Продължения на функции в H^k

Александър Гудев

1 декември 2024 г.

Дефиниция. Нека $\Omega \subseteq \Omega'$ и $f \in L_2(\Omega)$. Продължение на f в Ω' се нарича всяка функция $f' \in L_2(\Omega')$, за която $f'\big|_\Omega = f$.

Пример. Всяко $f \in L_2(\Omega)$ можем да продължим до Ω', нулирайки f извън Ω:

$$f' \coloneqq \begin{cases} f & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{в } \Omega' \setminus \Omega \end{cases}.$$

Remark. Целта ни е да продължим функцията $f \in H^k(\Omega)$ до Ω' така, че продължението да е от $H^k(\Omega')$. В горната дефинция това не се изисква — както е ясно от примера, продълженията могат по принцип дори да са прекъснати.

1 Продължение от полукуб до куб

По-долу с $\{y_n > 0\}$ и аналогичен запис бележим подмножеството на $\mathbb{R}^n$ от векторите $(y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяващи условието в скобите.

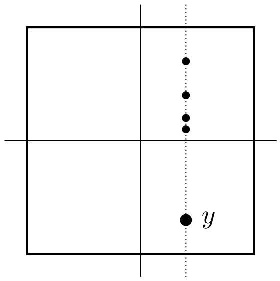
Даваме следните означения за хиперкуба, центриран около нулата с радиус a, и „горната“ и „долната“ му половина:

$$\begin{aligned} K_a &\coloneqq \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i| < a \; \forall i\} \\ K_a^+ &\coloneqq K_a \cap \{y_n > 0\} \\ K_a^0 &\coloneqq K_a \cap \{y_n = 0\} \\ K_a^- &\coloneqq K_a \cap \{y_n < 0\}\,. \end{aligned}$$

Означаваме още с y' за произволен вектор $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ вектора $y' \coloneqq (y_1, \dots, y_{n-1})$. За краткост за $y \in \mathbb{R}^n$ с (y', c) ще отбелязваме вектора $(y_1, \dots, y_{n-1}, c)$.

1.1 На функции от C^k

1. Построяване



Фигура 1: Стойността на Z в y се определя от стойността на z в точките $\left(y', -\frac{y_n}{i}\right)$.

Нека $z(y) \in C^k(\overline{K_a^+})$. Ще я продължим до K_a. Върху точките $y \in \overline{K_a^-}$ продължението дефинираме с помощта на точки от K_a^+ от вида $\left(y', -\frac{y_n}{i}\right)$. Полагаме

$$Z\big|_{\overline{K_a^+}} \coloneqq z,$$
$$Z\big|_{\overline{K_a^-}} \coloneqq \sum_{i=1}^{m} A_i z\left(p_i(y)\right)$$

където $p : \overline{K_a^-} \to \overline{K_a^+}$ е функцията

$$p_i(y) \coloneqq \left(y', -\frac{y_n}{i}\right),$$

а числото m коефициентите $(A_1, \ldots, A_m)$ ще определим по-късно по такъв начин, че полученото продължение $Z : \overline{K_a} \to \mathbb{R}$ на $z : \overline{K_a^+} \to \mathbb{R}$ да бъде от клас C^k.

2. Непрекъснатост на продължението

Z е непрекъсната в K_a^+ по построение. Лесно се вижда, че Z е непрекъсната и в K_a^- директно от непрекъснатостта на z в K_a^+. Остава да проверим непрекъснатост в $\bar{y} \in K_a^0$, когато y клони към $\bar{y}$ откъм K_a^-:

$$\begin{aligned}
\lim_{K_a^- \ni y \to \bar{y}} Z(y) &= \lim_{K_a^- \ni y \to \bar{y}} \sum_{i=1}^{m} A_i z\left(p_i(y)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i \lim_{y \to \bar{y}} z\left(p_i(y)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i z\left(p_i(\bar{y})\right) = \sum_{i=1}^{m} A_i z\left(\bar{y}\right) = z\left(\bar{y}\right) \sum_{i=1}^{m} A_i
\end{aligned}$$

За да бъде Z непрекъсната в $\bar{y}$ е достатъчно горната граница да е равна на $z(\bar{y})$, което се случва точно когато

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = 1.$$

3. Гладкост на продължението

   Нека α е мултииндекс с $|\alpha| \leq k$. Ще проверим, че съществува производната $\partial^\alpha Z(y)$ във всяко $y \in K_a$.

