Komplexe Fourierreihe

Von der Akustik zum komplexen Zeichnen

GFS – Maximilian

July 4, 2024

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe
- Simulation zur reellen Fourierreihe

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe
- Simulation zur reellen Fourierreihe
- Wiederholung der komplexen Zahlen

Gliederung

- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe
- Simulation zur reellen Fourierreihe
- Wiederholung der komplexen Zahlen
- Komplexe Zeiger

Gliederung

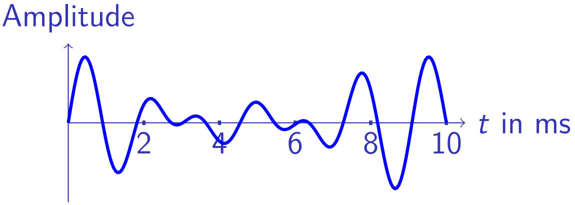
- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe
- Simulation zur reellen Fourierreihe
- Wiederholung der komplexen Zahlen
- Komplexe Zeiger
- Herleitung der komplexen Fourierreihe

Gliederung

Gliederung

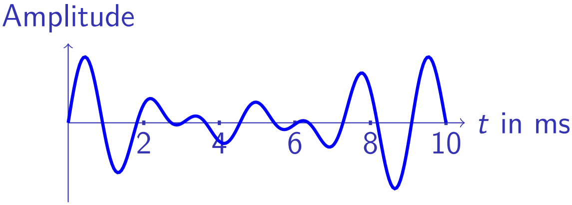
- Idee hinter der reellen Fourierreihe
- Notationen von Summen und Reihen
- Allgemeine Definition der reellen Fourierreihe
- Simulation zur reellen Fourierreihe
- Wiederholung der komplexen Zahlen
- Komplexe Zeiger
- Herleitung der komplexen Fourierreihe
- Simulation der komplexen Fourierreihe
- Anwendungsgebiete

Hinführung zur Fourierreihe

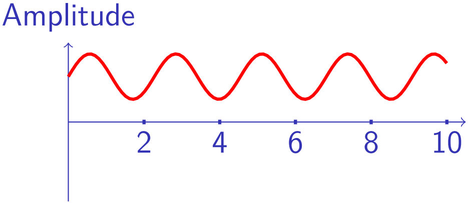


$f(t) = ???$

Hinführung zur Fourierreihe



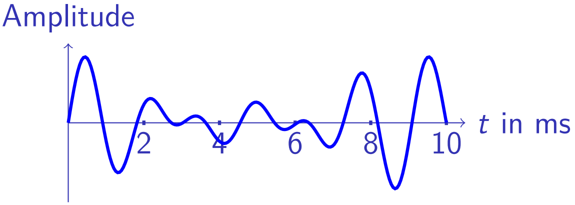
$$f(t) = ???$$



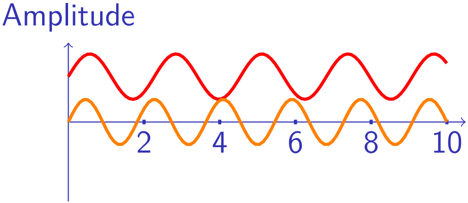
$$a(t) = \sin(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t)$$

$$f(t) = a(t) + cis(t) + e(t)$$

Hinführung zur Fourierreihe



$f(t) = ???$

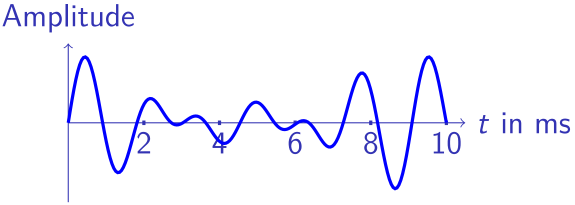


$a(t) = \sin(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t)$

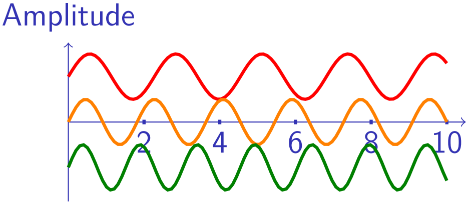
$cis(t) = \sin(2\pi \cdot 550\text{Hz} \cdot t)$

