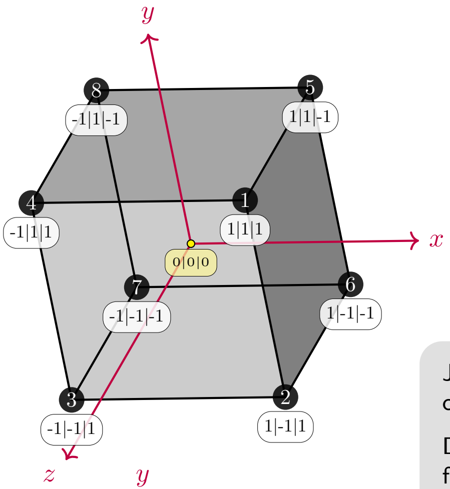
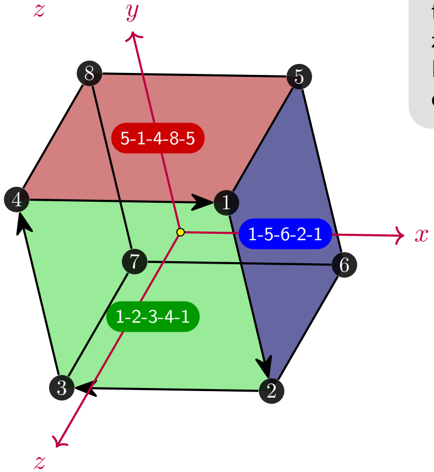
=11

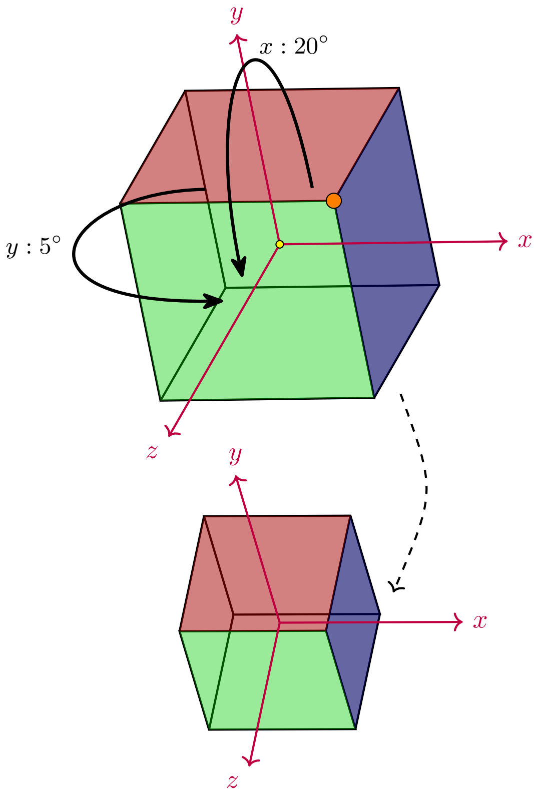
heightheight depthdepth totalheighttotalheight widthwidth extentxextentx extentyextenty offsetxoffsetx offsetyoffsety raiseraise globalraisetotalheightglobalraisetotalheight globalraiseglobalraise capitalcapital





Jedes Objekt wird durch Eckpunkte und Flächen beschrieben.

Die Position eines jeden Objektes beträgt anfangs $(0|0|0)$. Die Eckpunkte werden relativ zur Position des Objektes angegeben. Alle Punkte werden nun mit einer Ziffer versehen, damit man die Flächen beschreiben kann.



