Линейна алгебра, Информатика, Група 6
Онлайн упражнение №1

Александър Гудев

30 октомври 2020 г.

Съдържание

1 Линейни пространства **1**

2 Примери **2**

3 Подпространства **2**

4 Линейна обвивка **3**

5 Линейна независимост на вектори **4**

1 Линейни пространства

V е **линейно пространство** над *полето* $\mathbb{F}$, ако са изпълнени:

1. Групови свойства: (V е комутативна (=абелева) група)
   (а) Затвореност относно събиране: $\forall v, w \in V : \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{V}$
   (б) Асоциативност на събирането: $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$
   (в) Съществуване на неутрален елемент: $\exists\ 0 \in V : \forall u \in V : 0 + u = u + 0 = u$
   Заб.: използваме нулата единствено като буква – в общия случай тя не обозначава числовата нула, позната от училище. С 0 отбелязваме също и нулевия вектор $(0, \dots, 0)$, например, като от контекста се разбира кой символ „0" какво бележи.
   (г) Обратимост на всеки елемент: $\forall u \in V : \exists\ (-u) \in V : u + (-u) = 0$
   (д) Комутативност на събирането: $\forall u, v \in V : u + v = v + u$ (група с това свойство се нарича *абелева*)
   - Пример за некомутативна операция - композиция на непрекъснати функции (внимание - те не образуват група!):
   $$sin(2x) \neq 2sin(x)$$
2. Свойства, свързващи групата и скаларното умножение
   (а) Затвореност относно умножение със скалар: $\forall v \in V, \lambda \in F : \lambda\mathbf{v} \in \mathbf{V}$
   (б) Асоциативност: $\forall \lambda, \mu \in F, v \in V : \lambda(\mu\ v) = (\lambda\mu)v$
   (в) Неутралност на умножението с единица: $\forall v \in V : 1_F\ v = v$
   (г) Дистрибутивни закони (разкриване на скоби). Нека $\lambda, \mu \in F, u, v \in V$, тогава:
      i. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
      ii. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

2 Примери

Проверете, че дефиницията за ЛП е изпълнена за примерите по-долу:

- вектори в равнината, пространството, в 4D, ... – наредени n-орки:

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n\}$$

- полиноми (с числови (засега) коефициенти):

$$\{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}\}$$

  - Също, полиноми от степен $\leqslant n$ за някое фиксирано n: $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$. А полиномите от степен *точно* n?
    - $\mathbb{F}^{\leq 3}[x] = \{ax^3 + bx^2 + cx + d | a, b, c, d \in \mathbb{F}\}$
      $(x^3 + 2x) + (-x^3 - 7) = 2x - 7$

- всички реални функции в даден интервал: $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$
  - $\underbrace{(f+g)}_{\text{събиране на } \textbf{функции}}(x) = \underbrace{f(x)+g(x)}_{\text{събиране на } \textbf{числа}}$
  - $\underbrace{(\lambda \cdot f)}_{\text{умножение на функция със скалар}}(x) = \underbrace{\lambda \cdot f(x)}_{\text{умножение на } \textbf{числа}}$
  - $(-f)(x) = -\underbrace{f(x)}_{\mathbb{R}}$

- всички непрекъснати функции в даден интервал

- всички безкрайни числови редици: $\{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R} \forall i\}$

3 Подпространства

- Нека V е линейно пространство. Ще казваме, че W е подпространство на V, ако:
  1. $W \subseteq V$
  2. W е затворено относно събиране на вектори
  3. W е затворено относно умножение със скалар.

- Казахме, че $\mathbb{F}^{\leq 2}[x]$ и $\mathbb{F}^{\leq 5}[x]$ са пространства. Вярно ли е, че $\mathbb{F}^{\leq 2}[x] \leq \mathbb{F}^{\leq 3}[x]$?
  - Зависи как дефинираме строго $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$. Ако разглеждаме полиномите като наредени n-орки, вж. примера по-долу с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.Ако ги дефинираме като функции над множеството $\mathbb{F}$, тогава да.