$$f(t) = a(t) + cis(t) + e(t)$$

Hinführung zur Fourierreihe



$f(t) = ???$



$a(t) = \sin(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t)$

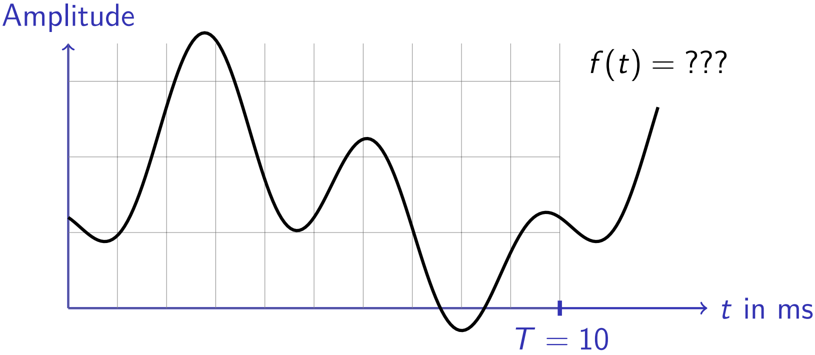
$cis(t) = \sin(2\pi \cdot 550\text{Hz} \cdot t)$

$e(t) = \sin(2\pi \cdot 660\text{Hz} \cdot t)$

$$f(t) = a(t) + cis(t) + e(t)$$

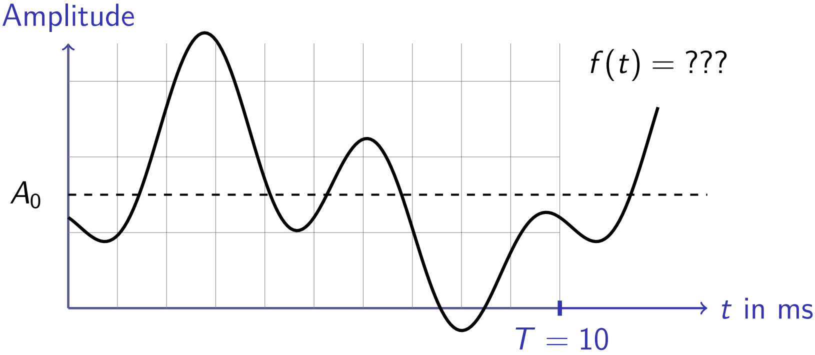
Idee

Jede *periodische* Funktion kann durch die *Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen* dargestellt werden, deren Frequenzen *Vielfache der Grundfrequenz* sind.



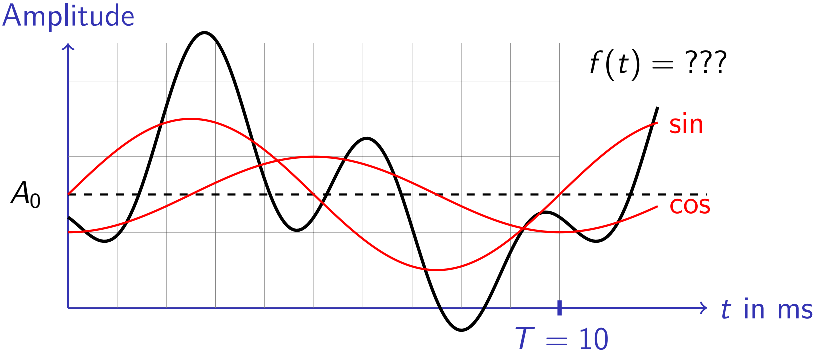
Idee

Jede *periodische* Funktion kann durch die *Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen* dargestellt werden, deren Frequenzen *Vielfache der Grundfrequenz* sind.



