.

1. Произволно решение има вида

$$x(t) = \sum\nolimits_i \alpha_i \Phi_i(t) = \Phi(t)\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

2. Поотделно всеки стълб на $\Phi(t)$ да е решение на (1), е еквивалентно на това

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

   стига $\det \Phi(t) \neq 0$ за всяко $t \in I$. Тоест, фундаменталните матрици на (1) се характеризират с последното уравнение. Тогава например началното условие $\Phi(0) = E$ задава еднозначно $\Phi(t) = e^{At}$.

Забележка. По-долу във всеки момент $t \in I$ състоянието на системата е вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$, а управлението – вектор $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Задача. Нека отново $A(t) \in M_{n\times n}$, а $B(t) \in M_{n\times m}, t \in [t_0, t_1]$. Да се реши системата

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

чрез фундаменталната матрица $\Phi(t) = \exp At$ на линейната част $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Решение (wiki books: Control Systems/Linear System Solutions)**.** Прехвърляме $\dot{x} - Ax = Bu$ и умножаваме по $\Phi^{-1}(t) = \exp(-At)$, за да интегрираме директно:

$$\begin{aligned} e^{-At}\dot{x} + e^{-At}(-A)\,x &= \Phi^{-1}Bu \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) &= \Phi^{-1}Bu \\ e^{-At}x &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,\mathrm{ds}, \end{aligned}$$

откъдето

$$x(t) = \Phi(t)x(t_0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,\mathrm{ds}\,.$$

По-долу за техническо удобство ще считаме $x(t_0) = 0$ и $\Phi(t_0) = E$, при което $x(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,\mathrm{ds}\,.$

Теорема (Принципът *Бум-тряс*). *Нека $C \subset \mathbb{R}^m$ е изпъкнал компакт на управленията. За системата*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) &= \vec{0} \end{aligned}$$

всяка достижима с <u>някакво</u> управление за време t точка е достижима също и с <u>екстремално</u> управление $u^0 : I \to \operatorname{Ext} C$.

Няма да доказваме принципа в пълна общност, а само в частния случай, когато управленията заемат стойности в *симплекс*.

Лема 1. *Нека X е топологично линейно пространство и $T : X^\star \to \mathbb{R}^n$ е непрекъснато линейно изображение с компоненти $T_i \in X^{\star\star}, i = 1, \ldots, n$, които се представят с елементи от X, тоест $\forall i \; \exists x_i : T_i(x^\star) = x^\star(x_i)$.*

Тогава T е непрекъснат от $(X^\star, w^\star)$ в $\mathbb{R}^n$.

Следващата лема е ясна, но все пак, да я ползваме изрично…

Лема 2. *Нека X, Y са компактни хаусдорфови топологични пространства и $T : X \to Y$ е непрекъснат. Тогава праобразът $T^{-1}(y)$ на всяка точка $y \in Y$ е компакт.*

Забележка. Оттук нататък фиксираме краен затворен интервал I, изпъкналия компакт

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ : \textstyle\sum_i x_i = 1 \right\},$$

както и матрично-значна функция $Y \in L_1(I, M_{n\times m})$ (за горната система $Y(s) \coloneqq \Phi^{-1}(s)B(s)$).

В доказателството на *бум-тряс* принципа по-нататък ще се позовем на следното твърдение[1] за отделимост:

Лема 3. *Нека $E \subset \mathbb{R}$ е непренебрежимо и $u(t) \in \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{C}$ п.н. в E. Тогава съществува вектор η, разделящ <u>строго</u> $\mathcal{C}$ и $u(t)$ п.н. в някое непренебрежимо $E' \subset E$, тоест,*

$$\exists\, \varepsilon, B > 0, \eta \in \mathbb{R}^m : \quad \begin{array}{ll} \langle \eta, x \rangle \geq B & \forall x \in \mathcal{C} \\ \langle \eta, u(t) \rangle < B - \varepsilon & \forall t \in E' \end{array}$$

Доказателство. Бидейки симплекс, $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^n H_i$ за някои затворени полупространства $H_i = f_i^{-1}\left((-\infty, 1]\right)$, $f_i \in (\mathbb{R}^m)^*$. Сега можем да представим допълнението му като *изброимото* обединение

$$\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_{i,k}, \; G_{i,k} \coloneqq f_i^{-1}\left[1 + 1/k, \infty\right).$$

Тогава образите на непренебрежимо много $t \in E$ трябва да лежат в някое полупространство $G_{i,k}$, и именно векторът, отговарящ на функционала f_i, и удължен с $1 + \frac{1}{2k}$, върши работа за търсеното η. □