  Декартово произведение (напомняне)

  Ако A и B са множества, то под $A \times B$ разбираме множеството от всички наредени двойки:$\{ (a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

- Казахме също, че $\mathbb{R}^3$- тримерното пространство, и $\mathbb{R}^2$- равнината – са линейни пространства.
  - Вярно ли е, че $\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^3$?
    - $R^2 = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$
    - $R^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$
    - $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$
    - Внимание!$R^2 \not\subseteq R^3$, следователно и $\mathbb{R}^2 \not\leq \mathbb{R}^3$

        · Наредените двойки **не са** наредени тройки.

  – Вярно ли е, че $W = \{(x, 0, z)\,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ е подпространство на $\mathbb{R}^3$?
    ∘ $W \subseteq \mathbb{R}^3$
    ∘ $(x, 0, z) + (a, 0, b) = (x + a, 0 + 0, z + b) \in \boldsymbol{W},\ \forall x, z, a, b \in \mathbb{R}$
    ∘ $\lambda(x, 0, z) = (\lambda x, 0, \lambda z) \in \boldsymbol{W},\ \forall x, z, \lambda \in \mathbb{R}$

- $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,|\, f$ е непрекъсната$\}$
  – $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,|\, f(53) = 0$ и f е непрекъсната$\}$ подпространство ли е на V?
    ∘ $W \subseteq V$- изпълнено!
    ∘ $f, g \in W, f + g \in W \Leftrightarrow (f + g)(53) = 0 \Leftrightarrow f(53) + g(53) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$
    ∘ $\lambda \in \mathbb{R}, f \in W, \lambda f \in W \Leftrightarrow (\lambda f)(53) = 0 \Leftrightarrow \lambda f(53) = 0 \Leftrightarrow \lambda 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
  – Ами $W' = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,|\, f(53) = 2$ и f е непрекъсната$\}$?
    ∘ $W' \subseteq V$- изпълнено!
    ∘ $f, g \in W', f + g \in W' \Leftrightarrow (f + g)(53) = 2 \Leftrightarrow f(53) + g(53) = 2 \Leftrightarrow 2 + 2 = 2$ - не е изпълнено!

4 Линейна обвивка

Знаем какво са подпространства - а как можем да си ги създаваме сами?

- Разглеждаме $V_2 = \mathbb{R}^2$ и $V_3 = \mathbb{R}^3$ (над полето $\mathbb{R}$):
  – Ако $W \leq V_2$ е подпространство и $(1, 2) \in W$, какво най-малко още съдържа W? **Затвореност!**
    ∘ $\{\lambda(1, 2)\,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq W$
  – Ако $W \leq V_3$ е подпространство и $(0, 1, 0), (2, 0, -1) \in W$, какво най-малко още съдържа W?
    ∘ $(0, 1, 0) + (2, 0, -1) = (2, 1, -1) \in W$
    ∘ Wсъс сигурност съдържа равнината, определена от точките $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, -1)$

- Сега нека $V = \mathbb{F}[x]$ е пространството от полиномите с коефициенти от $\mathbb{F}$ (да речем, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$).
  – Ако Wе подпространство, съдържащо $3x^2$ и $-7x^7$, какво най-малко още съдържа W?
    ∘ $\lambda 3x^2, \mu(-7x^7) \in W$, за всички λ и $\mu \in \mathbb{F}$
    ∘ $\lambda x^2 + \mu x^7 \in W$, за всички λ и $\mu \in \mathbb{F}$

- Ако Vе пространство над полето$\mathbb{F}$ и $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ са вектори от него, как да дефинираме „най-малкото“ подпространство, което ги съдържа?
  – $l(\{a_i\}) := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \,|\, \lambda_i \in \mathbb{F}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$

- Какво е $l(a_1, a_2, a_3)$, ако $a_1 = (0, 1, 0);\ a_2 = (0, -\sqrt{10}, 0), a_3 = (7, 0, 0)$?

$$\begin{aligned} l(a_1, a_2, a_3) &= \{\lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, -\sqrt{10}, 0) + \lambda_3(7, 0, 0)\,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, a, 0) + (0, b(-\sqrt{10}), 0) + (7c, 0, 0) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b, 0)\ |\ a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  – Равнината Oxy в тримерното пространство!
  – Вярно ли е, че $l(a_1, a_2, a_3) = l(a_1, a_3)$? С най-малко колко вектора можем да „опишем“ това подпространство?