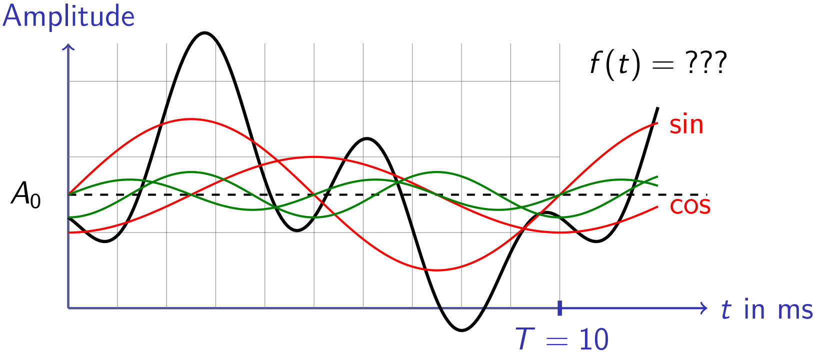
Idee

Jede *periodische* Funktion kann durch die *Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen* dargestellt werden, deren Frequenzen *Vielfache der Grundfrequenz* sind.



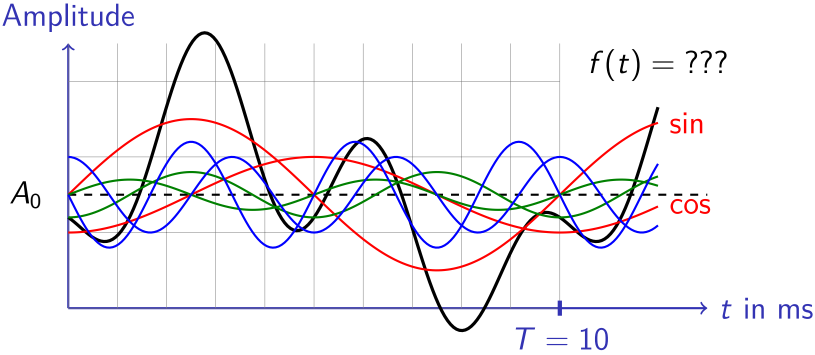
Idee

Jede *periodische* Funktion kann durch die *Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen* dargestellt werden, deren Frequenzen *Vielfache der Grundfrequenz* sind.



Idee

Jede *periodische* Funktion kann durch die *Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen* dargestellt werden, deren Frequenzen *Vielfache der Grundfrequenz* sind.



Summe (endlich)

$$\sum_{n=s}^{N} f(x) = f(s) + f(s+1) + (\cdots) + f(N)$$

$$\sum_{n=1}^{5} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad \text{(Beispiel)}$$

Summe (endlich)

$$\sum_{n=s}^{N} f(x) = f(s) + f(s+1) + (\cdots) + f(N)$$

$$\sum_{n=1}^{5} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad \text{(Beispiel)}$$

Reihe (konvergierende unendliche Summe)

$$\sum_{n=s}^{\infty} f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=s}^{N} f(x) = f(x) = f(s) + f(s+1) + (\cdots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + (\cdots) = 2 \quad \text{(Beispiel)}$$

Definition der reellen Fourierreihe

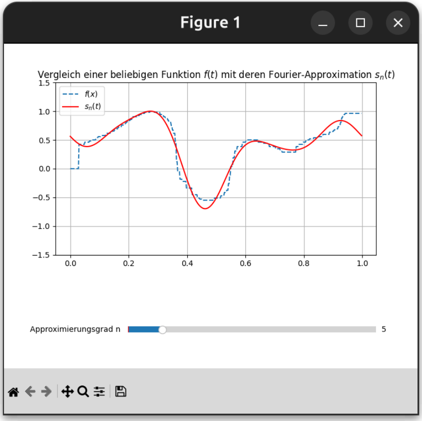
$$
\begin{aligned}
s_N(t) &= A_0 \quad \text{(Gleichwert)} \\
&+ A_1 \cos(2\pi \frac{\mathbf{1}}{T} \cdot t) + B_1 \sin(2\pi \frac{\mathbf{1}}{T} \cdot t) \quad \text{(Grundfrequenz)} \\
&+ A_2 \cos(2\pi \frac{\mathbf{2}}{T} \cdot t) + B_2 \sin(2\pi \frac{\mathbf{2}}{T} \cdot t) \quad \text{(2x Grundfrequenz)} \\
&\vdots \qquad \vdots \quad N \text{ mal...} \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) + B_n \sin(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) \right)
\end{aligned}
$$