Дефиниция. Означаваме съответно множествата от *допустимите* и *екстремалните* управления

$$\begin{aligned} \Psi &\coloneqq L_\infty(I, \mathcal{C}) \subset L_\infty(I, \mathbb{R}^m) \\ \Psi_e &\coloneqq L_\infty(I, \operatorname{Ext} \mathcal{C}) \subseteq \Psi \end{aligned}$$

и казваме, че *управлението $u \in \Psi$ води в точката $\xi = Tu$*, където $T : \Psi \to \mathbb{R}^n$ е линейния оператор

$$Tu \coloneqq \int_I Y(s)u(s)\,\mathrm{ds} \quad \forall u \in \Psi.$$

[1] В учебника на Hermes не е предложено доказтелство, а твърдението се ползва в основната теорема с думите *One may readily establish the existence of…*, което не ми изглежда особено неочевидно. Затова и си позволих да предложа някакво обяснение.

Забележка. T е непрекъснат по норма, тъй като за $\varepsilon > 0$, с $\delta := \frac{\varepsilon}{\mu(I)\int_I Y}$ при $\|h\|_\infty < \delta$ имаме

$$|T(u+h) - Tu| = \left| \int_I Y(s)h(s)\,\mathrm{ds} \right| \le \mu(I)\,\|h\|_\infty \left| \int_I Y \right| < \varepsilon.$$

Забележка. Нататък ще говорим за пространството L_∞, което, разглеждано като дуалното на L_1 (в крайния затворен интервал I), е снабдено с $w^\star$ топологията.

Лема 4. $\Psi := L_\infty(I, \mathcal{C})$ *е изпъкнал* $w^\star$*-компакт. Тук е съществено, че* $\mathcal{C}$ *е по-горе дефинираният симплекс.*

Доказателство. Очевидно Ψ е изпъкнало, т.к. за $u_1, u_2 \in \Psi$, $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ е отново функция от L_∞, и то със стойности отново в $\mathcal{C}$ поради изпъкналостта на $\mathcal{C}$. Освен това, Ψ е и ограничено (по норма) с

$$\|u\|_\infty = \int_I \|u(s)\|\,\mathrm{ds} \le I \cdot \max_{y \in \mathcal{C}} \|y\| \quad \forall u \in \Psi.$$

За да бъде Ψ $w^\star$-компакт остава само да проверим, че е $w^\star$-затворено, тоест[2], че произволно $u^0 \in L_\infty(I, \mathbb{R}^m) \setminus \Psi$ е $w^\star$-отделимо от Ψ. За да $w^\star$-отделим u^0 от Ψ, ни е нужен подходящ функционал $\varphi \in (L_\infty)^* \cap L_1$, с който

$$\varphi(u^0) < B - \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall u \in \Psi : \varphi(u^0) \ge B\,.$$

Щом $u^0 \notin \Psi$, то в непренебрежимо $E \subseteq I$, $u^0(t) \notin \mathcal{C}$. Тогава по лема 3 съществуват $\varepsilon > 0, B > 0, \eta \in \mathbb{R}^m, E' \subset E$ със свойството

$$\begin{matrix} \langle \eta, x \rangle \ge B & \forall x \in \mathcal{C} \\ \left\langle \eta, u^0(t) \right\rangle < B - \varepsilon & \forall t \in E' \end{matrix}.$$

Полагаме $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(E')}\eta, & t \in E' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, и тогава $\varphi \in L_1$ и изпълнява нужните условия:

$$\begin{aligned} \varphi(u^0) = \int_I \varphi u^0 = \int_{E'} \varphi u^0 &= \frac{1}{\mu(E')} \int_{E'} \eta u^0 \\ &< \frac{1}{\mu(E')} \int_{E'} (B - \varepsilon) = B - \varepsilon \end{aligned}$$

и аналогично $\varphi(u) = \int_I \varphi u = \frac{1}{\mu(E')} \int_{E'} \eta u \ge B \quad \forall u \in \Psi$.

Щом Ψ се $w^\star$-разделя от произволно $u^0 \notin \Psi$, то Ψ е $w^\star$-затворено, и понеже е $\|\cdot\|_\infty$-ограничено – значи е $w^\star$-компакт. ☐

Теорема (Принципът *бум-тряс* за управления в симплекс)**.**

$$T(\Psi) = T(\Psi_e).$$

Освен това, двете множества са изпъкнали компакти.

Доказателство. Очевидно $T\Psi_e \subseteq T\Psi$, трябва да докажем обратната посока. Доказателството на теоремата протича по следните стъпки:

1. T е непрекъснат в L_∞ нормата (лесно проверимо), тогава по лема 1 е и $w^\star$-непрекъснат, и значи образът $T\Psi \subset \mathbb{R}^n$ на $w^\star$-компакта Ψ отново е изпъкнал компакт (второто твърдение на теоремата).