5 Линейна независимост на вектори

- Казваме, че векторите $\{a_i\}_{i=1}^n$ са **линейнонезависими** (ЛНЗ), ако за всеки избор на коефициенти $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ е изпълнено:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \to \forall i : \lambda_i = 0$$
Тоест, ако единственият начин да получим 0, събирайки тези вектори, умножени с число, е да умножим всичките с 0.
Или, ако не можем да изразим никой от векторите като линейна комбинация на останалите.
  - ако можехме, щеше поне един от коефициентите в линейната комбинация да е ненулев, за да го прехвърлим от другата страна на равенството.

1. Докажете, че следните вектори от $\mathbb{F}^4$ са ЛНЗ:
   - $a = (-1, 2, 3, -2); b = (2, 1, -4, -3); c = (1, 3, -2, -3)$
   Взимаме дефиницията за линейна независимост: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \to \forall i : \lambda_i = 0$, и я прилагаме директно върху условието:
$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \iff$$
$$\lambda_1(-1, 2, 3, -2) + \lambda_2(2, 1, -4, -3) + \lambda_3(1, 3, -2, -3) = 0 \iff$$
$$-1\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1, -2\lambda_1) + (2\lambda_2, 1\lambda_2, -4\lambda_2, -3\lambda_2) + (1\lambda_3, 3\lambda_3, -2\lambda_3, -3\lambda_3 = 0 \iff$$
$$-1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3, 2\lambda_2 + 1\lambda_1 + 3\lambda_3, -2\lambda_3, -4\lambda_2 + 3\lambda_1, -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \iff$$
$$-1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0; 2\lambda_2 + 1\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0; -2\lambda_3, -4\lambda_2 + 3\lambda_1 = 0; -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$
   Получената (хомогенна) система решаваме, както си знаем:
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   И резултатът е $1\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0 \iff \lambda_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$, тоест a, b, c са ЛНЗ.

   Следващите два примера проверете сами!
   - $a = (1, -1, 2, 3); b = (2, -2, 1, 1)$
   - $a = (1, 2, -1, 3); b = (-1, -2, 1, 1)$

2. Проверете, че a, b, c са ЛНЗ вектори от $\mathbb{F}^3$:
   - $a = (1, 1, 1),\ b = (1, 1, 2),\ c = (1, 2, 3)$?
     - Вярно ли е, че $\mathbb{F}^3 = l(a, b, c)$?
     Три вектора – в пространството $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}$!
     Такива вектори, които са едновременно ЛНЗ и тяхната обвивка е цялото разглеждано пространство, наричаме ***базис*** на пространството.
     - Училищен базис в 3D: $(1, 0, 0);\ (0, 1, 0);\ (0, 0, 1)$
     - Какво означава $\mathbb{F}^3 = l(a, b, c)$? Че всеки вектор $v \in \mathbb{F}$може да се представи като комбинация на a, b, c!

3. Докажете, че a, b, c образуват базис на $\mathbb{F}^3$, и намерете координатите на вектора $v = (2, 2, 2)$ в този базис:
   - $a = (1, 1, 1),\ b = (1, 1, 2),\ c = (1, 2, 3)$
   - $a = (2, 2, -1);\ b = (2, -1, 2);\ c = (-1, 2, 2)$
   - $a = (1, 2, 3);\ b = (2, 5, 7);\ c = (3, 7, 11)$