   (а) В K_a^+ това е просто $\partial^\alpha z$.

   (б) Z очевидно има α-производна и в $y \in K_a^-$:

$$\begin{aligned}\partial^\alpha Z(y) &= \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha \left(z\left(p_i(y)\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha p_i(y) \partial^\alpha z\left(p_i(y)\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

   (в) Остава да видим, че Z има α-производна и в $y \in K_a^0$.
   Ще го направим с индукция по дължината на α.

   i. Нека $|\alpha| = 1$, тоест $\partial^\alpha = \frac{d}{dx_j}$ за някое $j \in \{1, \ldots, n\}$. Да намерим при какви условия производната $\frac{\partial Z}{\partial x_j}$ съществува в $y_0 \in K_a^0$. Необходимо е производната, идваща „отгоре“ $\lim_{K_a^+ \ni y \to y_0} \partial^\alpha z(y)$, да е равна на производната, идваща „отдолу“

$$\begin{aligned}\lim_{K_a^- \ni y \to y_0} \partial^\alpha Z &\overset{(1)}{=} \lim_{K_a^- \ni y \to y_0} \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha p_i(y) \partial^\alpha z\left(p_i(y)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha p_i(y_0) \partial^\alpha z\left(p_i(y_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha p_i(y_0) \partial^\alpha z\left(y_0\right) \\ &= \partial^\alpha z\left(y_0\right) \sum_{i=1}^{m} A_i \partial^\alpha p_i(y_0).\end{aligned}$$

   Производните ще съвпаднат очевидно, когато десният множител не участва:

$$\sum_{i=1}^{m} \partial^\alpha p_i(y_0) A_i = 1.$$

   ii. Аналогично, за $1 < |\alpha| \leq k$, пресмятайки както горе производната, получаваме същото условие

$$\sum_{i=1}^{m} \partial^\alpha p_i(y_0) A_i = 1.$$

В частност, ако вземем $p_i(y) = \left(y_1, \ldots, y_{n-1}, -\frac{1}{i} y_n\right)$, получаваме системата

$$\sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{1}{i}\right)^{l} A_i = 1, \quad \forall i = 0, \ldots k,$$

която, бидейки система на Вандермонд, има единствено решение, когато $m = k + 1$.

4. Оценка на $\|Z\|_{H^k(K_a)}$ чрез $\|z\|_{H^k(K_a^+)}$

   С неравенство на Минковски по-горе:

$$\begin{aligned} \left|\partial^\alpha Z(y)\right|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{m} A_i \left(-\frac{1}{i}\right)^{\alpha_n} \partial^\alpha z\left(p_i(y)\right)\right|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(A_i \left(-\frac{1}{i}\right)^{\alpha_n}\right) \left(\partial^\alpha z\left(p_i(y)\right)\right)\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} A_i^2 \left(-\frac{1}{i}\right)^{2\alpha_n}\right) \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\partial^\alpha z\left(p_i(y)\right)\right)^2\right) \\ &= C_\alpha \sum_{i=1}^{m} \left(\partial^\alpha z\left(p_i(y)\right)\right)^2 \end{aligned}$$

и след интегриране по K_a^-:

$$\begin{aligned} \int_{K_a^-} \left|\partial^\alpha Z(y)\right|^2 &\leq C_\alpha \sum_{i=1}^{k+1} \int_{K_a^-} \left(\partial^\alpha z\left(p_i(y)\right)\right)^2 \\ &= C_\alpha \sum_{i=1}^{k+1} i \int\limits_{K_a^{\leq a/i}} \left(\partial^\alpha z\left(y\right)\right)^2 \quad (\text{смяна } x = p_i(y)) \\ &\leq C_\alpha \sum_{i=1}^{k+1} (k+1) \int\limits_{K_a^{\leq a/i}} \left(\partial^\alpha z\left(y\right)\right)^2 \\ &= \underbrace{C_\alpha (k+1)^2}_{C'_\alpha} \int\limits_{K_a^{\leq a/i}} \left(\partial^\alpha z\left(y\right)\right)^2, \end{aligned}$$