Um das Objekt nun zu drehen, muss man alle Punkte des Objektes mit den folgenden Drehmatritzen multiplizieren:

X-Drehung: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

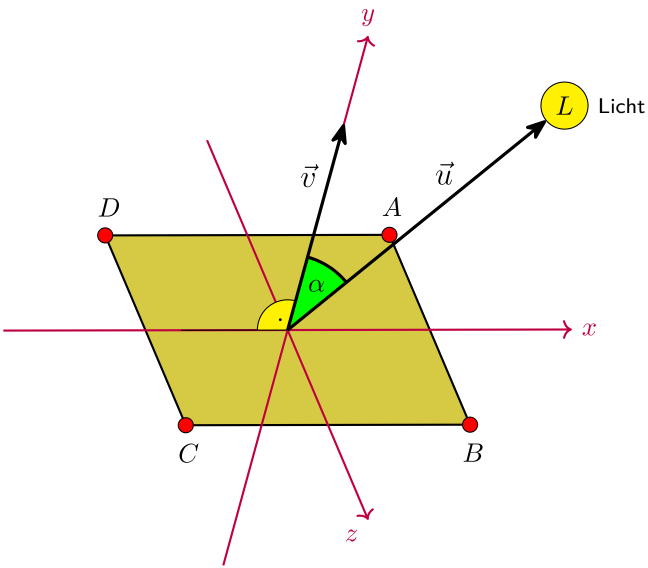
Y-Drehung: $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Z-Drehung: $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Um nun den Punkt $(1|1|1)$ (links orange) 20° um die X-Achse und 5° um die Y-Achse zu drehen muss man folgendes rechnen:

$$\begin{pmatrix} \cos 5^\circ & 0 & \sin 5^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 5^\circ & 0 & \cos 5^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Um nun auch noch Lichter mit beliebiger Farbe im Raum platzieren zu können, muss man die Farben der Flächen zu allen Lichtern berechnen. Dazu braucht man den Normalenvektor $\vec{v}$. Diesen erhält man durch das Vektorprodukt:

$$\vec{a} = A - B \qquad \vec{b} = B - C$$

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_2 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Durch das Vektorprodukt haben wir nun den Normalenvektor $\vec{v}$ der Fläche $ABCD$ berechnet. Nun kann man die Gewichtung f des Lichtes auf die Fläche wie folgt berechnen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right) \quad \Rightarrow \quad f = \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Zuletzt muss man folgendes auf alle Lichter anwenden:

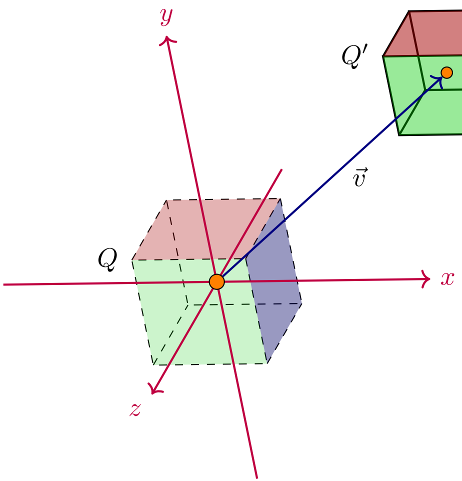
$$\begin{array}{r|l} r, g, b & \text{aktuelle Farbe der Fläche (Anfang: } 1, 1, 1) \\ f & \text{oben berechneter Faktor} \\ L_r, L_g, L_b & \text{Farben der Lichter} \end{array}$$

$$r, g, b, L_r, L_g, L_b \in [0; 1]$$

$$r = 1 - (1 - r) \cdot (1 - f \cdot L_r)$$

$$g = 1 - (1 - g) \cdot (1 - f \cdot L_g)$$

$$b = 1 - (1 - b) \cdot (1 - f \cdot L_b)$$



Um nun eine Translation (Verschiebung) vorzunehmen muss man den Vektor $\vec{v}$ zu allen Punkten des Objektes Q addieren. Jetzt will man natürlich eine Transformation auch mit einer Matrix beschreiben können. Um dies vorzunehemen muss man die Matrix um eine Zeile und eine Spalte erweitern. Alle Vektoren müssen dann auch um eine Koordinate mit dem Wert 1 erweitert werden:

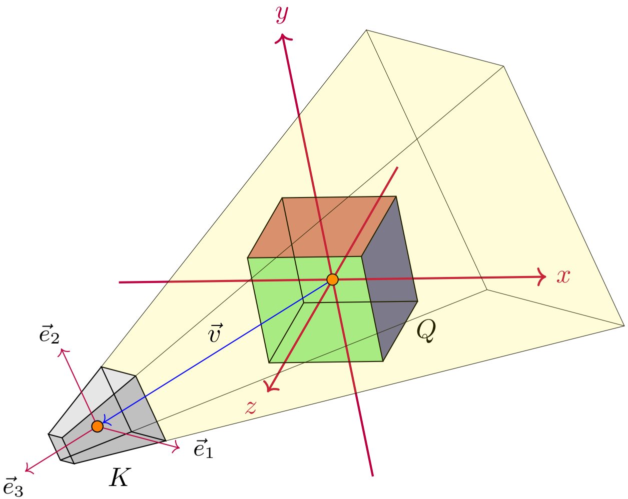
$$\begin{aligned} \vec{p} &= \text{Ortsvektor zu jedem Punkt des Objektes } Q \\ \vec{p'} &= \text{Ortsvektor zu jedem Punkt des Objektes } Q' \end{aligned}$$

$$\vec{p'} = \vec{p} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:(0,-5pt)

Um den Punkt $(0|3|2)$ um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu verschieben:

$$\begin{aligned} p' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Damit man Objekte von einer beliebigen Perspektive betrachten kann, braucht man eine "Kamera", die sich frei im Raum bewegen kann. Diese kann mit einer Matrix beschrieben werden:

$$K = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & v_1 \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & v_2 \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um nun die Kamera K auf Q anzuwenden, muss man alle Punkte von Q mit K^{-1} multiplitzieren.

Beispiel:

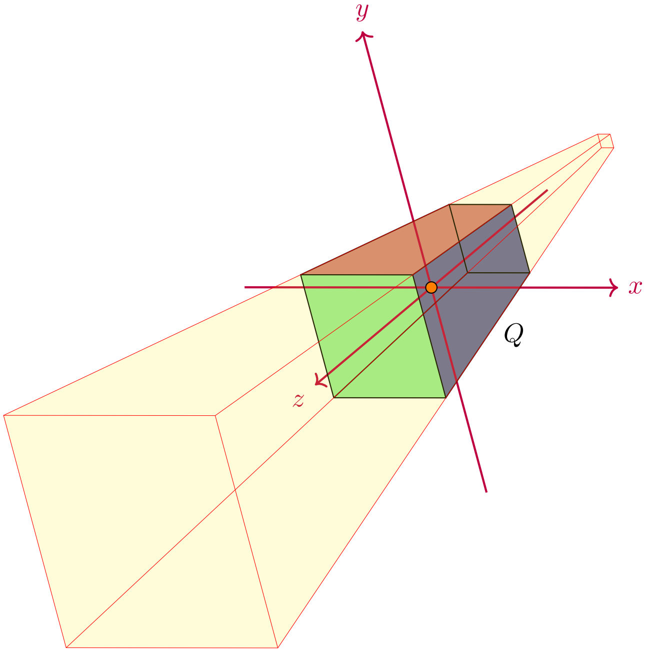
Die Kamera C (Rotationen: $x : 20°$, $y : -30°$, $z : 0°$, Position: $(5|3|\text{-}6)$) soll auf das Objekt R angewendet werden:

$$\begin{aligned} R' &= \text{Objekt nach Anwendung von } C \\ \vec{p} &= \text{Ortsvektor jedes Punktes von } R \\ \vec{p'} &= \text{Ortsvektor jedes Punktes von } R' \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(-30°) & 0 & \sin(-30°) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-30°) & 0 & \cos(-30°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot(+1em,*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20° & -\sin 20° & 0 \\ 0 & \sin 20° & \cos 20° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p'} = C^{-1} \cdot \vec{p}$$



Um nun den Quader Q nun noch perspektivisch wirken zu lassen (wie links gezeigt), muss man alle Punkte von Q im Raum mit der Matrix V multiplitzieren:

$$
\begin{aligned}
Q' &= \text{Objekt nach Anwendung von } V \\
\vec{p} &= \text{Ortsvektor jedes Punktes von } R \\
\vec{p'} &= \text{Ortsvektor jedes Punktes von } R'
\end{aligned}
$$

$$\vec{p'} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}$$