Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Штепин Вадим Владимирович*

Автор: *Терехова Ольга*, *Парфенова Анна*, Редактор *Воробьев Павел*

Проект на Github

весна 2025

Содержание

1 Алгебра многочленов

1.1 Алгебра многочленов над коммутативным кольцом с единицей

Напоминание. Многочленом(над полем F) называется $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ называется многочленом от одной переменной. С многочленами определены операции $+, *, *\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому можно сказать, что относительно сложения и умножения множество всех многочленов образует коммутативное кольцо и бесконечномерное линейное пространство относительно сложения и умножения на скаляр с базисом $1, x, x^2, \ldots$

Напоминание. Алгебра над полем F – алгебраическая структура, с одной стороны являющаяся кольцом(не обязательно коммутативное) со сложением и умножением, а с другой стороны линейным пространством со сложением и умножением на скаляр из поля. А также выполняется равенство $\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y$ - скаляр коммутирует с векторами.

Пример. 1. $R[x]$.

2. $M_n(F)$

3. Если взять $\mathbb{Z}_p[x]$, так как $\forall x \overline{x}^p = \overline{x}$, то получим, что многочленов конечное число, а именно p^p.

Определение 1.1. Последовательность $(a_0, a_1, a_2, \ldots), a_i \in R$ называют финитной если $\exists N : \forall n > N \hookrightarrow a_n = 0$, т.е. если начиная с некоторого номера N все значения a_n равны нулю.

Определение 1.2. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Многочлен над R – финитная последовательность элементов $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots), a_i \in R$. Дополнительно будем использовать обозначение $(A)_i = a_i$.

Определение 1.3. $R[x]$ – множество многочленов над кольцом R.

Определение 1.4. Пусть $A, B \in R[x]$, тогда верны следующие свойства:

1. $(A + B)_n = (A)_n + (B)_n$,
2. $(A \cdot B)_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (A)_i \cdot (B)_{n-i}$,
3. $\lambda \in R$ $(\lambda A)_n = \lambda \cdot (A)_n$.

Утверждение 1.1. *Множество всех многочленов R[x] является коммутативным кольцом с единицей.*

Замечание. $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ – нейтральный по умножению многочлен.

Доказательство. Докажем непосредственной проверкой:
Относительно сложения это абелева группа с нейтральным элементом из нулей. Проверим ассоциативность умножения(коммутативность умножения очевидна) - R[x] - коммутативная полугруппа.
$(A \cdot B) \cdot C = \sum_{i=0}^{k} (AB)_i c_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} c_{k-i}$
$A \cdot (B \cdot C) = \sum_{s=0}^{k} a_s (BC)_{k-s} = \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=0}^{k-s} a_s b_t c_{k-s-t}$. Взяв замену переменной $i = s + t, 0 \leqslant t \leqslant k - s \Longrightarrow s \leqslant i \leqslant k$, получаем $\sum_{s=0}^{k} \sum_{i=s}^{k} a_s b_{i-s} c_{k-i}$. Заменив параметр s на j, мы получим $\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} a_j b_{i-j} c_{k-i}$, откуда несложно показать, что все значения в данной сумме пробегают значения из предыдущей суммы, то есть $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Проверим дистрибутивность. $(A \cdot (B + C))_k = \sum_{i=0}^{k} a_i(b + c)_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i c_{k-i} = (A \cdot B)_k + (A \cdot C)_k$

$$(1 \cdot A)_n = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot (A)_n = (A)_n$$

Таким образом, $1 \cdot A = A$. Умножение на единицу справа можно проверить аналогично. □

Следствие. F - поле. F[x] - бесконечномерная алгебра с базисом $1, x, x^2, \ldots$.

Определение 1.5. Введем обозначения: $x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$ и так далее, чтобы многочлен с единицей на i-й позиции записывался как x^i (нумерация коэффициентов с нуля). Тогда произвольный многочлен $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ можно записать как $A = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots$

Определение 1.6. Пусть $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ – многочлен. Последний отличный от нуля коэффициент называется старшим коэффициентом многочлена. Номер старшего коэффициента называется степенью многочлена и обозначается как $\deg P$.

Замечание. Будем считать, что степень нулевого многочлена и только нулевого многочлена не определена. Однако иногда удобно считать её равной $-\infty$

Напоминание. Делителями нуля называются такие числа a и b, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ но $a \cdot b = 0$.

Определение 1.7. Коммутативное кольцо с единицей называется областью целостности или целостным кольцом если оно не имеет делителей нуля.

Пример. $\mathbb{Z}_n$ – область целостности тогда и только тогда, когда n – простое.

Утверждение 1.2. *В области целостности выполняется правило сокращения:*

$$ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c.$$

Доказательство. $a(b - c) = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow b - c = 0$. □

Замечание. Следует ли из того, что R - коммутативное кольцо с 1 с правилом сокращения, что R - Область целостности?

Утверждение 1.3. *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, $A, B \in R[x]$, тогда:*

1. $\deg(A + B) \leqslant max(\deg(A), \deg(B))$,
2. $\deg(A \cdot B) \leqslant \deg(A) + \deg(B)$,
3. *Если вдобавок R – область целостности, то* $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

Доказательство.

1. Обозначим $\deg A = a$, $\deg B = b$. Пусть $n > max(a, b)$, тогда:

   $$(A + B)_n = (A)_n + (B)_n = 0 + 0 = 0,$$

   а значит $\forall n > max(a, b) \Rightarrow (A + B)_n = 0$. Тогда номер последнего ненулевого элемента не превосходит $max(a, b)$, а значит $deg(A + B) \leqslant max(a, b)$

2. Пусть $n > a + b$, покажем что $(AB)_n = 0$:

   $$(AB)_n = \sum_{i=0}^{a}(A_i)(B_{n-i}) + \sum_{i=a+1}^{n}(A_i)(B_{n-i}) = 0 + 0 = 0$$

В первой сумме $B_{n-i} = 0$ во всех слагаемых так как $n > a + b$, а значит $n - i > b$ для всех i от 0 до a. Во второй сумма во всех слагаемых $A_i = 0$ так как $i > a$ на всем диапазоне суммирования. Таким образом обе суммы равны нулю, а значит $(AB)_n = 0$.

3. Положим $n = a + b$, тогда:

$$(AB)_n = \sum_{i=0}^{a-1}(A)_i(B)_{n-i} + (A)_a(B)_b + \sum_{i=a+1}^{a+b}(A)_i(B)_{n-i}$$

Аналогично предыдущему пункту первое и третье слагаемое будут нулевыми. При этом $(A)_i \neq 0$ и $(B)_{n-i} = (B)_b \neq 0$, и в силу целостности, $(A)_i(B)_{n-i} \neq 0$, то есть $(AB)_n \neq 0$. Для больших, чем n, номеров сумма будет нулевой, что было показано в предыдущем пункте, а значит $\deg AB = a$.

□

Следствие. Если R – область целостности, то R[x] – область целостности.

Доказательство. Мы уже знаем, что $R[x]$ – коммутативное кольцо с единицей. Покажем, что в нём нет делителей нуля. Пусть $A \neq 0, B \neq 0, A, B \in R$. Согласно пункту 3 доказанного выше утверждения и в силу того, что $\deg(A) \geqslant 0$ и $\deg(B) \geqslant 0$, верно $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) \geqslant 0$, а значит $AB \neq 0$. □

Определение 1.8. Многочлены от нескольких переменных определеим индуктивно. $R[x_1][x_2]$ - многочлен от 2 переменных(так как $R[x]$ - коммутативное кольцо с 1), а $R[x_1, \ldots, x_n] \overset{def}{\equiv} R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$

Определение 1.9. Если $(a_1, \ldots,)$ и содержит бесконечно много ненулевых элементов, то $R[[x]]$ - кольцо формальных степенных рядов.

Замечание. Кольцо от двух переменных $R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2]$ – кольцо многочленов над $R[x_1]$.

Замечание. $R[[x]]$ – кольцо формальных степенных рядов.

1.2 Многочлены над полем F

1.2.1 Алгоритм деления с остатком

Теорема 1.1. *Пусть $A, B \in F[x]$, F – поле, $B \neq 0$. Тогда:*

1. *Существуют $Q, R \in F[x]$ т.ч. $A = QB + R$, где $R = 0$ или $\deg R < \deg B$.*
2. *Многочлены R и Q определены однозначно.*

Доказательство.

1. Индукция по $\deg A$:

   Пусть $A = 0$ или $\deg A \leqslant B$, тогда очевидно $A = 0 \cdot B + A$.

   Пусть теперь $\deg A \geqslant \deg B$, и они равны a и b соответственно. Тогда старшие члены равны $HT(A) = \alpha x^a$ и $HT(B) = \beta x^b$. Подберем моном M такой что (HT - старший член многочлена, Highest term) $HT(A) = M \cdot HT(B)$, например $M = \frac{\alpha}{\beta} \cdot x^{a-b}$.

   Введем обозначение $A' = A - MB$, $\deg A' < \deg A$ по построению M. По предположению $A' = Q'B + R'$, где $R' = 0$ или $\deg R' < \deg B$. Тогда искомое разложение:

$$A = A' + MB = Q'B + MB + R' = (Q' + M)B + R'.$$

2. Предположим существуют два разложения $A = Q_1B + R_1 = Q_2B + R_2$, многочлены удовлетворяют условиям. Тогда $(Q_1 - Q_2)B = R_2 - R_1$.

   Предположим $Q_1 \neq Q_2$, тогда $\deg((Q_1 - Q_2)B) > \deg(B)$. При этом $\deg(R_2 - R_1) < \deg B$ так как $\deg R_1 < \deg B$ и $\deg R_2 < \deg B$, а значит мы пришли к противоречию и $Q_1 = Q_2$. В таком случае так же верно и $R_1 = R_2$.

$\square$

Замечание. Для R, являющегося коммутативным кольцом с единицей, но не являющегося полем, доказанное выше может быть неверно в общем случае, так как обратный к β элемент β^{-1} не обязан существовать и построение M не будет корректным.

Замечание. Доказательство существования аналогично делению в столбик, где A' является промежуточным частным.

Определение 1.10. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_i \in F[x]$, $c \in F$. Тогда значением многочлена $f(x)$ в элементе поля F называется $f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_n$.

Определение 1.11. Элемент поля F является корнем многочлена f, если $f(c) = 0$.

Утверждение 1.4. *Значение F(c) в точке $c \in F$ равно остатку от деления F на $(x - c)$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен:

$$f(x) = q(x)(x - c) + r(x).$$

При этом $r(x) = 0$ или $\deg r < \deg(x - c) = 1$, а значит $r(x)$ – константа поля F.
При подстановке точки c получаем значение $f(c) = r$. Тогда верно $f(x) = q(x)(x - c) + r$ и при $x = c$ верно $f(c) = r$. $\square$

Теорема 1.2 (Безу). *Число с является корнем $f(x) \Leftrightarrow f(x) \,\vdots\, (x - c)$.*

Доказательство. Пусть c – корень $f(x)$, тогда $f(c) = 0$, а значит $(x - c) \mid f(x)$. В обратную сторону, если $(x - c) \mid f(x)$, то $f(x) = q(x)(x - c)$, то есть $f(c) = 0$ и c – корень. $\square$

Замечание. Для упрощенного деления многочлена на (x-c) не обязательно делить в столбик, можно использовать схему Горнера.

Теорема 1.3 (Схема Горнера). *Пусть задан многочлен $f(x) \in F[x]$:*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_i \in F,$$

и необходимо разделить его на $(x - c)$, то есть представить в следующем виде:

$$f(x) = q(x)(x - c) + r.$$

Для этого получить коэффициенты многочлена $q(x)$:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}.$$

Для этого запишем коэффициенты в таблицу: в верхней строчке коэффициенты a_i, под ними соответствующие b_i. Тогда $b_i \cdot c + a_{i+1} = b_{i+1}$.

Доказательство. Приравниваем коэффициенты при x в одинаковых степенях в получившемся произведении и в $f(x)$ и получаем искомое соотношение:

$$(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1})(x - c) = b_0x^n + (b_1 - c \cdot b_0)x^{n-1} + \dots - b_{n-1}c.$$

□

Задача. *Обобщить схему Горнера на трехчлен $x^2 + bx + c$.*

1.3 НОД двух мономов. Алгоритм Евклида.

Определение 1.12. A делится на B, если существует такой многочлен Q что $A = QB$. Пишут $A \vdots B$ или $B|A$.

Определение 1.13. Многочлены A и B называются ассоциироваными если $B|A$ и $A|B$, то есть когда верны представления $A = Q_1B$, $B = Q_2A$. При этом:

$$\deg A = \deg Q_1 + \deg B \geqslant \deg B,$$
$$\deg B = \deg Q_2 + \deg B \geqslant \deg A,$$

откуда $\deg A = \deg B$, $\deg Q_1 = \deg Q_2 = 0$. Любые 2 ассоциированных многочлена отличаются на константный множитель.

Определение 1.14. Пусть $f(x)$ и $g(x) \in F[x]$ – ненулевые одновременно многочлены. Многочлен $d(x) \in F[x]$ называется наибольшим общим делителем (НОД, gcd) если:

1. $d|f$, $d|g$.
2. если d' – общий делитель f и g, то $d'|d$.

Иначе говоря, НОД многочленов f и g – такой общий делитель, который делится на любой общий делитель. НОД определен с точностью до ассоциированности.(вытекает из 2 пункта) НОД называется нормализованным, если его старший коэффициент является 1.

Теорема 1.4 (о существовании НОД)**.** *Пусть $f, g \in F[x]$ и f, g ненулевые одновременно. Тогда существует $d(x) =$ НОД$(f, g) \in F[x]$ и, более того, существуют $u(x), v(x) \in F(x)$, такие что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности $f(x) = 0, g(x) \neq 0$, то есть нулевой ровно один из многочленов. Тогда верно представление $d(x) = g(x), d = 0 \cdot f + 1 \cdot g$.

Пусть теперь оба многочлена ненулевые. Тогда можно выполнить цепочку делений многочленов, где на каждом новом шаге делимым и делителем будут становиться делитель и частное предыдущего деления соответственно. Таким образом для каждой пары НОД будет сохраняться, так как если делитель кратен некоторому многочлену, то делимое и частное будут кратны ему одновременно. Первые несколько шагов:

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$
$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$
$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x).$$

Продолжая действовать так дойдем до последних двух шагов, после которых остаток будет равен нулю. При делении степень остатка меньше степени делителя, а значит, в силу конечности номеров старших членов начальных многочленов, в некоторый момент процесс действительно остановится:

$$r_{n-2}(x) = q_n(x)r_{n-1}(x) + r_n(x),$$
$$r_{n-1}(x) = q_{n+1}(x)r_n(x).$$

Получается, что НОД$(f,g) = r_n$ – последний ненулевой остаток. Проверим:

1. $r_n|r_{n-1}$, $r_n|r_{n-2}, \dots$. Продолжая подниматься наверх получаем $r_n|f$, $r_n|g$
2. Теперь будем спускаться вниз, пусть $d'|f$, $d'|g$. Таким образом мы дойдем до $d'|d$.

□

Следствие. НОД$(f,g) =$ НОД$(g, r_1) =$ НОД$(r_1, r_2) = \dots =$ НОД(r_{n-1}, r_n).

Доказательство. Покажем, что все остатки $r_1, r_2, \dots, r_n$ являются линейными комбинациями многочленов f и g:

$$r_1 = f - q_1 g$$

$$r_2 = g - q_2 r_1 = -q_2 f + (1 + q_1 q_2)g$$

Спускаясь вниз и подставляя выражения предыдущих остатков в последующие получим все разложения. Положим $r_{n-2} = u''f + v''g$ и $r_{n-1} = u'f + v'g$. Тогда:

$$d = r_n = r_{n-2} - q_n - r_{n-1} = f(u'' - u'q_n) + g(v'' - v'g_n).$$

Таким образом все остатки можно выразить через f и g. □

Упражнение. *Докажите, что используя неоднозначность выбора коэффициентов у $u(x)$ и $v(x)$ можно добиться, чтобы $\deg u < \deg g$, $\deg v < \deg f$.*

Определение 1.15. Многочлены f и g называются взаимнопростыми, если НОД$(f,g) = 1$.

Замечание. Многочлены f и g взаимнопростыми тогда и только тогда, когда найдутся многочлены u,$v \in F[x]$ и $u \cdot f + v \cdot g = 1$.

1.3.1 Неприводимые многочлены

Определение 1.16. Ненулевой Многочлен $P \in F[x]$ называется неприводимым над полем F, если из $P = AB$ следует $\deg A = 0$ или $\deg B = 0$. Иначе говоря, многочлен называется неприводимым над полем F, если его нельзя разложить в произведение двух многочленов более низких степеней из этого же кольца $F[x]$.

Замечание. Важно над каким полем многочлен является неприводимым, например многочлен $x^2 + 1$ является приводимым над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, но неприводимым над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Замечание. Для многочлена справедлива основная теорема арифметики при разложении на неприводимые множители.

1.4 Основная теорема арифметики

Напоминание. Пусть F – поле. Многочлен A ненулевой степени называется неприводимым над полем F, если из $A = B \cdot C$, где $B, C \in F[x]$ следует, что $\deg B = 0$ или $\deg C = 0$.

Утверждение 1.5. *Пусть P – неприводимый с $\deg P > 0$ над F и $P \mid (B \cdot C)$. Тогда $P|B$ или $P|C$.*

Доказательство. Покажем от противного: пусть B и C не кратны P. Тогда НОД$(B, P) = P$ или НОД$(B, P) = 1$. Первый вариант исключен по предположению, а значит НОД$(B, P) = 1$. Аналогично НОД$(C, P) = 1$. Тогда по теореме 1.4:

$$\exists u_1, v_1 \in F[x] : u_1 B + v_1 P = 1,$$
$$\exists u_2, v_2 \in F[x] : u_2 C + v_2 P = 1.$$

Перемножим левые части равенств:

$$u_1 v_2 BC + (u_1 B v_2 + u_2 C v_1 + v_1 v_2 P)P = 1$$

Оба слагаемых в левой части равенства кратны P – противоречие. ☐

Следствие. $A_1 A_2 \dots A_n \vdots P \Longrightarrow \exists j : A_j \vdots P$.

Теорема 1.5 (основная теорема арифметики для многочлена)**.** *Пусть F – поле, $A \in F[x], A \neq 0$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Существует разложение A на неприводимые:*

$$A = \alpha P_1 P_2 \dots P_n,$$

где $\alpha \in F^*$, P_i неприводимый над F многочлен.

2. *Пусть A представляется в виде неприводимых многочленов двумя различными способами:*

$$A = \alpha \cdot P_1 P_2 \dots P_n = \beta \cdot Q_1 Q_2 \dots Q_m,$$

где $\beta \in F^*$, Q_j – неприводимый над F многочлен.

Тогда $n = m$ и существует перестановка $\sigma \in S_n$ такая, что многочлены ассоциированы:

$$P_i \sim Q_j \, (1 \leqslant i \leqslant n), \text{ где } j = \sigma(i).$$

Доказательство.

1. Докажем существование разложения на неприводимые множители индукцией по $\deg A$:
   (a) Если $\deg A = 0$, то $A = \alpha$, $\alpha \in F^*$.
   (b) Пусть A неприводим над F, $\deg A \geqslant 1$. Будем считать, что в таком случае разложение получено: $A = P$.
   Пусть теперь A приводим над F, тогда его можно представить в виде $A = B \cdot C$, $B, C \in F[x]$, $\deg B < \deg A$, $\deg C < \deg A$. Тогда к B и C применимо предположение индукции и, перемножая их, получим разложение для A.

2. Пусть существуют два разложения многочлена A на неприводимые:

$$A = \alpha \cdot P_1 P_2 \dots P_n = \beta \cdot Q_1 Q_2 ... Q_m.$$

Покажем по индукции по n:

(a) В случае $n = 1$ из неприводимости P_1 следует, что m так же равно единице. Таким образом, $A = \alpha \cdot P_1 = \beta \cdot Q_1$, а значит многочлены P_1 и Q_1 ассоциированы.

(b) Пусть теперь $n > 1$, тогда многочлен P_n делит произведение $Q_1Q_2 \dots Q_m$.
Тогда существует такое $j \in \{1, \dots, m\}$, что $P_n | Q_j$. Из неприводимости многочленов P_n и Q_j существует такая $\gamma \in F^*$, что $Q_j = \gamma P_n$. Теперь можно подставить выражение для Q_j в представление для A справа:

$$A = \alpha \cdot P_1P_2 \dots P_n = \beta \cdot Q_1Q_2 \dots Q_{j-1} \cdot \gamma P_n \cdot Q_{j+1} \dots Q_m.$$

Согласно утверждению 1.3 кольцо многочленов является областью целостности, а значит по утверждению 1.2 можно выполнить сокращение многочлена P_n в обеих частях равенства.
По предположению индукции число множителей слева и справа после сокращения совпадает и существует биекция $\sigma : \{1, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$, такая что $P_i \sim Q_{\sigma(i)}$. Доопределим биекцию: $\sigma(n) = j$. Теперь σ удовлетворяет всем условиям, поэтому доказано для n.

□

Следствие. Пусть A представим в виде $A = \alpha P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_s^{k_s}$ – попарно не ассоциированные неприводимые множители. Тогда утверждается, что всякий делитель $D \mid A$ имеет вид:

$$D = \beta P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_s^{m_s}, \text{ где } 0 \leqslant m_i \leqslant k_i.$$

Доказательство. Очевидно, что разложение D не может содержать множителей, не содержащихся в A, так как тогда A будет иметь ещё одно разложение на неприводимые множители. Пусть A представляется в виде $A = D \cdot Q$, где $Q = \alpha_1 P_1^{l_1} P_2^{l_2} \dots P_s^{l_s}$ и $D = \beta P_1^{m_1} \dots P_s^{m_s}$. Тогда $k_i = m_i + l_i$ и поэтому $0 \leqslant m_i \leqslant k_i$. □

1.4.1 Кратные корни многочленов

Пусть $f \in F[x]$, c – корень f. По теореме 1.2 Безу $(x - c) | f(x)$:

$$f(x) = q_1(x)(x - c).$$

При этом многочлен $q_1(x)$ так же может быть кратен $(x - c)$, а значит для некоторых $f(x)$ может существовать цепочка равенств:

$$f(x) = q_1(x)(x - c) = q_2(x)(x - c)^2 = \dots$$

Определение 1.17. Корень многочлена $f(x)$ называется корнем кратности k если f кратно $(x - c)^k$, но не кратно $(x - c)^{k+1}$.

Замечание. c – корень кратности $k \Leftrightarrow f(x) = q_k(x)(x - c)^k$, $q_k(c) \neq 0$.

Утверждение 1.6. *Пусть f - многочлен из $F[x]$. Тогда сумма кратностей всех корней многочлена f не превосходит $n = \deg(f)$*

Доказательство. Пусть c_1, c_2, $\dots c_s$ - корни многочлена, k_1 ,k_2, $\dots$,k_s – соответствующие им кратности:

$$f(x) \,\vdots\, (x - c_1)^{k_1},$$
$$\dots$$
$$f(x) \,\vdots\, (x - c_s)^{k_s}.$$

При этом многочлены $(x - c_i)$ и $(x - c_j)$ неприводимы и неассоциированы для всех различных i и j. Это очевидно, так как они имеют первую степень, а значит разложиться могли бы только в произведение констант. Поэтому многочлен $f(x)$ кратен так же произведению $(x - c_i)$ в соответствующих степенях:

$$f(x) \vdots (x - c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_s)^{k_s}.$$

Таким образом, сумма степеней не превосходит степень $f(x)$. При этом очевидно, что равенство достигается, если многочлен факторизуем на линейные множители. □

Замечание. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_6[x]$ и многочлен $f(x) = x^2 + x$ над ним. Он имеет четыре корня - 0, 2, 3, 5, а значит сумма кратностей корней гарантированно превосходит степень многочлена. Является ли это противоречием к утверждению 1.6? Нет, потому что $\mathbb{Z}_6[x]$ не является полем. Заметим, что здесь ещё и разложение на неприводимые не является единственным:

$$x^2 + x = x(x + 1) = (x + 3)(x + 4).$$

И снова это происходит потому что основная теорема арифметики доказана в предположении многочлена над полем.

1.5 Основная теорема алгебры

Определение 1.18. Если F – поле, такое что в кольце $F[x]$ всякий многочлен имеет хотя бы один корень из F, то F алгебраически замкнуто.

Теорема 1.6 (Основная теорема алгебры).

Всякий многочлен положительной степени из кольца $\mathbb{C}[x]$ имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный. Альтернативная формулировка: поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Определение 1.19. Будем говорить, что для комплексной последовательности z_n существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, если существует предел действительной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

Соглашение. Далее будем использовать обозначения: $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$.

Лемма 1.1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$

Идея доказательства. Теорема Пифагора.

Лемма 1.2. *Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.*

Идея доказательства. Использовать неравенство треугольника.

Лемма 1.3. *Если для комплексных последовательностей z_n и w_n существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$, то существуют и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} z_n + w_n = z + w$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = z \cdot w$.*

Идея доказательства. Воспользоваться аналогичными свойствами пределов действительных последовательностей из курса математического анализа первого семестра.

Замечание. Фактически лемма равносильна тому, что многочлен является непрерывной функцией над полем $\mathbb{C}$.

Следствие. $\lim z_n = z \Longrightarrow \forall f \in \mathbb{C}[z] \lim f(z_n) = f(z)$.

Определение 1.20. Будем говорить, что последовательность z_n сходится к бесконечности, если для действительной последовательности $|z_n|$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Лемма 1.4. *Пусть $\{z_n\}$ – произвольная последовательность поля $\mathbb{C}$. Тогда из нее можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному числу z_0 или к бесконечности.*

Доказательство.

1. Пусть существует константа $C > 0$, такая что для всех n верно $|z_n| \leqslant C$.

   Тогда, так как верно $|x_n| \leqslant |z_n|$, последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}.

   Рассмотрим теперь последовательность $\{y_{n_k}\}$, являющуюся подпоследовательностью $\{y_n\}$ с индексами, соответствующими сходящейся подпоследовательности $\{x_n\}$. Аналогично для этой последовательности верно $|y_{n_k}| \leqslant |z_{n_k}|$ для всех n_k, а значит последовательность ограничена, и теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_{k_s}}\}$.

   Для упрощения записи обозначим $i = n_{k_s}$. Тогда последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ сходятся, а значит сходится и соответствующая последовательность $\{z_n\}$ (по лемме 1.1).

2. Пусть теперь $\{|z_n|\}$ не ограничена. Тогда из нее можно извлечь подпоследовательность с монотонно возрастающим модулем (сходящуюся к бесконечности) следующим образом:

   Из неограниченности получим $\forall N \ \exists k : |z_k| > N$. Построим тогда подпоследовательность $z_i = z_{n_k}$, каждый раз выбирая n_k так чтобы z_{n_k} было больше i и $n_k > n_{k-1}$. Таким образом z_{n_k} стремится к бесконечности.

□

Лемма 1.5. *Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f = m \geqslant 1$. Тогда если z_n сходится к бесконечности то $f(z_n)$ сходится к бесконечности.*

Доказательство. Представим многочлен $f(x)$ в следующем виде:

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} \dots + a_{m-1} z + a_m = z^m (a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m}),\ a_0 \neq 0.$$

Подставим последовательность z_n. Тогда модуль $|z_n|^m$ сходится к бесконечности, а значение в скобках сходится к a_0, так как мы положили его ненулевым. Отсюда $|f(z_n)|$ сходится к бесконечности, и значит, $f(z_n)$ тоже сходится к бесконечности. □

Напоминание. $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$.

Лемма 1.6 (Д'Аламбера). *Пусть $f(x)$ – многочлен положительной степени из кольца $\mathbb{C}[z]$, имеющий в z_0 ненулевое значение: $f(z_0) \neq 0$. Тогда для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(z_0)$ найдется $z \in U_\varepsilon(z_0)$, такое что $|f(z)| < |f(z_0)|$.*

Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Разделим $f(z)$ на $z - z_0$ с остатком. Мы знаем, что остаток имеет смысл значения многочлена в точке z_0. Таким образом, $f(z) = q_1(z)(z - z_0) + r_0$, где $r_0 = f(z_0)$.

2. Разделим теперь многочлен q_1 на $z - z_0$ и подставим полученное выражение в полученное выше разложение для f. Получаем $f = q_2(z)(z - z_0)^2 + r_1(z - z_0) + r_0$, где $r_1 = q_1(z_0)$.

3. Продолжим делить остатки на $z - z_0$ и получим следующее выражение для $f(x)$:

   $$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots.$$

   В выражении выше $r_0 = f(z_0)$, $r_1 = f'(z_0)$, …, $r_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Такое разложение напоминает разложение в ряд Тейлора.

4. Обозначим главную часть за $\alpha(z-z_0)^p, \alpha \neq 0, p \in \mathbb{N}$. Получим представление $f(z)$ в виде:

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z-z_0)^p + o(z-z_0)^p = f(z_0) + (z-z_0)^p \left(\alpha + \frac{o(z-z_0)^p}{(z-z_0)^p}\right),$$

при этом $o(z-z_0)^p$ кратно $(z-z_0)^p$. Так как последнее частное стремится к 0 при z, стремящимся к z_0, верно:

$$\exists \varepsilon_1 < \varepsilon : \forall z \in U_{\varepsilon_1}(z_0) \hookrightarrow \left|\frac{o(z-z_0)^p}{(z-z_0)^p}\right| < \frac{|\alpha|}{2}.$$

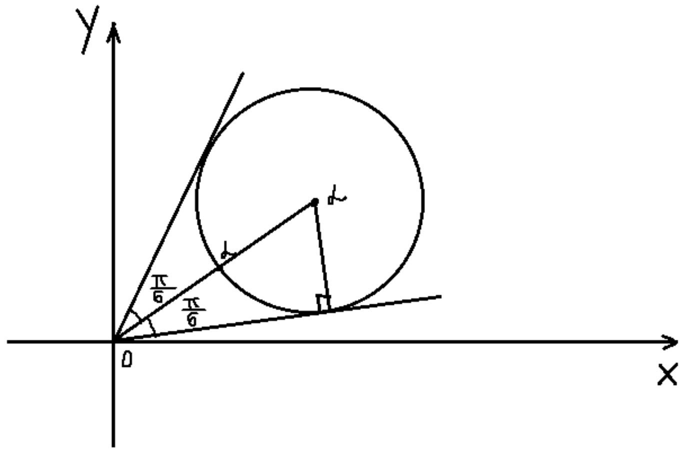
Таким образом:

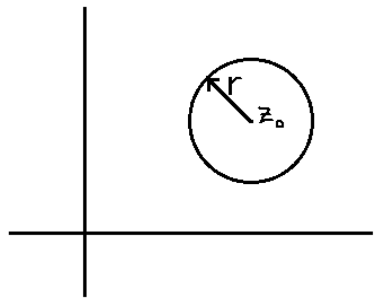
$$\arg(\alpha) - \frac{\pi}{6} \leqslant \arg(\alpha + \frac{o(z-z_0)^p}{(z-z_0)^p}) \leqslant \arg(\alpha) + \frac{\pi}{6};\ \alpha \in [\alpha_0; \alpha_0 + \frac{\pi}{3}]$$

Тогда если записать z как $z = z_0 + r \cdot e^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, то справедливо:

$$\arg\left(e^{\pi\varphi}\left(\alpha + \frac{o(z-z_0)^p}{(z-z_0)^p}\right)\right) = \pi\varphi + \alpha_0 + \beta \cdot \frac{\pi}{3}; 0 \leqslant \beta \leqslant 1$$

Так как φ – любое вещественное число, то теорема доказана.





□

Замечание. Идея леммы заключается в том, чтобы приблизить значение z к z_0, то есть найти значение, при котором $|f(z)| < |f(z_0)|$, но при этом сколь угодно близкое к z_0.

Напоминание. Основная теорема алгебры утверждает, что любой многочлен в поле комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – многочлены положительной степени. Пусть $A = \inf |f(z)|$, $z \in \mathbb{C}$. Покажем, что инфимум достигается, то есть что существует такое комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z_0)| = A$:

1. По определению инфимума существует последовательность z_n такая, что $|f(z_n)|$ стремится к конечному A.

2. По лемме 1.4 из неё можно извлечь подпоследовательность z_{n_k} такую, что она сходится к z_0 или к бесконечности.

3. По лемме 1.5 второй случай не реализуется, так как иначе $|f(z_{n_k})|$ также сходится к бесконечности.

4. Тогда для подпоследовательности существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in \mathbb{C}$, откуда существует и предел $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)$, а значит, по лемме 1.2, существует предел модуля такой функции, равный $\lim\limits_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = |f(z_0)| = A$.

5. Если оказалось так, что $A \neq 0$, то по лемме 1.6 найдется $z \in U_\varepsilon(z)$ такой что:

$$|f(x)| < |f(z_0)| = A = inf(|f(z)|),$$

что противоречит определению инфимума. Таким образом $A = 0$ и инфимум достигается, а значит $f(z)$ имеет хотя бы один корень.

□

1.5.1 Следствия из основной теоремы алгебры

Следствие. Всякий многочлен f положительной степени из кольца $\mathbb{C}[z]$ можно разложить в произведение линейных многочленов из $\mathbb{C}[z]$.

Доказательство. По основной теореме алгебры у f существует хотя бы один корень c_1. Тогда справедливо представление:

$$f(z) = q_1(z)(z - c_1) = q_2(z)(z - c_1)(z - c_2) \dots = \alpha(z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_n),$$

где $\deg f = n$. □

Следствие. Всякий многочлен f степени n из $\mathbb{C}[z]$ имеет ровно n корней в $\mathbb{C}$, если каждый корень учесть с его кратностью.

Доказательство. $f(z) = \alpha(z-c_1)^{k_1}\dots(z-c_s)^{k_s}$, $n = k_1 + \dots + k_s$, где k_i – кратность корня c_i. □

Следствие. Если $f \in \mathbb{R}[x]$ и $c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ – корень f кратности k, то $\overline{c}$ тоже корень f той же кратности k.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n, \\ f(c) &= a_0c^n + \dots + a_{n-1}c + a_n = 0, \\ f(\overline{c}) &= a_0\overline{c}^n + \dots + a_{n-1}\overline{c} + a_n = 0. \end{aligned}$$

Кратность c как корня f равна количеству нулевых остатков $r_0, r_1, \dots, r_n$ Для доказательства кратности сопряженного применим сопряжение ко всей схеме Горнера. □

Следствие. Всякий многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geqslant 1$ раскладывается над $\mathbb{R}[x]$ в произведение многочленов 1-ой и 2-ой степеней, причем квадратные многочлены имеют отрицательный дискриминант.