където $K_a^{\leq a/i} := K_a^+ \cap \left\{y_n < \frac{a}{i}\right\}$. Тогава в цялото K_a имаме

$$\begin{aligned} \int_{K_a} \left|\partial^\alpha Z(y)\right|^2 &= \int_{K_a^+} \left|\partial^\alpha z(y)\right|^2 + \int_{K_a^-} \left|\partial^\alpha Z(y)\right|^2 \\ &\leq \int_{K_a^+} \left|\partial^\alpha z(y)\right|^2 + C'_\alpha \int_{K_a^+} \left|\partial^\alpha z(y)\right|^2 \\ &\leq C''_\alpha \int_{K_a^+} \left|\partial^\alpha z(y)\right|^2, \end{aligned}$$

и след сумиране по $|\alpha| \leq k$ получаваме оценката

$$\|Z\|_{H^k(K_a)} \leq C \|z\|_{H^k\left(K_a^+\right)}, \tag{2}$$

където C е константа, зависеща само от k.

1.2 На функции от H^k

Нека $z \in H^k(K_a^+)$. Ще намерим продължение $Z \in H^k(K_a)$, основавайки се на конструкцията по-горе за функции от C^k. След малко ще докажем следната лема:

Лема. *Подпространството $C^\infty\left(\overline{K_a}\right)$ е гъсто в $H^k\left(K_a\right)$.*

Съгласно нея, към z клони някоя редица $\{z_s\}_s \subset C^k(\overline{K_a^+})$ в нормата на $H^k(K_a^+)$. Продължаваме елементите ѝ като в предишната секция до $\overline{K_a}$ и получаваме редица $\{Z_s\}_s \subset C^k\left(\overline{K_a}\right)$. Остава да видим, че новополучената редица има граница Z в $H^k\left(K_a\right)$.

Тъй като H^k е пълно, е достатъчно да покажем, че $\{Z_s\}$ е фундаментална. Да забележим, че разликата $Z_s - Z_p$ се явява продължение по горната конструкция на разликата $z_s - z_p$. Тогава оценката $\|Z\|_{H^k(K_a)} \leq C \|z\|_{H^k\left(K_a^+\right)}$ е в сила и тук, тоест

$$\|Z_s - Z_p\|_{H^k(K_a)} \leq C \|z_s - z_p\|_{H^k\left(K_a^+\right)},$$

откъдето фундаменталността на $\{Z_s\}_s$ следва от фундаменталността на $\{z_s\}_s$ и значи границата $Z \in H^k\left(K_a\right)$ съществува и се явява продължение на $z \in H^k(K_a^+)$.

Накрая, с граничен преход при $p \to \infty$ в

$$\|Z_p\|_{H^k(K_a)} \leq C \|z_p\|_{H^k\left(K_a^+\right)}$$

виждаме, че оценката (2) е в сила и за продължения в H^k. Така доказахме следното

Допускане. *Всяко $z \in H^k(K_a^+)$ притежава продължение $Z \in H^k(K_a)$, подчинено на оценката*

$$\|Z\|_{H^k(K_a)} \leq C \|z\|_{H^k\left(K_a^+\right)}.$$

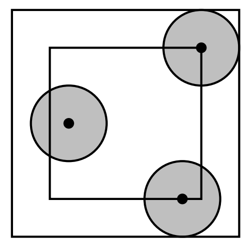
Време е да се върнем на доказателството на лемата.

Доказателство ($C^\infty(K_a)$ е гъсто в $H^k(K_a)$). Нека $f \in H^k\left(K_a\right)$ и $\varepsilon > 0$. Трябва да намерим $F \in C^\infty\left(\overline{K_a}\right)$, за което $\|f - F\| < \varepsilon$.

Идея Основната (всъщност единствената, която сме виждали досега) техника за получаване на C^∞ функции от L_2 функции идва от оператора за усредняване: знаем, че ако $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то усреднението f_h е безкрайно гладко за всяко $h > 0$. Ще усредним функцията $f \in H^k(K_a)$ в лееeко стеснена област с достатъчно малък радиус на усредняване, така че H^k-нормата на усреднението да не се отдалечи много от тази на f. По този начин ще получим достатъчно близка (в H^k) до f безкрайно гладка функция.