Definition der reellen Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
s_N(t) = {} & A_0 \quad \text{(Gleichwert)} \\
& + A_1 \cos(2\pi \frac{\mathbf{1}}{T} \cdot t) + B_1 \sin(2\pi \frac{\mathbf{1}}{T} \cdot t) \quad \text{(Grundfrequenz)} \\
& + A_2 \cos(2\pi \frac{\mathbf{2}}{T} \cdot t) + B_2 \sin(2\pi \frac{\mathbf{2}}{T} \cdot t) \quad \text{(2x Grundfrequenz)} \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \quad N \text{ mal...} \\
& = A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) + B_n \sin(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{N \to \infty} s_N(t) = \underbrace{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) + B_n \sin(2\pi \frac{n}{T} \cdot t) \right)}_{\text{Reelle Fourierreihe}} = f(t).
$$

Simulation



Koeffizienten?

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2\pi \frac{n}{T} \cdot t)\, dt$$

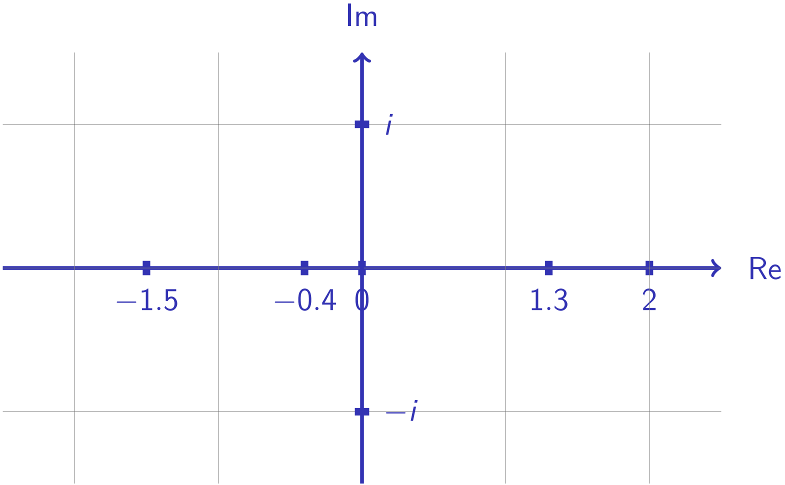
$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot sin(2\pi \frac{n}{T} \cdot t)\, dt$$

Die Integrale wurden numerisch bestimmt.