Доказательство. Индукция по степени f:

1. Если $\deg f = 1$ или $\deg f = 2$, то истинность очевидна.

2. Пусть теперь многочлен имеет степень, большую 2. Пусть c – корень f, $c \in \mathbb{R}$, то есть справедливо представление $f(x) = q(x)(x - c)$. Тогда по предположению индукции можно разложить $q(x)$ и получить разложение для $f(x)$.

   Теперь пусть $c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Тогда f кратен $x - c$ и $x - \overline{c}$, а значит, кратен их произведению:

$$f(x) = q(x)(x^2 - 2Re(c) \cdot x + |c|^2).$$

   Произведение корней, в свою очередь, является многочленом степени 2 из кольца $\mathbb{R}[x]$, имеющим отрицательный дискриминант. Остается только применить предположение индукции к многочлену $q(x)$.

□

Следствие. Всякий многочлен из $\mathbb{R}[x]$ положительной нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Доказательство. Действительно, если многочлен имеет комплексный корень, то сопряженное к нему число также является корнем. Тогда если отбросить все комплексные корни, то мы отбросим четное число корней, а значит, останется хотя бы один действительный корень. □

Следствие (об описании неприводимых многочленов над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)**.**

1. Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ неприводимыми являются многочлены первой степени и только они.

2. Над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ неприводимыми являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

Утверждение 1.7. *Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ степени n, являющийся неприводимым над $\mathbb{Q}$.*

Пример. $x^2 + 2$ – неприводим, $x^3 + 2$ – неприводим $\ldots$ $x^n + 2$ – неприводим. Для доказательства нужно использовать достаточное условие Эйзенштейна.

Примечание авторов. Критерий Эйзенштейна приведен, например, в лекциях Вадима Владимировича 2021го года:

Пусть многочлен $f(x)$ представим в следующем виде:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,\ a_i \in \mathbb{Z}.$$

Если существует такое простое число p, что $p | a_0$ и $p | a_i$ $\forall i > 0, p | a_n$, но a_n не делится на p^2, то $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Идея доказательства. Доказывается от противного. Предположим, что многочлен приводим, тогда существует его разложение на произведение двух многочленов. После этого попробуем получить коэффициенты в явном виде - должно получиться.)

1.6 Кратные корни многочленов. Продолжение.

Определение 1.21. Рассмотрим $F[x]$ – кольцо многочленов над полем F. Формальной производной многочлена x^n называется $\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$, так же используется обозначение $(x^n)'$. Распространим $\frac{d}{dx}$ на остальные векторы $F[x]$ по линейности. Тогда дифференцирование является линейным оператором: $\frac{d}{dx} : F[x] \to F[x]$.

Замечание. Формальная производная может быть равна 0 даже от непостоянного многочлена. Например для $f = x^{2p} + x^p$ над полем $\mathbb{Z}_p$.

Утверждение 1.8. *Формальная производная* $\frac{d}{dx}$ *удовлетворяет правилу Лейбница:*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Доказательство. Обе части являются линейными по многочленам f и g, поэтому достаточно доказать правило для базисных векторов. Рассмотрим $f = x^m$ и $g = x^l$ – базисные векторы в кольце $F[x]$. Тогда:

$$(x^m \cdot x^l)' = (x^{m+l})' = (m+l) \cdot x^{m+l-1}.$$

Так же можно продифференцировать f и g по отдельности:

$$(x^m)' = m \cdot x^{m-1} \qquad\qquad (x^l)' = l \cdot x^{l-1}$$

Отсюда очевидно, что равенство действительно выполняется:

$$f' \cdot g + f \cdot g' = m \cdot x^{m-1} \cdot x^l + x^m \cdot l \cdot x^{l-1} = (m+l) \cdot x^{m+l-1} = (f+g)'$$

□

Следствие. Произведение нескольких многочленов и возведение многочлена в степень так же удовлетворяют привычным правилам:

1. $(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_n'$,
2. $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} f'$.

Доказательство. 1. Индукция по n:

База: для $n = 2$ доказано в утверждении 1.

Переход: докажем, что из истинности утверждения для 2 и для $n-1$ многочленов следует его истинность для n:

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \ldots f_n)' = ((f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) \cdot f_n)' = (f_1 f_2 \ldots f_{n-1})' \cdot f_n + (f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) \cdot f_n' = \\ = (f_1' f_2 \ldots f_{n-1} + f_1 f_2' \ldots f_{n-1} + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_{n-1}') \cdot f_n + f_1 f_2 \ldots f_n \cdot f_n' = \\ = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_n'.\end{aligned}$$

2. Докажем используя результат, полученный в предыдущем пункте:

$$(f^n)' = (f \cdot f \cdot \ldots f)' = f' \cdot f \ldots f + f \cdot f' \ldots f + \ldots f \cdot f \ldots f' = n \cdot f^{n-1} f'.$$

□

Определение 1.22. Число $c \in F$ называется корнем многочлена $f \in F[x]$ кратности R если f представим в виде $f(x) = q(x)(x-c)^R$, где $q(c) \neq 0$.

Теорема 1.7 (о кратности корня x)**.** *Пусть F – поле, $f \in F[x]$, $c \in F$ – корень многочлена f. Тогда верно следующее:*

1. *c – кратный корень $f \Leftrightarrow f(c) = 0$ и $f'(c) = 0$.*
2. *c – корень кратности $R \Rightarrow f(c) = 0,\ f'(c) = 0,\ \ldots,\ f^{(R-1)}(c) = 0$.*
3. *В условиях предыдущего пункта при выполнении дополнительного условия на характеристику поля $charF = 0$ или $charF > R$, верно так же $f^{(R)}(c) \neq 0$.*

Доказательство.

1. (a) Необходимость.
   По условию $f(x) = q(x)(x - c)$. Продифференцируем f:
   $$f'(x) = q'(x)(x - c) + q(x).$$
   Тогда $f'(c) = q(c)$. При этом многочлен $q(x)$ кратен $(x-c)$ в силу того, что c - кратный корень f. Таким образом вся производная f' кратна $(x - c)$.

   (b) Достаточность.
   Пусть $f(c) = f'(c) = 0$, тогда $q(c) = 0$, а значит $q(x)$ кратен $(x - c)$.

2. Пусть c – корень кратности R. Тогда многочлен f представим в виде $f = q(x)(x - c)^R$, где $q(c) \neq 0$. Возьмем производную от f:
   $$f'(x) = q'(x)(x - c)^R + R \cdot q(x)(x - c)^{R-1}.$$
   Продолжим брать производные. Тогда для k-производной кратность корня c не меньше $R-k$.

3. Кратность корня для производной в точности равна $R-k$, а значит $f^{(R-1)}$ имеет c в качестве простого корня (кратности 1).

   Предположим противное. Пусть $(f^{(R-1)})'(c) = 0$. Тогда c – кратный корень $f^{(R-1)}$, что приводит к противоречию.

   Таким образом $f^R(c) \neq 0$. В обратную сторону, пусть $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(R-1)}(c) = 0$. Если c – корень кратности 1, то $f'(c) \neq 0$, противоречие. Если c – корень кратности 2, то $f^{(2)}(c) \neq 0$.

   Аналогично если c – корень кратности $R - 1$, то $f^{(R-1)}(c) \neq 0$. Таким образом c – корень кратности не менее чем R. При этом если он имеет кратность большую, чем R, то $f^{(R)} = 0$, чего не может быть, а значит R – корень кратности ровно R.

□

Замечание. Условие на характеристику поля - существенно. Пусть $f(x) = x^{10} - x^5$ в $\mathbb{Z}_5 . f'(x) = 10x^9 - 5x^4 = 0$. $x = 0$ корень кратности 5, но при этом утверждение пункта в) не выполняется.

1.7 Поле частных над областью целостности.

Определение 1.23. A - область целостности. $A^* = A \setminus \{0\}$. $A * A^* = \{(f,g) | f \in A, g \in A^*\}$, $\dfrac{f}{g} = (f, g)$. Пусть $\dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_2}{g_2}$, если $f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0$.

Определение 1.24. Введем операции

1. $A * A^* \to A * A^*$
2. $\dfrac{f}{g} \to \dfrac{f \cdot h}{g \cdot h}$ - вставка
3. $\dfrac{f \cdot h}{g \cdot h} \to \dfrac{f}{g}$ - сокращение

Утверждение 1.9. *Дроби* $\dfrac{f_1}{g_1}, \dfrac{f_2}{g_2}$ *равны тогда и только тогда, когда одну дробь можно получить из другой с помощью операции вставки и сокращения.*

Доказательство. $\dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_2}{g_2} \iff f_1 g_2 = f_2 g_1$

$\dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_1 g_2}{g_1 g_2} = \dfrac{f_2 g_1}{g_1 g_2} = \dfrac{f_2}{g_2}$. □

1.8 Рациональные дроби

Чтобы получить нужные свойства, введем операции сложения.

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} \overset{def}{\equiv} \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}$$

Проверим корректность сложения. Пусть $\frac{f_1}{g_1} = \frac{a}{b}, \frac{f_2}{g_2} = \frac{c}{d}$.

Тогда $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Проверим равенство сумм. $\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} \overset{?}{=} \frac{ad+cb}{bd}$.

Проверим по определению. $(f_1g_2 + f_2g_1)bd - (ad+cb)g_1g_2 = g_2d(f_1b - ag_1) + g_1b(f_2d - cg_2) = 0 + 0 = 0$.

Нейтральный по сложению элемент $\frac{0}{g} = \frac{0 * g}{g * 1} = \frac{0}{1}$ - нуль в $A * A^*$. Тогда $\frac{0}{1} + \frac{f}{g} = \frac{f}{g}$. Тогда $(A * A^*, +)$ - абелева группа по сложению с нейтральным $\frac{0}{1}$.

Определим умножение

$$\frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2} \overset{def}{\equiv} \frac{f_1f_2}{g_1g_2}$$

Упражнение. *Проверить корректность умножения и основные свойства (нейтральный элемент $\frac{1}{1}$).*

$A * A^*$ - коммутативное кольцо с 1. Теперь найдем обратный к каждому ненулевому элементу. $\frac{f}{g} \neq 0 \iff f \cdot 1 \neq 0 \cdot g \iff f \neq 0$. А значит $\exists \frac{g}{f}$ и $\frac{f}{g}\frac{g}{f} = \frac{1}{1}$.

Определение 1.25. Построенное поле называется полем частных целостного кольца и обозначание $Q(A) (Q - quotient =$ частное)

Пример.

1. $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$
2. $Q(F) = F$
3. F - поле. $F[x]$ - область целостности. $Q(F[x]) = F(x)$ - поле частных. $F(x)$ - поле рациональных функций или же поле рациональных дробей. Очевидно, что если $p = charF$, то такую же характеристику имеет и поле $F(x)$ - вытекает из того, что $n_F = 1 + 1 + \ldots + 1 = \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1} = n_{F(x)}$. В частности если взять конечное поле, то $F(x)$ будет бесконечным полем конечно характеристики.

1.8.1 Разложение рациональных дробей

$\frac{f}{g} = \frac{fh}{gh}$. Заметим, что $\deg(\frac{f}{g}) = \deg f - \deg g$ не меняется при домножении или сокращении.

Определение 1.26. Рациональная дробь $\frac{f}{g}$ называется правильной, если $\deg \frac{f}{g} < 0 \iff \deg f < \deg g$.

Утверждение 1.10. *Всякая рациональная дробь $\frac{f}{g} \in F(x)$ представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, причем такое представление единственное.*

Доказательство.

1. Существование. $\frac{f}{g}$ - если правильное, то очевидно. Иначе разделим f на g остатком и получим $f = q \cdot g + r, \deg r < \deg g \Longrightarrow \frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$.

2. Единственность. Пусть $\frac{f}{g}=q_1+\frac{r_1}{g}=q_2+\frac{r_2}{g}, \deg r_1<\deg g, \deg r_2<\deg g$. Тогда $q_1-q_2=\frac{r_2-r_1}{g}$. $\deg(q_1-q_2)\geqslant 0, \deg(r_2-r_1)\leqslant \max(\deg r_1, \deg r_2)<\deg g$. Степени разные, а значит это верно только, когда и $q_1=q_2, r_1=r_2$.

□

Упражнение. *Доказать, что* $\deg(\frac{f_1}{g_1}\pm\frac{f_2}{g_2})\leqslant \max(\deg\frac{f_1}{g_1}, \deg\frac{f_2}{g_2}), \deg(\frac{f_1}{g_1}\cdot\frac{f_2}{g_2})=\deg(\frac{f_1}{g_1})+\deg(\frac{f_2}{g_2})$.

Упражнение. *Доказать, что множетсво $\tilde{F}(x)$ - правильных рациональных дробей образует кольцо без единицы. (вытекает из предыдущего утверждения).*

Теорема 1.8. *Пусть $\frac{f}{g}$ - правильная рациональная дробь и известно, что $g=g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_s$ - произведение попарно взаимнопростых многочленов. Тогда $\exists$ единственное представление вида $\frac{f}{g}=\frac{f_1}{g_1}+\ldots+\frac{f_s}{g_s}$ - правильных рациональных дробей.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по s.

1. База индукции. $s=2$. $g=g_1\cdot g_2 \Longrightarrow \exists ug_1+vg_2=1$. А значит $\frac{f}{g}=\frac{(ug_1+vg_2)f}{g_1g_2}=\frac{uf}{g_2}+\frac{vf}{g_1}$ - не факт, что правильные. Давайте $uf=qg_2+f_2, \deg f_2<\deg g_2$. Тогда $\frac{f}{g}=q+\frac{f_2}{g_2}+\frac{vf}{g_1}=\frac{f_2}{g_2}+\frac{\overbrace{qg_1+vf}^{f_1}}{g_1}=\frac{f_2}{g_2}+\frac{f_1}{g_1}$, $\frac{f_1}{g_1}$ - правильная дробь, иначе $\frac{f}{g}$ - неправильная
Докажем единственность. $\frac{f}{g_1g_2}=\frac{f_1}{g_1}+\frac{f_2}{g_2}=\frac{f_1'}{g_1}+\frac{f_2'}{g_2}$. Тогда $\frac{f_1-f_1'}{g_1}=\frac{f_2'-f_2}{g_2}\Longleftrightarrow (f_1-f_1')g_2=(f_2'-f_2)g_1\vdots g_1$, но НОД$(g_1,g_2)=1 \Longrightarrow f_1-f_1'\vdots g$, но $\deg(f_1-f_2')<\deg g_1 \Longrightarrow f_1=f_1', f_2=f_2'$
2. Предположение индукции. $\frac{f}{(g_1\ldots g_{s-1})g_s}=\frac{F}{g_1\ldots g_{s-1}}+\frac{f_s}{g_s}\overset{\text{пред. инд.}}{=}\frac{f_1}{g_1}+\ldots+\frac{f_s}{g_s}$ - получили разложение в сумму правильных дробей и из пред. индукции получаем, что все слагаемые определены однозначно.

□

Следствие. Пусть $\frac{f}{g}$ - правильная рациональная дробь и $g=p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}$, p_i - попарно неассоциированные. Тогда $\frac{f}{g}=\frac{f_1}{p_1^{k_s}}+\ldots+\frac{f_s}{p_s^{k_s}}$ - разложение на правильные дроби.

Определение 1.27. Пусть дробь вида $\frac{f}{p^k}$, p - неприводимый над F многочлен, называется примарной дробью $(prime fraction)$

Определение 1.28. Примарная дробь $\frac{f}{p^k}$ называется простейшей дробью $(partial fraction)$, если $\deg f<\deg p$.

Теорема 1.9 (О разложении многочлена по степеням p)**.** *Пусть f - ненулевой многочлен, а p многочлен положительной степени. Тогда существует единственное представление $f=\varphi_0+\varphi_1 p+\ldots+\varphi_m p^m$, где $\deg\varphi_i<\deg p$.*

Доказательство. Докажем индукцией по $\deg f$

1. Если $\deg f < \deg p$, то $f = f$
2. Пусть для многочлена степени $< \deg f$ доказано. Тогда $f = q \cdot p + \varphi_0, \deg q < \deg f, \deg \varphi_0 < \deg p$. А значит применим к q предположение индукции. Тогда $q = \varphi_1 + \varphi_2 p + \ldots + \varphi_m p^{m-1} \Longrightarrow f = \varphi_0 + \ldots \varphi_m p^m$ - доказали существование разложения.
3. Докажем единственность. $f = \varphi_0 + p(\varphi_1 + \ldots \varphi_m p^{m-1}), \deg \varphi_0 < \deg p \Longrightarrow \varphi$ - остаток от деления f на p, а скобка при p - неполное частное, которые определены однозначно. Тогда по предположению индукции все φ определны однозначно.

□

Следствие. Всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших и причем единственным образом.

Доказательство. Достаточно доказать, что примарная дробь $\dfrac{f}{p^k}$, p - неприводимый над F многочлен, раскладывается на сумму простейших. $f = \varphi_0 + \varphi_1 p + \ldots \varphi_{k-1} p^{k-1}$, все φ определены однозначно. $\dfrac{f}{g} = \dfrac{\varphi_0}{p^k} + \dfrac{\varphi_1}{p^{k-1}} + \ldots + \dfrac{\varphi_{k-1}}{p}, \deg \varphi_1 < \deg p_1$ - при этом это разложение единственное из-за единственности разложения f по степеням p. □

Замечание. Если $f = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ разлагать по степеням двучлена вида $(x - c)$, то с помощью степени Горнера мы можем получить разложение f по степеням(применяем схему Горнера, каждый раз отбрасывая остатки $r_0, \ldots, r_n$). Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n r_k (x - c)^k$. Из анализа известно, что $f(x) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$. А значит $r_k = \dfrac{f^(k)(c)}{k!}$

2 Инвариантные подпространства

Напоминание. Пусть V – линейное пространство над полем F. Линейным оператором называется отображение $\varphi : V \to V$, такое что выполняются следующие аксиомы:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \varphi(x)$

Напоминание. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – базис в V. Тогда равенство $\varphi(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$ можно принять за определение матрицы оператора. Иначе говоря в j-ом столбце матрицы оператора стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ относительно начального базиса. В силу произвольности выбора вектора e_j верно: $\forall j \ \varphi(e_j) = e \cdot A_{*j} \Leftrightarrow \varphi(e) = e \cdot A$.

Пример. Пусть $x \in V$, $x \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $x = e\alpha$. Чтобы получить координаты образа вектора x под действием оператора φ нужно матрицу оператора A_φ умножить на вектор x:

$$\varphi(x) = \varphi(e)\alpha = eA\alpha \Rightarrow \varphi(x) \underset{e}{\leftrightarrow} A\alpha.$$

Напоминание. Изменение матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому осуществляется следующим образом:

Пусть e и f – два базиса в V. Пусть матрицы φ в этих базисах равны A и B соответственно, тогда $\varphi(e) = eA$, $\varphi(f) = fB$. Матрицу перехода от e к f назовем S: $f = e \cdot S$, $|S| \neq 0$. Тогда:

$$\varphi(f) = \varphi(e) \cdot S = eA \cdot S = f \cdot S^{-1} AS.$$

Таким образом, $B = S^{-1}AS$.

Замечание. Матрицы A и $S^{-1}AS$ называются подобными. Матрица любого линейного оператора определена с точностью до подобия.

Напоминание. Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$. Множество всех линейных операторов на V обозначается как $\mathcal{L}(V)$ и является линейным пространством, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$.
Произведение (композиция) линейных операторов определяется как $(\varphi\psi)(x) \overset{def}{=} \varphi(\psi(x))$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$. Оно обладает свойством ассоциативности из-за ассоциативности перемножения матриц, а значит $\mathcal{L}(V)$ является алгеброй.

Замечание. Причем $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$ с изоморфизмом $\varphi \underset{\mathfrak{E}}{\longleftrightarrow} A_\varphi$

Определение 2.1. Пусть V – линейное пространство, $\varphi : V \to V$. Подпространство $U \leqslant V$ называется инвариантным если для всех $x \in U$ выполняется $\varphi(x) \in U$. Другими словами, действие оператора φ на вектор из U не выводит его за пределы U, а значит $\varphi(U) \subset U \Leftrightarrow \varphi(U) \leqslant U$.

Пример. Рассмотрим следующие примеры инвариантных подпространств:

1. $O : x \to 0 \ \forall x \in V$. Тогда $U \leqslant V \Leftrightarrow O(U) = \{0\} \leqslant U$, а значит любое подпространство V является инвариантным относительно O.

2. Тождественное отображение $id(x) = x$. Тогда $id(U) = U$, а значит любое подпространство инвариантно.

3. Рассмотрим V_3 и проекцию на подпространство (e_1, e_2). Тогда инвариантными будут являться все V_3, нулевое подпространство, а так же линейная оболочка (e_1, e_2), любая прямая в этой плоскости, линейная оболочка e_3 и линейная оболочка e_3 и некоторого вектора из плоскости (e_1, e_2).

Определение 2.2. Базис $\mathfrak{E}$ пространства V называется согласованнм с инвариантым подпространством U, если $(e_1, \ldots, e_k)$ - базис в U, $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ - базис в V.

Утверждение 2.1. *Пусть $\varphi : V \to V$ – линейный оператор, U – инвариантное подпространство. Тогда в базисе, согласованном с V оператор φ имеет матрицу с левым нижним углом нулей:*

$$\varphi(A) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ 0 & C \end{array}\right)$$

Здесь $A \in M_k(F)$, $k = \dim U$.

Доказательство. U инвариантно относительно φ, а значит $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots \varphi(e_k) \in U$. Тогда для базисного вектора из U ненулевыми могут быть только первые k элементов соответствующего ему столбца. □

Замечание. Блок нулей в левом нижнем углу означает, что $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots \varphi(e_k) \in U$, а значит подпространство U является инвариантным относительно φ.

Замечание. Чтобы блок нулей был и выше и ниже главной диагонали, необходимо и достаточно, чтобы пространство раскладывалось в прямую сумму двух подпространств, являющихся инвариантными относительно φ.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi : V \to V$, U_1 и U_2 – инвариантные подпространства. Тогда $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2$ так же являются инвариантными относительно φ.*

Доказательство.

1. $\varphi(U1 \cap U2) \leqslant \varphi(U1) \cap \varphi(U2) \leqslant U1 \cap U2$.

2. $\varphi(U1+U2) = \varphi(U1)+\varphi(U2) \leqslant U1+U2$.

$\square$

Утверждение 2.2. *Для линейного оператора $\varphi : V \to V$ его ядро $\ker\varphi$ и образ $\operatorname{Im}\varphi$ являются инвариантными подпространствами.*

Доказательство.

1. $\varphi(ker(\varphi)) = \{0\} \in ker\varphi$.

2. Пусть $y \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда $\varphi(y) \in \operatorname{Im}\varphi$, так как $y \in V$.

$\square$

Теорема 2.2 (о коммутирующих линейных операторах)**.** *Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ и верно $\varphi\psi = \psi\varphi$. Тогда подпространства $\ker\varphi$, $\ker\psi$, $\operatorname{Im}\psi$, $\operatorname{Im}\varphi$ являются инвариантными относительно обоих операторов.*

Доказательство. Докажем, что $\ker\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ инвариантны относительно ψ, доказательство для инвариантности $\ker\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ относительно φ симметрично.

1. Пусть $x \in \ker\varphi$. Тогда $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \psi(0) = 0$, а значит $\psi(x) \in \ker\varphi$.

2. Пусть $y \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда $\psi(y) = \psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) \in \operatorname{Im}\varphi$.

$\square$

Замечание. Рассмотрим многочлен $P \in F[x]$. По определению $P(\varphi) \in F[x]$. Тогда по доказанной выше теореме 2.2 подпространства $\ker P(\varphi)$ и $\operatorname{Im} P(\varphi)$ инвариантны относительно φ, так как $P(x)x = xP(x)$, а значит $P(\varphi)\cdot\varphi = \varphi\cdot P(\varphi)$.

Замечание. Пусть U инвариантно относительно φ, $\psi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда U инвариантно так же относительно оператора $\alpha\varphi+\beta\psi$, где $\alpha, \beta \in F$ и операторов $\varphi\psi$, $\psi\varphi$. Так же если $P(x,y) \in F[x,y]$, то U инвариантно относительно $P(\varphi,\psi)$.

2.1 Собственные значения и векторы

Определение 2.3. Пусть $\varphi : V \to V$. Ненулевой вектор $x \in V : \varphi(x) = \lambda x$ называется собственным вектором оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Определение 2.4. Число $\lambda \in F$ называется собственным значением оператора φ, если существует собственный вектор $x \in V$, такой что $\varphi(x) = \lambda x$, то есть если некоторый x отвечает λ.

Замечание. Пусть x – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. Тогда верно $\varphi(x) = \lambda x$, а значит $\varphi^2(x) = \lambda^2 x, \ldots, \varphi^n(x) = \lambda^n x$.

Следствие. Пусть $P \in F[x]$. Тогда $(P(\varphi))(x) = P(\lambda)\cdot x$. В частности если P аннулирует φ, то есть $P(\varphi) = 0$, то каждое собственное значение φ является корнем P.

Определение 2.5. Пусть λ – собственное значение оператора $\varphi : V \to V$. Собственным подпространством оператора φ, отвечающим λ называется подпространство $V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda\varepsilon) \leqslant V$.

Утверждение 2.3. $V_\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ *– собственное значение оператора φ.*

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $V_\lambda \neq \{0\}$, $\exists x \neq 0 :\ (\varphi - \lambda E)(x) = 0$. Тогда $\varphi(x) = \lambda x$, а значит x – собственный вектор, λ – собственное значение.

2. Достаточность. Пусть λ – собственное значение оператора φ. Тогда $\exists x \neq 0: \ \varphi(x) = \lambda(x)$, где λ – собственное значение. Значит $(\varphi - \lambda E)x = 0$, откуда $x \in \ker(\varphi - \lambda E)$ и $V_\lambda \neq \{0\}$.

□

Замечание. Начиная с этого момента будем называть собственными подпространствами только такие V_λ, которые отличны от нуля, что равносильно тому, что λ – собственное значение. Действительно, доопределение собственных подпространств для несобственных λ не представляет интереса, так как они будут нулевыми.

Напоминание. Подпространства $U_1, U_2, \dots U_n$ называются линейно независимыми, если из равенства $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{0}$, где $x_i \in U_i$, следует, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Теорема 2.3 (О линейной независимости собственных подпространств, отвечающих попарно различным собственным значениям)**.** *Пусть $\varphi : V \to V$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ – различные собственные значения. Тогда $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_n}$ линейно независимы.*

Доказательство. От противного. Пусть существует такой набор $x_1 \in V_{\lambda_1}, x_2 \in V_{\lambda_2}, \dots, x_n \in V_{\lambda_n}$, что хотя бы один вектор ненулевой, но $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{0}$.

Назовем все такие наборы опровергающими, а мощностью набора будем считать количество ненулевых векторов. Из всех подходящих наборов выберем один наименьшей мощности. Пусть указанный выше набор без ограничения общности – искомый. Перенумеруем множества и x_i так, чтобы ненулевыми были первые j векторов. Тогда $x_1 + x_2 + \dots + x_j = 0$, и все $x_i \neq 0$ в силу перенумерации. Применим к сумме оператор φ:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_j x_j = 0.$$

Умножим изначальную сумму на $-\lambda_1$ и сложим с получившейся:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ \dots \ + \lambda_j x_j) + (-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ \dots \ - \lambda_j x_j) = \\ = (\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \ \dots \ + (\lambda_j - \lambda_1)x_j = 0.\end{aligned}$$

Таким образом мы получили опровергающий набор меньшей мощности, что приводит к противоречию. □

2.1.1 Нахождение собственных подпространств и векторов

Алгоритм (Нахождения собственных векторов)**.**

Пусть в V фиксирован базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, оператор φ имеет матрицу A. Тогда собственным будет являться такой вектор x, что $Ax = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Данное равенство равносильно следующему:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

По теореме Крамера наличие у данной системы ненулевого решения равносильно ненулевому определителю $\det(A-\lambda E)=0$. Такой определитель называется характеристическим многочленом оператора φ относительно базиса e:

$$\chi(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}trA\lambda^{n-1}+\cdots+detA.$$

Таким образом, собственными значениями будут λ, являющиеся корнями характеристического многочлена. Собственными будут векторы, являющиеся решениями систем с подставленными собственными значениями λ.

Теорема 2.4. *Верны следующие свойства характеристического многочлена:*

1. *Корни $\chi(\lambda)$ принадлежащие полю F и только они являются собственными значениями φ.*

2. *Многочлен $\chi(\lambda)$ не зависит от выбора базиса. (Хотя матрица оператора зависит от базиса)*

Доказательство.

1. Пусть λ_0 – корень $\chi_\varphi(\lambda)$, тогда $|A-\lambda_0 E|=0$. Это значит, что система $A-\lambda_0 E$, имеет ненулевое решение при $x_0\neq 0$. Тогда $\varphi(x_0)=\lambda_0$, а значит λ_0 - собственное значение φ. В силу равносильных переходов, обратное утверждение тоже верно.

2. Наряду с e выберем базис f, обозначим за S матрицу перехода между ними: $S=S_{e\to f}$. Тогда $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A$, $\varphi \underset{f}{\leftrightarrow} B$, $B=S^{-1}AS$. Верна следующая цепочка равенств:

$$\chi_b(\lambda)=|B-\lambda E|=|S^{-1}AS-\lambda E|=|S^{-1}AS-S^{-1}\lambda ES|=$$
$$=|S^{-1}(A-\lambda E)S|=|S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S|=|A-\lambda E|=\chi_a(\lambda).$$

Таким образом, характеристический многочлен одинаков для всех базисов.

□

Замечание. Понятие характеристического многочлена мы будем относить к линейному оператору, а не к её матрице.

Определение 2.6. В дальнейшем будем использовать следующее определение: характеристическим многочленом оператора $\varphi: V\to V$ называется определитель $|A-\lambda E|=\chi_A(\lambda)$, где A – матрица φ в произвольном базисе.

Следствие. От выбора базиса не зависят так же коэффициенты характеристического многочлена, в частности $detA$ и trA, поэтому часто пишут $det\varphi$ и $tr\varphi$ соответственно.

Алгоритм (Нахождения собственных подпространств)**.**

Выпишем $\chi_\varphi(\lambda)$ и найдем его корни принадлежащие F. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k$ – полученные собственные значения. Для каждого собственного значения λ_j находим $\ker B_j=\ker(A-\lambda E)$ – подпространство таких векторов, для которых $Ax=\lambda x$. Оно очевидно совпадает с V_j.

Следствие. Если V – линейное пространство над $\mathbb{C}$, $\dim V\geqslant 1$, то всякий линейный оператор $\varphi: V\to V$ имеет в V имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. Пусть $\chi_\varphi(t)$ – характеристический многочлен. По теореме 1.6 многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет хотя бы один корень λ_0. Следовательно, λ_0 – собственное значение для оператора φ и, значит, существует собственный вектор с собственным значением λ_0. □

Следствие. Если V - линейное пространство над $\mathbb{R}$ и $\dim V=2k+1, k\geqslant 0, k\in\mathbb{Z}$, то всякий линейный оператор $\varphi: V\to V$ имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию в таком пространстве существует хотя бы один корень $\lambda_0\in\mathbb{R}$. □

3 Линейные операторы

3.1 Диагонализуемость линейного оператора

Определение 3.1. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ над полем F называется диагонализируемым, если в V существует базис e, такой что A_φ – диагональная матрица.

Теорема 3.1 (критерий диагонализируемости линейного оператора)**.** *Пусть V - пространство над полем F, оператор $\varphi : V \to V$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – все попарно различные собственные значения, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *φ – диагонализируем.*
2. *В V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ.*
3. *$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.*

Доказательство.

1. $1 \Rightarrow 2$
   Так как φ диагонализируем, то существует базис, в котором матрица оператора выглядит следующим образом:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   Значит, $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ для любого i, откуда $e_1, \ldots, e_n$ – собственные векторы для φ. Значит, e – базис из собственных векторов. В данной записи собственные значения могут совпадать.

2. $2 \Rightarrow 3$
   Пусть e – базис из собственных векторов оператора φ. Перегруппируем базисные векторы по собственным значениям:
$$\underbrace{(e_{11}, \ldots, e_{1s_1})}_{\lambda_1}\underbrace{(e_{21}, \ldots, e_{2s_2})}_{\lambda_2}\ldots\underbrace{(e_{k1}, \ldots, e_{ks_k})}_{\lambda_k}$$
   Теперь $\langle e_{11}, \ldots, e_{1s_1}\rangle \leqslant V_{\lambda_1}, \ \ldots, \langle e_{k1}, \ldots, e_{ks_k}\rangle \leqslant V_{\lambda_k}$, откуда $V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$. По лемме 2.3 собственные подпространства линейно независимы. Тогда по теореме о характеризации прямой суммы $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.

3. $3 \Rightarrow 1$
   Известно, что $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Выберем в каждом V_{λ_i} базис: $e_{i_1}, \ldots, e_{is_i}$. Тогда, объединяя базисы собственных подпространств, получим базис всего пространства V. При этом по диагонали будут стоять сначала s_1 значений λ_1, затем s_2 значений λ_2 и так далее. Остальные значения – нули. Значит, φ – диагонализируем.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Замечание. Пусть φ - диагонализируемый и базис такой, что матрица диагональная, $\dim V = n$.

1. Все базисные векторы - собственные.
2. По главной диагонали - собственные значения φ.
3. $\operatorname{tr}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (с учётом кратности).
4. $\det\varphi = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
5. $\chi_\lambda(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t)$ (раскладывается на линейные множители над F).

Следствие. Если характеристический многочлен линейного оператора не раскладывается на линейные множители над F, то такой оператор заведомо не диагонализуем. И наоборот характеристический многочлен всякого диагонализируемого оператора представим в виде произведения линейных множителей.

Пример. Рассмотрим следующий оператор φ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi - t & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - t \end{pmatrix}$$

Его характеристический многочлен записывается как:

$$\chi_\varphi(t) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = t^2 - 2\cos\varphi t + 1$$

$D = 4\cos^2\varphi - 4 = -4\sin^2\varphi < 0$, что значит, многочлен не раскладывается на множители и матрица не диагонализируема. Геометрическое объяснение: Если есть собственный вектор, то он должен растягиваться, но матрица поворота - поворачивает. Но если мы работаем над полем $\mathbb{C}$, то будут 2 корня $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$

3.2 Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений

Определение 3.2. Пусть $\varphi : V \to V$, $\lambda \in F$ – его собственное значение, $\chi_\varphi(\lambda) = 0$. Кратность корня λ как корня характеристического многочлена называется алгебраической кратностью собственного значения λ. Обозначение: $alg(\lambda) \geqslant 1$.