Преди да почнем да построяваме усреднението, ще си вземем апроксимации на производните, тъй като за близост (в H^k) на усреднението до f е нужно производните също да са близки (в L_2). Като елементи на $L_2(K_a)$, производните $\partial^\alpha f$ са в ε-околност спрямо L_2-нормата на някакви функции $\varphi_\alpha \in C\left(\overline{K_a}\right)$, тоест

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha : |\alpha| \leq k\ \exists \varphi_\alpha \in C(K_a) : \|\partial^\alpha f - \varphi_\alpha\|_{L_2} < \varepsilon.$$



Вместо да стесняваме K_a и да усредняваме в стеснената област, еквивалентно (но по-удобно за пресмятанията) ще *разпънем* K_a с коефициент $\sigma > 1$ до

$$K_{\sigma a} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \sigma a\},$$

разпъвайки едновременно с това и функцията f до $F_\sigma \in H^k(K_{\sigma a})$,

$$F_\sigma(x) = f\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

а после ще усредним разпънатата функция в по-тясната област $K_a \subset K_{\sigma a}$.

Оценка на разтягането $\|f - F_\sigma\|_{H^k(K_a)}$ За да оценим H^k-нормата, първо оценяваме L_2-нормите на всяка от производните поотделно. Имаме

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(K_a)} &= \left\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)} \\
&\overset{\text{н-во на }\Delta}{\leq} \left\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_a)} + \left\|\varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)} \\
&\leq \left\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_{\sigma a})} + \left\|\varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)}.
\end{aligned}$$

За лявото събираемо имаме

$$\begin{aligned}
\left\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_{\sigma a})} &\overset{\text{деф. на }F_\sigma}{=} \left\|\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\partial^\alpha f\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_{\sigma a})} \\
&\overset{\text{н-во на }\Delta}{\leq} \left\|\left(\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}} - 1\right)\partial^\alpha f\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_{\sigma a})} + \left\|+1\partial^\alpha f\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\|_{L_2(K_{\sigma a})} \\
&= \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|\partial^\alpha f(x)\|_{L_2(K_a)} + \sigma^{n/2}\|\partial^\alpha f(x) - \varphi_a(x)\|_{L_2(K_a)} \\
&\leq \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|\partial^\alpha f\|_{L_2(K_a)} + \sigma^{n/2}\varepsilon
\end{aligned}$$

и замествайки горе, получаваме

$$\|\partial^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(K_a)} \leq \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|\partial^\alpha f\|_{L_2(K_a)} + \sigma^{n/2}\varepsilon$$
$$+ \left\|\varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)}.$$

Сега

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha F_\sigma\|_{L_2(K_a)} \leq \underbrace{\|\partial^\alpha f - \varphi_\alpha\|_{L_2(K_a)}}_{\leq\varepsilon} + \|\partial^\alpha F_\sigma - \varphi_\alpha\|_{L_2(K_a)}$$
$$\leq \left(1 + \sigma^{n/2}\right)\varepsilon + \sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|\partial^\alpha f\|_{L_2(K_a)} + \left\|\varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)}.$$

Остава да оценим второто и третото събираемо.

- За второто събираемо имаме

  $$\sigma^{n/2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \xrightarrow[\sigma\to 1^+]{} 0,$$

  следователно за някое $\sigma > 1$, второто събираемо е по-малко от ε.

- Тъй като φ_a е равномерно непрекъсната, то $\varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right) \xrightarrow[\sigma\to 1]{} \varphi_\alpha(x)$, и значи за някое $\sigma > 1$,

  $$\left\|\varphi_a\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\right\|_{L_2(K_a)} \leq \varepsilon.$$

От двете оценки следва, че за някое $\sigma_0 > 1$ (б.о.о. $\sigma_0 < 2$)

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha F_{\sigma_0}\|_{L_2(K_a)} \leq \left(1 + \sigma_0^{n/2}\right)\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$$
$$\leq 4\varepsilon.$$

Сумирайки по всички α с $|\alpha| \leq k$ получаваме и аналогична оценка в H^k-нормата:

$$\|f - F_{\sigma_0}\|_{H^k(K_a)} \leq 4n^k\varepsilon.$$

УсредняванеТО За достатъчно малко $h > 0$ ($h < a(\sigma - 1)$) разглеждаме усреднението $(F_{\sigma_0})_h \in C^\infty(K_a)$ на F_{σ_0}. В по-тясната област K_a имаме

$$\|(F_{\sigma_0})_h - F_{\sigma_0}\|_{H^k(K_a)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