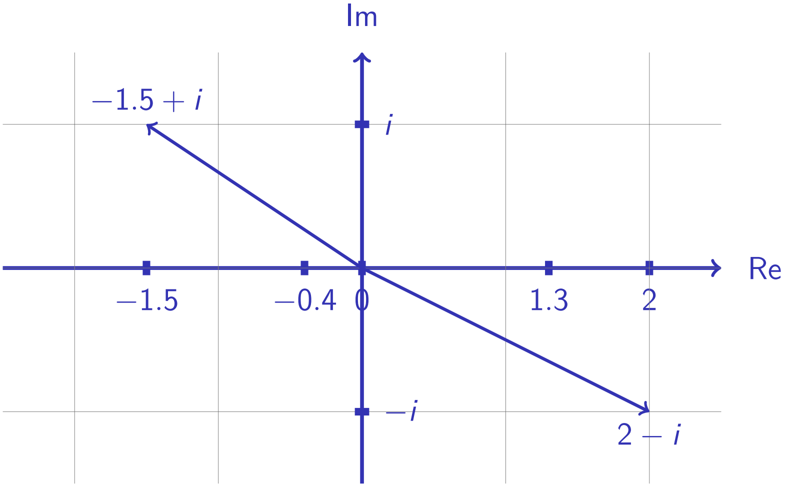
Wiederholung der komplexen Zahlen

Wiederholung der komplexen Zahlen

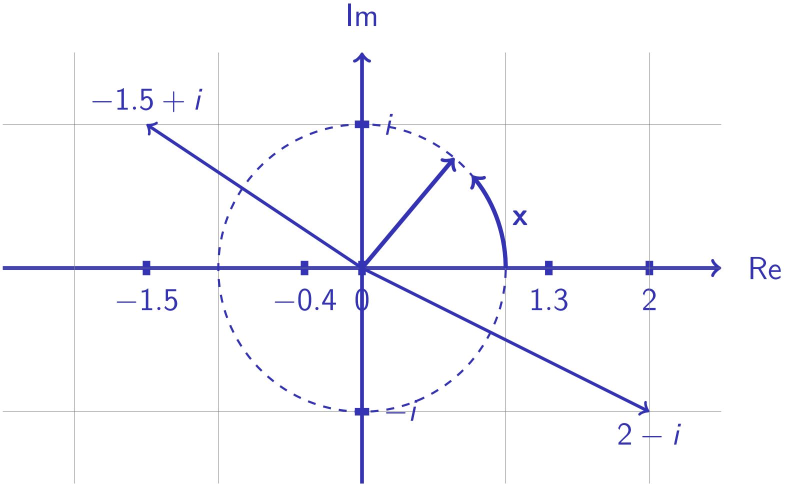
Wiederholung der komplexen Zahlen



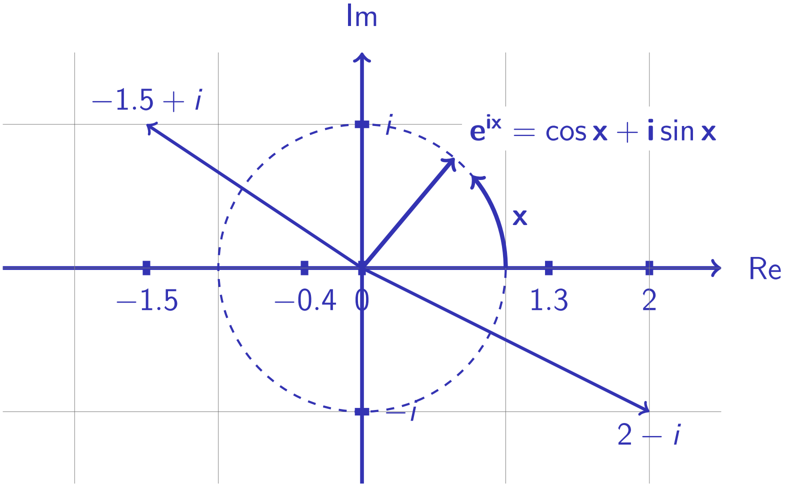
Wiederholung der komplexen Zahlen



Wiederholung der komplexen Zahlen

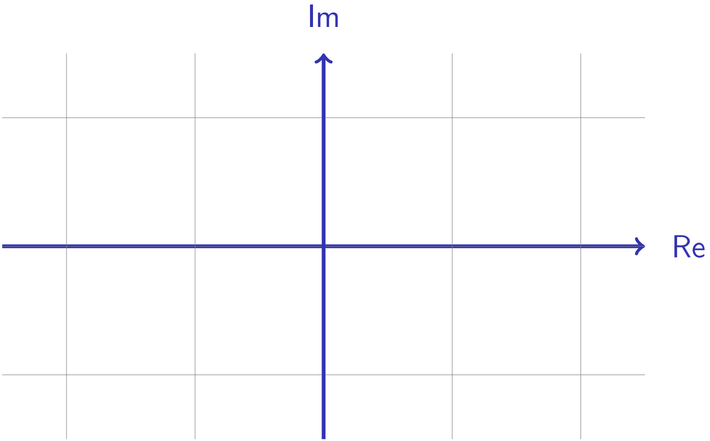