Определение 3.3. Размерность собственного подпространства V_λ называется геометрической кратностью собственного значения λ. Обозначение: $geom(\lambda) = \dim V_\lambda \geqslant 1$.

Утверждение 3.1. *Пусть $\varphi : V \to V$ и U – инвариантное подпространство относительно φ. Пусть $\psi = \varphi|_U$. Тогда $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi$.*

Доказательство. Пусть e – базис в V, согласованный с инвариантным подпространством U:

$$e = (\underbrace{e_1, \ldots, e_k}_{U}, e_{k+1}, \ldots, e_n).$$

Матрица A_φ имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

Тогда характеристический многочлен записывается следующим образом:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det\left(\begin{array}{c|c} B - \lambda E & C \\ \hline 0 & D - \lambda E \end{array}\right) = |B - \lambda E| \cdot |D - \lambda E| = \chi_\psi \cdot \chi_D$$

$\square$

Следствие. Для любого собственного значения λ: $geom(\lambda) \leqslant alg(\lambda)$.

Доказательство. Подпространство $U = V_\lambda$ инвариантно относительно оператора φ. Тогда ψ имеет на U следующую матрицу:

$$\psi = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен χ_ψ записывается как $\chi_\psi = (\lambda - t)^k$, где $k = \dim V_\lambda = geom(\lambda)$. По утверждению 3.1 $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi$, откуда следует, что $\chi_\varphi \vdots (\lambda - t)^k$. Значит, $alg(\lambda) \geqslant geom(\lambda)$. □

Теорема 3.2 (критерий диагонализируемости в терминах алгебраической и геометрической кратностей линейного оператора)**.** *Пусть $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$. φ – диагонализируем тогда и только тогда, когда:*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители над F. Далее будет использоваться формулировка "оператор φ линейно факторизуем над полем F".*

2. *Для любого собственного значения λ оператора φ выполнено $alg(\lambda) = geom(\lambda)$.*

Доказательство.

1. Необходимость
   Пусть φ диагонализуем над F. Тогда существует базис, в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид и по теореме 3.1 верно $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$. Тогда по свойству прямой суммы:

   $$\sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \dim V = n = \deg \chi \geqslant \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i)$$

   С одной стороны, выполнено неравенство выше, но, с другой стороны, по предыдущему следствию, $geom(\lambda) \leqslant alg(\lambda)$, откуда верно, что $alg(\lambda_i) = geom(\lambda_i)$ для всех i.

2. Достаточность
   Пусть φ линейно факторизуем над F и $alg(\lambda_i) = geom(\lambda_i)$. Докажем диагонализируемость оператора φ(собственные подпространства, соотвествующие разным собственным значениям линейно независимые):

   $$\dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i) = n$$

   Последнее равенство следует из линейной факторизуемости φ. Отсюда получаем, что V представляется в виде прямой суммы собственных подпространств $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$. Тогда по теореме 3.1 φ диагонализуем.

□

Замечание. Одной лишь линейной факторизуемости ндаже в случае алгебраической замкнутости поля недостаточно для утверждения диагонализируемости.

Пример.

Пример не диагонализируемого линейного оператора на $\mathbb{C}$ - Жорданова клетка порядка n.

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Доказательство. Запишем характеристический многочлен для Жордановой клетки порядка n:

$$\chi_{J_n}(t) = \det \begin{pmatrix} \lambda - t & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \lambda - t & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda - t \end{pmatrix} = (\lambda - t)^n$$

Таким образом, $alg(\lambda) = \dim V_\lambda = n$. Так как $\ker B = \ker(J_n(\lambda) - \lambda E)$, ядро этой матрицы состоит из нулей и единичной диагонали размером $(n-1) \times (n-1)$. Тогда $rkB = n - 1$. Получаем, что $\dim \ker B = n - \dim \operatorname{Im} B = n - \operatorname{rk}(B) = n - (n-1) = 1$, то есть $V_\lambda = \langle e_1 \rangle$; $geom(\lambda) = 1$.
Таким образом, Жорданова клетка порядка 2 и выше является не диагонализируемой. □

3.3 Приведение линейного оператора к верхнетреугольному виду

Соглашение. В этом разделе будем считать, что оператор $\varphi : V \to V$ линейно факторизуем над полем F и характеристический многочлен имеет вид $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$. Размерность пространства V равна $\dim_F V = n$.

Утверждение 3.2. *Пусть $\varphi_\lambda = \varphi - \lambda\varepsilon$*
Следующие условия на подпространстве U эквивалентны:

1. *U – инвариантно относительно φ.*
2. *$\exists \lambda \in F : U$ - инвариантно относительно φ_λ.*
3. *$\forall \lambda \in F : U$ - инвариантно относительно φ_λ*

Доказательство.

1. $(1 \Rightarrow 3)$: Дано $\forall x \in U \Longrightarrow \varphi(x) \in U$.

   Тогда пусть $\lambda \in F$, тогда $\forall x \in U \hookrightarrow (\varphi_\lambda)(x) = \varphi(x) - \lambda x$, где обе части принадлежат U. Значит и все выражение принадлежит U.

2. $(3 \Rightarrow 2)$: Очевидно.

3. $(2 \Rightarrow 1)$: Пусть $\exists \lambda \in F : U$ инвариантно относительно $\varphi - \lambda\varepsilon$, тогда верно:

$$\forall x \in U \hookrightarrow \varphi(x) = (\varphi_\lambda)(x) + (\lambda E)(x) \in U.$$

   Следовательно, U инвариантно относительно φ.

□

Утверждение 3.3. *Пусть $\varphi : V \to V$, φ линейно факторизуем над F и $n = \dim V$, тогда в V найдется $(n-1)$ – мерное подпространство, инвариантное относительно φ.*

Доказательство.

1. По определению линейной факторизуемости φ его характеристический многочлен представляется в виде:
$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t),$$
где λ_i – собственные значение для φ.

2. Рассмотрим собственное подпространство $V_{\lambda_n} = \ker(\varphi - \lambda_n\varepsilon) \neq \{\overline{0}\}$. Из того, что ядро не пусто, следует, что $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda_n E)$ не совпадает с V. Значит размерность образа $(\varphi - \lambda_n\varepsilon)$ не превышает $n-1$. Тогда существует подпространство U такое, что $\dim U = n-1$ и образ оператора $\varphi - \lambda_n\varepsilon$ лежит в U.

3. Докажем, что такое подпространство инвариантно. Пусть $x \in U$, тогда:
$$(\varphi - \lambda_n\varepsilon)(x) \in \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_n\varepsilon) \subseteq U.$$
Значит, U инвариантно относительно $\varphi - \lambda_n\varepsilon$, и тогда, по утверждению 3.2 U инвариантно и относительно φ.

□

Замечание. Предположение линейной факторизации можно ослабить и заменить на то, что φ имеет хотя бы одно характеристическое значение (хотя бы один корень).

3.4 Флаг подпространства

Определение 3.4. Флагом подпространства над V называется цепочка инвариантных подпространств:
$$\{\overline{0}\} = V_0 < V_1 < \cdots < V_n = V, \dim V_k = k$$

Теорема 3.3 (о приведении линейного оператора к верхнетреугольному виду)**.**
Пусть $\varphi : V \to V$, φ линейно факторизуем над F и $n = \dim V$. Тогда в V существует базис e, в котором матрица φ – верхнетреугольная:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Идея доказательства. Построить в V флаг инвариантных подпространств относительно φ.

Доказательство. Докажем индукцией по n.

1. База $n = 1$: $\{\overline{0}\} < U_1 = V_1$ - флаг существует.

2. Шаг индукции: пусть для V с $\dim V < n$ утверждение справедливо. Докажем для пространства V размерности n.

   По утверждению 3.3 в V найдется $U_{n-1} < V$; $\dim U_{n-1} = n-1$. Рассмотрим функцию $\psi = \varphi\mid_{U_{n-1}}$, тогда по 3.1 $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi$. Где χ_φ раскладывается на n линейных множителей. Очевидно, что тогда характеристический многочлен χ_ψ состоит из тех линейных множителей, которые входили в χ_φ. Следовательно, χ_ψ раскладывается на линейные множители. Тогда к определителю $\psi : U_{n-1} \to U_{n-1}$ применимо предположение индукции:
$$\{\overline{0}\} < U_1 < \cdots < U_{n-1} < U_n = V (*)$$

Тут первые $n-1$ подпространств инвариантны относительно ψ, значит, инвариантны и относительно φ.
Выберем базис e в V, согласованный с разложением $(*)$, где $(e_1, \dots, e_k)$ – базис в U_k, тогда в матрице базиса e в первой строке будет столбец, согласованный с U_1, то есть λ_1 и нули снизу, далее столбец, согласованный с U_2 и так далее.

$$\varphi_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Следствие. В условиях предыдущей теоремы, если e – базис, в котором φ имеет верхнетреугольную матрицу, то $(\varphi - \lambda_k E)U_k \subseteq U_{k-1}$, для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. $U_k = U_{k-1} \oplus \langle e_k \rangle$
$(\varphi - \lambda_k E)U_{k-1} \subseteq U_{k-1}$
$(\varphi - \lambda_k E)e_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} e_i \in U_{k-1}$ □

Следствие. В условиях предыдущей теоремы $\forall k = 1, \dots, n \hookrightarrow (\varphi - \lambda_k E)(\varphi - \lambda_{k+1} E) \dots (\varphi - \lambda_n E)V \subseteq U_{k-1}$. (первые несколько скобок - множители χ)

Доказательство. $\chi(V) = (\varphi - \lambda_k E) \dots (\varphi - \lambda_{n-1} E)U_{n-1} \subseteq \dots \subseteq U_{k-1}$. □

Теорема 3.4 (Гамильтона, Кэли)**.** *Пусть $\varphi : V \to V$, φ – линейно факторизуем над F. Пусть $\chi_\varphi(t) \in F[t]$ – характеристический многочлен, тогда $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ (нулевой оператор).*
(Иначе: $A \in M_n(F), \chi_A(t)$ – характеристический многочлен матрицы A, то $\chi_A(A) = 0$)

Доказательство. По определению характеристического многочлена $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$, $n = \dim V$, тогда верно и $\chi_\varphi(\varphi) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (\varphi - \lambda_i E)$. Домножим обе части на V: $\chi_\varphi(\varphi)V = (-1)^n \prod_{i=1}^n (\varphi - \lambda_i E)V$, причем базис e пространства согласован с разложением во флаг инвариантных подпространств. Тогда по второму следствию 3.4 получаем $\chi_\varphi(\varphi)V = (-1)^n(\varphi - \lambda_1 E)U_1 = (-1)^n(\varphi(e_1) - \lambda_1 E) = \overline{0}$. Значит, все векторы аннулируются под действием $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.
(Неправильное доказательство: подставить вместо t матрицу A и получить $\chi_A(A) = \det(A - AE) = \det 0 = 0$) □

Замечание. Теорема Гамильтона-Кэли справедлива для любого линейного оператора над любым полем. Однако они доказывали только для небольших линейных пространств, а именно $\dim_{\mathbb{C}} V = 4$. А полное доказательство привел Фробениус в 1878 году.

Замечание. В теореме Гамильтона, Кэли условие линейной факторизации обязательно. Если F - не алгебраически замкнуто и $\xi_\varphi(t)$ не раскладывается на линейные множители над F, то существует расширение этого поля, чтобы ξ было линейно факторизуемо над ним.

3.5 Аннулирующие многочлены

Определение 3.5. $\varphi : V \to V$, $P \in F[t]$ называется аннулирующим для оператора φ, если $P(\varphi) = 0$ (иначе говоря: $\forall x \in V \hookrightarrow P(\varphi) = \overline{0}$).

Замечание. Если $\dim V = n$, то у любого φ существует аннулирующий многочлен.

Доказательство. Если φ соответствует матрица A размером n на n и $\dim M_n(F) = n^2$.
Тогда если рассмотреть все матрицы вида $E, A, A^2, \dots, A^{n^2}$, то существуют $\alpha_i \in F : \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i A^i = 0$, тогда аннулирующий многочлен выглядит как $P = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i t^i$. □

Замечание. Либо же, ссылаясь на теорему Гамильтона-Кэли, мы получим, что $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ - аннулирующий многочлен для линейного оператора φ.

Определение 3.6. Аннулирующий многочлен для φ минимальной возможной степени называется минимальным многочленом оператора φ и обозначается: μ_φ.

Пример. $\varphi = E$, $E(x) = x \forall x$, тогда $\mu(t) = t - 1$, $\mu(E) = E - 1 \cdot E = 0$

Теорема 3.5. *Пусть $\varphi : V \to V$, $\mu(t)$ – минимальный многочлен φ и пусть $P(t)$ – аннулирующий многочлен оператора φ. Тогда $P \,\vdots\, \mu$.*

Доказательство. Пусть $P(t) = Q(t) \cdot \mu(t) + R(t)$, $\deg R < \deg \mu$ или $R = 0$.
От противного, пусть $R \neq 0$ тогда выразим этот остаток из предыдущего выражения: $R(\varphi) = P(\varphi) - Q(\varphi) \cdot \mu(\varphi) = 0$ – так как аннулирующий и минимальный многочлены зануляются, то и остаток равен нулю. Противоречие. Значит, $\mu(t)|P(t)$. ☐

Следствие. Минимальный многочлен линейного оператора φ определяется с точностью до ассоциированности.

Доказательство. Пусть μ и μ' – два минимальных многочлена, тогда по предыдущей теореме $\mu|\mu'$ и $\mu'|\mu$, откуда следует, что $\mu \sim \mu'$. ☐

Следствие. $\chi_\varphi(t) \,\vdots\, \mu_\varphi$

Следствие. Корни характеристического многочлена, принадлежащего полю F, являются корнями μ_φ и наоборот. $\mu_\varphi | \chi_\varphi$.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ - корень $\xi_\varphi \Longrightarrow \lambda$ - собственное значение φ.
$\exists x \neq \vec{0} : \varphi(x) = \lambda x \Longrightarrow \varphi^n(x) = \lambda^n x$. $0 = \mu_\varphi(x) = (\sum \alpha_i \varphi^i)x = (\sum \alpha_i \lambda^i)x = \mu_\varphi(\lambda)x \Longrightarrow \lambda$ - корень μ_φ ☐

Напоминание. Многочлены P и Q называются взаимно простыми, если НОД$(P, Q) = 1$. Многочлены взаимно просты тогда и только тогда, когда $\exists u, v \in F[x] : u \cdot P + v \cdot Q = 1$.

Теорема 3.6 (о взаимно простых делителях аннулирующего многочлена).
Пусть $\varphi : V \to V$ и пусть f – аннулирующий многочлен оператора φ. Пусть $f = f_1 \cdot f_2$, где многочленый f_1 и f_2 взаимно простые. Пусть $V_1 = \ker f_1(\varphi)$, $V_2 = \ker f_2(\varphi)$, тогда $V = V_1 \oplus V_2$, причем и V_1, и V_2 инвариантны относительно φ.

Доказательство.

1. По теореме о представлении НОД в виде линейной комбинации:

$$\exists u_1, u_2 \in F[t] \hookrightarrow u_1(t) f_1(t) + u_2(t) f_2(t) = 1$$

   Если подставить оператор, получим $u_1(\varphi) f_1(\varphi) + u_2(\varphi) f_2(\varphi) = E$.
   По утверждению о коммутирующих операторах: $f_i(\varphi) \cdot \varphi = \varphi \cdot f_i(\varphi)$, где V_1 и V_2 инвариантны относительно оператора φ.

2. Покажем теперь, что $\operatorname{Im} f_1(\varphi) \subseteq V_2; \operatorname{Im} f_2(\varphi) \subseteq V_1$. Для этого рассмотрим некоторый вектор $y \in \operatorname{Im} f_1(\varphi)$ и докажем, что существует такой вектор $x \in V$, что $y = f_1(\varphi)x \in V_2$. Для этого рассмотрим $f_2(\varphi)y = f_1(\varphi) f_2(\varphi)x = f(\varphi)x = 0 \cdot x = 0$. Значит, $y \in \ker f_2(\varphi) = V_2$.

   Таким образом, любой вектор из ядра $f_1(\varphi)$ лежит в V_2, откуда следует вложенность. Для V_1 доказательство аналогично.

3. Теперь докажем, что $V = V_1 + V_2$. Пусть $x \in V$, тогда:

$$x = Ex = (f_1(\varphi)u_1(\varphi) + f_2(\varphi)u_2(\varphi))x = f_2(\varphi)x' + f_1(\varphi)x'',$$

где первое слагаемое принадлежит V_1, а второе - V_2 (по предыдущему пункту доказательства). Значит, вектор принадлежит сумме.

4. Последним шагом докажем, что сумма прямая, то есть $V = V_1 \oplus V_2$. Пусть $x \in V_1 \wedge V_2$. Значит, для x верно $f_1(\varphi)x = 0$ и $f_2(\varphi)x = 0$. Из этого можно получить равенство:

$$x = Ex = (f_1(\varphi)u_1(\varphi) + f_2(\varphi)u_2(\varphi))x = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}.$$

Так как x – произвольный вектор из пересечения, то пересечение пусто и, значит, сумма прямая.

□

Напоминание. Вспомним теорему с предыдущей лекции: пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, f – аннулирующий многочлен для φ, раскладывающийся на произведение двух взаимно-простых многочленов: $f = f_1 \cdot f_2$, НОД$(f_1, f_2) = 1$. Тогда V раскладывается в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_i = \ker f_i(\varphi)$ – инвариантные подпространства.

Следствие. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, f – аннулирующий многочлен для φ, такой что f раскладывается в произведение $f = f_1 \cdot f_2 \dots f_n$ попарно взаимно-простых многочленов. Тогда V раскладывется в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots V_n$, где $V_i = \ker f_i(\varphi)$ – инвариантные подпространства.

Доказательство. Индукция по n:

1. База: случай $n = 2$ доказан в теореме 3.6

2. Рассмотрим случай n сомножителей. Тогда f можно разложить следующим образом:

$$f = (f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_{n-1}) \cdot f_n,$$

при этом $(f_1 \dots f_{n-1})$ и f_n взаимно просты. Тогда по теореме 3.6:

$$V = \ker(f_1(\varphi) \cdot f_2(\varphi) \cdot ... \cdot f_{n-1}(\varphi)) \oplus V_n.$$

При этом многочлен $f_1 f_2 \dots f_n$ – аннулирующий многочлен сужения $\varphi_{v'}$, а значит по предположению индукции:

$$V' = \ker(f_1(\varphi)|_{V'}) \oplus \dots \oplus \ker(f_n(\varphi)|_{V'}).$$

Осталось проверить только что $\forall i \ \ker f_i(\varphi)|_{V'} = \ker f_i(\varphi) = V_i$.

Вложение вправо очевидно: пусть $x \in V'$ и $f_i(\varphi)|_{V'}x = 0$, тогда верно и $f_i(\varphi)x = 0$.

В обратную сторону, пусть $x \in \ker f_i(\varphi)$ то есть $\ker f_i(\varphi)x = 0$. Тогда полное произведение операторов $f_1(\varphi)f_2(\varphi)...f_{n-1}(\varphi) = 0$, а значит $x \in V'$. Таким образом $x \in \ker f_i(\varphi)|_{V'}$.

□

4 Корневые подпространства

Определение 4.1. $\varphi : V \to V$, V – линейное пространство над полем F, $\lambda \in f$. Вектор $x \in V$ называют корневым для φ отвечающим $\lambda \in F$, если $\exists k \in \mathbb{N} \ : (\varphi - \lambda\varepsilon)^k x = 0$.

Определение 4.2. Число k – высота корневого вектора x, отвечающего λ из F, если k – наименьшее число такое что $(\varphi-\lambda\varepsilon)^k x = 0$. Будем считать, что нулевой вектор имеет высоту 0.

Пример. Пусть x – собственный вектор для φ, соответствующий собственному значению λ. Тогда $\varphi(x)=\lambda x$, а значит x – корневой вектор высоты 1 для оператора φ так как $(\varphi-\lambda\varepsilon)x=0$. Следствия верны и в обратную сторону, а значит собственные векторы являются корневыми векторами высоты 1.

Пример. Пусть $\varphi=\frac{d}{dx}$, $V=\mathbb{R}_n[x]=\{c\in\mathbb{R}_n[x]\,|\,\deg f\leqslant n\}$. V – корневое пространство для φ с собственным значением $\lambda=0$. Тогда $\varphi^{n+1}(V)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}=0$. Максимальную высоту при этом имеет $f(x)=x^n$.

Утверждение 4.1. *Пусть V^λ – множество всех корневых векторов для φ относящихся к λ. Тогда V^λ – подпространство в V.*

Доказательство. Пусть $x,y\in V^\lambda$, s и t – высоты x и y соответственно. Положим $M=max(s,t)$. Тогда верно следующее:

$$(\varphi-\lambda\varepsilon)^M(x+y)=(\varphi-\lambda\varepsilon)^M x+(\varphi-\lambda\varepsilon)^M y=0+0=0.$$

Таким образом замкнутость относительно сложения выполняется. Замкнутость относительно умножения на скаляры предлагается проверить самостоятельно. □

Определение 4.3. Построенное подпространство V^λ называется корневым для оператора φ относящегося к λ.

Утверждение 4.2. *Корневое подпространство V^λ отлично от нулевого тогда и только тогда когда λ – собственное значение оператора φ.*

Доказательство.

Достаточность. Пусть λ – собственное значение оператора φ, тогда $V_\lambda\neq\{0\}$. Однако $V_\lambda\subseteq V^\lambda$, а значит V^λ – ненулевое.

Неоходимость. Пусть корневое подпространство V^λ отлично от нуля. Пусть есть вектор x высоты k такой что $y\in V^\lambda$. Тогда $x=(\varphi-\lambda\varepsilon)^{k-1}x\neq 0$, а $(\varphi-\lambda\varepsilon)x=(\varphi-\lambda\varepsilon)^k x=0$. Таким образом $\varphi(x)=\lambda x$, а значит x – собственный вектор φ, λ – собственное значение. □

Соглашение. Начиная с этого момента корневыми подпространствами будем называть только те V^λ, для которых λ – собственное значения оператора φ.

Напоминание. Подпространство W называется дополнительным к V^λ, если их пересечение состоит только из нуля.

Напоминание. Оператор φ действует невырожденным образом когда $\ker(\varphi-\lambda\varepsilon)=0$.

Теорема 4.1 (о свойствах корневых подпространств).
Пусть V^λ – корневое подпространство для φ отвечающее λ. Тогда

1. *V^λ инвариантно относительно φ.*

2. *Подпространство V^λ имеет единственное собственное значение λ.*

3. *Если W – тоже инвариантное относительно φ подпространство, при этом являющееся дополнительным к V^λ, то на W оператор $\varphi-\lambda\varepsilon$ действует невырожденным образом.*

Доказательство.

1. Пусть m – максимальная высота векторов $x \in V^\lambda$, в силу конечномерности V^λ такая существует и является конечным числом. Тогда $V^\lambda = \ker(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$.

   Операторы φ и ε коммутируют с φ, а значит и оператор $(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$ коммутирует с φ. Таким образом, можно записать $(\varphi - \lambda\varepsilon)^m\varphi = \varphi(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$. Тогда по теореме 2.2 получаем, что $\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$ инвариантно относительно φ.

2. Докажем от противного, пусть в V^λ найдется ненулевой собственный вектор x с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то есть $\varphi(x) = \mu x$. Применим к этому вектору оператор $(\varphi - \lambda\varepsilon)$:

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \varphi(x) - (\lambda\varepsilon)(x) = (\mu - \lambda)x.$$

   Тогда при многократном применении получим $(\varphi - \lambda\varepsilon)^m x = (\mu - \lambda)^m x = 0$, так как $x \in V^\lambda$ и должен аннулироваться. Тогда $\mu - \lambda = 0$, что дает противоречие.

3. По условию V представляется как $V = V^\lambda \oplus W$. При этом подпространства V^λ и W инвариантны относительно φ, а значит, согласно утверждению 3.2, они так же инвариантны относительно $(\varphi - \lambda\varepsilon)$. Нам нужно доказать, что $\varphi - \lambda\varepsilon$ невырожден на W, то есть что $\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)|_W = \{0\}$.

   Докажем от противного, пусть $\exists x \neq 0$ такое что $x \in \ker(\varphi - \lambda\varepsilon)|_W$. Отсюда следует, что вектор x лежит в пространстве W, так как лежит в ядре сужения оператора на это подпространство.

   Однако $(\varphi - \lambda\varepsilon)x = 0$, а значит x – собственный для φ с собственным значением λ. Тогда вектор x так же лежит и в пространстве V^λ, что приводит к противоречию с тем, что по условию $V^\lambda \cap W = \{0\}$.

□

Следствие. Корневое подпространство V^λ - максимальное по включению инвариантное подпространство, на котором φ имеет единственное собственное значение λ.

Теорема 4.2 (о разложении пространства V в прямую сумму корневых).
Пусть $\varphi \in \mathcal{L}$, φ – линейно факторизуем над F (характеристический многочлен раскладывается в произведение линейных множителей над F). Тогда пространство V есть прямая сумма корневых подпространств: $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_k}$, где все λ попарно различны.

Доказательство. По условию φ линейно факторизуем, а значит $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - t)^{m_i}$, где λ_i – собственные значения. Многочлены $(\lambda_i - t)^{m_i}$ попарно взаимно просты из попарной различности λ_i, поэтому по следствию из теоремы 3.6 можно заключить:

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{m_1} \oplus \ker(\varphi - \lambda_2\varepsilon)^{m_2} \oplus \cdots \oplus \ker(\varphi - \lambda_k\varepsilon)^{m_k}$$

При этом $\ker(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i} \subseteq V^{\lambda_i}$ для всех i, а значит вектор $x \in V$ представим в виде суммы $x = x_1 + \cdots + x_k$, где $x_i \in V^{\lambda_i}$. Отсюда очевидно, что пространство V является суммой подпространств:

$$V = V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} + \ldots V^{\lambda_k}.$$

Осталось доказать что $V^{\lambda_i} \subseteq \ker(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i}$, в таком случае сумма будет прямой. Докажем от противного, пусть существует индекс i такой, что $\ker(\varphi - \lambda_i\varepsilon) \not\leqslant V^{\lambda_i}$. Тогда найдется вектор $x \in V^{\lambda_i}$ такой, что он не лежит в ядре. Обозначим высоту x за $M > m_i$, тогда:

$$\chi_\varphi(\varphi)x = \left(\prod_{j\neq i}(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^{m_j}\right) \cdot (\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i}x = \prod_{j\neq i}((\varphi - \lambda_j\varepsilon)^{m_j})x' \neq 0.$$

Если найдется такой j что $(\varphi - \lambda_j\varepsilon)x = 0$, то у x' есть собственное значение λ_j, что приводит к противоречию с пунктом 2 теоремы 4.1. В противном случае возникает противоречие с $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ по теореме 3.4 (Гамильтона-Кэли).

Таким образом, $V^{\lambda_i} = \ker(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i}$, а значит V представляется в виде прямой суммы V^{λ_i}:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_k}.$$

□

Примечание авторов. В записи лекции Вадима Владимировича за 2021 год приводится ещё один вариант доказательства. После получения $V = V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} + \ldots V^{\lambda_k}$ покажем, что подпространства V^{λ_i} линейно независимы.

Для того, чтобы показать линейную независимость подпространств покажем, что равенство нулю суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$, где $x_i \in V^{\lambda_i}$, равносильно тому, что все $x_i = 0$.

Рассмотрим оператор $\psi = \prod\limits_{j=2}^{k}(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^{m_j}$ и применим его к левой и правой частям равенства. Все x_j при $j \geqslant 2$ аннулируются этим оператором так как в произведении присутствуют $(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^{m_j}$, аннулирующие соответствующие x_j.

Правая часть после применения оператора так же остается нулевой, откуда $\psi x_1 = 0$. При этом операторы $(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^{m_j}$ невырождены на V^{λ_1}, а значит и оператор ψ невырожден на V^{λ_1}. Таким образом произведение ψx_1 может быть нулевым только если $x_1 = 0$. Проводя аналогичные рассуждения для всех x_i получим, что все эти векторы обязаны быть нулевыми, а значит подпространства V^{λ_i} линейно независимы.

По теореме о характеризации прямой суммы $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_k}$.

Следствие. В условиях теоремы 2 $\dim V^{\lambda_i} = m_i = alg(\lambda_i)$.

Доказательство. Пусть $\dim V^{\lambda_i} = n_i$. Выберем базис согласованный с разложением в прямую сумму. Тогда матрица A_φ имеет диагональный вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_n \end{pmatrix}$$

где $A_i \in M_{n_i}(F)$. Тогда $\chi_\varphi(t)$ раскладывается по условию факторoизуемости: $\chi_\varphi(t) = \prod \chi_{\varphi|_{V^{\lambda_i}}}(t)$. Тогда $\chi_{\varphi|_{V^{\lambda_i}}}(t) = (\lambda_i - t)^{n_i}$, при этом $\chi_{\varphi|_{V^{\lambda_i}}}(t)|\chi_\varphi(t)$, а значит степень не превосходит алгебраическую кратность λ_i, то есть $n_i \leqslant m_i$.

$$\sum n_i = \sum_{i=1}^{k} \dim V = n, \ \sum_{i=1}^{k} m_i = \deg \chi = n,$$

а значит равенство точное: $n_i = m_i$. □

Следствие. Корневое подпространство V^λ - это наибольшее по включению подпространство в V, на котором оператор φ имеет λ единственным собственным значением.

Доказательство. $V^\lambda \subset U \Longrightarrow$ кратность λ большем, чем $alg(\lambda) = m_i$ из предыдущего следствия. Противоречие. □

4.1 Нильпотентные операторы

Определение 4.4. Оператор $\varphi : V \to V$ называется нильпотентным если $\exists k \in \mathbb{N} : \ \varphi^k = 0$.

Замечание. Нильпотентные операторы не стоит путать с непотентными и унипотентными. Слово происходит от nil – ноль и potention – возведение в степень.

Определение 4.5. Наименьшее натуральное число k такое что $\varphi^k = 0$, $\varphi^{k-1} \neq 0$ называют индексом нильпотентности или (сту́пенью нильпотентности) относительно φ. Значит $\exists x : \varphi^k(x) = 0, \varphi^{k-1}(x) \neq 0 \Longrightarrow$ x имеет высоту k.

Пример. V^λ – корневое для оператора φ, $\exists k : (\varphi - \lambda\varepsilon)^k|_{V^\lambda} = 0$, а значит на V^λ оператор $(\varphi - \lambda\varepsilon)$ – нильпотентный.

Замечание. А какие вообще бывают собственные значения у нильпотентного оператора? Всякий нильпотентный оператор не имеет других собственных значений, кроме нуля, так как $\varphi(x) = \lambda x, \exists k : 0 = \varphi^k(x) = \lambda^k x \Longrightarrow \lambda = 0$

Пример. На $\mathbb{R}_n[x] \varphi = \frac{d}{dx}$ имеет ступень нильпотентности $n+1$.

Определение 4.6. Пусть φ – нильпотентный и $x \in V$ – вектор, имеющий высоту k. Рассмотрим $U = \langle x, \varphi(x), \dots \varphi^{k-1}(x) \rangle$. Построенное инвариантное подпространство U называется циклическим подпространством, порожденным вектором x.

Замечание. Очевидно что циклическое подпространство порожденное вектором x является наименьшим φ–инвариантным линейным подпространством порожденным x.

Утверждение 4.3. *Векторы $x, \varphi(x), \dots \varphi^{k-1}(x)$ образуют базис циклического подпространства образованного x если высота вектора x относительно нильпотентного оператора φ равна k.*

Доказательство. Достаточно доказать линейную независимость этих векторов. Пусть есть некоторая нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{s=0}^{k-1} \alpha_i \varphi^s(x) = 0$ и пусть α_l – лидер строки, тогда все предыдущие слагаемые можно выбросить из суммы в силу того, что они нулевые. Применим φ^{k-l-1} к оставшимся в сумме слагаемым: $\alpha_l \varphi^{k-1}(x) + \alpha_{l+1}\varphi^k(x) + \dots = 0$. Тогда $\alpha_l = 0$, так как все последующие слагаемые равны нулю в силу того, что высота порождающего подпространство вектора равна k. Противоречие получено. □

Замечание. Найдем матрицу нильпотентного оператора $\varphi|_V$ в следующем базисе: $e_1 = \varphi^{k-1}(x)$, $e_2 = \varphi^{k-2}(x)$, …, $\varphi^0(x) = x$. Применим к ним оператор φ: $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_1$, …, $\varphi(e_k) = e_{k-1}$ Тогда матрица преобразования A имеет вид жордановой клетки $J_k(0)$:

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это верно в силу того, что i-й столбец матрицы является координатами $\varphi(e_i)$, равного, как было сказано ранее, e_{i-1} для $i > 0$ и 0 для $i - 0$. Так же $\operatorname{rk} A = k - 1$.

Определение 4.7. Построенный базис в циклическом подпространстве называется циклическим базисом.

Теорема 4.3 (о нильпотентном операторе).

Пусть $\varphi : V \to V$ – нильпотентный оператор индекса нильпотентности k, (то есть $\varphi^k = 0$, $\varphi^{k-1} \neq 0$), x – ненулевой вектор $x \in V$ высоты k (то есть $\varphi^k(x) = 0$, $\varphi^{k-1}(x) \neq 0$), $U = \langle x, \varphi(x), \dots \varphi^{k-1}(x)\rangle$ – циклическое подпространство, инвариантное φ. Тогда найдется φ-инвариантное пространство W дополнительное к U такое что $V = U \oplus W$.

Идея доказательства. Найти φ-инвариантное подпространство W такое что:

$$\begin{cases} U \cap W = 0, \\ U + W = V. \end{cases}$$

Для этого покажем что существуют подпространства W инвариантные относительно φ и удовлетворяющие первому условию и среди всех таких выберем максимальное по размерности. $U + W < V \Rightarrow \exists W' = W + \langle y\rangle$, $y \notin W$ такое что W' φ-инвариантно и удовлетворяет первому условию.

Доказательство.

1. Пусть W – максимальное φ-инвариантное подпространство в V, такое что $U \cap W = 0$. Предположим что $U + W < V$. Тогда найдется ненулевой $a \in V$, такой что $a \notin U + W$. Пусть l – наименьшее значение для которого $z = \varphi^{l-1}(a) \notin W + U$, $\varphi^l(a) \in W + U$. Такое очевидно найдется так как $a \notin W + U$ и $\varphi^k(a) = 0 \in W + U$. Таким образом в этом пункте мы нашли вектор $z \notin U + W$, такой что $\varphi(z) \in U + W$.

2. Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{s=0}^{k-1} \alpha_s \varphi^s(x) + w$, при этом $\varphi^s(x) \in U$, $w \in W$. Тогда:

$$\varphi^k(z) = \alpha_0 \varphi^{k-1}(x) + 0 + \dots + 0 + \varphi^{k-1}(w) = 0$$

   Тогда $\alpha_0 \varphi^{k-1}(x) + \varphi^{k-1}(w) = 0$. В силу линейной независимости линейных подпространств $\alpha_o \varphi^{k-1}(x) = 0$, $\varphi^{k-1}(w) = 0$. При этом в силу того, что $\varphi^{k-1}(x) \neq 0$, получаем $\alpha_0 = 0$.

3. Введем вектор $y = z - \sum\limits_{s=1}^{k-1} \alpha_s \varphi^{s-1}(x) \notin U + W$ (так как $z \notin U + W$, а сумма принадлежит U).

   Введем пространство $W' = W + \langle y\rangle$, $\dim W' = \dim W + 1$. Покажем что вновь построенное подпространство так же инвариантно φ:

$$\varphi(y) = \varphi(z) - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \varphi^s(x) = \varphi(z) - \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s \varphi^s(x) = w \in W.$$

4. Покажем теперь что W' удовлетворяет условию $U \cap W' = 0$. Пусть $0 \neq u \in U \cap W'$, $u \notin U \cap W = \{0\}$. Тогда u представим в виде $u = \widetilde{w} + \lambda y$, $\lambda \neq 0$. Отсюда $y = \frac{1}{\lambda} u - \frac{1}{\lambda}\widetilde{w} \in U + W$. Значит $U \cap W \neq \{0\}$ – противоречие.

□

Замечание. Доказательство подходит и для того, когда максимальное подпространство $W = \{0\}$.

Теорема 4.4 (о разложении в прямую сумму циклических подпространств для нильпотентного оператора). *Пусть $\varphi : V \to V$, зафиксируем индекс нильпотентности k. Тогда существует разложение V в прямую сумму инвариантных циклических подпространств $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots V_s$. При этом количество слагаемых $s = \dim(\ker\varphi) = \dim V_0 = geom(0)$.*

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$.

1. База: $n = 1 \Rightarrow \varphi = 0$, $alg(0) = geom(0) = 1$.

2. Предположение индукции: для пространства V размерности менее n утверждение выполняется. Пусть теперь $\dim V = n$. Тогда существует x высоты k такой что $\varphi^k(x) = 0$, $\varphi^{k-1}(x) \neq 0$. Пусть $U = \langle x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{k-1}(x)\rangle$ – φ-инвариантное подпространство. По теореме 4.3 существует φ-инвариантное подпространство W, такое что $V = U \oplus W$, $\dim W \leqslant n - 1$. Тогда W раскладывается в прямую сумму φ-инвариантных циклических подпространств.

3. Тогда $\ker\varphi = \ker(\varphi|_{V_1}) \oplus \ldots \ker(\varphi|_{V_k})$. $V_i =< x_i, \varphi(x_i), \ldots, \varphi^{i-1}(x_i) >$. Выбрав базис справа налево, получим, что $\varphi|_{V_i} = J_i(0)$. Тогда $\dim\ker(\varphi) = geom(0) = 1 + 1 + \ldots + 1 = k$

□

Задача. *Рассмотрим оператор лапласа* $\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}$, *действующий в пространстве* $V = \mathbb{R}_2[x, y] = \langle 1, x, y, x^2, xy, y^2\rangle$, $\dim V = 6$. *Требуется:*

1. *Доказать* Δ*-нильпотентность,*

2. *Найти матрицу* Δ *в данном базисе,*

3. *Разложить* V *в прямую сумму циклических подпространств и выбрать циклический базис в каждом из них,*

4. *Проверить, что в получившемся базисе* Δ *имеет Жорданову нормальную форму,*

5. *Доказать, что в пространстве однородных многочленов степени* k *в* $R[x,y]$ *есть два собственных вектора с собственным значением 0.*

Напоминание. Многочлен степени k называется однородным если верно:

$$\forall\lambda \in F \hookrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_k) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots x_k).$$

5 Жорданова нормальная форма линейного оператора

Напоминание. Жордановой клеткой, относящейся к $\lambda \in F$, называется следующая матрица:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 5.1. Жордановой матрицей(или жордановой нормальной формой) называется блочно-диагональная матрица, по главной диагонали которой идут Жордановы клетки(при этом они могут относиться и к одинаковым собственным значениям), а остальное заполнено нулями:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & J_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Определение 5.2. Базис $\mathfrak{F}$ в V называется Жордановым базисом, если φ имеет в базисе ЖНФ(Жорданову нормальную форму).

Теорема 5.1 (Камиль Жордан, 1870 год). *Пусть $\varphi : V \to V$, χ_φ раскладывается на линейные множители над F. Тогда В V существует базис (Жордановый базис), в котором φ имеет Жорданову матрицу.*

Замечание. Жорданова матрица определена с точностью до перестановки Жордановых клеток, поэтому базис не единственен в общем случае.

Доказательство. На предыдущих лекциях было доказано:

1. $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots V^{\lambda_k}$ (подпространства инвариантны), где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – все попарно различные собственные значения оператора φ. Тогда в базисе согласованном с таким разложением матрица имеет вид:
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

2. Было доказано, что для V^{λ_i} оператор $\varphi_{\lambda_i} = \varphi - \lambda_i E$ нильпотентен, а значит V раскладывается в сумму циклических подпространств: $V^{\lambda_i} = \sum\limits_{j=1}^{geom(\lambda_i)} V_{ij}$.

Пусть $\dim V_{ij} = k$. Покажем, что на V_{ij} оператор φ в подходящем базисе имеет вид $J_k(\lambda_i)$:
Пусть k - индекс нильпотентности φ_{λ_i} на V_{ij}, пусть x - корневой вектор максимальной высоты k. Рассмотрим базис $\langle \varphi_{\lambda_i}^{k-1} x, \varphi_{\lambda_i}^{k-2} x, \dots, \varphi_{\lambda_i}^{1} x \rangle$. Обозначим базисные вектора за f_{ij} следующим образом:

$$\begin{gathered} f_{i1} = \varphi_{\lambda_i}^{k-1}, \\ f_{i2} = \varphi_{\lambda_i}^{k-2}, \\ \dots \end{gathered}$$

Подействуем на базис оператором φ_{λ_i}. Под действием этого оператора каждый базисный вектор перейдет в предыдущий (первый перейдет в 0): $\varphi_{\lambda_i}(f_{i1}) = \overline{0}, \dots, \varphi_{\lambda_i}(f_{ik}) = f_{i(k-1)}$. Тогда матрица оператора φ_{λ_i} будет иметь в базисе f вид $J_k(0)$. Тогда $\varphi|_{V_{ij}} = \lambda_1 \varepsilon + J_k(0) = J_k(\lambda_i)$ Мы доказали, что в подходящем базисе сужение на подпространство имеет вид Жордановой клетки. Тогда из $V = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{geom(\lambda_i)} V_{ij}$ вытекает, что матрица оператора в подходящем базисе (Жордановом базисе) имеет вид Жордановой матрицы. □

Следствие. Если V - линейное пространство над полем комплексных чисел(или в пространстве с алгебраически замкнутым полем), то всякий оператор в таком пространстве имеет Жорданову нормальную форму.

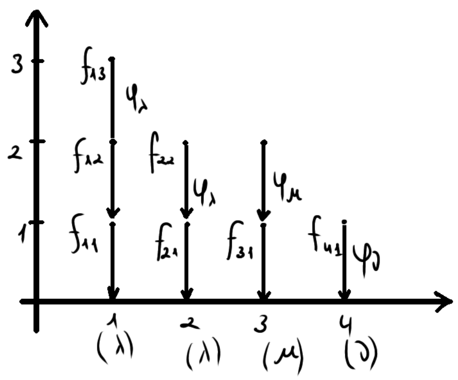
5.1 Жорданова диаграмма

Определение 5.3. ЖД соотв ЖМ J называется набор точек на плоскости, в котором точка с координатой (i, j) изображает вектор f_{ij} ЖБ. Под каждым столбцом ЖД указывается соответствующее векторам этого столбца собственные значения.

Пример. Пусть φ имеет в некотором базисе следующую матрицу –

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Четыре Жордановы клетки: порядков 2 и 3 с собственным значением λ, порядка 2 с собственным значением μ и порядка 1 с собственным значением ν.
Такая матрица является Жордановой. Начнем выписывать Жорданов базис:
$f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{41}$. В общем случае если мы пишем Жорданов базис в виде f_{ij}, коэффициенты означают номер клетки и номер вектора относительно данной клетки соответственно. Теперь вектор f_{ij} можно сопоставить точке на графике с координатами (i, j). Если под каждым столбцом указать соответствующие векторам столбца собственные значения, то полученный график называется Жордановой диаграммой.



Замечание. Столбцы не обязательно должны быть отсортированы в порядке невозрастания, диаграмма соответствует конкретной матрице и меняется при перестановке клеток местами.

Утверждение 5.1 (Свойства Жордановой диаграммы)**.**

1. *Соответствие Жордановой матрицы J и Жордановой диаграммы J взаимно однозначно.*

2. *Векторы Жордановой диаграммы, относящиеся к собственному значению λ_i, образуют базис в корневом подпространстве V^{λ_i}.*

3. *Если вектор f_{ij} относится к собственному значению λ_i, то он является корневым вектором, относящимся к λ_i высоты j, то есть $\varphi_{\lambda_i}^{j} f_{ij} = \overline{0}$, но $\varphi_{\lambda_i}^{j-1} f_{ij} \neq \overline{0}$. На высоте 1 в Жордановой диаграммы находятся собственные векторы оператора φ.*

4. *Если f_{ij} относится к собственному значению λ_i, то $\varphi_{\lambda_i} f_{ij} = f_{i(j-1)}$.*

5. *Каждый столбец в Жордановой диаграмме является изображением циклического подпространства для оператора φ_{λ_i}. Общее число столбцов в Жордановой диаграмме $\sum\limits_{i=1}^{k} geom(\lambda_i)$.*

5.2 Построение Жордановой диаграммы линейного оператора

Утверждение 5.2. *Пусть $\varphi : V \to V$. Тогда справедливы следующие вложения:*

1. $\ker\varphi^0 \subseteq \ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \dots$

2. $\operatorname{Im}\varphi^0 \supseteq \operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \supseteq \dots$

Причем обе цепочки стабилизируются за конечное число шагов.

Доказательство. Индукция по $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$:

1. База индукции: $\ker\varphi^0 = \ker E = \overline{0} \subseteq \ker\varphi\ \forall\varphi$ и аналогично $\operatorname{Im}\varphi^0 = \operatorname{Im} E = V \supseteq \operatorname{Im}\varphi\forall\varphi$.

2. Докажем, что $\ker\varphi^n \subseteq \ker\varphi^{n+1}$ (где $n \in \mathbb{N}$):
   Если $x \in \ker\varphi^n$, тогда $\varphi^n x = 0$ и $\varphi^{n+1}x = \varphi(\varphi^n x) = \varphi(\overline{0}) = \overline{0}$.
   Докажем теперь аналогичное вложение для образов: пусть $y \in \operatorname{Im}\varphi^{n+1}$, тогда существует x, такой что $y = \varphi^{n+1}x = \varphi^n(\varphi(x)) = \varphi^n(z) \in \operatorname{Im}\varphi^n$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi^{n+1} \subseteq \operatorname{Im}\varphi^n$.

□

Алгоритм (Построение Жордановой диаграммы)**.** Покажем, как это использовать для нахождения Жордановой матрицы. Обозначим размерности ядер за n_i соответственно: $\dim\ker\varphi^i = n_i$. Выпишем для одного подпространства U_λ все вложенные в него:

$$\{0\} \subseteq \ker\varphi_\lambda = \langle f_{11}, f_{21}\rangle \subseteq \ker\varphi_\lambda^2 = \langle f_{11}, f_{21}, f_{12}, f_{22}\rangle \subseteq \ker\varphi_\lambda^3 = \langle f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{13}\rangle,$$
$$(n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 5).$$

Тогда число точек в Жордановой диаграмме на высоте j равно $d_j = n_j - n_{j-1}$, откуда для нашего примера соответствующие d равны $d_1 = 2 - 0 = 2, d_2 = 4 - 2 = 2, d_3 = 5 - 4 = 1$.

Если в корневом пространстве V^λ ввести обозначения d_j - число векторов (точек) на высоте j, то $d_j = n_j - n_{j-1}$, где $n_0 = 0$, $n_k = \dim\ker(\varphi - \lambda_i E)^k$. Это работает, потому что при применении оператора j раз обнулятся все векторы на высоте не выше j, тогда при применении на 1 раз меньше обнулятся все, кто ниже, искомое количество - те, кто обнуляется при применении j раз и не обнуляется при применении на 1 раз меньше.

Строим ядра (и образы) до тех пор, пока они не стабилизируются (будут равны).

Соглашение. При построении будем упорядочивать столбцы по невозрастанию.

Замечание. Описание ядер $\varphi_{\lambda_i}^k$ и вычисление их размерностей можно производить в любом базисе.

Замечание. Жорданову диаграмму можно построить и без ЖНФ с помощью данного алгоритма.

Теорема 5.2. *Жорданова нормальная форма линейного оператора φ опеределена однозначно с точностью до перестановки Жордановых клеток, стоящих на главной диагонали. Утверждение складывается из двух промежуточных:*

1. *Сумма порядков клеток, относящихся к собственному значению λ_i, не зависит от выбора Жорданова базиса.*

2. *Для оператора φ, имеющего единственное собственное значение, порядки Жордановых клеток определяются однозначно.*

Доказательство.

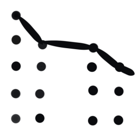
1. Зафиксируем Жорданов базис и корневое подпространство V^{λ_i} и выберем все векторы Жорданова базиса, относящиеся к λ_i. Обозначим $V(\lambda_i) = \langle f_{ij} | f_{ij}$ относящиеся к $\lambda_i \rangle$.
   Пусть l_i - максимальный порядок Жордановых клеток Жордановой матрицы, отвечающих λ_i, $(J_k(\lambda_i) - \lambda_i \varepsilon)^{l_i} = 0$. Оператор нильпотентен и за несколько его применений все векторы базиса обратятся в 0. Таким образом $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{l_i}|_{V(\lambda_i)} = 0$. $\forall i V(\lambda_i) \subseteq V^{\lambda_i}$ – так как все векторы аннулируются.

   (a) $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \dots \oplus V^{\lambda_k}$

   (b) $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \dots \oplus V(\lambda_k)$.

   По теореме о характеризации прямой суммы второе выражение является прямой суммой, а значит верны вложения и в обратную сторону(из соображений размерности).

2. Пусть единственное собственное значение – 0. Покажем, что размеры клеток в Жордановой нормальной форме определены однозначно. Как было доказано на предыдущих лекциях, из того, что оператор нильпотентен, существует разложение в прямую сумму циклических подпространств.



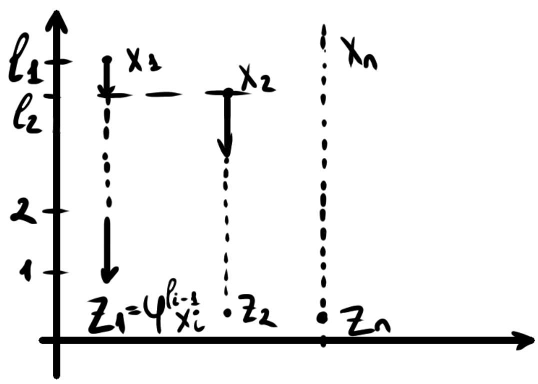
   Длины строк определены однозначно: $d_j = n_j - n_{j-1}$, $n_j = \dim ker \varphi^j$. Таким образом порядок клеток тоже можно определить однозначно.

$\square$

5.2.1 Эффективный способ построения Жорданова базиса

Лемма 5.1 (О восстановленных циклических цепочках). *Пусть φ - линейно факторизуемый оператор в V, z_1, z_2, … z_n – линейно независимая система собственных векторов оператора φ, относящихся к λ (собственное значение), x_i имеет высоту l_i. Пусть $\langle \varphi_\lambda^{l_i-1} x_i, \varphi_{\lambda_i}^{l_i-2} x_i, \dots, \varphi_\lambda^1 x_i, x_i \rangle$ – циклическая цепочка, такая что $\varphi_\lambda^{l_i-1} x_i = z_i$. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\varphi_\lambda^{l_i-1} x_i \dots \varphi_\lambda x_i, x_i)$ – тоже линейно независимая система.*

Доказательство. Пусть полученная система линейно зависима. Тогда сумма $\sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_{ij} f_{ij} = \overline{0}$ – нетривиальная линейная комбинация. Пусть $f_{ij} = \varphi_\lambda^{l_i - j}$ имеет высоту j, тогда $\varphi_\lambda^j(f_{ij}) = \varphi_\lambda^{l_i} x_i = \overline{0}$, причем $\varphi_\lambda^{j-1}(f_{ij}) = \varphi_\lambda^{l_i-1}(x_i) \neq \overline{0}$.



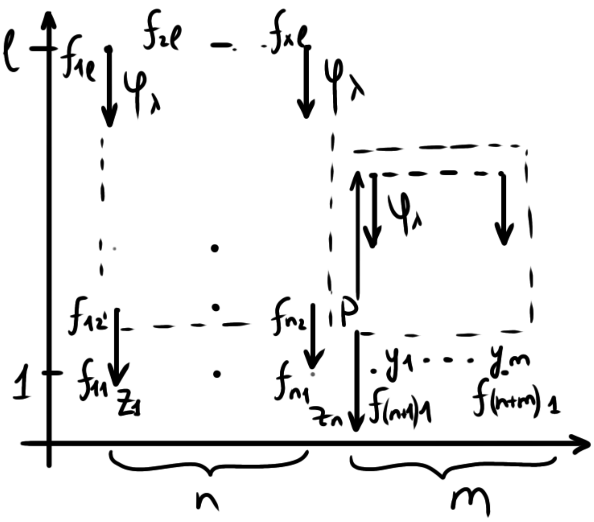
Пусть α_{it} - ненулевой коэффициент с наибольшим вторым индексом. Подейтсвуем φ_λ^{t-1} на сумму по i, j. Тогда:

$$\varphi_\lambda^{t-1}(\alpha_{it} f_{it}) = \alpha_{it}\varphi_\lambda^{t-1}\varphi_\lambda^{l_i-t}(x_i) = \alpha_{it}\varphi_\lambda^{l_i-1}(x_i) = \alpha_{it} z_i.$$

Таким образом,для всех коэффициентов верно $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} z_i = \overline{0}, \alpha_{it} \neq 0$, что приводит к противоречию с линейной зависимостью системы векторов $z_1, \dots z_n$. □

Алгоритм (Построение Жорданова базиса).

Будем строить Жорданов базис отдельно для каждого корневого подпространаства V^λ, и пусть высоты циклических подпространств идут в порядке невозрастания, наибольшая высота равна l ($\dim V^\lambda = d$) и пусть таких цепочек n штук, следующая высота p и таких цепочек m.



Пусть $z_1, \dots, z_n$ – линейно независимая система собственных векторов. Восстановлены циклические цепочки $f_{i1}, \dots f_{il}, 1 \leqslant i \leqslant n$. Причем $\ker \varphi_\lambda = \{f_{11} \dots f_{n1} \dots\}$. $\dim Im\varphi_\lambda = d - \dim \ker \varphi_\lambda =$

$d - n_1$ - все точки диаграммы кроме самых верхних(то же самое: все точки без нижнего слоя). $\dim\ker\varphi_\lambda^2 = n_2$, $\dim\operatorname{Im}\varphi_\lambda^2 = d - n_2$ - все точки кроме верхних двух слоев(то же самое: без двух нижних строчек). Таким образом, на каждом шаге мы снимаем верхний слой (на каждом шаге у нас "тает"слой, совсем как мороженое). После того как мы сняли все слои кроме последнего, остался слой из собственных векторов: $\operatorname{Im}\varphi_\lambda^{l-1} = \langle z_1, z_2, \dots, z_n\rangle$. $\exists x_i : \varphi_\lambda^{l-1} = z_i$

Рассмотрим циклическую цепочку, порожденную x_i:

$$\bigcup_{i=1}^{n}(\varphi_\lambda^{l-1}x_i \dots \varphi_\lambda x_i, x_i)$$

Это линейно независимая система векторов в количестве $l \cdot n$. Тогда если $n \cdot l = d$, Жорданов базис построен. Если же $n \cdot l < d$, то строим базис дальше. Теперь пусть есть циклические цепочки меньших высот (высоты p). Снова рассматриваем образ соответствующий нижнему слою ($\operatorname{Im}\varphi_\lambda^{p-1}$). Однако теперь в него так же попадут векторы из линейной оболочки уже построенной части базиса.
$\operatorname{Im}\varphi_\lambda^{p-1} \supseteq \langle\varphi_\lambda^{p-1}(x_i), \varphi_\lambda^{p-1}(\varphi_\lambda x_i), \dots \varphi_\lambda^{p-1}(\varphi_\lambda^{l-p}x_i\rangle$. Дополняем в $\operatorname{Im}\varphi_\lambda^{p-1}$ линейную оболочку до базиса векторами $y_1, \dots y_n$ – собственные векторы с собственным значением λ. По $y_1, \dots y_n$ восстанавливаем циклические цепочки и присоединяем к Жорданову базису.

Пример. Рассмотрим матрицу и найдем для нее Жорданову диаграмму, Жорданову нормальную форму, Жорданов базис:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Находим характеристический многочлен как определитель: $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^4(1-\lambda)$. (можно посчитать по теореме Лапласса относительно 3 и 4 столбцов) Тогда собственные значения $\lambda_1 = 0$, $alg(0) = 4$, $\lambda_2 = 1$, $alg(1) = 1$ (так как была теорема о том, что $geom(\lambda) \leqslant alg(\lambda)$, но при этом хотя бы 1, то $geom(1) = 1$). Пространство представляется в виде $V = V^0 + V^1$

2. Для всех собственных значений λ: $\{0\} \subseteq \ker\varphi \subseteq \varphi^2 \dots$
Ищем ранг матрицы A: $\dim\operatorname{Im}\varphi = rkA$, $rkA = 3$, $n_1 = \dim\ker\varphi = 5 - 3 = 2$. Находим матрицу для φ^2 возводя A в квадрат.

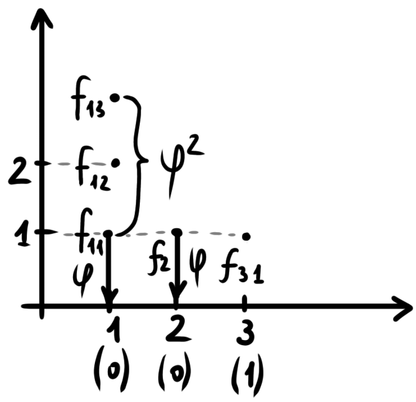
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rgA^2 = 3$, $n_2 = \dim\ker\varphi^2 = 5 - 2 = 3$. Стабилизации не произошло, поэтому вычисляем A^3.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что при умножении первый столбец не изменился, а значит нам повезло, и он является собственным вектором для $\lambda = 1$. Полученная матрица состоит только из первого столбца, остальные значения - нули, при этом первый столбец сохраняется при умножении на A, а значит $A^3 = A^4 = A^5 = \dots$, $rkA^3 = 1 = rkA^4 = \dots$, стабилизация произошла. ($n_3 = \dim\ker\varphi^3 = 5 - 1 = 4$)

3. Жорданова диаграмма имеет вид:



$$d_1 = n_1 - 0 = 2$$
$$d_2 = n_2 - n_1 = 1$$
$$d_3 = n_3 - n_2 = 1$$
$$d_4 = d_5 = \dots = 0$$

4. Жорданова нормальная форма имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица состоит из трех Жордановых клеток: размера 3 (с собственным значением 0), размера 1(с собственным значением 0), размера 1(с собственным значением 1).
Теперь подберем базис, соответствующий этой матрице: для выбора векторов, выберем сначала первые: $\langle f_{12}, f_{21}\rangle = \langle e_3, e_4\rangle$ $Im\varphi^2 = \langle (1,1,1,1,-1)^T, (0,0,0,1,0)^T\rangle$. Тогда так как e_3 не лежит в образе, а e_4 лежит, то они соответствуют векторам: $f_{11} = e_4 = (0,0,0,1,0)^T$, $f_{21} = (0,0,1,0,0)^T$. Как мы уже выяснили $f_{31} = (1,1,1,1,-1)^T$. Тогда пусть $f_{13} = e_2 = (0,-1,0,0,0)^T$ и $f_{12} = (0,1,1,0,-1)^T$.

5. Теперь можно сказать, что Жорданов базис равен $(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{31})$. Типичная ошибка - выписывать векторы из диаграммы сверху вниз, а не снизу вверх.

Упражнение. *Найти матрицу перехода от A и J как $S^{-1}AS = J$.*

5.3 Приложения Жордановой нормальной формы

5.3.1 Вычисление минимального многочлена

Напоминание. Пусть $\varphi : V \to V$. Многочлен $P \in F[x]$ называется аннулирующим для φ, если $P(\varphi) = 0$.

Напоминание. Аннулирующий многочлен минимальной степени называется минимальным многочленом $\mu(\varphi)$.

Напоминание. Если P – аннулирующий для φ, μ – минимальный многочлен для φ, то $\mu|P$.

Утверждение 5.3. *Пусть пространство V раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно оператора φ подпространтсв: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$. Введем обозначение $\psi_i = \varphi|_{V_i}$. Тогда $\mu_{\psi_i}|\mu_\varphi$.*

Доказательство. По определению $\mu_\varphi(\varphi) = 0$, тогда $\mu_\varphi(\varphi)|_{V_i} = \mu_\varphi(\psi_i) = 0$. Значит μ_φ – аннулирующий для φ и $\mu_{\psi_i}|\mu_\varphi$ для всех i по теореме 3.5. □

Следствие. В условиях утверждения 5.3 для аннулирующего многочлена μ_φ оператора φ верно $\mu_\varphi = \text{НОК}(\mu_{\psi_1}, \mu_{\psi_2}, \dots, \mu_{\psi_k})$.

Доказательство. Многочлен μ минимальной степени, удовлетворяющий условию $\forall i\ \mu_{\psi_i}|\mu$ является наименьшим общим кратным многочленов $\mu_{\psi_1}, \mu_{\psi_2}, \dots, \mu_{\psi_k}$ по определению.

Покажем, что $\mu(\varphi) = 0$: так как для всех i верно, что $\mu(\psi_i)|\mu$ и $\mu_{\psi_i}(\psi_i) = 0$, то так же верно $\mu(\varphi|_{V_i}) = \mu(\psi_i) = 0$ для всех i. По условию $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, а значит φ полностью определяется своими сужениями $\varphi|_{V_i}$, аннулирующимися многочленом μ. Отсюда следует, что и φ аннулируется многочленом μ.

Так как μ – аннулятор φ, по теореме 3.5 $\mu_\varphi|\mu$. При этом μ_φ является общим кратным многочленов $\mu_{\psi_1}, \mu_{\psi_2}, \dots, \mu_{\psi_k}$, а значит кратен их НОК, то есть $\mu|\mu_\varphi$. Отсюда следует, что $\mu \sim \mu_\varphi$, а значит $\mu_\varphi = \text{НОК}(\mu_{\psi_1}, \mu_{\psi_2}, \dots, \mu_{\psi_k})$. □

Замечание. В лекциях 25 года следующие 2 утверждения объеденены в одну теорему

Утверждение 5.4. *Пусть матрица отображения имеет вид Жордановой клетки: $J = J_k(\lambda)$. Тогда его минимальный многочлен имеет вид $\mu_J(x) = (x - \lambda)^k$.*

Доказательство. Так как матрица отображения имеет вид Жордановой клетки, его характеристический многочлен $\chi_J(x)$ представляется как:

$$\chi_J(x) = (\lambda - x)^k = (-1)^k (x - \lambda)^k \sim (x - \lambda)^k.$$

По теореме 3.4 Гамильтона-Кэли $\mu_J|\chi_J$, значит $\mu_J(x) = (x - \lambda)^t$, $t \leqslant k$. В данном случае Жорданова диаграмма преобразования имеет вид столбца, а значит $(J - \lambda\varepsilon)^t f_{1k} \neq 0$. Если $t < k$, то $(J - \lambda\varepsilon)^t \neq 0$, что приводит к противоречию с определением минимального многочлена $\mu_J(J) = 0$. Таким образом t не может быть меньше k, а значит $t = k$. □

Утверждение 5.5. *Пусть $\varphi : V \to V$ – линейно-факторизуемый оператор. Тогда минимальный многочлен представляется в виде произведения:*

$$\mu_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{l_i},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – попарно-различные собственные значения, $l_1, l_2, \dots, l_k$ – максимальные порядки клеток, относящихся к соответствующим собственным значениям.

Доказательство. Благодаря линейной факторизуемости V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств: $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots V^{\lambda_k}$. При этом каждое из них так же можно представить в виде суммы:

$$V^{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{geom(\lambda_i)} V_{ij},$$

где все V_{ij} соответствуют оператору $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)$. Положим $\dim V_{ij} = m_{ij}$. Пусть в циклическом базисе V_{ij} верно $\varphi \leftrightarrow J_{m_{ij}}(\lambda_i)$, тогда по утверждению 5.3:

$$\mu_i = \text{НОК}((x-\lambda_i)^{\alpha_1}, \dots, (x-\lambda_i)^{\alpha_k}) = (x-\lambda_i)^{\max(\alpha_s)} = (x-\lambda_i)^{l_1},$$

где $l_i = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

По следствию из утверждения 5.3:

$$\mu_\varphi = \text{НОК}((x-\lambda_1)^{l_1}, \dots, (x-\lambda_k)^{l_k}) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{l_i}.$$

□

Следствие. Пусть $\varphi : V \to V$ – линейно-факторизуемый оператор. Тогда φ диагонализируема тогда и только тогда, когда $\mu_\varphi(x)$ не имеет кратных корней.

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть φ – диагонализируем. Тогда $\forall i\ l_i = 1$, а значит $\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$. Тогда все корни простые (имеют кратность равную 1).

2. Достаточность. Пусть $\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$. Тогда для всех i верно $l_i = 1$. Таким образом нет Жордановых клеток порядка больше 1, а значит оператор φ диагонализируем.
   Если бы было хотя бы две клетки, отвечающие одному значению, в НОК было бы два члена соответствующих этому значению, и степень μ_i была бы меньше, чем степень многочлена.

□

Пример. Пусть $\varphi : V \to V$, V - над $\mathbb{C}$. Пусть $\varphi^n = e$. Тогда φ диагонализируем. Действительно, значит $P(t) = t^n - 1$ - аннулирующий для φ. $P \vdots \mu_\varphi$. А корни $\{\cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\}$ - имеют кратность 1. Значит по критерию φ диагонализируем

Замечание. При каких условиях на линейный оператор минимальный совпадает с характеристическим? Когда в ЖНФ для каждого собственного значения имеется одна клетка.
Действительно, каждому корневому пространству будет соответствовать единственная клетка, так как иначе аннулирующий многочлен как нок будет давать меньшую степень корня - собственного значения, чем характеристический многочлен.

5.3.2 Вычисление многочлена от линейного оператора

Соглашение. До конца раздела будем считать, что оператор φ линейно факториуем над F.

Утверждение 5.6. *Для дифференцируемого $k-1$ раз многочлена верно:*

$$f^{(k-1)}(x) = C_n^{k-1}(k-1)!x^{n-k+1}.$$

Где $f(x) = x^n$, тогда $k-1$ производная от многочлена разложится по линейности.

Доказательство.

$$f^{(k-1)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+2)x^{n-k+1} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k+1)!}(k+1)!x^{n-k+1} = C_n^{k-1}(k-1)!x^{n-k+1}.$$

□

Алгоритм (Вычисление многочлена от линейного оператора)**.**

Рассмотрим вычисление многочлена от оператора φ на примере многочлена $f(x) = x^k$. В случае, если мы научимся возводить матрицу преобразования A в любую степень, более сложные многочлены можно будет представить в виде суммы необходимых нам степеней матрицы A.

Для матрицы, приведенной к Жордановой нормальной форме, возведение в степень k поризводится следующим образом:

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n^k \end{pmatrix}$$

Таким образом для возведения матрицы в степень достаточно научиться возводить в степень Жордановы клетки, из которых состоит наша матрица.

Рассмотрим Жорданову клетку $J = J_k(\lambda)$. Её можно представить в следующем виде:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + J_k(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда возведение J в степень можно представить как:

$$J_k(\lambda)^n = (\lambda E + J_k(0))^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s (\lambda E)^{n-s} J_k(0)^s.$$

Возведение λE в $(n-s)$-ю степень очевидно дает $\lambda^{n-s}E$. Рассмотрим возведение матрицы $J_k(0)$ в s-ю степень. Заметим, что с каждым следующим умножением на $J_k(0)$ диагональ из единиц смещается вверх на одну строку, и $J_k(0)^{k-1} \neq 0$, $J_k(0)^k = 0$:

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_k(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_k(0)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_k(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $s \geqslant k$ получим $J_k(0)^s = 0$. Таким образом все слагаемые с $s \geqslant k$ в сумме выше нулевые и достаточно вычислять её до значения $s = k - 1$. Подставляя получившиеся матрицы в формулу получаем следующую матрицу:

$$J_k(\lambda)^n = \sum_{s=0}^{k-1} C_n^s (\lambda E)^{n-s} J_k(0)^s =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \dots & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \dots & C_n^{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Пусть S – матрица перехода от начального базиса к жордановому. Тогда $J = S^{-1}AS$, $A = SJS^{-1}$. Возведение в степень матрицы A в начальном базисе будет осуществляться следующим образом:

$$A^n = (SJS^{-1})(SJS^{-1} \dots (SJS^{-1})) = SJ^nS^{-1}.$$

Матрица для более сложного многочлена является суммой матриц соответствующих слагаемых.

5.3.3 Примечание Жордановой нормальной формы к вычислению аналитической функции от линейных операторов

Определение 5.4. Функция называется аналитической, если она представляется сходящимся степенным рядом.

Соглашение. До конца раздела $\varphi : V \to V$, V – вещественное или комплексное.