следователно за достатъчно малко $h = h_0$,

$$\left\|(F_{\sigma_0})_{h_0} - F_{\sigma_0}\right\| \leq \varepsilon.$$

Остава да забележим, че

$$\left\|\left(F_{\sigma_0}\right)_{h_0} - f\right\|_{H^k(K_a)} \leq \underbrace{\left\|\left(F_{\sigma_0}\right)_{h_0} - F_{\sigma_0}\right\|_{H^k(K_a)}}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left\|f - F_{\sigma_0}\right\|}_{\leq 4n^k\varepsilon}$$
$$\leq \left(1 + 4n^k\right)\varepsilon,$$

което означава, че построеното усреднение можем да направим достатъчно близо до f. $\square$

2 Смяна на променливите в H^k

Лема. *Нека $\bar{Q}' \subset Q$, $f \in H^k(Q)$ и $|\alpha| \leq k$. Тогава за $h \leq dist(Q', \partial Q)$, производната на усреднението $f_h \in C^\infty$ е усреднението на производната, тоест*

$$\partial^\alpha f_h = \left(\partial^\alpha f\right)_h .$$

Доказателство. Ще го проверим за $k = 1$. Нека $1 \leq i \leq n$. Трябва да докажем, че

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_Q \omega_{x,h}(y) \cdot f(y)\,\mathrm{dy} = \int\limits_Q \omega_{x,h}(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Разписваме дефиницията за обобщена производна $\partial^\alpha f$ в дясната страна с тестова функция $\omega_{x,\varepsilon}$:

$$\int\limits_Q \omega_{x,h}(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\,\mathrm{dy} = -\int\limits_Q \frac{\partial \omega_{x,h}}{\partial y_i}(y) \cdot f(y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Следователно остава да се убедим в

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_Q \omega_{x,h}(y) \cdot f(y)\,\mathrm{dy} = -\int\limits_Q \frac{\partial \omega_{x,h}}{\partial y_i}(y) \cdot f(y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Разписваме производната

$$\frac{\partial \omega_{x,h}(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{\partial y_i} = \frac{1}{\varepsilon}\omega'\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\left(1-|x|^2\right)^2}\left(2\,|x|\right)$$

$\square$

Допускане. *Нека $y : \bar{Q} \to \bar{\Omega}$ и $x : \bar{\Omega} \to \bar{Q}$ са обратни една на друга функции от C^k.*

Тогава, $f \in H^k(\Omega)$ точно когато $F = f \circ y \in H^k(Q)$, и в този случай производните на F се смятат по обичайното правило за производна на съставна функция.

Също, за тези x и y съществуват константи C_1, C_2, с които

$$C_1 \left\|f\right\|_{H^k(\Omega)} \leq \left\|F\right\|_{H^k(Q)} \leq C_2 \left\|f\right\|_{H^k(\Omega)} \quad \forall f \in H^k(\Omega).$$

Доказателство. Нека $f \in H^k$. Най-напред е ясно, че $F \in L_2$, защото $F = f \circ y$ има сумируем квадрат от формулата за смяна на променливите в лебегов интеграл $\int_Q f(y(x))\mathrm{dx}$.

Съществуване на първите производни. Както в предната лема, ще апроксимираме почти навсякъде дефинираното $f \in H^k$ с усредняване в C^∞, а после ще видим, че производните на усреднението апроксимират производните на f.

За да правим изобщо усредняване, ни е нужно то да е дефинирано „и малко навън“, така че стесняваме разглежданата област до $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Полагаме $Q' = x(\Omega)$, а $f_h \in C^\infty(\Omega')$ — усреднението на f в Ω' при достатъчно малък радиус $h \le \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Тогава от свойството

$$\|f_h - f\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

получаваме (отново със смяна на променливите в лебегов интеграл)

$$\|F_h - F\|_{L_2(Q')} = \|f_h \circ y - f \circ y\| = \|(f_h - f) \circ y\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Аналогична оценка искаме и за производната на F. От

$$\left\| \frac{\partial f_h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \right\|_{L_2(\Omega')} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

следва

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(f_h \circ y) - \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ y) \right\|_{L_2(\Omega')} &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left((f_h - f) \circ y)\right) \right\|_{L_2(\Omega')} \\
&\le \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_h - f\right) \right\| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} y \right\| \\
&= \tilde{C} \left\| \frac{\partial f_h}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \\
&= \tilde{C} \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_h - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \quad (\text{сменяме } \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ и } (\cdot)_h) \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