Wiederholung der komplexen Zahlen



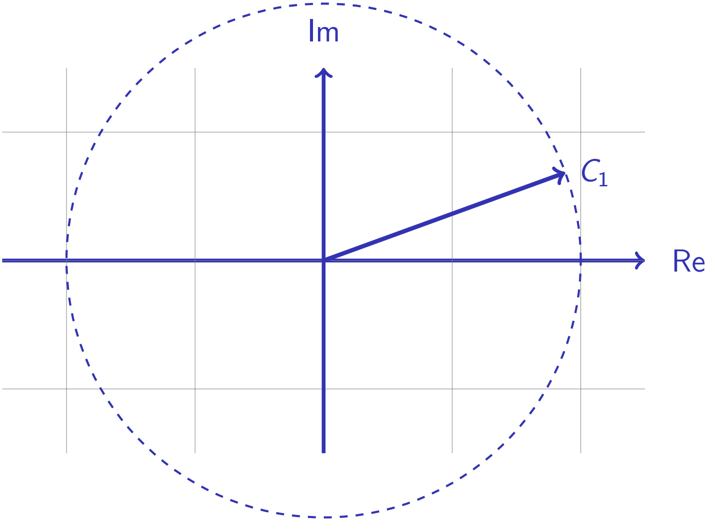
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



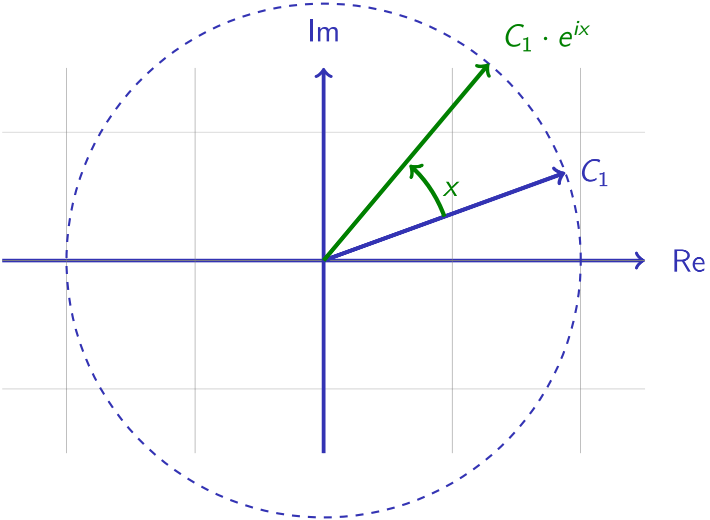
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



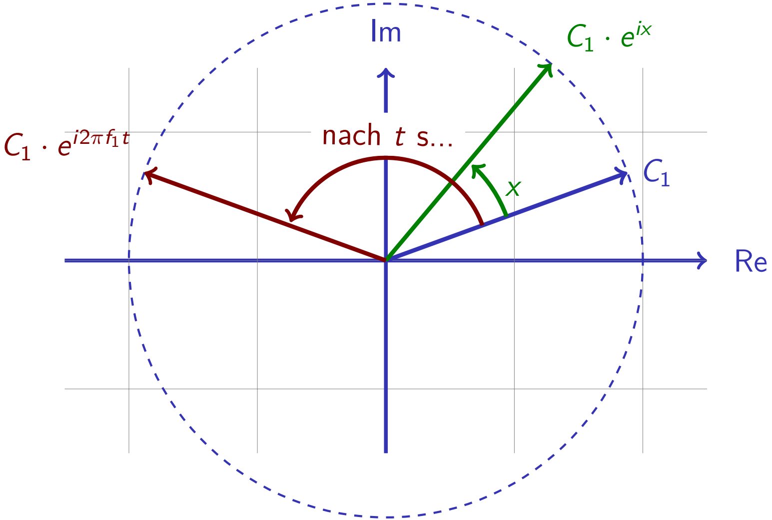
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