Определение 5.5. Функция $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ называется нормой если

1. $||x|| > 0$, если $x \neq 0$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Пример.

1. x – координатный столбец, $||x|| = \max\limits_i |x_i|$ – максимум из модулей координат.
2. x – координатный столбец, $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ – Евклидова норма.(Эрмитова в случае комплексных)
3. x – координатный столбец, $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ – Манхеттенская норма.

Определение 5.6. Последовательность векторов $\{x^m\}$ сходится по норме к x_0, если $||x^m - x_0|| \to 0$ при $m \to +\infty$.

Замечание. В случае норм 1-3 сходимости $\{x^m\}$ по норме эквивалентна покоординатной сходимости. То есть $\forall i x_i^m \to x_i$

Определение 5.7. Ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} x^m$ называется сходящимся, если он сходится по норме $S^n = \sum\limits_{m=1}^{n} x^m$.

Определение 5.8. Ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} x^m$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} ||x^m||$.

Утверждение 5.7. *Если ряд* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_m x^m$ *сходится абсолютно, то он сходится, и для сумм верно:*

$$||\sum_{m=1}^{+\infty} x^m|| \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty} ||x^m||.$$

Утверждение 5.8. *Если ряд* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_m x^m$ *сходится абсолютно и* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_{\varphi(m)} x^{\varphi(m)}$ *сходится и для этих двух рядов верно:*

$$||\sum_{m=1}^{+\infty} a_{\varphi(m)} x^{\varphi(m)}|| = ||\sum_{m=1}^{+\infty} a_m x^m||$$

5.4 Операторная норма

Определение 5.9. Пусть $\varphi : V \to V$, V конечномерно над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда:

$$||\varphi|| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{||\varphi(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} \frac{||\varphi(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||\varphi(x)|| = \max_{||x||=1} ||\varphi(x)||.$$

Это можно сделать потому, что домножение на λ x не меняет отношения. Супремум можно заменить на максимум, так как мы будем рассматривать непрерывные нормы(а норма относительно себя непрерывна) на компакте.

Замечание. Если λ – собственное значение оператора φ, то $||\varphi|| \geqslant \lambda$.

Утверждение 5.9 (о свойствах нормы оператора)**.**

1. *Определение 5.9 опеределяет норму в* $\mathcal{L}(V)$.
2. $||\varphi(x)|| \leqslant ||\varphi|| \cdot ||x||$.
3. $||\varphi \cdot \psi|| \leqslant ||\varphi|| \cdot ||\psi||$.

Доказательство.

1. Докажем неравенство треугольника для нормы:

$$||\varphi + \psi|| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \neq 0} \frac{||(\varphi + \psi)(x)||}{||x||} \leqslant \max_{x \neq 0} \frac{||\varphi(x)|| + ||\psi(x)||}{||x||} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x \neq 0} \frac{||\varphi(x)||}{||x||} + \max_{x \neq 0} \frac{||\psi(x)||}{||x||} = ||\varphi|| + ||\psi||$$

2. Докажем непосредственной проверкой:

$$||\varphi(x)|| = \frac{||\varphi(x)||}{||x||} ||x|| \leqslant \max_{x \neq 0} \frac{||\varphi(x)||}{||x||} ||x|| = ||\varphi|| \cdot ||x||$$

3. Докажем непосредственной проверкой:

$$||\varphi\cdot\psi|| = \max_{x\neq 0}\frac{||\varphi\cdot\psi(x)||}{||x||} = \max_{\psi(x)\neq 0}\frac{||\varphi(x)||}{||x||} = \max_{\psi(x)\neq 0}\frac{||\varphi\cdot\psi(x)||}{||\psi(x)||}\cdot\frac{||\psi(x)||}{||x||} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\psi(x)\neq 0}\frac{||\varphi\cdot\psi(x)||}{||\psi(x)||}\cdot\max_{\psi(x)\neq 0}\frac{||\psi(x)||}{||x||} \leqslant ||\varphi||\cdot||\psi||$$

□

Теорема 5.3. *Пусть ряд* $f(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m t^m$ *сходится при* $|t| < R$. *Тогда ряд* $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m\varphi^m$ *сходится абсолютно для любого оператора* $\varphi : ||\varphi|| = R_0 < R$. *Более того,* $f(\varphi) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m\varphi^m$ *– задает линейный оператор в* V.

Доказательство. $\forall x \in V$ докажем, что ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m\varphi^m(x)$ сходится абсолютно:

$$\sum_m |a_m|\cdot||\varphi^m(x)|| \leqslant \sum_m |a_m|\cdot||\varphi^m||\cdot||x|| \leqslant$$
$$\leqslant ||x||\sum_m |a_m|\cdot||\varphi^m|| = ||x||\sum_m |a_m|R_0^m \text{ – сходится при } R_0 < R.$$

Ряд $f(t) = \sum_m a_m t^m$ сходится при $|t| < R$, а значит $\sum_m |a_m||t|^m$ сходится при $|t| < R$ по теореме Абеля. Проверим, что f - линейный оператор. $S_n = \sum_{m=0}^{n} a_m\varphi^m, S_n(x+y) = S_n(x) + S_n(y), S_n(\lambda x) = \lambda S_n(x) \Longrightarrow$ переходя в пределе получаем, что $f(\varphi)$ - линейный оператор. □

Замечание. Для аналитической функции для линейного оператора формула с возведением в степени ЖНФ с производными также верна.

Замечание.

$$exp(\varphi) = \varepsilon + \frac{\varphi}{1!} + \dots + \frac{\varphi^n}{n!} + \dots,\ R = +\infty$$
$$sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,\ R = +\infty$$
$$cos(\varphi) = \varepsilon - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \dots,\ R = +\infty$$

Замечание. $$\begin{pmatrix} exp(\lambda) & \frac{exp(\lambda)}{1!} & \frac{exp(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{exp(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & exp(\lambda) & \frac{exp(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{exp(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & exp(\lambda) & \dots & \frac{exp(\lambda)}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & exp(\lambda) \end{pmatrix}$$

6 Линейные рекурренты

Определение 6.1. Будем рассматривать последовательности $(a_0, a_1, \dots)$, $a_i \in F$. Множество всех таких последовательностей будем обозначать F^∞.

Определение 6.2. Зафиксируем многочлен $p(x) \in F[x]$ степени S, $p(x) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \dots + p_1 x + p_0$. Линейным рекуррентным соотношением с характеристическим многочленом $p(x)$ называется последовательность $\{a_n\} \in F^\infty$ такая что $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно:

$$a_{n+s} + p_{s-1}a_{n+s-1} + \dots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,\ p_0 \neq 0$$

Рекуррентное соотношение выражает a_{n+s} через s предыдущих членов. V_p - множество всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соттношению выше.

Замечание. $(a_0, a_1, \dots,)F^\infty$ - бесконечномерное линейное пространство(с покомпонентным сложением и умножением на скаляр)

Утверждение 6.1. *V_p - линейное пространство над F и $\dim V_p = s$.*

Доказательство. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условию определения 6.2, то и $\{a_n + b_n\}$ удовлетворяют этому условию(аналогично с умножением на скаляр). Базис в V_p:

$$e_0 = (\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0,}_{S} -p_0, \dots)$$
$$e_1 = (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0,}_{S} -p_1, \dots)$$
$$\dots$$
$$e_{s-1} = (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 1,}_{S} -p_{s-1}, \dots)$$

□

Утверждение 6.2. *Рассмотрим оператор $\varphi : F^\infty \to F^\infty$, такой что $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots)$. Тогда $V_p = \ker p(\varphi)$.*

Доказательство. По определению ядра отображения последовательность $\{b_n\}$ лежит в $\ker p(\varphi)$ тогда и только тогда, когда верно $p(\varphi)(b_n) = (0) \in F^{+\infty}$. При этом имеет место следующая равносильность:

$$(\varphi^s + p_{s-1}\varphi^{s-1} + \dots p_1\varphi + p_0\varepsilon)(b_n) = (0) \Leftrightarrow b_{n+s} + p_{s-1}b_{n+s-1} + \dots p_1 b_{n+1} + p_0 b_n = (0)$$

Второе равенство эквивалентно тому, что $\{b_n\}$ лежит в V_p, а значит верно вложение V_p и $\ker p(\varphi)$ друг в друга в обе стороны. □

Замечание. Оператор φ называется оператором левого сдвига. V_p инварианто относительно φ.

Следствие. Пусть $\psi_p = \varphi|_{V_p}$. Тогда $p(\psi_p) = 0$.

Доказательство. $p(\varphi)|_{V_p} = 0$ так как $V_p = \ker p(\varphi)$. □

Утверждение 6.3. *$\mu_{\psi_p}(x) = p(x)$.*

Доказательство. Пусть $a_n \in V_p$, тогда $p(\varphi)(a_n) = (0)$. По следствию из утверждения 6.2 для сужения $\psi_p = p(\varphi)|_{V_p}$ так же верно $\psi_p(a_n) = (0)$, а значит $p(\psi_p)(a_n) = 0$. Таким образом p - аннулирующий многочлен для ψ_p и по теореме 3.5 $\mu|p$, где $\mu = \mu_{\psi_p}$. По определению минимального многочлена $\mu(\psi_p) = 0$, тогда и $\mu(\varphi)|_{V_p} = 0$.

Отсюда следует, что V_p вложено в $\ker \mu(\varphi) = V_\mu$ (равенство верно по утверждению 6.2). Из вложенности $V_p \subseteq V_\mu$ и кратности $\mu|p$ получаем равенство степеней многочленов $\deg p = \deg \mu$, откуда следует их ассоциированность. □

Определение 6.3. Пусть $p(x) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \dots + p_1x + p_0 \in F[x]$, $p_0 \neq 0$.
Сопутствующей матрицей для многочлена $p(x)$ называется матрица размера $s \times s$ вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{s-2} & -p_{s-1} \end{pmatrix}$$

Утверждение 6.4. *Пусть $\psi_p = \varphi_p|_{V_p}$. В базисе $(e_0, e_1, \dots, e_{s-1})$ из стандартных последовательностей оператор ψ_p имеет в точности сопутвующую матрицу A_p.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\psi_p(e_0) = (0, 0, \dots, 0, 0, -p_0, \dots) = -p_0e_{s-1} \\ &\psi_p(e_1) = (1, 0, \dots, 1, 0, -p_1, \dots) = e_0 - p_1e_{s-1} \\ &\dots \\ &\psi_p(e_i) = (0, 0, \dots 1, 0, \dots, 0, -p_i, \dots) = e_{i-1} - p_ie_{s-1} \end{aligned}$$

При этом для e_i единица стоит на $i - 1$ позиции, $-p_i$ всегда стоит на s-й позиции. □

Утверждение 6.5. $\chi_{\psi_p}(x) = \chi_{A_p}(x) = (-1)^s p(x)$.

Доказательство. Из утверждения 6.4 следует $\chi_{\varphi_p}(x) = \chi_{A_p}(x) = (-1)^s p(x)$.
(В лекции 25 года предлагается доказать разложением по последней строке, действительное - это сразу дает нужное выражение)

Докажем наше утверждение по индукции:

1. База $s = 2$:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -p_0 & x - p_1 \end{vmatrix} = x^2 + p_1x + p_0 \text{ – верно.}$$

2. Пусть для матрицы размера s минор размера $(s-1) \times (s-1)$ в правом нижнем углу имеет определитель равный:

$$M_{2\dots s}^{2\dots s} = (-1)^{s-1}(x^{s-1} + p_{s-1}x^{s-2} + \dots p_2x + p_1).$$

Покажем, что переход индукции верен. Для этого вычислим определитель матрицы M_{A_p}, разложив его по верхней строке:

$$\chi_{A_p} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -x(-1)^{s-1}(x^{s-1} + p_{s-1}x^{s-2} + \dots p_2x + p_1) + (-p_s)(-1)^{s-1} = (-1)^s p_s(x).$$

□

Следствие. Оператор ψ_p имеет только одну Жорданову клетку, отвечающую каждому собственному значению.

Следствие. Действительно, это вытекает из замечания 5.3.1 и утверждения 6.5

Теорема 6.1 (Основная теорема о линейных рекуррентах)**.** *Пусть V_p - пространство линейных рекуррент, относящихся к $p(x)$ и пусть $p(x)$ раскладывается на линейные множители: $p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{l_i}$, $\lambda_i \in F$ - попарно различные. Тогда для любой $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in V_p$ справедливо представление:*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{l_i} c_{is} \cdot C_n^{s-1}\lambda_i^{n+1-s}$$

Доказательство. Ранее было доказано, что $\mu_{\psi_p} \sim \chi_{\psi_p}$. Теперь наша цель разложить пространство в прямую сумму корневых подпространств и найти для каждого циклическое подпространство $\langle b_1^{(i)}, \dots b_{l_i}^{(i)}\rangle$ такое, что:

$$(\varphi - \lambda_i\varepsilon)b_1^{(i)} = 0,$$
$$(\varphi - \lambda_i\varepsilon)b_s^{(i)} = b_{s-1}^{(i)}.$$

Заметим, что если $b_s^{(i)}$ построены, то они дают Жорданов базис в V_p. При этом $l_1 + l_2 + \dots l_k = s = \dim V_p$. Получаем:

$$\prod_{i=1}^{k}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{l_i}(b_s^{(i)}) = 0 \Leftrightarrow p(\varphi)(b_s^{(i)}) = 0 \Leftrightarrow b_s^{(i)} \in V_p = \ker p(\varphi)$$

Для упрощения вычислений отбросим индекс i, считая, что мы всё время работаем с одним и тем же собственным значением.

$$b_1 = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots)$$
$$(\varphi - \lambda\varepsilon)b_1 = (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1}, \dots) - (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1}, \dots) = 0$$

Таким образом мы доказали, что $b_1 = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ - собственный вектор. Пусть вектор высоты $s-1$ построен. Тогда $b_{s-1} = f_{s-1}(n)\lambda^n, b_s = f_s(n)\lambda^n$. Заметим, что:

$$f_s(n+1)\lambda^{n+1} - f_s(n)\lambda^{n+1} - f_{s-1}(n)\lambda^n \vdots \lambda^{n+1}.$$

Разделим на λ^{n+1}:

$$f_s(n+1) - f_s(n) = \frac{f_{s-1}(n)}{\lambda}.$$

При $\lambda = 1$ решением этого уравнения является $f_s(n) = C_n^{s-1}$, что можно доказать самостоятельно в качестве упражнения (на самом деле это следует из формулы $C_n^{s-1} + C_n^s = C_{n+1}^s$). В общем случае будем искать решение в виде квазимногочлена: $f_s(n) = C_n^{s-1} \cdot \lambda^{\alpha(s)}$. Подставим это решение в полученное выше уравнение:

$$C_{n+1}^{s-1}\lambda^{\alpha(s)} + C_n^{s-1}\lambda^{\alpha(s)} = C_n^{s-2}\lambda^{\alpha(s-1)-1}.$$

В силу того, что $C_{n+1}^{s-1} = C_n^{s-1} + C_n^{s-2}$, получаем $\alpha(s) = \alpha(s-1) - 1$. В силу того, что при $s = 1$ мы должны получить собственный вектор b_1, полученный ранее, верно $f_1(n) = 1$, а значит $\alpha(1) = 0$. Тогда $\alpha(2) = \alpha(1) - 1 = -1$, и $\alpha(s) = 1 - s$. Отсюда следует, что $f_s(n) = C_n^{s-1}\lambda^{1-s}$, а значит $b_s = C_n^{s-1}\lambda^{n+1-s}$. Таким образом, мы получили Жорданов базис, отвечающий λ: $b_1, b_2, \ldots, b_l$. $\square$

Пример (Числа Фибоначчи)**.** Элементы последовательности задаются соотношением:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

а значит, характеристический многочлен выглядит следующим образом: $p(x) = x^2 - x - 1$. Дискриминант $D = 5$, размерность пространтсва равна $\dim V_p = 2$, корни равны $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда сама последовательность имеет вид $a_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Константы можно найти из начальных условий, например для $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ получается:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n. \quad - \quad \text{Формула Бинэ}$$

При этом НОД$(a_n, a_m) = a_{\text{НОД}(n,m)}$,
$F_z \in \mathbb{C}$: $F_{z+1} = F_{z+1} + F_z$, $F_z|_{\mathbb{N}} = a_n$.

6.1 Приложение линейных рекуррент к расширению полей

Теорема 6.2. *Пусть дан многочлен $p(x) \in F[x]$ и p неприводим над полем F. Тогда существует расширение K поля F в котором p имеет хотя бы один корень.*

Доказательство. Пусть $\deg p = s$, A_p - сопутствующая матрица для многочлена p. В качестве искомого поля будем рассматривать кольцо $K = F[A_p]$ с единицей, то есть кольцо многочленов от матрицы A_p.
Сначала проверим, что оно является расширением поля F и само является полем.
Пусть $\alpha \in F$. Тогда можно сопоставить число $\alpha \in F$ элементу $\alpha E \in K = F[A_p]$. Таким образом $F \subset K$.

Если $f \in F[A_p]$ - не константа, то к f есть обратный многочлен в этом же поле.
$f = \alpha \in F = const$, тогда $\alpha^{-1} = f^{-1}$, Утверждается, что f не кратно p. Докажем от противного: пусть кратно, тогда $f(A_p) = p(A_p) \cdot q(A_p) = 0$, откуда НОД$(f, p) = 1$.

По свойству наименьшего общего делителя для многочленов:

$$\exists u(x), v(x) \in F[x] : u(x)f(x) + v(x)p(x) = 1,$$
$$u(A_p) \cdot f(A_p) + v(A_p) \cdot p(A_p) = E.$$

Из того, что $p(A_p) = 0$ получаем $f^{-1}(A_p) = u(A_p)$ и приходим к противоречию.
Таким образом, $F[A]$ - поле. У многочлена $p(x)$ есть корень $A_p \in F[A_p]$ так как $p(A_p) = 0$. $\square$

Пример. Над $\mathbb{R}$ многочлен $p(x) = x^2 + 1$ не имеет корней. Матрица A_p имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество решений в терминах матрицы при этом имеет следующий вид (в данном случае получаем, что y – коэффициент перед мнимой частью, а x – перед действительной):

$$\mathbb{R}[A_p] = \{xE - yA_p | x, y \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\}.$$

Покажем, что A_p соответсвует $-i$ в введенных обозначениях:

$$A_p^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

что соответствует $-1 \in \mathbb{R}$. При этом верно:

$$A_p^3 = A_p \cdot A_p^2 = -A_p, \qquad A_p^4 = (-A_p) \cdot A_p = 1 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R(\frac{\pi}{2}).$$

Следствие. Пусть $p(x) \in F[x]$ - произвольный многочлен. Тогда существует расширение $\tilde{F}$ поля F, в котором $p(x)$ раскладывается на линейные множители.

Доказательство. Дедукция по количеству неприводимых множителей, на которые раскладывается многочлен p:

1. База: пусть p раскладывается в произведение s линейных множителей: $p(x) = \prod\limits_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)$ – все доказано.
2. Предположим, что для многочлена p, у которого разложении на неприводимые множители больше чем t множителей, разложение существует. Докажем, что тогда можно разложить и в случае, если есть ровно t неприводимых множителей:

   Пусть $p_i | p$ и p_i неприводим, $\deg p_i \geqslant 2$. Расширим F до поля F_1 такого, что p_i имеет корень α в F_1.
   $p_i(x) = (x - \alpha)q_i(x)$, в F_1 имеет больше t неприводимых множителей. Теперь к $p(x)$ применимо предположение дедукции.

$\square$

Определение 6.4. Минимальное поле, в котором многочлен p раскладывается на линейные множители, называется полем разложения многочлена.

Замечание. Поле разложения многочлена единственно с точностью до изоморфизма, однако это утверждение в курсе доказано не будет.

Следствие. Теорема 3.4 Гамильтона-Кэли справедлива над любым полем.

Доказательство. Пусть $A \in M_n(F)$, по теореме Гамильтона-Кэли $\chi_A(A) = 0$.
$\tilde{F} \supset F : \tilde{F}$ – поле разложения $\chi_A(x)$. Тогда по теореме Гамильтона-Кэли $\chi_A(A) = 0$ в F. $\square$

Следствие. $\varphi : V \to V$ над любым полем. Тогда $\deg \mu_\varphi \leqslant \dim V$.

Доказательство. $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ и $\mu_\varphi | \chi_\varphi \Longrightarrow \deg \mu_\varphi \leqslant \deg \chi_\varphi \leqslant \dim V$ $\square$

Теорема 6.3. *Если p - простое число, то найдется поле F_{p^n}, состоящее из p^n элементов, где n - любое натуральное число.*

Идея доказательства. Пусть такое поле существует. Тогда $F_{p^n}^* = F_{p^n} \setminus \{0\}$ - группа по умножению. Тогда по теореме Лагранжа $x \in F_{p^n}$, $x^{p^n-1} = 1$, $p^n - 1 = \operatorname{ord} x$. Рассмотрим $f(x) = x^{p^n} - x$(коэффициенты из F_p) – корни, обратные F_{p^n}.

Доказательство. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, $f(x) = x^{p^n} - x$. Пусть $\tilde{F}$ – поле разложения f. Тогда в $\tilde{F}$ у f имеется p^n корней. Причем все корни различны. Действительно, найдем $f'(x) = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$. То есть f(x) не имеет кратных корней. Рассмотрим F_{p^n} – множество корней f. Проверим, что оно является полем:

1. $a \in F_{p^n} \Leftrightarrow a^{p^n} = a$.
2. $a, b \in F$, тогда $(a \cdot b)^{p^n} = a^{p^n} \cdot b^{p^n} = a \cdot b$ – замкнутость относительно умножения.
3. Если $a \neq 0$, то $a^{-1} \in F_{p^n}$ т.к. $(a^{-1})^{p^n} = (a^{p^n})^{-1} = a^{-1}$ – существование обратного элемента.
4. По построению $\mathbb{Z}_p \subset \tilde{F}$, откуда $char\tilde{F} = p$.

В любом поле характеристики p справедлива формула Бинома Ньютона: $(a + b)^p = a^p + b^p$, $a, b \in F_p$.

$$(a+b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-1} b^2 + \cdots + b^p = a^p + b^p,$$
$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!},$$
$$C_p^k \equiv 0 (mod p).$$

Докажем, что $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ если $a, b \in F$. Индукция по n:

1. $n = 1$: как было доказано выше, $(a+b)^p = a^p + b^p$
2. Предположим, что для $n-1$ верно. Пусть a, $b \in F_{p^n}$. Тогда:
$$(a+b)^{p^n} = ((a+b)^p)^{p^{n-1}} = (a^p + b^p)^{p^{n-1}} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

□

7 Билинейные операторы

Определение 7.1. Пусть V - линейное пространство над F. Функция $f : V \times V \to F$ называется билинейной, если выполняются следующие условия:

1. Аддитивность по первому аргументу $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.
2. Линейность по первому аргументу $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$.
3. Аддитивность по втроому аргументу.
4. Линейность по второму аргументу.

Замечание. Легко видеть, что множество всех билинейных функций является линейным пространтвом на V. И записывается как B(V).

Пример.

1. V $= V_3$, $f(x,y) = (x,y)$
2. V_3, скалярное произведение - билинейный оператор: $(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(\varphi)$
3. Пусть f, g - линейные функции на V, тогда $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ - билинейная функция $h : V \times V \to F$.

4. $V = M_{n\times m}(F)$ и $f(X,Y) = tr(X^TAY)$, где $A \in M_n(F)$.
   Покажем аддитивность и линейность:
$$f(X_1+X_2,Y) = tr((X_1+X_2)^TAY) = tr(X_1^TAY) + tr(X_2^TAY) = f(X_1,Y) + f(X_2,Y),$$
$$f(\lambda X, Y) = tr((\lambda X)^TAY) = \lambda f(X,Y).$$
   Важный частный случай - при $m = 1$:
$$f(X,Y) = X^T\cdot A\cdot Y = (x_1,x_2,\dots x_n)\cdot A\cdot(y_1,\dots y_n)^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j \in F.$$

Замечание. $f(0,y) = 0$ так как $f(0,y) = f(0\cdot x, y) = 0\cdot f(x,y) = 0$.

Определение 7.2. Если $x, y \in F^n$, то выражение $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j$ называется билинейной формой от координатных столбцов x и y. Билинейная форма сама является билинейной функцией: $F^n \times F^n \to F$. При этом матрица A со значениями a_{ij} называется матрицей билинейной формы.

Утверждение 7.1. *Если $f(x,y)$ – билинейная функция $V\times V \to F$, то она может быть записана в виде билинейной формы от координат x и y при добавлении коэффициентов $a_{ij} = f(e_i,e_j)$ - значения функции f на базисных векторах.*

Доказательство. Пусть $f(x,y)$ - билинейная функция, $e = (e_1,\dots e_n)$ - базис в V. Запишем разложения векторов x и y по базису:
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$$
Тогда верно следующее:
$$f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$
□

Утверждение 7.2. *Пусть $f(x,y)$ – билинейная функция в V. e, e' – базисы в V. A, A' – матрицы билинейной формы f в этих базисах. Тогда $A' = S^TAS$, где S – матрица перехода между e и e'.*

Доказательство. Пусть x и y имеют в e координаты α и β соответственно.
Было доказано, что $\alpha = S\alpha'$, $\beta = S\beta'$. Тогда:
$$f(x,y) = x^TAy = \alpha^TA\beta = (S\alpha')^TA(S\beta) = (\alpha')^TS^TAS\beta' = (\alpha')^TA'\beta'.$$
Из последнего равенства сразу следует, что $S^TAS = A'$. □

Замечание. В отличие от билинейной формы, матрица линейного оператора $A' = S^{-1}AS$.

Утверждение 7.3 (Инварианты матрицы A билинейной формы)**.** *rkA не зависит от выбора базиса, где A – матрица билинейной функции.*

Доказательство. $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(S^TAS) \leqslant rkA$. При этом $A = (S^T)^{-1}A'S{-}1$, откуда $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk} A'$, а значит, ранги равны. □

Следствие. Определители A и A' над полем вещественных чисел всегда имеют одинаковый знак: $\det A' = \det(S^TAS) = (\det S)^2 detA$, где $(\det S)^2 > 0$.

7.1 Симметричные и кососимметричные билинейные функции и формы

Определение 7.3. Билинейная функция $f(x, y)$ называется симметричной если для всех $x, y \in V$ верно $f(x, y) = f(y, x)$.

Определение 7.4. Билинейная функция $f(x, y)$ называется кососимметричной, если для всех $x, y \in V$ верно:

1. $f(x, y) = -f(y, x)$,
2. $f(x, x) = 0$.

Замечание. Первое условие следует из истинности второго.

Доказательство. Заметим, что:

$$0 = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y).$$

При этом $f(x, x) = 0$ и $f(y, y) = 0$ по второму условию, а значит $f(x, y) = -f(y, x)$. □

Замечание. Если $\operatorname{char} F \neq 2$, то и из первого условия следует второе.

Доказательство. $f(x, x) = -f(x, x)$, откуда $2f(x, x) = 0$, а значит, при $\operatorname{char} F \neq 2$ обязательно верно $f(x, x) = 0$. □

Соглашение. В случае $\operatorname{char} F \neq 2$ оставим в определении только первое условие, в противном случае только второе.

Соглашение. Будем обозначать как $B^+(V)$ пространство симметричных билинейных функций, как $B^-(V)$ – пространство кососимметричных функций.

Утверждение 7.4. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда* $B(V) = B^+(V) \oplus B^-(V)$.

Доказательство.

1. Докажем, что $B^+(V) \cap B^-(V) = \{0\}$. Предположим, f является симметричной и кососимметричной одновременно. Тогда для любых $x, y \in V$:
   (a) $f(x, y) = -f(y, x)$ – из кососимметричности,
   (b) $f(x, y) = f(y, x)$ – из симметричности.

   Таким образом для всех $x, y \in V$ верно $f(y, x) = 0$.
   Это означает, что f является тождественно нулевой, а значит $B^+(V) \cap B^-(V) = \{0\}$.

2. Покажем теперь, что любая функция из $B(V)$ лежит в $B^+(V) + B^-(V)$.

   Рассмотрим $f \in B(V)$. Через неё можно выразить следующие две функции:
   (a) $f^+(x, y) = \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2} \in B^+(V)$ - симметризация f,
   (b) $f^-(x, y) = \frac{f(x,y)-f(y,x)}{2} \in B^-(V)$ - антисимметризация f.

   Тогда $f = f^+ + f^- \in B^+ + B^-$, а значит $B(V) \subseteq B^+ + B^-$. При этом B^+, B^- лежат в $B(V)$ по определению, а значит $B(V) = B^+ + B^-$. По доказанному в предыдущем пункте сумма $B^+ + B^-$ является прямой.

□

Замечание. Для поля характеристики 2 утверждение неверно. Так как $f(x, y) = x_1y_2+x_2y_1$, $f(y, x) = y_1x_2 + y_2x_1 = f(x,y)$, $f(x, x) = 2x_1x_2 = 0$, $f(e_1, e_2) = 1 \Longrightarrow f \not\equiv 0$

Пример. Рассмотрим поле $V = (F_2)^2$ и функцию $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ на нем. Для неё верно:

1. $f(y, x) = y_1x_2 + y_2x_1 = f(x, y)$ - симметричность,
2. $f(x, x) = x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_1x_2 = 0$ - кососимметричность.

Таким образом ненулевая функция f является одновременно симметричной и кососимметричной.

Утверждение 7.5. *Пусть $f \in B(V)$, e - базис в V, и A - матрица функции f относительно базиса e. Тогда f симметрична тогда и только тогда, когда A симметрична.*

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть f - симметричная. Тогда $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$, а значит матрица A так же симметрична.
2. Достаточность. Пусть $A = A^T$. Тогда верно:
   (a) $f(x, y) = x^TAy$,
   (b) $f(y, x) = y^TAx$.

   Таким образом, $f(x, y) = (x^TAy)^T = y^TA^Tx = y^TAx = f(y, x)$.

□

Утверждение 7.6. *Пусть $f \in B(V)$, e - базис, A - матрица f в базисе e. Тогда f кососимметрична тогда и только тогда, когда $A^T = -A$ и $a_{ii} = 0$ для всех i.*

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $f(x, y) = -f(y, x)$. Тогда $a_{ij} = f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i) = -a_{ij}$, а значит $A = -A^T$. При этом $f(x, x) = -f(x, x) = 0$, а значит так же верно $a_{ii} = f(e_i, e_i) = 0$.
2. Достаточность. Пусть $A^T = -A$ и $a_{ii} = 0$. Тогда по утверждению 7.1 верно следующее представление $f(x, x)$ в виде билинейной формы:

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}(a_{ij} + a_{ji})x_ix_j = 0.$$

□

Замечание. Если $\operatorname{char} F \neq 2$, утверждение 9.3 можно сформулировать без второго условия на матрицу A.

Доказательство. Проверим достаточность. Пусть $A^T = A$. Покажем, что $f(x, y) = -f(y, x)$:

$$f(x, y) + f(y, x) = x^TAy + (y^TAx)^T = x^TAy + x^TA^Ty = x^T(A - A)y = 0.$$

□

Замечание. Контрпримером для поля характеристики 2 является $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ - задается единичной матрицей и $E^T = -E$, так как $-1 = 1$ при $charF = 2$. При этом функция ненулевая и $f(x, x) = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$

7.1.1 Ядро симметричных и кососимметричных билинейных функций

Соглашение. Многие утверждения, доказываемые в этом разделе верны и для симметричных и для кососимметричных функций. Чтобы показать, что функция f лежит в B^+ или в B^- будем использовать обозначение $f \in B^{\pm}$.

Определение 7.5. Пусть $f \in B^{\pm}(V)$. Тогда ядром f является:

$$\ker f = \{x \in V | \forall y \in V \hookrightarrow f(x,y) = 0\} = \{y \in V | \forall x \in V \hookrightarrow f(x,y) = 0\},$$

где сначала выписано левое ядро(L_f), а затем правое ядро(R_f), и они равны.

Замечание. Очевидно, что ядро является линейным пространством.

Утверждение 7.7. *Пусть $f \in B^{\pm}(V)$. Тогда верны следующие свойства:*

1. $\ker f \leqslant V$,
2. $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} f$.

Доказательство.

1. Очевидно из определения $\ker f$ и замечания.
2. Пусть $y \in \ker f$, что эквивалентно тому, что для любого вектора $x \in V$ верно $f(x,y) = 0$ (по определению 7.5 ядра (косо)симметричной билинейной функции).

   Рассмотрим базис e в пространстве V. Тогда утверждение $\forall x \in V \hookrightarrow f(x,y) = 0$ в силу линейности эквивалентно тому, что $\forall i = 1, 2, \dots n \hookrightarrow f(e_i, y) = 0$. Представим это в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (1,0,0,\dots 0)Ay = 0, \\ (0,1,0,\dots 0)Ay = 0, \\ \dots \\ (0,0,0,\dots 1)Ay = 0. \end{cases} \Leftrightarrow EAy = 0 \ \Leftrightarrow \ Ay = 0.$$

   Таким образом размерность $\ker f$ равна размерности пространства решений системы $Ay = 0$. Его размерность равна $\dim V - \operatorname{rk} A$, где A - матрица преобразования f.
   Получаем $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} f$.

□

Определение 7.6. Функция $f \in B^{\pm}(V)$ называется невырожденной над V, если выполняется одно из трех эквивалентных условий:

1. $\det A \neq 0$, A - матрица f относительно произвольного базиса e в V,
2. $\operatorname{rk} f = \dim V$,
3. $\ker f = \{0\}$.

Доказательство.

1. (1) $\Rightarrow$ (2):

   $\det A \neq 0$, значит $\operatorname{rk} A = n = \dim V$ по теореме Фробениуса.
2. (2) $\Rightarrow$ (3):

   Пусть $\operatorname{rk} F = \dim V$. Тогда $\dim \ker F = \dim V - \operatorname{rk} F = 0$, а значит $\ker F = \{0\}$.

3. (3) $\Rightarrow$ (1):
   $\ker F = \{0\}$, откуда $\operatorname{rk} f = n = \dim V$. При этом $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A$, а значит $M_{1\ldots n}^{1\ldots n} = \det A \neq 0$.

$\square$

Определение 7.7. Пусть $f \in B^{\pm}(V)$. Будем говорить, что x ортогонально y относительно f если $f(x, y) = 0$, что равносильно $f(y, x) = 0$. Обозначение: $x \perp y$.

Определение 7.8. Пусть $U \leqslant V$. Ортогональным дополнением к U относительно функции $f \in B^{\pm}(V)$ называется подпространство $U^{\perp} = \{y \in V \mid \forall x \in U \hookrightarrow f(x, y) = 0\}$.