От тези оценки следва, че функционалните редици $\left\{F_{h=1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ и $\left\{\partial^{x_i} F_{h=1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ са ограничени съответно от $F + L$ и $\partial^{x_i} F + L$, където L е константа. Тогава в дефиницията за обобщена производна на $F_h = f_h \circ y$

$$\int\limits_{Q'} F_h \frac{\partial g}{\partial x_i} \mathrm{dx} = -\int\limits_{Q'} \frac{\partial F_h}{\partial x_i} g \mathrm{dx} \quad \forall g \in C^1(\bar{Q})$$

можем да извършим от двете страни ограничен граничен преход при $h \to 0$ и да получим

$$\int\limits_{Q} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} F_h \right)}_{F} \frac{\partial g}{\partial x_i} \mathrm{dx} = -\int\limits_{Q} \left(\lim_{h\to 0} \frac{\partial F_h}{\partial x_i} \right) g \mathrm{dx} \quad \forall g \in C^1(\bar{Q}),$$

с което имаме първите обобщени производни на F:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{\partial F_h}{\partial x_i}.$$

За да имаме F от H^1, остава само да се уверим, че производните имат сумируеми квадрати. След диференциране по правилото за диференциране на съставна функция

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x),$$

веднага излиза оценката

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\| &\le \sum_j \left\| \frac{\partial f}{\partial y_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \\ &\le C \left\| f \right\|_{H^1}, \end{aligned}$$

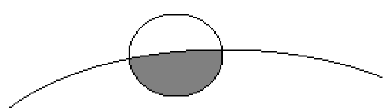
където константата C зависи само от y.

Производните от ред ≥ 2 получаваме след повторено диференциране във формулата за производна на съставна функция. $\square$

3 Продължение извън Q при $\partial Q \in C^k$

3.1 Локално

Да означим с $B_r(\xi)$ кълбото $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| < r\}$.



В следващата лема ще се уверим, че ако имаме продължение на f в околност на всяка точка („поотделно“) от границата, то можем да построим продължение на f в произволно разширение на разглежданата област.

Лема. *Нека $Q \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област, $f \in H^k(Q)$ и във всяка точка от границата на Q е дадено продължение на f в някакво кълбо около тази точка, с „равномерно по-малка“ H^k норма от f, тоест*

$$\forall \xi \in \partial Q \quad \exists r_\xi > 0 \quad \exists F_\xi \in H^k(B_r(\xi)) : \\ F_\xi\big|_Q \equiv f \ \text{и} \ \|F_\xi\|_{H^k(B_r(\xi))} \le C \|f\|_{H^k(Q)},$$

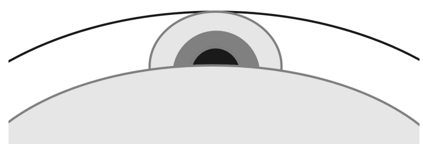
където C е константа.

Тогава във всяко разширение $Q_\rho \coloneqq \{x : dist(x, Q) < \rho\}$ на Q съществува продължение $F \in H^k(Q_\rho)$ на f, нулиращо се извън $Q_{\rho/2}$ с „равномерно по-малка“ норма от f, тоест

$$\begin{aligned}\forall \rho > 0 \quad \exists F \in H^k(Q_\rho) : F\big|_Q &\equiv f,\\ \text{и } F\big|_{Q_\rho \setminus Q_{\rho/2}} &\equiv 0\\ \text{и } \|F\|_{H^k(Q_\rho)} &\le C' \|f\|_{H^k(Q)}\end{aligned}$$

където константата C не зависи от f.

Доказателство. С дадените по условие F_ξ ще образуваме краен брой продължения f_i на f в отворени разширения $Q_i \supset Q$, за които $\bigcup_i Q_i \supset \bar{Q}$. След това ще ги загладим до 0 извън $Q_{\rho/2}$ и с подходящо претегляне ще положим сумата им за търсеното продължение.



В оцветените области използваме продължението по условие или оригиналните стойности на f, а в тъмносивата област $(\frac{\rho}{2})$ ще загладим скока, който се получава в общия случай между светлосивата и бялата област.

1. Покритие и груби продължения Нека $\rho > 0$ е фиксирано. Можем да считаме, че радиусите r_ξ по условие са избрани с $r_\xi < \rho \, \forall \xi$.

Първо ще додефинираме r_ξ не само за $\xi \in \partial Q$, ами в цялото $\bar{Q}$. По условието на лемата около всяка точка $\xi \in \bar{Q}$ има кълбо $B_r(\xi), r = r(\xi)$, в което е дефинирана или f, или нейно гладко продължение.