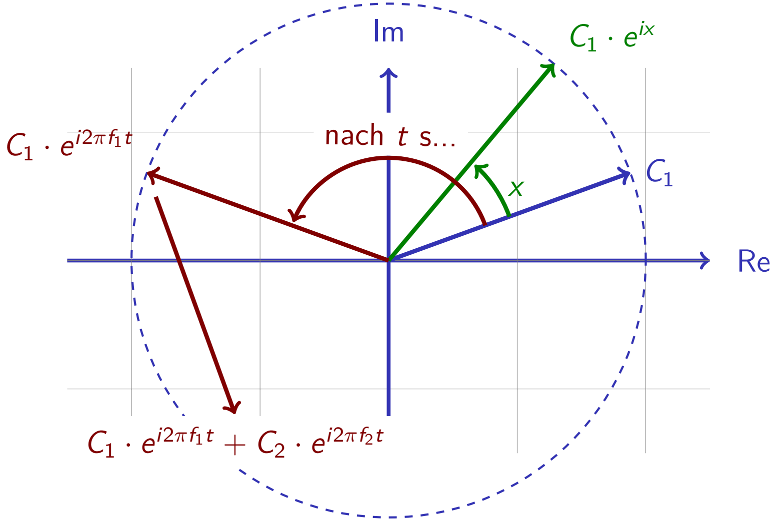
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



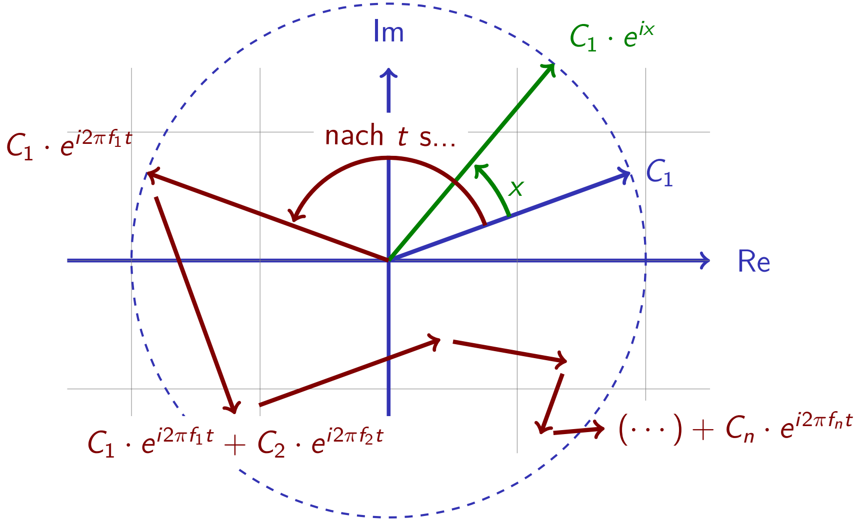
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



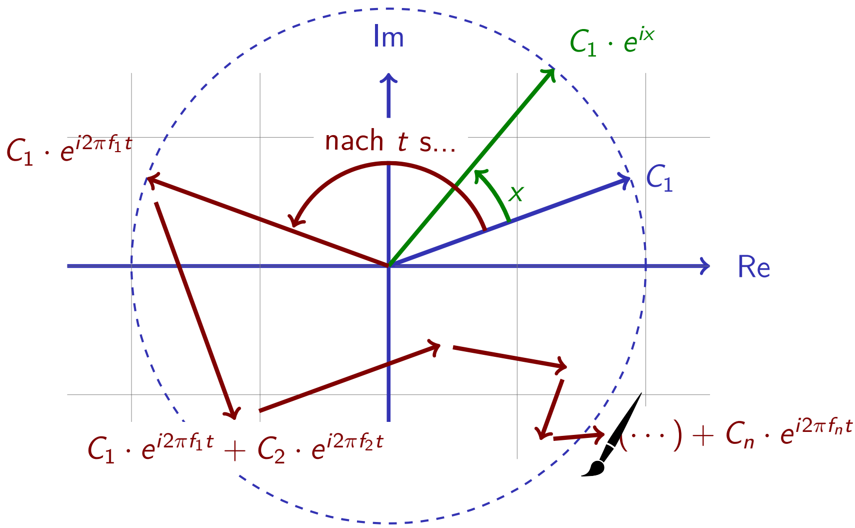
Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