[2] В учебника на Hermes допускат, че има $u^0 \in \partial\Psi \setminus \Psi$, и стигат до противоречие със същия аргумент нататък. Този стил ми се вижда излишно утежняващ, затова подходих с отвореност на допълнението.

2. T е непрекъснато изображение между компакти, тогава възможните управления $T^{-1}(\xi) \subset \Psi$ за пристигане в коя да е точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ образуват изпъкнал $w^\star$-компакт (лема 2 с $Y = \{\xi\}$), имащ задължително екстремна точка $u \in T^{-1}(\xi) \subset \Psi$ (Krein-Milman).

3. Оказва се, че въпросната екстремала u е *бум-тряс* управление.

   Ако допуснем противното, то в в някое непренебрежимо множество $E \subset I$ управленията са далеч от $\operatorname{Ext}\mathcal{C}$ и от непосредствено следващата лема (5) следва, че u е среда на същинска отсечка управления $[u-h, u+h] \subset \Psi$, водещи в същото ξ, и това противоречи на екстремността на u.

□

Лема 5. *Нека $n \in \mathbb{N}$, $Y(t) \in M_{n\times m}$, $E \subset I$ е непренебрежимо, а управлението $u \in \Psi$ води в $\xi \coloneqq Tu$ и удовлетворява* $\operatorname{dist}(u(E), \operatorname{Ext}\mathcal{C}) > \varepsilon > 0$.

Тогава съществува отместване $h \in L_\infty(I, \mathbb{R}^m)$ със следните свойства:

1. *$h(t) \neq 0 \; \forall t \in E$ (и се влага в същинска отсечка)*
2. *$\|h\|_\infty \leq \varepsilon$ (тоест, $u(t) \pm h(t) \in \mathcal{C}, \quad t \in I$);*
3. *$\int_I Yh = 0$ (тоест, $u \pm h$ отново води в ξ).*

С други думи, $u \in [u-h, u+h] \subset T^{-1}(\xi)$.

Доказателство. Тъй като трудно ще дефинираме директно ненулево h с нулев интеграл $\int_I Yh$, то първо ще построим h, удовлетворяващо само 1. и 2., върху някакво разбиване на E, а с подходящо претегляне на рестрикциите върху разбиването ще осигурим и $\int_I Yh = 0$.

По-точно, от неатомичността на лебеговата мярка можем да разбием за кое да е $k \in \mathbb{N}^+$ $E = \bigcup_{j=1}^k E_k$, т.ч. $E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$ и $\mu(E_j) \gneqq 0 \; \forall j$. Подходящото k ще определим по-късно. Следва построението на h.

Да разгледаме поведението на u в проблемните точки $E \subset I$. $\operatorname{Ext}\mathcal{C}$ се състои от m върха $r_1, \dots, r_m$. Във всеки момент $t \in E$, $u(t)$ е най-близо до *поне един* от тях – избираме първия в редицата и полагаме за $j = 1, \dots, m$

$$F_j = \left\{ t \in E : \begin{array}{c} \mathrm{d}\,(u(t), r_j) = \operatorname{dist}(u(t), \operatorname{Ext}\mathcal{C}) \\ \text{и } \mathrm{d}\,(u(t), r_j) > \mathrm{d}\,(u(t), r_i) \, \forall i < j \end{array} \right\}.$$

F_j са измерими (т.к. $u(t)$ е измерима и $\mathrm{d}\,(\cdot,\cdot)$ е непрекъсната) и разбиват E. Дефинираме

$$\tilde{h}(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2m}\,(u(t) - r_j) & t \in F_j, j = 0, \dots, m \\ 0 & t \in I \setminus E \end{cases}.$$

$\tilde{h}$ очевидно удовлетворява условия 1. и 2., обаче $\int_I \tilde{h} \neq 0$ в общия случай.

Сега във всяко $E_j, j = 1, \dots, k$ ще претеглим рестрикцията на $\tilde{h}$ с подходящо $\alpha_j \in \mathbb{R}$ така, че $\int_I Yh = 0$:

$$h(t) \coloneqq \begin{cases} \alpha_j \tilde{h}(t), & t \in E_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогава условието $\int_I Yh = 0$ е еквивалентно на хомогенната линейна система с n уравнения и k неизвестни

$$\int_I Yh = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{E_j} Yh = 0.$$

За да не нарушим условия 1. и 2., ни стига кое да е нетривиално решение за коефициентите α_j, каквото съществува винаги при $k \geq n+1$.

Следователно $u \pm h \in \Psi = L_\infty(I, \mathcal{C})$ и $u \in [u-h, u+h]$ от изпъкналостта на Ψ. □