Ясно е, че

$$Q \subset \bigcup_{\xi \in \bar{Q}} B_{r_\xi/3}(\xi).$$

Ползваме само половин радиус $\frac{1}{2} r_\xi$ с цел да имаме в последствие място, където да се случи срязването. Щом Q е ограничена, то $\bar{Q}$ е компакт и значи от покритието $\bigcup_{\xi \in \bar{Q}} B_{r_\xi/2}(\xi)$ можем да изберем крайно подпокритие $B_{r_1/2}(\xi_1), \ldots, B_{r_N/2}(\xi_N)$.

Сега определяме функциите $f_i \in L_2(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, N$ по гореилюстрирания начин – (негладки) продължения на f в цялото $\mathbb{R}^n$ с носител в $Q \cup B_{r_i}(x_i)$:

$$f_i(x) \coloneqq \begin{cases} F_{x_i}(x) & \text{, ако } x \in B_{r_i}(x_i) \\ f(x) & \text{, ако } x \in Q \\ 0 & \text{, иначе} \end{cases}$$

Да направим оценка на нормата им

$$\begin{aligned}\|f_i\|_{H^k(Q \cup B_{r_i}(x_i))} &\le \|F_{\xi_i}\| + \|f\| \\ &\le C\|f\| + \|f\| = \tilde{C}\|f\|.\end{aligned}$$

Остава да ги залепим с подходящи функции γ_i, за да дефинираме (вече гладко) продължение

$$F = \sum_i \gamma_i f_i.$$

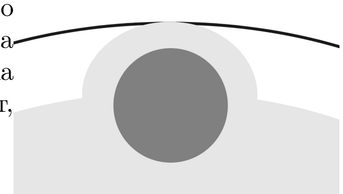
2. Залепване с разлагане на единицата За да бъде F изобщо продължение на f, трябва $F\big|_Q \equiv f$. При $x \in Q$ сме дефинирали $f_i(x) = f(x)$, следователно

$$F\big|_Q = \sum_i \gamma_i f_i = \sum_i \gamma_i f = f \sum_i \gamma_i.$$

Щом искаме $F\big|_Q \equiv f$, трябва да поискаме $\sum_i \gamma_i\big|_Q \equiv 1$. Това ни подсеща да използваме разлагане на единицата.

Нека $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ е разлагане на единицата, подчинено на покритието $\left\{B_{r_i/2}\right\}_{i=1}^N$ и съставено от финитни в $Q_{\rho/2}$ функции, а $F = \sum_i \gamma_i f_i$. Съгласно току-що направената сметка и свойството $\sum_i \gamma_i\big|_Q = 1$, F действително е *продължение* на f. Остава да проверим, че то отговаря на исканите свойства:

1. $F \in H^k(Q_\rho)$, защото всяко γ_i изглажда ръбчето на съответното f_i, тъй като всяко f_i единствено може да не гладко по границата на светлосивата област $Q \cup B_{r_i}(x_i)$, околност на която се съдържа $Q_{\rho/2} \setminus B_{r_i/2}$ – допълнението на тъмната област, където γ_i е нулева.



2. $F\big|_{Q_\rho \setminus Q_{\rho/2}} \equiv 0$, тъй като поискахме γ_i да са финитни в съответното множество.

3. $\|F\|_{H^k(Q_\rho)} \leq C' \|f\|_{H^k(Q)}$, тъй като

$$\begin{aligned} \|F\|_{H^k(Q_\rho)} &= \left\| \sum_i \gamma_i f_i \right\|_{H^k(Q_\rho)} \\ &\leq \sum_i \|\gamma_i\| \|f_i\| \\ &\leq \sum_i \|\gamma_i\| \tilde{C} \|f\| \\ &\leq C' \|f\|, \end{aligned}$$

   като в последното неравенство използваме, че γ_i не зависят от f, а само от областта — тоест в нашия контекст, нормата им се явява константа.

$\square$

3.2 Глобално

Теорема (за продължението)**.** *Нека Q и Q' са ограничени области в $\mathbb{R}^n$, като $\bar{Q} \subset Q'$ и $\partial Q \in C^k$.*

Тогава всяко $f \in H^k(Q)$ има финитно (нулиращо се в околност на $\partial Q'$) продължение $F \in H^k(Q')$, за което е в сила оценката

$$\|F\|_{H^k(Q')} \le C \, \|f\|_{H^k(Q)}$$

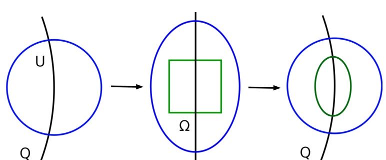
с константа C, независеща от f.