Komplexe Zeiger

Anfangskonfiguration $C_n \in \mathbb{C}$ und Freuqenz $f_n \in \mathbb{R}, [f] = 1\text{Hz}$



Komplexe Fourierreihe

Idee

- Verallgemeinerung der reellen Fourierreihe in $\mathbb{C}$
- Überlagerung von sin und cos $\rightarrow$ Summe von Zeigern
- Drehbarkeit in alle Richtungen $\rightarrow$ auch negative Frequenzen

Idee

- Verallgemeinerung der reellen Fourierreihe in $\mathbb{C}$
- Überlagerung von sin und cos $\rightarrow$ Summe von Zeigern
- Drehbarkeit in alle Richtungen $\rightarrow$ auch negative Frequenzen

Sei $f : [0; T) \mapsto \mathbb{C}$ eine komplexwertige periodische Funktion.

Idee

- Verallgemeinerung der reellen Fourierreihe in $\mathbb{C}$
- Überlagerung von sin und cos $\rightarrow$ Summe von Zeigern
- Drehbarkeit in alle Richtungen $\rightarrow$ auch negative Frequenzen

Sei $f : [0; T) \mapsto \mathbb{C}$ eine komplexwertige periodische Funktion.

$$
\begin{aligned}
f(t) = \ & (\cdots) + \overbrace{C_{-2} \cdot e^{i2\pi \frac{-2}{T} t}}^{\text{Zeiger -2}} + \overbrace{C_{-1} \cdot e^{i2\pi \frac{-1}{T} t}}^{\text{Zeiger -1}} \\
& + \underbrace{C_0}_{\text{Zeiger 0}} + \underbrace{C_1 \cdot e^{i2\pi \frac{1}{T} t}}_{\text{Zeiger 1}} + \underbrace{C_2 \cdot e^{i2\pi \frac{2}{T} t}}_{\text{Zeiger 2}} + (\cdots) \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{(komplexe Fourierreihe).}
\end{aligned}
$$

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse
- **Medizin:** Rekonstruktion aus Rohdaten (MRI, CT-Scan)

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse
- **Medizin:** Rekonstruktion aus Rohdaten (MRI, CT-Scan)
- **Erdbebenerkennung:** Interpretation von seismischen Signalen

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse
- **Medizin:** Rekonstruktion aus Rohdaten (MRI, CT-Scan)
- **Erdbebenerkennung:** Interpretation von seismischen Signalen
- **Astronomie:** Signalverarbeitung in Radioteleskopen

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse
- **Medizin:** Rekonstruktion aus Rohdaten (MRI, CT-Scan)
- **Erdbebenerkennung:** Interpretation von seismischen Signalen
- **Astronomie:** Signalverarbeitung in Radioteleskopen
- **Finanzwesen:** Identifizierung von Trends in Finanzmärkten

Komplexe Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Anwendungsgebiete

- **Audioverarbeitung:** Rauschunterdrückung, Klanganalyse
- **Medizin:** Rekonstruktion aus Rohdaten (MRI, CT-Scan)
- **Erdbebenerkennung:** Interpretation von seismischen Signalen
- **Astronomie:** Signalverarbeitung in Radioteleskopen
- **Finanzwesen:** Identifizierung von Trends in Finanzmärkten
- ...

Quellen

- https://www.thefouriertransform.com/
  (zuletzt aufgerufen am 03.07.24)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series
  (zuletzt aufgerufen am 03.07.24)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform
  (zuletzt aufgerufen am 03.07.24)
- https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform/
  (zuletzt aufgerufen am 03.07.24)
- https://youtu.be/r6sGWTCMz2k
  (zuletzt aufgerufen am 03.07.24)

Danke für eure Aufmerksamkeit!