Замечание. В общем неверно, что $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Возьмем $f(x, y) = x_2 y_2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$U =< e_2 >, y \in U^{\perp} \Longleftrightarrow (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow y_2 = 0 \Longrightarrow U^{\perp} =< e_1 >$.

$(U^{\perp})^{\perp} = \{y \in V | (1, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0\} = V$

Утверждение 7.8. *Пусть $U \leqslant V$, $U^{\perp}$ - ортогональное дополнение к U относительно $f \in B^{\pm}(V)$. Тогда:*

1. $U^{\perp} \leqslant V$,
2. $\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$,
3. *Если $f|_U$ невырождена, то имеет место равенство:*

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U.$$

Доказательство.

1. Очевидно из опеределения.
2. Пусть $\dim U = k$, e - базис в V, согласованный с базисом в U, то есть

$$(e_1, \ldots e_k) \text{ - базис в U,}$$
$$(e_1, \ldots e_k, \ldots e_n) \text{ - базис в V,}$$

   Пусть $y \in U^{\perp}$. В силу выбора базисов это равносильно тому, что для всех значений $i = 1, \ldots k$ верно $F(e_i, y) = 0$. Таким образом ${}^k A y = 0$, где ${}^k A$ - подматрица в A, состоящая из первых k строк. В таком случае верно $\operatorname{rk} {}^k A \leqslant k$, а значит:

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \operatorname{rk} {}^k A \geqslant \dim V - k = \dim V - \dim U.$$

3. Пусть $f|_U$ невырождена, то есть $|M_{12\ldots k}^{12\ldots k}| \neq 0$. Тогда в предыдущем пункте достигается точное равенство $\operatorname{rk} {}^k A = k$, откуда получается искомое $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

$\square$

Замечание. Из равенства $\dim U^{\perp} \dim V - \dim U$ не следует невырожденность $f|_U$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \langle e_1 \rangle$. Тогда:

$$U^{\perp} = \left\{ y \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{y \in V \mid y_2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle e_1 \rangle.$$

Таким образом, $U^{\perp} = U$, $\dim U^{\perp} = 2 - 1 = 1$. Однако $f|_U = \{0\}$ - вырождено.

Пример. Покажем, что неравенство во втором пункте утверждения 7.8 может быть строгим:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \langle e_1 \rangle$. Тогда:

$$U^{\perp} = \left\{ y \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} = V.$$

Определение 7.9. Подпространство $U \leqslant V$ назовем невырожденным относительно функции $f \in B^{\pm}(V)$, если сужение f на U невырожденно.

Замечание. Построенные выше примеры показывают, что у пространства, на котором f невырождена, могут быть вырожденные подпространства, и наоборот, у пространства на котором f вырождена, могут быть невырожденные подпространства.

Теорема 7.1. *Пусть $U \leqslant V$, $f \in B^{\pm}(V)$. Тогда U невырожденно относительно f тогда и только тогда когда V раскладывается в прямую сумму подпространств: $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $f|_U$ невырождено. Покажем, что тогда $\ker f|_U = \{0\}$.

$$\ker f|_U = \{y \in U | \, \forall x \in U \hookrightarrow f(x, y) = 0\} = \\ = \{y \in V | \, \forall x \in U \hookrightarrow f(x, y) = 0\} \cap U = U^{\perp} \cap U = \{0\},$$

где первое равенство получено по определению ядра f над U, а третье по определению ортогонального дополнения. Из соображений размерностей подпространств получим:

$$dim(U + U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} - \dim(U \cap U^{\perp}) = \\ = \dim U + \dim U^{\perp} \geqslant \dim U + \dim V - \dim U = \dim V.$$

Так как $U + U^{\perp} \leqslant V$, получаем равенство размерностей $\dim(U + U^{\perp}) = \dim V$, а значит и равенство подпространств: $U + U^{\perp} = V$.

По теореме о характеристике прямой суммы получаем $V = U \oplus U^{\perp}$.

2. Пусть $V = U \oplus U^{\perp}$. Но $\ker(f|_U) = U \cap U^{\perp} = \{0\}$, а значит f невырождена на U.

$\square$

Замечание. Пусть $f|_U$ невырождена. Тогда по теореме 7.1 верно $V = U \oplus U^{\perp}$. Выберем базис e, согласующийся с разложением. Тогда матрица A в нем имеет вид $A = \left(\begin{array}{c|c} A_U & 0 \\ \hline 0 & A_{U^{\perp}} \end{array}\right)$.

7.2 Квадратичные билинейные формы

Определение 7.10. Пусть $f \in B(V)$, $f : V \times V \to F$. Тогда $\Delta = \{(x, x) \in V \times V\}$ - диагональ в пространстве V.

Определение 7.11. Пусть $f \in B^{+}(V)$. Квадратичной функцией на V называется произвольное сужение симметричной билинейной функции f на диагональ Δ:

$$q(x) = f(x, y)|_{\Delta} = f(x, x) : V \to F.$$

Замечание. В пространстве V_3 верно $(x, y)|_{\Delta} = (x, x) = |x|^2 \geqslant 0$.

Замечание. Сужать кососимметричные функции на диагональ мы не будем, так как сужение является нулевой функцией и не представляет интереса.

Соглашение. Будем обозначать как $Q(V)$ множество всех квадратичных функций на V.

Теорема 7.2. *Линейные пространства $B^+(V)$ и $Q(V)$ изоморфны, изоморфизм осуществляет отображение φ сужения на диагональ $\Delta \subset V \times V$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : B^+(V) \to Q(V)$, переводящее $f(x,x) \in B^+(V)$ в $q(x) \to Q(V)$. Операции сложения и умножения на скаляр сохраняются. Покажем его биективность:

1. Отображение φ сюрьективно по определению квадратичной функции.

2. Проверим инъективность φ. Пусть $\varphi(f) = q$, $\varphi(g) = q$, покажем, что тогда $f = g$.

   По определению $q(x) = f(x,x)$, тогда:

$$q(x \pm y) = f(x \pm y, x \pm y) = f(x,x) \pm 2f(x,y) + f(y,y) = q(x) \pm 2f(x,y) + q(y).$$

   Аналогично $q(x \pm y) = q(x) \pm 2g(x,y) + q(y)$, откуда:

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) = g(x,y).$$

Таким образом полученное отображение - биекция, сохраняющая необходимые операции, а значит получен изоморфизм между $B^+(V)$ и $Q(V)$. $\square$

Определение 7.12. Выражение $f(x,y)$ через $q(x)$ и $q(y)$ называется поляризационным тождеством. Обратное отображение $\psi : Q(V) \to B^+(V)$ называется поляризацией, $f(x,y)$ - полярной функцией к $q(x)$.

Определение 7.13. Базис в V называется ортогональным относительно f если для всех i, j, $i \neq j$ верно $a_{ij} = f(e_i, e_j) = 0$.

Замечание.

Ортогональный базис выгоден в силу того, что в нем наиболее просто представимы f и g:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots \lambda_n x_n y_n, \\ q(x) =& \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots \lambda_n x_n^2. \end{aligned}$$

Записанные выше представления называются диагональным видом f и g. Количество ненулевых коэффициентов λ_i равно рангу матриц f и q в силу того, что матрица в ортогональном базисе будет иметь диагональный вид со значенимями λ_i на диагонали.

Теорема 7.3 (Лагранжа)**.** *Всякую билинейную симметричную функцию f и ассоциированную с ней квадратичную функцию подходящим выбором базиса можно привести к диагональному виду.*

Доказательство. Индукция по размерности пространства.

1. База: при $n = 1$ матрица уже имеет диагональный вид.

2. Предположение индукции: пусть для пространств V размерности меньшей чем n теорема верна. Совершим переход к подпространствам размерности $n + 1$.

   Если функция f тождественно нулевая, её матрица так же очевидно диагональная.

В случае ненулевой функции f в силу поляризационного тождества функция q так же является ненулевой. Тогда существует вектор e_1, такой что $q(e_1) = a_{11} = f(e_1, e_1) \neq 0$. Рассмотрим тогда $U = \langle e_1 \rangle$. Тогда $f|_U$ невырождена, а значит $V = U \oplus U^\perp$.

По предположению индукции в $U^\perp$ найдется ортогональный относительно сужения $f|_{U^\perp}$ базис $(e_2, \dots e_n)$. Матрица $A_{U^\perp}$ в нем будет иметь вид:

$$A_{U^\perp} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

В силу того, что U и $U^\perp$ образуют прямую сумму, равную всему пространству V, при добавлении в $(e_2, \dots e_n)$ вектора e_1 получится базис в V, являющийся ортогональным относительно f. Матрица f в базисе $(e_1, e_2, \dots e_n)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

При этом коэффициенты в матрице равны $\lambda_i = q(e_i)$.

□

Замечание. Число ненулевый коэффициентов равно рангу матрицы A, который не зависит от выбранного базиса.

Замечание. Полученные базис и коэффициенты определены неоднозначно. Например мы можем растянуть один из базисных векторов e_i в c_i раз и получить $e_i' = e_i c_i$. Тогда:

$$\lambda_i' = q(e_i') = q(c_i e_i) = f(c_i e_i, c_i e_i) = c_i^2 f(e_i, e_i) = c_i^2 q(e_i) = c_i^2 \lambda_i.$$

Определение 7.14. Пусть $F = \mathbb{R}$. Вид квадратичной функции

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

где $p + q = \operatorname{rk} q$, называется каноническим видом квадратичной функции в V над $\mathbb{R}$. Очевидно, что растяжением базис векторов диагонального разложения $e_i \to e_i' = \dfrac{e_i}{\sqrt{|\alpha_i|}}$ может привести к каноническому виду.

Следствие. Если $F = \mathbb{R}$, то всякую квадратическую функцию выбором базиса можно привести к каноническому виду выбором базиса.

Упражнение. *Пусть V - пространство над полем $\mathbb{C}$. Доказать, что любую функцию в комплексном пространстве можно привести к виду $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_p^2$, $r = \operatorname{rk} q$.*

Замечание. В практических задачах проще искать не канонический базис, а преобразование координат, приводящее к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

где ξ_i - канонические координаты.

Алгоритм (Поиск преобразования, приводящего к каноническому виду).
В нашем базисе $q(x)$ имеет следующее представление:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

I. $a_{11} \neq 0$ Его можно преобразовать к виду:

$$q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Сумма после вынесения первого слагаемого не содержит x_1 ни в одном члене. Обозначим тогда $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)$ за ξ_1, который будет являться первым искомым каноническим вектором. После этого $q(x)$ можно записать как:

$$q(x) = \lambda_1\xi_1^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Таким образом можно продолжать преобразования суммы до получения разложения в канонический вид:

$$q(x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \dots \lambda\xi_n^n$$

При этом столбцы матрицы S будут являться координатами векторов базиса в каноническом базисе.
II. Если же все $a_{ii} = 0$, тогда пусть $2a_{12}x_1x_2 \to 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2$, где $a_{12} \neq 0$, то давайте сделаем такое преобразование $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n$

Определение 7.15. Квадратичная функция $q(x)$ называется положительно определенной (отрицательно опеределенной), если для всех $x \neq 0$ верно $q(x) > 0$ ($q(x) < 0$).

Определение 7.16. Квадратичная функция $q(x)$ называется положительно полуопределенной (отрицательно полуоопределенной) если для всех $x \in V$ верно $q(x) \geqslant 0$ ($q(x) \leqslant 0$).

7.2.1 Закон инерции для квадратичной формы. Теоремы Якоби и Сильвестра

Определение 7.17. Рассмотрим квадратичную форму $q(x)$. Будем называть $q(x)$ положительно (отрицательно) определенной, если для всех $x \neq 0$ верно $q(x) > 0$ ($q(x) < 0$). В случае нестрогих неравенств будем называть $q(x)$ положительно (отрицательно) полуопределенной.

Замечание. В случае если существуют x_1 и x_2 такие, что $q(x_1) > 0$ и $q(x_2) < 0$, $q(x)$ не определена.

Соглашение. До конца раздела будем считать что V – поле над пространством действительных чисел.

Утверждение 7.9.

1. *Функция $q(x)$ положительно определена тогда и только тогда когда приводится к каноническому виду с матрицей E.*

2. *Функция $q(x)$ положительно полуопределена тогда и только тогда когда приводится к каноническому виду с матрицей, не имеющей -1 на главной диагонали.*

Доказательство.

1. (a) Необходимость.
   Пусть $q(x)$ положительно определена. Рассмотрим канонический базис e. В этом базисе i-й элемент матрицы q равен $a_{ii} = q(e_i) > 0$.
   В силу того, что в каноническом базисе матрица может иметь только значения ± 1 и 0 на главной диагонали, получаем $a_{ii} = 1$. Таким образом матрица формы q является единичной.

   (b) Достаточность.
   Пусть q приводится к каноническому виду с E. Тогда в каноническом базисе:
   $$q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2, \text{ где } n = \dim V.$$
   Это значит, что для всех $x \neq 0$ верно $q(x) > 0$, так как в каноническом базисе x представляется в виде $x = (\xi_1\, \xi_2\, \ldots\, \xi_n)^T$. Таким образом q положительно определена.

2. (a) Необходимость.
   Пусть $q(x)$ положительно полуопределена. Тогда в каноническом базисе i-й элемент главной диагонали матрицы q равен $a_{ii} = q(x_i) \geqslant 0$, откуда $a_{ii} \in \{0, 1\}$.

   (b) Достаточность.
   Пусть в каноническом базисе $a_{ii} \in \{0, 1\}$. Тогда q в нем имеет вид:
   $$q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2, \text{ где } p < \dim V.$$
   Таким образом для всех x верно $q(x) \geqslant 0$, что значит, что q положительно полуопределена.

□

Упражнение. *Переформулировать утверждение 7.9 для отрицательных определенных и полуопределенных функций.*

Определение 7.18. Пусть e – канонический базис. Представим $q(x)$ как:
$$q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2.$$
Числа p и q называются индексами инерции относительно канонического базиса e.

Замечание. В любом базисе верно $p + q = \operatorname{rk} V$. Далее будет показано, что значения p и q не зависят от выбора базиса.

Теорема 7.4 (Закон инерции). *Пусть $q_f \in Q(V)$, e – канонический базис в V, p и q – положительный и отрицательный индексы инерции относительно базиса e. Тогда верно следующее:*

1. $p = \max\{\dim U \mid U \leqslant V : q_f|_U$ *– положительно определена*$\}$,
2. $q = \max\{\dim U \mid U \leqslant V : q_f|_U$ *– отрицательно определена*$\}$,
3. *Индексы p и q не зависят от выбора базиса в V.*

Доказательство.

1. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots e_n)$. Рассмотрим следующие подпространства V:
   $$U_0 = \langle e_1, e_2, \ldots e_p \rangle \qquad\qquad W_0 = \langle e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots e_n \rangle.$$

Их размерности равны $\dim U_0 = p$ и $\dim W_0 = n - p$ соответственно.

Пусть $m = \max\{\dim U | U \leqslant V : q_f|_U$ – положительно определена$\}$.

По построению U_0 верно что $q_f|_{U_0}$ положительно определена, а значит $m \geqslant p$. Пусть $m > p$. Тогда по построению m существует $U_1 \leqslant V$ такое, что $q|_{U_1}$ положительно определена и $\dim U_1 = m$. При этом по формуле Грассмана:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W_0 - \dim(U + W_0) = m + n - p - \dim(U + W_0) \geqslant m + n - p - n > 0.$$

Тогда $\exists z \in U_1 \cup W_0$. Однако по построению этих подпространств получим:

$$z \in U_1 \Rightarrow q(z) > 0,$$
$$z \in W_0 \Rightarrow q(z) \leqslant 0.$$

Таким образом предположение $m > p$ приводит к противоречию из-за невозможности существования нетривиального пересечения U_1 и W_0. Это значит, что $m = p$.

2. Доказательство аналогично первому пункту.

3. Истинность утверждения вытекает из первых двух пунктов, так как размерность подпространств не зависит от выбора базисов в них.

□

Следствие. Квадратичная функция имеет канонический вид $q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, когда q - положительно определена. $q(x) = -\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2$, когда q - отрицательно определена. $q(x) = q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - (q(x) = \xi_{p+1}^2 + \ldots + \xi_{p+q}^2)$, где $p + q = \operatorname{rk} A$, если q - не определена. $q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2, p = \operatorname{rk} A$, q - положительно полуопределена, $q(x) = -(\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2, p = \operatorname{rk} A)$, q - отрицательньно полуопределена,

Определение 7.19. Пусть квадратичная билинейная форма q представляется как:

$$q \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Главным минором Δ_i называется определитель левой верхней подматрицы размера $i \times i$:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

ЛЕКЦИЯ 2023 ГОДА.

Теорема 7.5 (Якóби). *Пусть $q(x)$ – квадратичная функция в линейном пространстве над $\mathbb{R}$, A – её матрица относительно некоторого базиса e в V и пусть $\forall i = 1, \ldots n$ верно $\Delta_i \neq 0$. Тогда существует базис e' в V такой что в нем $q(x)$ принимает вид:*

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2, \text{ где } \Delta_0 = 1.$$

Более того, e' можно выбрать так, что матрица перехода $S = S_{e \to e'}$ является верхнетреугольной.

Доказательство. Индукция по n – размерности пространства V:

1. База $n = 1$:

   В пространстве размерности 1 форма принимает вид $q(x) = a_{11}x_1^2$.

   Тогда можно осуществить переход $e_1 \to e_1' = \frac{1}{a_{11}}e_1$. Для нового базисного вектора:

   $$q(e_1') = f(\frac{e_1}{a_{11}}, \frac{e_1}{a_{11}}) = \frac{1}{a_{11}^2}a_{11} = \frac{1}{a_{11}}.$$

   Тогда в новом базисе $q(x) = a_{11}\xi_1 = \frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2$, что и требовалось.

2. Пусть теорема справедлива для любого V для которого верно $\dim V < n$.

   Рассмотрим пространство V размерности n, и его подпространство $U = \langle e_1, e_2, \dots e_{n-1}\rangle$.

   По предположению индукции существует базис $e' = \langle e_1', e_2', \dots e_{n-1}'\rangle$ в U такой что q имеет вид:

   $$q(x)|_U = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\xi_{n-1}^2,$$

   и матрица перехода от него к нашему базису имеет верхнетреугольный вид:

   $$S_{e \to e'} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1,n-1} \\ 0 & S_{22} & \dots & S_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

   При этом форма $q(x)|_U$ невырождена, так как $\Delta_{n-1} \neq 0$.

   Тогда по теореме о невырожденном подпространстве $V = U \oplus U^\perp$, где ортогональное дополнение $U^\perp$ используется в смысле f ассоциированного с q, $\dim U^\perp = 1$.

   Заметим, что в $U^\perp$ есть ненулевой вектор e, для которого верно $f(e_n, e) \neq 0$.

   В противном случае для любого вектора $e \in U^\perp$ верно $f(e_n, e) = 0$, что значит, что все вектора $e \in U^\perp$ перпендикулярны e_n. При этом $e \perp U = \langle e_1, \dots e_n\rangle$, откуда $e \in \ker f$.

   Это противоречит тому, что $\dim(\ker f) = \dim V - \operatorname{rk} f = 0$, а значит необходимый нам вектор существует.

   Положим $f(e, e_n) = c \neq 0$, тогда $f(e_n, \frac{e}{c}) = 1$. Пусть $e_n' = \frac{e}{c} \in U^\perp$, откуда $f(e_n, e_n') = 1$.

   Покажем, что $e' = \langle e_1', \dots e_{n-1}', e_n'\rangle$ – искомый базис.

   Рассмотрим матрицу перехода $S = S_{e \to e'}$. Заметим, что $S_{ni} = 0$ для всех $i < n$ в силу того, что $e_i' \in U$, а значит при переходе к новому базису вектор e_n не повлияет на него. Таким образом матрица $S_{e \to e'}$ диагональна.

   Осталось показать, что в новом базисе форма q имеет необходимый вид. Благодаря предположению индукции мы имеем:

   $$q(x)|_U = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\xi_{n-1}^2.$$

   Таким образом необходимо только показать, что коэффициент при ξ_n равен $\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$. Заметим, что этот коэффициент равен $q(e_n')$.

Вектор e'_n выражается через коэффициенты матрицы перехода и векторы начального базиса:

$$e'_n = S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n.$$

Тогда:

$$\begin{cases} f(e_1, e'_n) = 0, \\ f(e_2, e'_n) = 0, \\ \dots \\ f(e_{n-1}, e'_n) = 0, \\ f(e_n, e'_n) = 1. \end{cases}$$

Первые $n-1$ значений равны 0 в силу того, что $e'_n \in U^{\perp}$, $e_i \in U$.

Тогда $q(e'_n)$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} q(e'_n) = f(e'_n, e'_n) = f(S_{1n}e_1 + \dots + S_{n-1,n}e_{n-1} + S_{nn}e_n, e'_n) = \\ = S_{1n} \cdot f(e_1, e'_1) + \dots + S_{nn} \cdot f(e_n, e'_n) = S_{nn}. \end{aligned}$$

Выразим S_{nn} из системы выше:

$$\begin{cases} f(e_1, e'_n) = f(e_1, S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n) = 0, \\ f(e_2, e'_n) = f(e_2, S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n) = 0, \\ \dots \\ f(e_{n-1}, e'_n) = f(e_{n-1}, S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n) = 0, \\ f(e_n, e'_n) = f(e_1, S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n) = 1. \end{cases}$$

В силу невырожденности q матрица перехода невырождена, а значит и система уравнений невырождена, так как её матрица в точности является матрицей оператора q в базисе e.

Тогда по теореме Крамера для неё существует единственное решение и $S_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$.

Таким образом мы получили диагональную матрицу $S_{e \to e'}$ и необходимое нам представление q в базисе e' для пространства размерности V, что завершает доказательство по индукции.

□

ЛЕКЦИЯ 2025 ГОДА.

Теорема 7.6 (Яко́би). *Пусть $q(x)$ – квадратичная функция в линейном пространстве над $\mathbb{R}$, A – её матрица относительно некоторого базиса e в V и пусть $\forall i = 1, \dots n$ верно $\Delta_i \neq 0$. Тогда существует базис e' в V такой что в нем $q(x)$ принимает вид:*

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\xi_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\xi_n^2, \text{ где } \Delta_0 = 1.$$

Более того, e' можно выбрать так, что матрица перехода $S = S_{e \to e'}$ является верхнетреугольной с единицей на главной диагонали.

Доказательство. Индукция по n – размерности пространства V:

1. База $n = 1$:

   В пространстве размерности 1 форма принимает вид $q(x) = a_{11}\xi_1^2$. Уже верно

2. Пусть теорема справедлива для любого V для которого верно $\dim V < n$.

Рассмотрим пространство V размерности n, и его подпространство $U = \langle e_1, e_2, \dots e_{n-1} \rangle$.

По предположению индукции существует базис $e' = \langle e'_1, e'_2, \dots e'_{n-1} \rangle$ в U такой что q имеет вид:

$$q(x)|_U = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\xi_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\xi_{n-1}^2,$$

и матрица перехода от него к нашему базису имеет верхнетреугольный вид:

$$S_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & S_{12} & \dots & S_{1,n-1} \\ 0 & 1 & \dots & S_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

При этом форма $q(x)|_U$ невырождена, так как $\Delta_{n-1} \neq 0$.

Тогда по теореме о невырожденном подпространстве $V = U \oplus U^\perp$, где ортогональное дополнение $U^\perp$ используется в смысле f ассоциированного с q, $\dim U^\perp = 1$.

Заметим, что в $U^\perp$ есть ненулевой вектор $e'_n \neq 0$.

Покажем, что $e' = \langle e'_1, \dots e'_{n-1}, e'_n \rangle$ – искомый базис.

Рассмотрим матрицу перехода $S = S_{e \to e'}$. Заметим, что $S_{ni} = 0$ для всех $i < n$ в силу того, что $e'_i \in U$, а значит при переходе к новому базису вектор e_n не повлияет на него. Таким образом матрица $S_{e \to e'}$ верхнетреугольная. При этом $e_n = u + e'_n$ из разложения в прямую сумму, значит $e'_n = -u + e_n = S_{1,n}e_1 + \ldots + S_{n-1,n}e_{n-1} + e_n$ откуда вытекает то, что $S_{n,n} = 1$

Осталось показать, что в новом базисе форма q имеет необходимый вид. Благодаря предположению индукции мы имеем:

$$q(x)|_U = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\xi_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\xi_{n-1}^2.$$

Таким образом необходимо только показать, что коэффициент при ξ_n равен $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. Заметим, что этот коэффициент равен $q(e'_n)$.

Вектор e'_n выражается через коэффициенты матрицы перехода и векторы начального базиса:

$$e'_n = S_{1n}e_1 + \dots S_{nn}e_n.$$

Тогда:

$$\begin{cases} f(e'_1, e'_n) = 0, \\ f(e'_2, e'_n) = 0, \\ \dots \\ f(e'_{n-1}, e'_n) = 0, \\ f(e'_n, e'_n) = \alpha (\text{коэффициент при } \xi_n^2). \end{cases}$$

Первые $n - 1$ значений равны 0 в силу того, что $e'_n \in U^\perp$, $e_i \in U$.

Мы получаем, что в $\mathfrak{E}' : q = S^T A S$. Найдем определеитель левой и правой части: $\det q = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \dots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \cdot \alpha = \Delta_{n-1}\alpha, S^T A S = \det S^T \cdot \det S \cdot \det A = \Delta_n \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$
Способ рассчета. Выразим S_{kk} из системы выше:

$$\begin{cases} f(e_1, e'_k) = f(e_1, S_{1k}e_1 + \dots S_{nn}e_k) = 0, \\ f(e_2, e'_k) = f(e_2, S_{1k}e_1 + \dots S_{nn}e_k) = 0, \\ \dots \\ f(e_{k-1}, e'_k) = f(e_{k-1}, S_{1k}e_1 + \dots S_{kk}e_k) = 0, \\ f(e_k, e'_k) = f(e_1, S_{1k}e_1 + \dots S_{kk}e_k) = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \end{cases}$$

□

Следствие. Пусть $q(x)$ – квадратичная форма с ненулевыми главными минорами. Тогда отрицательный индекс инертности q равен числу перемен знаков в последовательности главных миноров.

Лемма 7.1. *Пусть $B \in M_n(\mathbb{R})$ – квадратная матрица над полем вещественных чисел. Тогда B положительно определена тогда и только тогда, когда существует невырожденная $A \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = A^TA$.*

Доказательство.

1. Необходимость.

   Пусть B положительно определена. Тогда она является матрицей некоторой квадратичной функции q, что значит, что существует матрица $S = S_{e \to e'}$ такая, что $S^TBS = E$.

   Домножим выражение на $(S^T)^{-1}$ слева и на S^{-1} справа и получим $B = (S^T)^{-1}S^{-1}$.

   Тогда искомая A существует и равна $A = S^{-1}$.

2. Достаточность.

   Пусть $B = A^TA$, $\det A \neq 0$? тогда B. Возьмем матрицу перехода между базисами $S = A^{-1}$.

   В новом базисе $B' = S^TBS = (A^{-1})^TA^TAA^{-1} = E$, откуда B положительно определена по утверждению 7.9.

□

Теорема 7.7 (Критерий Сильвестра)**.** *Пусть $q(x) = Q(V)$. Тогда верно следующее:*

1. *Форма $q(x)$ положительно определена тогда и только тогда когда для всех i главный минор положителен: $\Delta_i > 0$.*

2. *Форма $q(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда когда знаки главных миноров чередуются: $\operatorname{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.*

Доказательство.

1. (a) Необходимость.

   Пусть B – матрица квадратичной функции $q(x)$ и q положительно определена. Тогда по утверждению 7.1 верно $B = A^TA$, $\det A \neq 0$. В таком случае:

   $$|B| = |A^T| \cdot |A| = |A|^2 > 0.$$

   Это верно для любого сужения на первые k базис векторов, то есть все $\Delta_k > 0$

(b) Достаточность.
Пусть $\Delta_1 > 0, \dots \Delta_n > 0$. Тогда:

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\xi_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\xi_n^2,$$

что значит, что $q(x)$ положительно определена так как при $x \neq 0$ верно $q(x) > 0$.

2. Заметим, что если $q(x)$ положительно определена, то $-q(x)$ отрицательно определена. Пусть $q(x)$ определена отрицательно, тогда $-q(x)$ определена положительно. Выпишем её матрицу:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда $\Delta_1 = -a_{11} > 0$, откуда $a_{11} < 0$.

Продолжим вычислять миноры: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$

Вычисляя аналогично миноры большего размера получим, что знак меняется на каждом шаге, что значит, что $\operatorname{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.

□

Следствие. Если все главные миноры матрицы A формы q отличны от 0, то отрицательный индекс инерции q = числу перемен знаков последовательности определителей $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Доказательство. Вытекает из теоремы Якоби и критерия Сильвестера. □

Замечание. Если $A = A^T$, то в любом другом базисе матрица этой билинейной функции также симметричная. Действительно: $A' = S^T AS, (A')^T = (S^T AS)^T = S^T AS = A'$. Наличие диагонального базиса - прерогатива симметричной билинейной функции.

7.3 Канонический вид кососимметричных билинейных функций

Определение 7.20. Базис $e = \langle e_1, \dots e_n \rangle$ называется симплектическим для билинейной формы $f(x, y)$, если для $S = 1, \dots n$ верно:

$$f(e_{2S-1}, e_{2S}) = 1 \Rightarrow f(e_{2S}, e_{2S-1}) = -1,$$

а для остальных значений i, j верно $f(e_i, e_j) = 0$. Матрица в таком случае имеет следующий вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{A_m} \end{pmatrix},$$

где для всех i матрица A_i нулевая или имеет вид $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 7.8 (О каноническом виде кососимметричной билинейной функции)**.**
Если $f(x, y)$ – кососимметричная билинейная функция в V, то в V существует симплектический базис.

Доказательство. Докажем по индукции по размерности пространства V.

1. Если $f(x, y) = 0$ для всех x, y, то $S = 0$ – очевидно.

2. Если $f \neq 0$, то найдутся векторы e_1, e_2 такие, что $f(e_1, e_2) = c \neq 0$.

   Рассмотрим тогда векторы $e_1' = e_1$, $e_2' = \frac{e_2}{c}$, для которых верно $f(e_1', e_2') = 1$.

   Тогда в V существует невырожденное подпространство $U = \langle e_1', e_2' \rangle$, в котором матрица будет иметь вид $A_{f|_U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   По теореме о невырожденном пространстве $V = U \oplus U^{\perp}$. Таким образом если $\dim V = 2$, то искомый базис получен. Иначе по предположению индукции искомый базис найдется для $U^{\perp}$, а значит при объединении с e_1' и e_2' получим базис для V.

□

Следствие. Кососимметричная невырожденная билинейная функция существует только в пространстве чётной размерности.

Упражнение. *Доказать следствие, применяя только свойства опредлителей.*

Идея доказательства. При транспонировании матрицы A значение определителя не меняется. Тогда если $A = -A^T$, то $|A| = 0$.

8 Эрмитовы полуторалинейные функции и формы

Определение 8.1. Если рассматривать V над $\mathbb{C}$, то в V не бывает положительных функций в привычном нам виде. Для сравнения функции с 0 на комплексных значениях будем считать, что если $q(x) > 0$, то $q(ix) = f(ix, ix) = -f(x,x) = -q(x) < 0$.

Определение 8.2. Полуторалинейными функциями будем называть такие $f : V \times V \to \mathbb{C}$, для которых верны:

1. Аддитивность по первому аргументу: $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$,

2. Однородность по первому аргументу: $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$,

3. Аддитивность по второму аргументу: $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$.

4. $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$ (Антилинейность, полуторалинейность).

Замечание. Первое и второе утверждения вместе называются линейностью по первому аргументу. Третье и четвертое утверждения вместе называются антилинейностью по второму аргументу.

Утверждение 8.1. *Пусть f – полуторалинейная функция на V, e – базис в V, и векторы $x, y \in V$ имеют координаты $x \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, $y \leftrightarrow (y_1, y_2, \ldots y_n)$. Тогда:*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y_j} = x^T A \overline{y}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично действительному случаю(честно расписать разложение по базису x и y). □

Определение 8.3. Полученное выше выражение называется полуторалинейной формой от x, y.

Утверждение 8.2. *Пусть f – полуторалинейная функция в V, e, f – базисы в V, S – матрица перехода $S = S_{e\to f}$ и функция f представляется в базисах V матрицами $f \underset{e}{\leftrightarrow} A$, $f \underset{f}{\leftrightarrow} B$, то $B = S^T A\overline{S}$.*

Доказательство. В базисе e функция f выражается как $f(x,y) = x^T A\overline{y}$. При переходе к базису f получим $x = Sx'$, $y = Sy'$. Тогда:

$$f(x,y) = (Sx')^T A\overline{(Sy')} = (x')^T S^T A\overline{S}\overline{y'} = (x')^T B\overline{y'},$$

откуда $B = S^T A\overline{S}$. □

Определение 8.4. Полуторалинейная функция $f(x,y)$ называется эрмитовой или (эрмитово-симметричной) если для всех $x, y \in V$ верно $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$. Матрица называется эрмитово-симметричной если $A = \overline{A^T}$.

Замечание. Комплексное сопряжение $\overline{A}$ к матрице A стоит воспринимать как замену всех её элементов на комплексно-сопряженные к ним.

Утверждение 8.3. *Полуторалинейная функция f эрмитова тогда и только тогда, когда в произвольном базисе e её матрица эрмитова.*

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть f эрмитова. Тогда верно:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) = \overline{f(e_i, e_j)} = \overline{a_{ij}}.$$

   Отсюда следует $A = \overline{A^T}$.

2. Достаточность. Пусть $A = \overline{A^T}$, откуда $A^T = \overline{A}$. Тогда:

$$f(x,y) = (x^T A\overline{y}) = (x^T A\overline{y})^T = \overline{y^T} A^T x = \overline{y^T} A^T \overline{\overline{x}} = \overline{y^T A \overline{x}} = \overline{f(y,x)}.$$

□

Определение 8.5. Пусть $f(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная функция. Будем говорить, что векторы $x, y \in V$ ортогональны $x|y$, если $f(x,y) = f(y,x) = 0$.
Определим ортогональное дополнение как $U^\perp = \{y \in V | \forall x \in U \hookrightarrow f(x,y) = 0\}$.