В оценката на F в теоремата можем също да вземем вместо H^k-нормата, коя да е норма H^s с $s \le k$.

Доказателство. Ще построим продължение на f в околност на произволна точка от границата на областта, след което ще приложим предишната лема.

Нека $\xi \in \partial Q$. Продължение в околност U_ξ на ξ ще направим на 3 етапа:

1. Ще изправим (биективно) границата около ξ до хиперравнината $\{y_n = 0\}$;
2. Ще приложим лемата от предната секция за продължение от $\overline{K_a^+}$ до $\overline{K_a}$;
3. Ще изпратим продължението от K_a^- обратно зад „кривата“ граница.

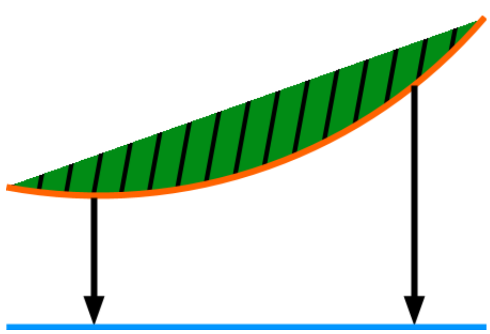


Щом $\partial Q \in C^k$, то в някоя околност U_ξ на ξ можем с точност до преномериране на променливите да представим уравнението на ∂Q във вида

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

където $\varphi \in C^k(D)$ в област $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Още ще поискаме в U_ξ областта Q да се намира „отгоре“, тоест

$$x_n > \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \forall x \in U_\xi \cap Q.$$



Сменяме променливите така, че ξ да застане в началото на координатната система $y_1, \dots, y_n$, а повърхнината $\{y_n = 0\}$ да съвпадне с $\partial Q \cap U_\xi$, тоест

$$y' \coloneqq x' - \xi'$$
$$y_n \coloneqq x_n - \varphi(x').$$

Тогава U_ξ се изобразява биективно в околност Ω на 0, а функцията $f\big|_{Q \cap U_\xi}$ – във функцията

$$z(y) = f\left(y' + \xi', y_n + \varphi(y' + \xi')\right),$$

която, съгласно твърдение по-горе, отново е от H^k. Време е да приложим лемата от първата секция.

Нека K_a е куб с достатъчно малък радиус, че $K_a \subset \Omega$. Тогава z, като функция от $H^k(\overline{K_a^+})$, има продължение $Z \in H^k\left(\overline{K_a}\right)$, което след обратната смяна на променливите ни дава продължение F_ξ на f в $y^{-1}(K_a)$.

$y^{-1}(K_a)$ е отворено и съдържа ξ, и значи имаме продължение на f в някое кълбо $B_r(\xi)$. За да приложим предходната лема, обаче, ни е нужно още едно условие.

От свойството за смяна на променливите за функцията F_ξ имаме

$$\|F_\xi\|_{H^k(B_r(\xi))} \leq \|F_\xi\|_{H^k(y^{-1}(\Omega))} \leq C_3 \|Z\|_{H^k(K_a)},$$

а за функцията f –

$$\|z\|_{H^k(K_a^+)} \leq C_4 \|f\|_{H^k(Q \cap y^{-1}(\Omega))} \leq C_4 \|f\|_{H^k(Q)},$$

където константите C_3, C_4 зависят само от смяната $y = y(x)$, тоест – в нашия случай – зависят от ∂Q и са универсални за всички функции, които искаме да продължим. С това вече имаме право да приложим последната лема с $\rho < \operatorname{dist}(Q, Q')$ и да получим продължение на f около цялото Q. $\square$

4 Продължение навътре в Q при $\partial Q \in C^k$

Теорема. *Нека Q има гладка граница $\partial Q \in C^k$ за някое $k \geq 1$. Тогава всяка функция $f \in C^k(\partial Q)$ има продължение $F \in C^k(\bar{Q})$, удовлетворяващо оценката*

$$\|F\|_{C^k(\bar{Q})} \leq C \|f\|_{C^k(\partial Q)},$$

в която константата C зависи само от ∂Q.

Без доказателство.