Теорема 8.1. *Пусть f – эрмитова полуторалинейная функция и $f|_U$ – сужение f на U. Тогда $f|_U$ невырождена тогда и только тогда, когда $V = U \oplus U^\perp$.*

Определение 8.6. Пусть $\Delta = \{(x,x) | x \in V\}$ – диагональ декартового квадрата. Тогда функция $q : V \to \mathbb{C}$ назвается эрмитовой квадратичной функцией $q(x) = f(x,x) = f|_\Delta$, где f – эрмитова симметричная функция.

Замечание. Если $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$, то $q(x)$ – эрмитова квадратичная функция.

Замечание. Если f - полуторалинейная эрмитова функция, то $g(x,y) = if(x,y)$ - не эрмитова. Действительно $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$, $g(x,y) = if(x,y) = \overline{-if(x,y)} = -\overline{g(y,x)}$. В таком случае говорят, что g - косоэрмитова.

Пусть $H(V)$ - вещественное пространство полуторалинейных эрмитовых функций.
Пусть $Q(V)$ - вещественное пространство эрмитовых квадратичных форм.

Упражнение. *Доказать изоморфизм $Q(V)_\mathbb{R}$ и $H(V)_\mathbb{R}$ – пространства эрмитовых симметричных функций.*

Идея доказательства. Пусть $q(x)$ – эрмитова квадратичная функция. Тогда:

$$q(x+y) = f(x+y,x+y) = f(x,x) + \overline{f(y,x)} + f(x,y) + f(y,y) =$$
$$= f(x,x) + f(y,x) + f(x,y) + f(y,y) = q(x) + q(y) + 2\operatorname{Re}(f(x,y)).$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{Re}(f(x,y)) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Аналогично для аргументов с мнимой частью можно получить:

$$q(x+iy) = f(x+iy,x+iy) = f(x,x) + \overline{f(iy,x)} + f(x,iy) + f(iy,iy) =$$
$$= f(x,x) + f(iy,x) + f(x,iy) + f(iy,iy) = q(x) + q(iy) + 2\operatorname{Re}(-if(x,y)) =$$
$$= q(x) + q(y) + 2\operatorname{Im}(f(x,y)).$$

То есть мы можем восстановить $f(x,y) = \operatorname{Re}(f(x,y)) + i\operatorname{Im}(f(x,y))$ по эрмитовой квадратичной форме и наоборот. То есть изоморфизм очевиден($\varphi : H(V) \to Q(V)$ - сужение на Δ)

Теорема 8.2 (О существовании канонического базиса)**.**
Пусть q – эрмитова квадратичная функция (или соответствующая ей эрмитова симметричная функция f). Тогда в V существует базис e, в котором матрица $q(f)$ диагональна, причем на главной диагонали стоят числа ± 1 и 0.

Идея доказательства. Пусть $q \neq 0$. Тогда в V существует такой ненулевой вектор e_1, что $q(e_1) \neq 0$. Без ограничения общности можно перейти к $q(e_1) = \pm 1$(иначе можно заменить e на $\frac{e}{\sqrt{|c|}}$).
Тогда можно рассмотреть пространство $U = \langle e_1 \rangle$ и ортогональное дополнение к нему, образующие прямую сумму.

Напоминание. Функция $q(x)$ называется эрмитовой квадратичной функцией, если она получена сужением на $\Delta \subseteq V \times V$ эрмитовой полуторалинейной функции $q(x) = f(x,y)|_\Delta = f(x,x)$.
Таким образом $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$, откуда $q(x) = f(x,x) = \overline{f(x,x)} \in \mathbb{R}$.

Утверждение 8.4. *Пусть e - канонический базис в пространстве V, $q(x)$ - квадратичная эрмитова функция. Тогда:*

1. *$q(x)$ положительно определена тогда и только Тогда, когда её матрица в каноническом базисе единичная*
2. *$q(x)$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда её матрица в каноническом базисе не имеет -1 на главной диагонали.*

Доказательство.

1. (a) Необходимость - как в вещественном случае. q - положительно определена $\Longrightarrow A = E$.
   (b) Достаточность:
   $$q(x) = x^T A\overline{x} = x^T\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0. \forall x \neq 0$$
2. (a) Необходимость - как в вещественном случае.

(b) Достаточность. Матрица принимает следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $r = \operatorname{rk} r$, $q(x) = x^T A\overline{x} = \sum_{i=1}^r |x_i|^2 \geqslant 0$ для всех $x \in V$.

□

Утверждение 8.5 (Закон инерции для квадратичных эрмитовых функций).
Пусть e - произвольный канонический базис для $q(x)$ и пусть p, q - положительный и отрицательный индексы инерции относительно e. Тогда:

1. *$p = \max\{\dim U | U \leqslant V : q|_U$ - положительно опеределена$\}$.*
2. *$q = \max\{\dim U | U \leqslant V : q|_U$ - отрицательно опеределена$\}$.*
3. *p и q не зависят от выбора канонического базиса.*

Утверждение 8.6 (Аналог критерия Сильвестра).
Пусть $q(x) \in H(V)$ - эрмитова квадратичная функция, A - её матрица в произвольном базисе, где выполняется условие эрмитовости $\overline{A^T} = A$. Тогда:

1. *$q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$.*
2. *$q(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\operatorname{sgn}(\Delta_n) = (-1)^n$.*

Замечание. Если все $\Delta_i \geqslant 0$ - это не гарантирует положительную полуопределенность. Например $q \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$.

8.1 Евклидовы и Эрмитовы пространства

Определение 8.7. Линейное пространство над полем действительных чисел называется Евклидовым, если на нем определена положительно определенная билинейная симметрическая функция $f(x, y)$. По определению $f(x, y)$ называется скалярным произведением и обозначается (x, y). Скалярное произведение можно определить при помощи следующих аксиом:

1. $(x, y) = (y, x)$ - симметричность,
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4. $(x, x) \geqslant 0$, при этом $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - положительная определенность.

Второе и третье свойства вместе называются линейностью по первому аргументу.

Пример.

1. Пространство V_3 со скалярным произведением $(x, y) = |x||y| \cos \angle(x, y)$,
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x^T E y = x^T y = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$.

3. Пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x,y) = x^T A y = x^T y = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, A - положительно определенная веществественная матрица.
4. Пространство $M_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$,
5. Пространство $C_{[a,b]}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Определение 8.8. Длиной вектора x называется $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Определение 8.9. Если x, y - два ненулевых вектора, то можно ввести угол между ними:

$$\varphi = \angle(x,y) = \arccos\frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)(y,y)}}.$$

Замечание. В понятие скалярного произведения включена возможность введения длины вектора и угла между векторами.

Определение 8.10. Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{C}$. V называется эрмитовым, если на V определена положительно определенная эрмитова полуторалинейная функция $f(x,y)$. Аналогично с евклидовыми пространствами $f(x,y)$ называется скалярным произведением и обозначается (x,y).

Замечание. В отличие от Евклидовых прространств, на эрмитовых пространствах скалярное произведение может принимать комлексные значениях.

Замечание. Скалярное произведение на Эрмитовых пространствах можно определить при помощи следующих аксиом:

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ - эрмитова симметричность.
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \hookrightarrow (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
4. Для всех $x \in V$ верно $(x,x) \in \mathbb{R}$, причем $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Пример.

1. Эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x,y) = x^T \cdot E \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.
2. $(x,y) = x^T A y$, где A - положительно определенная эрмитова матрица.
3. Эрмитово пространство $M_n(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T \overline{Y})$.
4. Пространство $C^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

Замечание. Многие утверждения этого раздела верны одновременно и для евклидовых и для эрмитовых пространств, поэтому в случае, когда это так, будем говорить "пространство со скалярным произведением", подразумевая любое из них.

Определение 8.11. Матрицей Грама системы $a_1, a_2, \dots a_k$ называется матрица:

$$\Gamma(a_1, \dots a_n) = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_k) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \dots & (a_k,a_k) \end{pmatrix}$$

Теорема 8.3. *V - пространство со скалярным произведением(евклидово или эрмитово)*

1. *Пусть $e_1, e_2, \dots e_n$ - базис в V, $\Gamma = \Gamma(e)$. Тогда $\forall x, y \in V$ верно $(x, y) = x^T \cdot \Gamma \cdot \overline{y}$*
2. *Пусть $a_1, a_2, \dots a_k$ - произвольная система векторов в V. Тогда $|\Gamma(a_1, \dots a_n)| \geqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда система линейно зависима.*

Доказательство.

1. $f(x, y) = x^T \cdot A \cdot \overline{y} = x^T \cdot \Gamma \cdot \overline{y}$, где $a_{ij} = f(e_i, e_j) = (e_i, e_j) = (\Gamma)_{ij}$.
2. $\Gamma_{ij} = (a_i, a_j) = \overline{(a_j, a_i)} = \overline{\Gamma_{ji}}, \Gamma^T = \overline{\Gamma}, \det\Gamma = \det\Gamma^T = \det\overline{\Gamma} = \overline{\det\Gamma} \Longrightarrow \det\Gamma \in \mathbb{R}$. Пусть система линейно независима. Тогда $U = \langle a_1, a_2, \dots a_k \rangle$, $f(x{,}y)|_U = (x{,}y)|_U$ - положительно определена, а значит по критерию Сильвестра $|\Gamma(a_1, \dots a_n)| > 0$, так как $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$ - матрица функции f относительно базиса $(a_1, \dots, a_k)$.

   Пусть теперь система линейно зависима и без ограничения общности:
   $$a_k = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1}.$$
   Заметим, что элемент нижней строки матрицы Грама в таком случае равен:
   $$(a_k, a_i) = (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1}, a_i) = \lambda_1(a_1, a_i) + \lambda_2(a_2, a_i) + \ \dots \ + \lambda_{k-1}(a_{k-1}, a_i).$$
   Таким образом строки матрицы Грама линейно зависимы, так как последнюю строку можно представить в виде суммы всех предыдущих с коэффициентами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_{k-1}$.

   Тогда матрица Грама вырождена, а значит её определитель равен нулю.

□

Следствие. Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2, \dots a_n)$, $n = \dim V$. Тогда Γ положительно определена тогда и только тогда, когда $a_1, a_2, \dots a_n$ - базис в V.

Доказательство.

1. Необходимость.

   По критерию Сильвестера определитель должен быть больше 0. Пусть $|\Gamma(a_1, a_2, \dots a_n)| > 0$. Тогда по теореме 8.3 система $a_1, a_2, \dots a_n$ линейно независима, а значит является базисом в V.
2. Достаточность.

   Пусть система $a_1, a_2, \dots a_n$ является базисом. Тогда она линейно независима, а значит определитель матрицы Грама $|\Gamma(a_1, a_2, \dots a_n)| > 0$. Тогда по критерию Сильвестра Γ положительно определена.

□

Теорема 8.4 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *Пусть V - пространство со скалярным произведением, и пусть $x, y \in V$. Тогда:*

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x) \cdot (y, y)$$

Доказательство.

1. Пусть x или y - нулевой вектор, тогда $0 = 0$.

2. Пусть x и y ненулевые и коллинеарны, то есть $y = \lambda x$. Тогда:

$$|(x, \lambda x)|^2 = |\lambda|^2 |(x, x)|^2 = \lambda\overline{\lambda}|(x, x)|^2 = (x, x)(y, y)$$

3. Пусть x и y ненулевые и неколлинеарны. Тогда система из x и y линейно независима, а значит по теореме 8.3:

$$0 < |\Gamma(x, y)| = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} = (x, x)(y, y) - (x, y)(y, x) = (x, x)(y, y) - |(x, y)|^2.$$

□

Следствие. В неравенстве Коши-Буняковского равенство достигается тогда и только тогда, когда система один из векторов нулевой или они коллинеарны.

Следствие (Корректность определения угла)**.**
Пусть V - евклидово пространство, x, y - ненулевые векторы. Тогда по КБ $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)}$, а значит аргумент $\arccos \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)(y,y)}}$ не превосходит 1. Для эрмитовых пространств мы угол не определяем.

Следствие (Неравенство треугольника)**.** Для всех $x, y \in V$ верно:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Доказательство. Докажем непосредственной проверкой:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y).$$

При этом $\operatorname{Re}(x, y) \leqslant |(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, а значит:

$$|x + y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Величины $|x|$ и $|y|$ неотрицательны, а значит $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

8.1.1 Ортогональность в пространстве со скалярным произведением

Определение 8.12. $x \perp y$ если $(x, y) = 0$.

Определение 8.13. Система векторов $x_1, x_2, \ldots x_k$ называется ортогональной тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) = 0$ для всех $i \neq j$.

Определение 8.14. Система векторов $x_1, x_2, \ldots x_k$ называется ортонормированной тогда и только тогда, когда она ортогональна и нормирована. Нормированность означает, что $(x_i, x_i) = 1$ для всех i. То есть по сути $(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Определение 8.15. Система подпространств U_1, $U_2, \ldots,$ U_k называется ортогональной тогда и только тогда, когда для любой системы векторов $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $\ldots u_k \in U_k$ верно, что она ортогональна.

Утверждение 8.7. *Пусть U_1, $U_2, \ldots,$ U_k - ортогональная система подпространств. Тогда*

$$U_1 + U_2 + \ldots U_k = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Доказательство. Покажем, что пересечение подпространств $U_i \cap (U_1 + \dots + U_k) = \{0\}$.

Действительно, пусть $x \in U_i$ и $x \in U_1 + \ \dots \ + U_{i-1} + U_{i+1} \ \dots \ + U_k$. Тогда:

$$(x, x) = (x_i, x_1 + \ \dots \ + x_{i-1} + x_{i+1} + \ \dots \ + x_k) = 0.$$

Таким образом $x = 0$, а значит $U_i \cap (U_1 + \dots + U_k) = \{0\}$. □

Следствие. Если U_1, $U_2, \dots$, U_k - ортогональная система подпространств, то эти подпространства линейно независимы.

Следствие. Если векторы x_1, $\dots$, x_k ненулевые и образуют ортогональную систему, то они линейно-независимы.

Доказательство. Пусть $U_1 = \langle x_1 \rangle$, $U_2 = \langle x_2 \rangle$, $\dots$, $U_k = \langle x_k \rangle$. Тогда если система x_1, $\dots$, x_k линейно зависима, то соответствующие пространства U_1, $U_2, \dots$, U_k линейно зависимы, что противоречит следствию 8.1.1. □

Утверждение 8.8. *Пусть V - пространство со скалярным произведением. Тогда в нём существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $f(x, y) = (x, y)$, тогда для неё существует канонический базис, в котором f имеет матрицу E. $f(e_i, e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, откуда этот базис - ортонормированный. □

Следствие (Выражение координат векторов и скалярного произведения в ортонормированном базисе)**.** Пусть V - пространство со скалярным произведением, e - ортонормированный базис. Пусть $x \leftrightarrow \alpha$, $y \leftrightarrow \beta$. Тогда:

1. $(x, y) = \alpha^T \cdot \overline{\beta}$,
2. $\alpha_i = (x, e_i)$.

Доказательство.

1. $f(x, y) = \alpha^T \cdot A \cdot \overline{\beta} = \alpha^T \cdot E \cdot \overline{\beta} = \alpha^T \cdot \overline{\beta}$.
2. $(x, e_i) = (\alpha_1, \ \dots,) \cdot (0, \ \dots, \ 1, \ \dots, \ 0)^T = \alpha_i$,

   где единица в столбце координат вектора e_i стоит на i-й позиции.

□

8.1.2 Задача об ортогональной проекции

Задача. *Пусть V - пространство со скалярным произведением, U - подпространство V. Обозначим размерность V за n, размерность U за k. Тогда сужение на U невырожденной функции $f(x, y)$, являющейся скалярным произведением в V, так же будет являться скалярным произведением и в U.*

Пространство V будет представляться как $V = U + U^\perp$, так как $(\cdot, \cdot)|_U$ - невырождено.

Дан базис в U, вектор $x \in V$. Требуется представить вектор x в виде суммы его проекций $\tilde{x} = \mathrm{pr}_U \, x$ и $\overset{o}{x} = \mathrm{ort}_U \, x$ на U и $U^\perp$ соответственно.

Алгоритм.

1. Зафиксируем в U ортонормированный базис $e_1, \dots e_k$, достроив его до ОНБ $e_1, \dots e_n$ в V. Тогда:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i.$$

При этом $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in U$, $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in U^{\perp}$. Тогда $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$, откуда $\overset{o}{x} = x - \tilde{x}$.

2. Зафиксируем в U ортогональный базис $e_1, e_2, \dots e_k$, достроив его до ортогонального базиса $e_1, \dots e_n$ в V. Тогда рассмотрим базис e' такой, что $e'_i = \frac{e_i}{|e_i|}$, очевидно являющийся ортонормированным. Тогда

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} (x, e'_i) e'_i = \sum_{i=1}^{k} (x, e'_i) \frac{e_i}{|e_i|} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = \mathrm{pr}_e\, x = \frac{(x, e)}{(e, e)} e.$$

3. Зафиксируем произвольный базис $e_1, e_2, \dots e_k$ в U, достроив его до базиса $e_1, \dots e_n$ в V. Тогда необходимые нам векторы выражаются как $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ и $\overset{o}{x} = x - \tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \perp e_1, \dots, e_k$.

Чтобы получить коэффициенты λ_i запишем следующую систему:

$$\begin{cases} (x - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, e_1) = 0, \\ (x - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, e_2) = 0, \\ \dots \\ (x - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, e_k) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e_1, e_1)\lambda_1 + (e_2, e_1)\lambda_2 + \dots + (e_k, e_1)\lambda_1 = (x, e_1), \\ (e_1, e_2)\lambda_1 + (e_2, e_2)\lambda_2 + \dots + (e_k, e_2)\lambda_2 = (x, e_2), \\ \dots \\ (e_1, e_k)\lambda_1 + (e_2, e_k)\lambda_2 + \dots + (e_k, e_k)\lambda_k = (x, e_k). \end{cases}$$

Матрица системы является сужением Γ^T на U, а значит $|\Gamma|_U(e_1, \dots, e_k)| > 0$. Таким образом по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Замечание. Есть и другой способ решения данной задачи, основанный на процедуре ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение 8.16. Процедурой ортогонализации называется любой алгоритм, позволяющий по произвольному базису в пространстве V построить ортогональный базис.

Теорема 8.5 (Грама-Шмидта). *Пусть e - произвольный базис в пространстве V со скалярным произведением. Тогда существует базис f в пространстве V, такой что:*

1. *Для всех $k = 1, \dots n$ верно $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle f_1, \dots f_k \rangle$*

2. *Матрица перехода $S = S_{e \to f}$ унитреугольная(верхнетреугольная с единицами на главное диагонали).*

Доказательство. Докажем по индукции по $n = \dim V$.

1. База $n = 1$ - $f_1 = e_1$, $S = (1)$.

2. Предположим, для подпространства из $k-1$ вектора построено. Покажем, что для подпространства образованного $e_1, \dots e_k$ можно достроить построенный базис. Выберем $f_k = \operatorname{ort}_{\langle f_1, \dots f_{k-1}\rangle} e_k$. Тогда:
   (a) По построению f_k получаем $f_k \perp \langle f_1, \dots f_{k-1}\rangle$, откуда $f_1, \dots f_k$ - ортогональная система.
   (b) Пусть $f_k = 0$. Тогда $e_k \in \langle f_1, \dots f_{k-1}\rangle = \langle e_1, \dots e_{k-1}\rangle$, а значит базис e - линейно зависимый, что приводит к противоречию. Таким образом $f_k \neq 0$.
   (c) Покажем, что $\langle f_1, \dots f_k\rangle = \langle e_1, \dots e_k\rangle$. Действительно, вектор f_k выражается как:

$$f_k = e_k - \tilde{e_k} \in \langle f_1, \dots, f_{k-1}\rangle = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i.$$

   Тогда $e_k = f_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i \in \langle f_1, \dots f_k\rangle$.
   При этом по предположению индукции $\langle f_1, \dots f_{k-1}\rangle = \langle e_1, \dots e_{k-1}\rangle$.
   Таким образом $\langle f_1, \dots f_k\rangle \subseteq \langle e_1, \dots e_k\rangle$. Покажем включение в обратную сторону.
   Как было показано выше, $f_k = e_k - \tilde{e_k}$, что значит, что $f_k \in \langle e_1, \dots, e_k\rangle$. Так же по предположению индукции $\langle f_1, \dots f_{k-1}\rangle = \langle e_1, \dots e_{k-1}\rangle$, откуда $\langle e_1, \dots e_k\rangle \subseteq \langle f_1, \dots f_k\rangle$.

   Таким образом построенный базис будет иметь вид $f_1 = e_1$, $f_k = e_k - \tilde{e_k} = e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i$.
   Осталось показать, что матрица перехода является унипотентной. Используя выражения f_k через $e_1, \dots e_k$ запишем матрицу $S_{e\to f}$:

$$S_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \dots & -\beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & -\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   Где коэффициент α равен $\alpha = \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)}$, коэффициенты β равны $\beta_i = \frac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)}$.

□

Замечание. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта дает нулевой вектор на некотором шаге тогда и только тогда, когда система $e_1, \dots e_n$ линейно зависима, что позволяет использовать её для проверки линейной независимости системы.

Упражнение. *Пусть по базису* $(a_1, \dots a_k)$ *при помощи процедуры Грама-Шмидта был построен базис* $(f_1, \dots f_k)$. *Доказать, что* $|\Gamma(f_1, \dots f_k)| = |\Gamma(a_1, \dots a_k)|$.

Идея доказательства. Вытекает из формулы преобразования матрицы Грама при замене базиса и тому, что матрица перехода в алгоритме Грама-Шмидта - унипотентная.

Следствие. $0 \leqslant |\Gamma(a_1, \dots a_k)| \leqslant |a_1|^2 \cdot |a_2|^2 \cdot \ldots |a_k|^2$.

Доказательство. Доказательство вытекает из предыдущего утверждения и того, что при ортогонализации Грама-Шмидта вектора(как ортогональные проекции) не увеличиваются. □

Следствие. Если $U \leqslant V$, $e_1, \dots e_k$ - ортогональный базис в U, то существует ортогональный базис $e_1, \dots e_k, e_{k+1}, \dots e_n$ в V.

Идея доказательства. Дополним $e_1, \dots e_k$ до какого-нибудь базиса в V, после чего ортогонализируем его. Очевидно, метод Грама-Шмидта не испортит первые k векторов.

Замечание. Можно применять алгоритм Грама Шмидта к любой системе векторов, но на каком-то шагу может получиться, что $e_m \in \rangle e_1, \ldots, e_{k-1}\rangle \Longrightarrow \overset{o}{e_m} = f_m = \overline{0}$. Иногда алгоритм Грама Шмидта применяется для определения, является ли система линейно зависимой, так как система линейно зависима тогда и только тогда, когда $\exists m \leqslant n, f_m = \overline{0}$

8.1.3 Ортогональные и унитарные матрицы

Определение 8.17. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $A^T A = E$, откуда так же $AA^T = E$, то есть A^T является обратной.

Пример. Матрица поворота $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Определение 8.18. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется унитарной, если $\overline{A^T} A = E = A\overline{A^T}$, то есть $\overline{A^T}$ - обратная.

Утверждение 8.9. *Пусть V - пространство со скалярным произведением, e - ортонормированный базис в V, f - произвольный базис в V. Тогда матрица перехода $S = S_{e\to f}$ является ортогональной тогда и только тогда, когда f - ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $f(x, y)$ имеет матрицу Γ. Тогда так как e - ортонормированный базис, его матрица Грама является единичной $\Gamma(e) = E$.

Тогда $\Gamma(f) = S^T \cdot \Gamma(e) \cdot \overline{S} = S^T \cdot \overline{S}$. Верна следующая цепочка эквивалентностей:

f - ортонормированный базис $\Leftrightarrow \Gamma(f) = E \Leftrightarrow S^T \cdot \overline{S} = E \Leftrightarrow \overline{S^T} \cdot S = E$. □

Следствие.

1. Множество всех ортогональных матриц в $GL_n(\mathbb{R})$ является подгруппой и называется ортогональной подгруппой, используется обозначение $O_n(\mathbb{R})$.

2. Множество всех унитарных матриц в $GL_n(\mathbb{C})$ является подгруппой и называется унитарной подгруппой, используется обозначение $U_n(\mathbb{C})$.

Доказательство.

Пусть A, B - унитарные матрицы, $A = S_{e\to f}$, $B = S_{f\to g}$. Тогда $A \cdot B = S_{e\to g}$, $A^{-1} = S_{f\to e}$. Таким образом $A \cdot B$ и A^{-1} так же являются унитарными, а значит $U_n(\mathbb{R})$ - группа. □

Замечание. Группа ортогональных матриц является подгруппой унитарных

8.2 Изоморфизм евклидовых (эрмитовых) пространств

Определение 8.19. Пусть V_1, V_2 – евклидовы (эрмитовы) пространства. Тогда $\varphi : V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом, если:

1. φ – изоморфизм линейного пространства V_1 на линейное пространство V_2

2. φ сохраняет скалярное произведение: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \forall x, y \in V$.

Замечание. $\mathfrak{E}$ - ОНБ. $\varphi \underset{\mathfrak{E}}{\longleftrightarrow} A, x^T\overline{y} = (Ax)^T\overline{Ay} = x^T A^T \overline{A} y \Longleftrightarrow A^T\overline{A} = E$

Утверждение 8.10. *Два конечномерные евклидовые (эрмитовые) пространства V_1 и V_2 изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim V_1 = \dim V_2$.

Доказательство. Необходимость очевидна по соответсвующей теореме для линейных пространств. Достаточность: пусть $\dim V_1 = \dim V_2$ и e – ортонормированнй базис в V_1, f – ортонормированный базис в V_2. Тогда можно подобрать такой оператор $\varphi : V_1 \to V_2$, что $V_1 \cong V_2$ (как и в первом семестре), причем все условия сохранятся: $\varphi(e_i) = f_i \forall i$, $\varphi(e\alpha) = f\alpha$, $(x, y) = \alpha^T\overline{\beta} = (\varphi(x), \varphi(y)) = \alpha^T\Gamma\overline{\beta}, \Gamma = E$. □

Теорема 8.6 (Рисс). *Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Тогда соответсвия $a(\in V) \to f_a$, такие что $f_a(x) = (x, a)$. В этом случае $f_a(x) \in V^*$ и обратно, каждый линейный функционал f на V имеет вид f_a для однозначно определенного вектора $a \in V$.*

Доказательство. То, что $f_a \in V^*$ очевидно следует из линейности скалярного произведения $(f \neq 0)$. Теперь пусть $f : V \to \mathbb{R}$ – линейный функционал на V и $\dim\ker f = \dim V - \dim\mathbb{R} = n-1$. Возьмем $U = \ker f$ и ортогональное дополнение $U^\perp$. Пусть e – единичный вектор из $U^\perp$, возьмем $a = f(e)e$. Тогда $f_a(U) = (U, a) = (U, f(e)e) = 0$ и $f_a(e) = (e, a) = (e, f(e)e) = f(e)|e|^2 = f(e)$. Таким образом мы доказали, что f и f_a совпадают на $U, U^\perp$, то есть совпадают на всем пространстве V. Докажем единственность. Пусть $f = f_a = f_b$. $f_a = f_b \iff (x, a) = (x, b)\forall x \in V, (x, a-b) = 0$, подставляя $x = a - b$, получим $(a-b, a-b) = 0 \iff a = b$. □

Замечание. Существует каноническая биекция $\varphi : V \to V^*$, для которой верно: $\varphi(a) = f_a$, причем $\forall f_a, f_b(\neq= 0)(f_a, f_b) = (a, b)$.

Определение 8.20. Определим скалярное произведение в V^* как $f_a, f_b \overset{def}{\equiv} (a, b) \in \mathbb{R}$

Теорема 8.7 (о каноническом изоморфизме евклидова пространства V и сопряженного V^*). *Каноническая биекция $\varphi(a) = f_a$ является изоморфизмом евклидовых пространств.*

Доказательство. Биективность следует из теоремы Рисса, аддитивность: $f_{a+b} = f_a + f_b$, так как $(x, a+b) = (x, a) + (x, b)$, однородность аналогична. Также сохраняется скалярное произведение: $(f_a, f_b) = (\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$. □

Замечание. Эрмитов случай: пусть $f_a(x) = (x, a) \in V^*$, $\varphi : V \to V^*$. Тогда теорема Рисса доказывается (и работает) дословно, но $a = \overline{f(e)}e$. Но в этом случае каноническая биекция φ – антилинейна, поэтому она не будет изоморфизмом и скалярное произведение теперь выглядит так: $(f_a, f_b) = (b, a)$. Отсутсвие изоморфизма доказывает следующая цепочка равенств:

$$f_{\lambda a}(x) = (x, \lambda a) = \overline{\lambda}(x, a) = \overline{\lambda} f_a(x)$$

тогда

$$(f_a, \lambda f_b) = (f_a, f_{\overline{\lambda} b}) = (\overline{\lambda} b, a) = \overline{\lambda}(b, a) = \overline{\lambda}(f_a, f_b)$$

Вывод: $(\varphi(a), \varphi(b)) = (f_a, f_b) = (b, a) = \overline{(a, b)}$. Так как скалярное произведение не сохраняется, то φ – не изоморфизм.
В эрмитовом случае φ называется антиизоморфизмом.

8.2.1 Свойства операции ортогонального дополнения

Пусть $\varphi : V \to V^*$ – изоморфизм для Евклидова пространства и антиизоморфизм для Эрмитова. И пусть $\psi : V^* \to V$, такое что $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = E$. То есть обратные биекции.

Утверждение 8.11. *Пусть $U \subseteq V$, тогда $U^\perp = \psi(U^\circ)$, где U° – аннулятор пространства U в V^*.*

Доказательство. $y \in U^\perp \Leftrightarrow \forall x \in U \hookrightarrow (x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in U f_y(x) = 0 \Leftrightarrow f_y \in U^\circ \Leftrightarrow \psi(f_y) \in \psi(U^\circ)$. Значит, мы доказали, что для любого вектора из ортогонального дополнения его образ принадлежит образу аннулятора, а так как все переходы были равносильны, то $U^\perp = \psi(U^\circ)$. □

Утверждение 8.12. *Свойства ортогонального дополнения:*

1. $(U^\perp)^\perp = U$
2. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

3. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Доказательство. 1. $x \in (U^\perp)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in U^\perp (x, y) = 0$. Но, с другой стороны, $\forall x \in U (x, y) = 0$. Значит, любой вектор из U лежит в $(U^\perp)^\perp$. И из того, что размерности равны, следует равенство пространств: $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$.

2. По утверждению 8.11:

$$(U + W)^\perp = \psi((U + W)^\circ) = \psi(U^\circ \cap W^\circ) = \psi(U^\circ \cap \psi(W^\circ) = U^\perp \cap W^\perp$$

3. 3 пункт вытекает из первых двух. Действительно: $(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = U \cap W$. Применяя к левой и правой части $\perp$ получаем искомое. Или же

□

Замечание. Для Евклидова пространства со скалярным произведением выполняются следующие утверждения: Теорема Пифагора: Если $x \perp y$: $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, откуда $|x| \leqslant |\operatorname{ort}_U x|$ и $x (\in V) = \operatorname{pr}_U x + \operatorname{ort}_U x \Longrightarrow |x|^2 = |\operatorname{pr}_U x|^2 + |\operatorname{ort}_U x|^2$

Определение 8.21.

Формула расстояния от вектора до подпространства: $\rho(U, x) = \inf \rho(x, u) = \inf |x - u|$ - по всем $u \in U$.

Следствие. В процессе ортогонализации Грама-Шмидта длины векторов не увеличиваются.

Доказательство. $f = \operatorname{ort}_{<f_1, \dots, f_n>} e_k \Longrightarrow |f_k| \leqslant |e_k| \forall k$ □

Утверждение 8.13. $\rho(U, x) = |\operatorname{ort}_U x|$

Доказательство. $|x - u| \geqslant | x \overset{\circ}{-} u |$ – из теоремы Пифагора. Тогда $| x \overset{\circ}{-} u | = | \overset{\circ}{x} - \overset{\circ}{u} | = | \overset{\circ}{x} |$, так как $| \overset{\circ}{u} | = 0, u \in U$, если $u = \operatorname{pr}_U x = \tilde{x} \Longrightarrow |x - u| = |x - \tilde{x}| = | \overset{\circ}{x} |$. То есть равенство, а значит и inf достигаются. □

Определение 8.22. Определеим объем системы векторов по индукции:

1. $V_1(x_1) = |x_1|$
2. $V_k(x_1, \dots x_k) = V_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) \rho(x_k, \langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle)$

Следствие. $V_k(x_1, \dots, x_k) \geqslant 0$, причем равенство достигается только когда $\exists i \hookrightarrow \rho(x_k, \langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle) = 0$. Что возможно только когда система $\langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle$ – линейно зависима.

Доказательство. неотрицательность очевидна из определения. Докажем по индукции:

1. k = 1: $|x_1| = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \overline{0}$ – x_1 - ЛЗ
2. для k - 1 верно, то для k : Если $V_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = 0 \Longrightarrow (x_1, \dots, x_{k-1})$ - ЛЗ. Если $\rho(x_k, < x_1, \dots, x_{k-1} >) = 0 \Longleftrightarrow x_k \in < x_1, \dots, x_{k-1} > \Longrightarrow < x_1, \dots, x_k >$ - ЛЗ.

В обратную сторону очевидно из того, что $(x_1, \dots, x_k)$ - ЛЗ и $\exists i : (x_1, \dots, x_{i-1})$ - ЛНЗ, $(x_1, \dots, x_i)$ - ЛЗ, то $x_i \in < x_1, \dots, x_{i-1} > \Longrightarrow \operatorname{ort}_{<x_1, \dots, x_{i-1}>} x_i = 0 \Longrightarrow V(x_1, \dots, x_k) = 0$ □

Теорема 8.8 (о геометрическом свойстве определителя Грама системы векторов). *Если $x_1, \dots, x_k$ – система векторов в пространстве со скалярным произведением, то $(V_k)^2(x_1, \dots, x_k) = |\Gamma(x_1, \dots, x_k)|$*

Доказательство. Если система $x_1, \dots, x_k$ – линейно зависима, то $0 = 0$ – теорема выполняется. Пусть система линейно независима.

1. Покажем, что преобразование Грама-Шмидта не изменяет левую и правую части равенства: для этого возьмем унипотентную матрицу перехода S: $(y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_k)S$, тогда:

$$|\Gamma(y_1, \dots, y_k)| = |S^T \Gamma(x_1, \dots, x_k)S| = |\det S|^2 |\Gamma(x_1, \dots, x_k)| = |\Gamma(x_1, \dots, x_k)|$$

2. Теперь покажем равенство квадратов объемов индукцией по k: при $k = 1$ – очевидно, что $|y_1| = |x_1|$. Теперь пусть $V_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = V_{k-1}(y_1, \dots, y_{k-1})$. По определению объема делаем шаг индукции:

$$\rho(x_k, \langle x_1, \dots, x_{k-1}\rangle) = |\operatorname{ort}_{\langle x_1,\dots,x_{k-1}\rangle} x_k| = |\operatorname{ort}_{\langle x_1,\dots,x_{k-1}\rangle} y_k| = |\operatorname{ort}_{\langle y_1,\dots,y_{k-1}\rangle} y_k| = \rho(y_k, \langle y_1, \dots, y_k\rangle)$$

Это верно из свойств преобразования Грама-Шмидта, $y_k = \operatorname{ort}_{<y_1,\dots,y_{k-1}>} x_k$ и $< x_1, \dots, x_k >=< y_1, \dots, y_k > \forall k$

3. Теперь равенство достаточно доказать для ортонормированного базиса($\rho(y_k, < y_1, \dots, y_{k-1} >) = |y_k|$ по ортонормированности):

$$(V_k)^2(y_1, \dots, y_k) = (V_{k-1})^2(y_1, \dots, y_{k-1})\rho^2(y_k, \langle y_1, \dots, y_{k-1}\rangle) = (V_{k-1})^2(y_1, \dots, y_{k-1})|y_k|^2 =$$
$$\prod_{i=1}^{k}(y_i, y_i) = |\Gamma(y_1, \dots, y_k)|$$

□

Следствие. Если $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - Базис в V и $(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{E} \cdot S$, то $V_n(x_1, \dots, x_n) = |\det S| \cdot V_n(\mathfrak{E})$

Доказательство. $(V_n)^2(x_1, \dots, x_n) = \det \Gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(S^T \Gamma(\mathfrak{E})\overline{S}) = |\det S|^2 \cdot \det \Gamma(\mathfrak{E}) = |\det S|^2 (V_n)^2(\mathfrak{E})$ □

Следствие. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис в V. Тогда если $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)S$. Тогда $V_1(x_1, \dots, x_n) = |\det S| V_n(e_1, \dots, e_n)$

Доказательство.

$$(V_n)^2(x_1, \dots, x_n) = |\Gamma(x_1, \dots, x_n)| = |S^T \Gamma(e_1, \dots, e_n)S| = |\det S|^2 |\Gamma(e_1, \dots, e_n)| = |\det S|^2 (V_n)^2(e_1, \dots, e_n)$$

□

Следствие. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в U, тогда

$$\rho(x, U) = \sqrt{\frac{|\Gamma(x, e_1, \dots, e_k)|}{|\Gamma(e_1, \dots, e_k)|}}$$

Доказательство. Напрямую следует из того, что $\rho(x, U) = \frac{V_{k+1}(x, e_1, \dots, e_k)}{V_k(e_1, \dots, e_k)}$ □

8.3 Ориентация пространства

Определение 8.23. В пространстве V - евклидово пространство размерности n задана оринетация, если в V в фикисированном базисе $\mathfrak{E}$, который мы назовем положительно ориентированным.

Определение 8.24. $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} \cdot S, S = S_{\mathfrak{E} \to \mathfrak{F}}$. Скажем, что $\mathfrak{F}$ положительно ориентирован, если $\det S > 0$ и отрицательно, если $\det S < 0$

Определение 8.25. Параллелепипедом, порожденным векторами $x_1, \ldots, x_n$ называется множество $P(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i | 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$

Определение 8.26. Ориентированный обьем n-мерного параллелепипеда P это $V_{or}(P(x_1, \ldots, x_n)) = \pm V_n(x_1, \ldots, x_n)$, с плюсом, если $x_1, \ldots, x_n$ - положительно ориентированный и с минусом, если отрицательно.

Замечание. Пусть $\mathfrak{E}$ - исходный базис V, положительно ориентированный, тогда $V_{or}(P(x_1, \ldots, x_n)) = \det S \cdot V_{or}(P(e_1, \ldots, e_n))$, что очевидно из предыдуших определений.

9 Сопряженные операторы

Замечание. Далее: V – пространство со скалярным произведением, $\theta = 2$ в Евклидовом пространстве и $\theta = 1{,}5$ в Эрмитовом пространстве. $B_\theta(V)$ – множество линейных функций на V, $\varphi \in L(V)$

Утверждение 9.1. *Пусть $l_\varphi(x, y) = (\varphi(x), y)$ – θ - линейная функция.*

Доказательство. Линейность по первому аргументу очевидно из линейности φ и скалярного произведения, а по второму из скалярного произведения в эрмитовом/евклидовом случае □

Определение 9.1. Теперь пусть $r_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y))$ – θ - линейная функция.

Утверждение 9.2. *Если e – ортонормированный базис в V и φ в нем имеет вид матрицы A, то l_φ имеет вид матрицы A^T в этом же базисе. А $r_\varphi \underset{\mathfrak{E}}{\longleftrightarrow} \overline{A}$*

Доказательство. x имеет координаты α, y имеет координаты β, тогда $(x, y) = x^T B \overline{y}$. С другой стороны, $l_\varphi(x, y) = (A\alpha, \beta) = (A\alpha)^T \beta = \alpha^T A^T \beta$, откуда $B = A^T$. Аналогично доказывается, что $r_\varphi(x,y) = (\alpha, A\beta) = \alpha^T \overline{A\beta} = \alpha^T \overline{A} \cdot \overline{\beta}$ □

Следствие. Соответствие $\varphi \hookrightarrow l_\varphi$ является линейной биекцией $\mathcal{L}(V)$ на $B_\theta(V)$

Доказательство. Достаточно доказать аддитивность: $l_{\varphi+\psi}(x, y) = ((\varphi + \psi)(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) = l_\varphi(x, y) + l_\psi(x, y)$ □

Следствие. Соответсвие $\varphi \hookrightarrow r_\varphi$ является антилинейной биекцией $\mathcal{L}(V) \to B_\theta(V)$.

Доказательство. $r_{\lambda\varphi}(x, y) = (x, \lambda\varphi(y)) = \overline{\lambda}(x, \varphi(y)) = \overline{\lambda} r_\varphi(x, y)$ □

Определение 9.2. Оператор φ^* называется сопряженным к оператору φ, если $l_\varphi = r_{\varphi^*}$, то есть они соответствуют одному и тому же элементу из $B_\theta(V)$

Определение 9.3. То же самое, но языком попроще: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \forall x, y \in V$.

Следствие. Если e – ортонормированный базис в V, $\varphi \leftrightarrow A$, то $\varphi^* \leftrightarrow A^* = \overline{A^T}$

Доказательство. $\varphi \leftrightarrow A$ тогда по утверждению 9.2 выше $l_\varphi \leftrightarrow A^T$ по определению $r_{\varphi^*} \leftrightarrow A^T$ и $\varphi^* \leftrightarrow \overline{A^T}$ □

Следствие. Для каждого $\varphi \in L(V)$ сопряженный оператор φ^* существует и единственный.

Доказательство. $\varphi \to \varphi^*$, то есть $A \to \overline{A}^T$. Так как матрица $\overline{A}^T$ определена однозначно по A, то φ^* определяется однозначно по φ. Или же $L(V)(\varphi) \overset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} B_\theta(V)(l_\varphi = r_{\varphi^*}) \overset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} L(V)(\varphi^*)$ □

Следствие. $\operatorname{rk}\varphi = \operatorname{rk}\varphi^*$. Так как операции сопряжения и транспонирования не меняют ранг.

Следствие. $\overline{\chi_\varphi(\lambda)} = \chi_{\varphi^*}(\overline{\lambda})$

Доказательство. $\chi_{\varphi^*}(\overline{\lambda}) = \det(\overline{A^T} - \overline{\lambda}E) = \det\overline{(A^T - \lambda E)} = \overline{(\det(A - \lambda E)} = \overline{\chi_\varphi(\lambda)}$ □

Следствие. Если λ – собственное значение оператора φ, то $\overline{\lambda}$ – собственное значение оператора φ^*.

Утверждение 9.3. *Пусть U - инвариантное относительно φ пространство. Тогда $U^\perp$ – инвариантно относительно φ^*. Очевидно из предыдущего следствия.*

Доказательство. Пусть x – произвольный вектор U, y – произвольный вектор из $U^\perp$. Тогда по определению $(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0$. Значит, и $\varphi^*(y) \in U^\perp$, то есть инвариантность выполняется. □

9.1 Свойства операции сопряжения

Утверждение 9.4.

1. $\varphi^{**} = \varphi$
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$
3. $(\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$
4. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Доказательство. Доказательство вытекает из свойств матриц соответсвующих операторов. Можно доказывать из определения. Например для пункта 4 $(\varphi{\cdot}\psi(x), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) = (x, \psi^*\varphi^*(y)) = (x, (\psi \cdot \varphi)^* y)$ □

9.2 Самосопряженный оператор

Определение 9.4. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ назывется самосопряженным, если $\varphi^* = \varphi$ или $\forall x, y \in V \hookrightarrow (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

Следствие. Если e – ортонормированный базис в V, то φ – самосопряженный тогда и только тогда, когда $A = A^*$ (в Эрмитовом пространстве $A = \overline{A^T}$, в Евклидовом: $A = A^T$ соответственно).

Следствие. φ – самосопряженный в V, U – инвариантно относительно φ. Тогда $U^\perp$ инвариантно относительно φ.

Замечание. Запасы инвариантных подпространств у φ и φ^* совпадает.

Теорема 9.1 (Фредгольм).

1. $\ker\varphi^* = (Im\varphi)^\perp$
2. $Im\varphi^* = (\ker\varphi^*)^\perp$

Доказательство. Из первого пункта очевидно следует второй(применим ортогональное дополнение и заменой φ на φ^*), поэтому докажем только первое утверждение теоремы.
Пусть $y \in \ker\varphi^*$ или $\varphi^*(y) = 0$. Тогда $\forall x \in V \hookrightarrow (x, \varphi^*(y)) = 0$. Отсюда по определению вытекает, что $(\varphi(x), y) = 0$, поэтому $y \perp \operatorname{Im}\varphi \implies y \in (Im\varphi)^\perp$. Мы доказали включение в одну сторону, тогда докажем, что равны размерности, откуда будут равны пространства: $\dim(\ker\varphi^*) = \dim V - \dim(Im\varphi^*) = \dim V - \operatorname{rk}\varphi^* = \dim V - \operatorname{rk}\varphi = \dim V - \dim(Im\varphi) = \dim(Im\varphi)^\perp$ из теоремы о ранге и дефекте линейного оператора. □

9.3 Инвариантные подпространства малых размерностей

Утверждение 9.5. *$\varphi \in \mathcal{L}(V)$, V над $\mathbb{C}$. Тогда у φ обязательно существует одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Вытекает из того, что характеристический многочлен раскладывается на линейные множетели(достаточно линейную оболочку собственного вектора) $\square$

Замечание. Доказанное не означает, что пространство V раскладывается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств. Пример - Жорданова нормальная форма.

Теорема 9.2. *Если V - линейное пространство над R, то у φ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространсто.*

Доказательство. $\chi_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)\dots p_n(\lambda), p_i(\lambda)$ - неприводимый над R. $0 = \chi_\varphi(\varphi)$, то есть $\exists i : p_i(\varphi)$ - Вырожденный. В линейном случае: $p_i(t) = a(t-\lambda), p_i(\varphi) = a(\varphi - \lambda E) = 0 \Longrightarrow \exists x \neq 0 : p_i(\varphi)(x) = 0 \Longrightarrow < x >$ Образует инвариантное подпространство. Квадратичный случай: Пусть $p_i(t) = at^2 + bt + c = 0$ - неприводимый. Тогда $\exists x \neq 0 : p_i(\varphi)(x) = a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + cx = 0$. Возьмем $U =< x, \varphi(x) >$. Покажем, что оно инвариантное. Для этого достаточно показать, что $\varphi^2(x) = \dfrac{1}{a}(-b\varphi(x) - c) \in < x, \varphi(x) >= U$. То есть U - инвариантное относительно φ пространство. Проверим, что $\dim U = 2$ от противного. Пусть $\dim U = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = \lambda x \Longrightarrow p_i(\varphi)(x) = (a\lambda^2 + b\lambda + c)x = 0 \Longrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, что невозможно, так как $p_i(t)$ неприводимый над R. $\square$

ЭКВИВАЛЕТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ИЗ 2023 ГОДА.

Утверждение 9.6. *Рассмотрим характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$, тогда существует такое комплексное λ_0, что $\chi_\varphi(\lambda_0) = 0$. Следовательно, λ_0 – собственное значение, для которого существует собственный вектор x, на котором и строится инвариантное подпространство $U = \langle x \rangle$.*

Доказательство. Представим характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda), \dots, p_s(\lambda)$, $\deg p_k(\lambda) \leqslant 2$, причем если $\deg p_k(\lambda) = 2$, то $D < 0$. По теореме Гамильтона-Кэли верно, что $\chi_\varphi(\varphi) = p_1(\varphi), \dots, p_s(\varphi) = 0$. Значит, среди многочленом существует вырожденный. Рассмотрим две ситуации степени этого многочлена:

1. $\deg p_k(\lambda) = 1$,
   $p_k(\lambda) = a(\lambda - \lambda_0)$, где $a \neq 0$. Тогда $p_k(\varphi) = a(\varphi - \lambda_0 E)$ и из-за вырожденности существует $x \neq 0 \hookrightarrow (\varphi - \lambda_0 E)(x) = 0$.

2. $\deg p_k(\lambda) = 2$
   По условию (по предположению) $p_k(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, a \neq 0, D < 0$. Аналогично предыдущему пункту существует такой ненулевой вектор, что $(a\varphi^2 + b\varphi + cE)(x) = \overline{0}$. Тогда рассмотрим инвариантное подпространство $U = \langle x, \varphi(x) \rangle$ и докажем, что его размерность ровно 2. В противном случае размерность меньше и существует такой вектор, что $\varphi(x) = \lambda x$, то есть $(a\lambda^2 + b\lambda + c)(x) = 0$, откуда $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, то есть λ – корень $p_k(\varphi)$ – противоречит с отрицательностью дискриминанта.

$\square$

9.4 Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением

Напоминание. Пространство со скалярным произведением называется Евклидовым в случае действительных чисел и Эрмитовым в случае комплексных чисел.

Теорема 9.3 (Основная теореиа о самосопряженных операторах). *Пусть V - пространство со скалярным произведением и $V \in \mathcal{L}(V)$. Тогда оператор φ самосопряженный тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором φ принимает диагональный вид с собственными значениями на главной диагонали.*

Доказательство. 1. Достаточность. Пусть существует такой ортонормированный базис, что A_φ имеет вид $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Покажем, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$.

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(\sum_i x_i e_i), \sum_j y_j e_j) = (\sum_i x_i \varphi(e_i), \sum_j y_j e_j) = \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} \lambda_i (e_i, e_j) = \sum_i \lambda_i x_i \overline{y_i}$$
$$(x, \varphi(y)) = (\sum_i x_i e_i, \varphi(\sum_j y_j e_j)) = (\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j \varphi(e_j)) = \sum_i \sum_j x_i \lambda_j \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_i \lambda_i x_i \overline{y_i}$$

2. Покажем, что все собственные значения самосопряженного оператора φ вещественные. Для этого рассмотрим два случая:

   (a) Эрмитово пространство:
   Пусть x - собственный вектор в V, λ - соответствующее ему собственное значение. Тогда $(\lambda x, x) = \lambda(x, x) = (\varphi(x), x) = (x, \varphi(x)) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$. Значит, $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

   (b) Евклидово пространство:
   Пусть e - ортонормированный базис. Тогда $A = A^* = A^T = \overline{A^T}$. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартным базисом и стандартным скалярным произведением. Определим оператор ψ такой, что $\psi \leftrightarrow A$ (эрмитова матрица).Тогда ψ - самосопряженный, а значит, по доказанному выше все собственные значения ψ - вещественные и он раскладывается в произведение $\chi_\psi(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (-1)^n (\lambda - \lambda_i)$. Но тогда $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (-1)^n (\lambda - \lambda_i)$, а значит, φ линейно факторизуем и все собственные знаечния вещественные.

Покажем теперь, что существует ортонормированный базис e, в котором A_φ диагонализуем. Индукция по размерности пространтсва n:

   (a) База $n = 1$: $|e_1| = 1$ – ортонормированный.

   (b) По предположению верно для $V : \dim V < n$. Переход. Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - собственное значение оператора φ, V_{λ_1} – собственное подпространство. Тогда $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_1}^\perp$. Для собственного подпространства рассмотрим базис e_1(достаточно взять один собственный вектор), в котором оператор сужения $\varphi|_{V_{\lambda_1}}$ имеет диагональный вид со значением λ_1. Для ортогонального дополнения по предположению индукции существует базис e_2, в котором выполняются условия. Тогда для V достаточно рассмотреть базис $e = e_1 \sqcup e_2$.

□

Замечание. Если φ самосопряженный оператор в V то $\forall x \in V$ верно $(\varphi(x), x) \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

$$(\varphi(x), x) = (x, \varphi(x)) = \overline{(\varphi(x), x)}$$
$$(\varphi(x), x) = \sum_i^n \lambda_i x_i \overline{x_i} = \sum_i^n \lambda_i |x_i|^2 \in \mathbb{R}.$$

□

Определение 9.5. Самосопряженный оператор $\varphi : V \to V$ называется положительно определенным если $\forall x \neq 0$ верно $(\varphi(x), x) > 0$. Пишут $[\varphi > 0]$.

Следствие. Оператор φ положительно определен тогда и только тогда, когда все его собственные значения λ_i положительны.

Доказательство. Пусть φ положительно определен. Предположим противное: пусть существует $\lambda \leqslant 0$ для собственного вектора x. Тогда $(\varphi(x), x) = \lambda(x, x) \leqslant 0$. Противоречие. В обратную сторону, пусть все собственные значения λ_i положительны. Тогда $(\varphi(x), x) = \sum_i \lambda_i |x_i|^2 > 0$ (в каноническом базисе). Таким образом, φ положительно определен. □

Определение 9.6. Изометрия - операция, сохраняющая длину векторов. В таком случае оператор называют изометричным.

Утверждение 9.7. *Пусть λ_1, λ_2 - различные собственные значения самосопряженного оператора φ. Тогда $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.*

Доказательство. Пусть $x \in V_{\lambda_1}$, $y \in V_{\lambda_2}$. Тогда $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$, а значит $(\lambda_1 x, y) = (x, \lambda_2 y)$, то есть $\lambda_1(x, y) = \overline{\lambda_2}(x, y) = \lambda_2(x, y)$. Отсюда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0 \Rrightarrow x \perp y$ □

10 Ортогональные и унитарные операторы

Определение 10.1. Пусть V - пространство со скалярным произведением. Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется ортогональным (если V - евклидово) и унитарным (если V - эрмитово) если φ сохраняет скалярное произведение:

$$\forall x, y \in V \hookrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y).$$

Замечание. Существует терминология, в которой эрмитовы пространства называются унитарными. Название унитарных операторов произошло от этого названия эрмитовых пространств.

Утверждение 10.1. *$\varphi \in \mathcal{L}(V)$ является ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, когда φ сохраняет длины векторов, то есть $|\varphi(x)| = |x|$ (φ - изометрический),$[\rho(x, y) = |x - y|]$.*

Доказательство.

1. Необходимость. По определению $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x,x)$, а значит, $|\varphi(x)| = |x|$.
2. Достаточность. Пусть $f(x,y)$ - скалярное произведение - θ-линейная симметричная (эрмитова симметричная) функция. Тогда по изоморфизму можно выбрать $q(x) = |x|^2$ - квадратичную или эрмитову квадратичную функцию Тогда φ сохраняет $q(x)$ и сохраняет $f(x, y) = (x, y)$. φ также сохраняет скалярное произведение, так как (в евклидовом случае): $[(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))]$

□

Утверждение 10.2. *Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ является ортогональным (унитарным). Тогда $\varphi^*\varphi = \varepsilon$ (или $\varphi^* = \varphi^{-1}$).*

Доказательство. По определению $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$. Тогда $(\varphi^*\varphi(x), y) = (x, y)$. Тогда $\varphi^*\varphi(x) = x$ для всех x, а значит, $\varphi^*\varphi = \varepsilon$. □

Следствие. Если φ - ортогональный (унитарный) оператор, то $|\det\varphi| = 1$.

Доказательство. e – ортонормированный базис в V и так как $\varphi \leftrightarrow A\,\varphi^* \leftrightarrow A^{-1}\,\overline{A^T}A = \varepsilon\,\overline{\det A}\det A = 1\,|\det A|^2 = 1$. □

Утверждение 10.3. *$\varphi \in \mathcal{L}(V)$ является ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе e пространтсва V матрица A_φ является ортогональной (унитарной)(доказательство просто по определению).*

Доказательство. $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \iff x^T A^T \overline{A}\overline{y} = x^T\overline{y} \iff A^T\overline{A} = E \iff A^*A = E$, в евклидовом случае $A^T \cdot A = E$ □

Утверждение 10.4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, e - ортонормированный базис в V. Тогда φ ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда $\varphi(e)$ - ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\varphi(e) = e' = eA$. Тогда A - матрица перехода от базиса e к e'. При этом A - матрица оператора φ в базисе e. По условию $\Gamma(e) = E$. Тогда

$$\Gamma(e') = \Gamma(\varphi(e)) = (A^T\Gamma(e)\overline{A}) = A^T\overline{A} = E$$

Таким образом, e' - ортонормированный базис. $\overline{A^T}A = E$ тогда и только тогда, когда φ – ортогональный (унитарный). □

Утверждение 10.5. *Пусть φ – ортогональный (унитраный) оператор в V со скалярным произведением, U инвариантно относительно φ. Тогда $U^\perp$ - инвариантно относительно φ.*

Доказательство. Пусть $\varphi|_U : U \to U$. Тогда $|\det\varphi|_U| = 1 \Longrightarrow \det\varphi \neq 0$. Тогда $\forall x \in U \exists x' \in U : x = \varphi(x')$.
Пусть $x \in U$, $y \in U^\perp$. Покажем, что $\varphi(y) \in U^\perp$.

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0 \mapsto \varphi(y) \in U^\perp$$

□

Теорема 10.1. *Пусть V - эрмитово пространство, φ - унитарный оператор в V. Тогда существует ортонормированный базис e в V, в котором φ диагонализуем с собственными значениями на главной диагонали, причем $|\lambda_i| = 1$. $\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Докажем индукцией по $\dim V$.

1. База $\dim V = 1$. Пусть e - единичный вектор, $\varphi(e) = \lambda e$. Тогда:

$$(e, e) = (\varphi(e), \varphi(e)) = (\lambda e, \lambda e) = |\lambda|^2(e, e),$$

   откуда $|\lambda|^2 = 1$, а значит, $|\lambda| = 1$.

2. Пусть для подпространств V размерности меньше n утверждение верно. Возьмем λ_1 - произвольное собственное значение оператора φ, $|\lambda_1| = 1$. Пусть $U = V_{\lambda_1}$ с базисом $\mathfrak{E}_1$. Если $U = V$, то доказано, иначе $V = U \oplus U^\perp$. Для ортогонального дополнения утверждение верно по индукции(базис $\mathfrak{E}_2$). Тогда возьмем базис $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \sqcup \mathfrak{E}_2$ - искомый

$\square$

Замечание. Обратное тоже верно. Действительно, возьмем в этом базисе матрицу А и умножим на A^* и получим Е. То есть φ унитарный.

10.1 Канонический вид ортогонального оператора

Пример.

1. Тривиальный оператор ε.

2. Оператор $R(\alpha)$ поворота на угол α. $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3. (Ортогональный) симметричный относительно подпространтсва оператор:
Пусть $V = U \oplus U^\perp$, $x = x_1 + x_2$, где $x \in V$, $x_1 \in U$, $x_2 \in U^\perp$. Тогда $\varphi(x) = x_1 - x_2$.

Теорема 10.2 (о каноническом виде ортогонального оператора)**.** *Пусть V - евклидово пространство, $\varphi : V \to V$ – ортогональный оператор. Тогда существует ортонормированный базис e, в котором матрица φ состоит из матриц поворота и ± 1 на главной диагонали.*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{R(\alpha_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{R(\alpha_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Доказательство. φ имеет в V одномерные или двумерные инвариантные подпространства. Пусть U - одномерное подпространство, или, если таких нет, двумерное инвариантное подпространство.

1. Пусть $\dim U = 1$, $e \in U$, $|e| = 1$. Покажем, что в таком случае модуль λ равен единице. В U верно $\varphi(e) = \lambda e$. Тогда $(e, e) = (\varphi(e), \varphi(e)) = \lambda^2(e, e)$. Отсюда $\lambda^2 = 1$, а значит $\lambda = \pm 1$.

2. Пусть $\dim V = 2$, (e_1, e_2) - ортонормированный базис в U. Тогда $A^T A = E$. Найдем вид A. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим следующую систему уравнений:

$$a^2 + c^2 = 1(1)$$
$$b^2 + d^2 = 1(2)$$
$$ab + cd = 0(3)$$

Положим

$$a = \cos(\alpha), c = \sin(\alpha), b = -\sin(\beta), d = \cos(\beta)$$

Условия (1) и (2) очевидно выполняются. Проверим (3) и найдем при помощи него связь между углами α и β.

$$-\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) = 0$$
$$\sin(\alpha - \beta) = 0 \hookrightarrow \alpha - \beta = \pi k, k \in Z$$

Рассмотрим случаи:

(a) $\alpha = \beta$ – по модулю 2π.

(b) $\alpha = \beta + \pi$ – по модулю 2π.

(c) Покажем, что $\alpha + \beta = \pi$ быть не может:

$$\cos(\beta) = \cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$$
$$\sin(\beta) = \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha) \Rrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Где $A^T = A$ и получаем два собственных вектора: $v_1 = (\cos(\frac{\alpha}{2}), \sin(\frac{\alpha}{2}))^T$, $v_{-1} = (-\sin(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2}))^T$ – это противоречит с тем, что нет одномерных инвариантных подпространств.

Теперь пространство V раскладывается в прямую сумму $V = U \oplus U^{\perp}$. По предположению индукции для ортогонального дополнения U теорема верна. Тогда она верна и для всего V.

□

Замечание. Пусть V пространство над $\mathbb{C}$, $\dim V = 1$. Тогда:

$$\varphi(z) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)z = re^{i\varphi}z$$
$$r(z) = rz$$
$$(rz_1, z_2) = (z_1, rz_2)$$
$$.$$

Где r – самосопряженный оператор в V. Теперь рассмотрим унитарный оператор $e^{i\varphi}(z) = e^{i\varphi}z$, $(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2) = e^{i\varphi}e^{-i\varphi}(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$. В итоге $\varphi = r \circ e^{i\varphi}$

Теорема 10.3 (О полярном разложении линейного оператора)**.** *Пусть V - пространство со скалярным произведением, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда существуют линейные операторы ψ и $\theta \in \mathcal{L}(V)$ такие, что $\varphi = \psi\theta$, где ψ - самосопряженный оператор с неотрицательными собственными значениями, а θ - ортогональный (унитарный оператор).*

Доказательство. Покажем при помощи конструктивного построения ψ и θ.

1. Рассмотрим вспомогательный оператор $\nu = \varphi^*\varphi$. Тогда

$$\nu^* = (\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi = \nu.$$

Таким образом ν - самосопряженный оператор. Пусть e - ортонормированный базис из собственных векторов оператора ν: $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$ и $\nu(e_i) = \lambda_i e_i$. Построенный базис называется первым сингулярным базисом φ.

2. Покажем, что у ν все собственные значения $\lambda_i \geqslant 0$:

$$0 \leqslant (\varphi(e_i), \varphi(e_i)) = (\varphi^*\varphi(e_i), e_i) = (\lambda_i e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i).$$

Таким образом (так как (e_i, e_i)) $\lambda_i \geqslant 0$ для всех i.

3. Пусть $f_i = \varphi(e_i)$. Покажем, что $f_i \perp f_j$ при $i \neq j$:

$$(f_i, f_j) = (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\varphi^*\varphi(e_i), e_j) = (\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = 0.$$

Для $i = j$ получим $(f_i, f_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i$, откуда $|f_i| = \sqrt{\lambda_i}$.

4. Перенумерация векторов базиса e. Переупорядочим векторы базиса e так, чтобы

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n.$$

Пусть ненулевыми будут первые k собственных значений, а $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

5. Построим второй сингулярный базис φ. Положим $g_i = \frac{f_i}{|f_i|} = \frac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, если $i \leqslant k$. Дополним его до ортонормированного базиса произвольным образом: $\langle g_1, g_2, \ldots g_k\rangle^{\perp} = \langle f_1, f_2, \ldots f_k\rangle^{\perp}$. Полученный базис $g = (g_1, \ldots, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_n)$ называется вторым сингулярным базисом оператора φ.

6. Заметим, что $f_i = \sqrt{\lambda_i} g_i$ для всех i, в том числе для больших, чем k, так как $0 = 0$. При этом e - ортонормированный базис, g - тоже ортонормированный базис. Выберем $\theta(e_i) = g_i$ - ортогональный (унитарный) оператор по 10.4. Выберем $\psi(g_i) = f_i = \sqrt{\lambda_i} g_i$. оператор ψ в базисе g будет иметь диагональный вид $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ а значит, по теореме 9.3 оператор ψ – самосопряженный.

7. Тогда получаем, что

$$\psi\theta(e_i) = \psi(g_i) = f_i \hookrightarrow \forall i \leqslant n$$
$$\varphi(e_i) = f_i \forall i \leqslant n \Rightarrow \varphi = \psi\theta$$

□

Следствие. Пусть дополнительно к условиям теоремы φ невыроженный оператор. Тогда существуют такие $\psi, \theta \in \mathcal{L}(V)$, что ψ – положительно определен, θ – ортогональный (унитарный) оператор.

Доказательство. По условию $\det \varphi \neq 0$. Покажем от противного. Пусть у оператора ψ есть нулевое собственное значение $\lambda_i = 0$. Тогда $\det \psi = 0$. Но тогда $\det \varphi = 0$ так как $\varphi = \psi\theta$. Противоречие. □

Следствие. Если дополнительно к условиям теоремы φ - невырожденный оператор, а ψ - положительно опердеЛенный и θ ортогональный (унитарный), то это найденное разложение единственно.

Доказательство. Пусть $\varphi = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$. Покажем сначала единственность ψ:

$$\varphi\varphi^* = (\psi_1\theta_1)(\psi_1\theta_1)^* = \psi_1\theta_1(\theta_1)^*(\psi_1)^* = \psi_1^2, \theta_1(\theta_1)^* = \varepsilon$$

Последний переход был сделан по утверждению 10.2. Тогда $(\psi_1)^2 = (\psi_2)^2 = S$ - положительно определенный оператор. Проверим равенство операторов $\psi_1 = \psi_2$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ - собственные значения ψ_1, $W_1, W_2, \ldots W_k$ - собственные подпространства ψ_1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ - собственные значения оператора S, и соответственно $V_1, V_2, \ldots V_k$ - его собственные подпространства. Тогда:

$$\psi_1|_{W_i} = \mu_1\varepsilon \Rightarrow (\psi_1)^2|_{W_i} = S|_{W_i} = (\mu_i)^2\varepsilon.$$

Тогда существует такое j, что $(\mu_i)^2 = \lambda_j, \psi_1|_{V_i} = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon, \psi_2|_{V_i} = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon \Rightarrow W_i = V_i$. Тогда $\psi_1 = \psi_2$, так как по сути имеют совпадающие наборы собственных подпространств. Отсюда же следует единственность θ. □

10.2 Нормальные операторы

V - эрмитово пространство.

Определение 10.2. Оператор $\varphi \in L(V)$ называется нормальным, если выполняется равенство $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi$

Теорема 10.4 (О нормальном операторе). *Следующие условия на оператор φ эквивалентны(V - эрмитово пространство)*

1. *φ нормальный*
2. *В пространстве V $\exists$ ОНБ, в котором φ имеет диагональный вид*
3. *$\psi \cdot \theta = \theta \cdot \psi = \varphi, \psi$ - самосопряженный оператор с неотрицательными значениями, θ - унитарный оператор.*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$. $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi$. Если $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Далее индукция по размерности V. $(\lambda e)^* = \overline{\lambda} e, (\varphi - \lambda e)^* = \varphi^* - \overline{\lambda} e$. Рассмотрим выражение $((\varphi - \lambda e)x, (\varphi - \lambda e)x) = (x, (\varphi^* - \overline{\lambda} e)(\varphi - \lambda e)x)$. Из нормальности φ получаем, что $(x, (\varphi^* - \overline{\lambda} e)(\varphi - \lambda e)x) = (x, (\varphi^* - \overline{\lambda} e)(\varphi - \lambda e)x) = ((\varphi^* - \overline{\lambda} e)x, (\varphi^* - \overline{\lambda} e)x)$. Если x - собственный для φ с собственным значением λ, то x - собственный вектор для φ^* с собственным значением $\overline{\lambda}$. То есть $V_\lambda^\varphi \subset V_\lambda^{\varphi^*} \subset V_\lambda^{\varphi^{**}} = V_\lambda^\varphi \Longrightarrow V_\lambda^\varphi = V_\lambda^{\varphi^*}$. Пусть λ - собственное значение для φ. Если $V_\lambda^\varphi = V$, то доказывать нечего(можно выбрать любой ОНБ). Иначе $V = V_\lambda^\varphi \oplus (V_\lambda^\varphi)^\perp$. Пространство V_λ^φ инвариантно для φ, φ^*, $\mathfrak{E}_1$ - ОНБ в V_λ^φ, по утверждению 9.3 $(V_\lambda^\varphi)^\perp$ инвариантно к φ^* как ортогональное дополнение инвариантного пространства, dозьмем $\mathfrak{E}_2$ в нем(по предположению индукции), тогда $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \sqcup \mathfrak{E}_2$ - откуда вытекает искомое.
$2 \Longrightarrow 3$. Пусть $\mathfrak{E}$ - диагональный базис. $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}|z|, |z|$ - самосопряженный оператор, $e^{i\varphi}$ - Унитарный оператор. $\varphi = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{pmatrix}$ полярное разложение $= \begin{pmatrix} |z_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |z_2| & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & |z_n| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$ - и они коммутируют.
$3 \Longrightarrow 1$. Известно, что $\varphi = \psi \cdot \theta = \theta \cdot \psi$. $\varphi \cdot \varphi^* = \psi \cdot \theta(\psi \cdot \theta)^* = \psi \cdot \theta \cdot \theta^* \cdot \psi^* = \psi^2 = \psi^* \cdot \psi = \psi^* \cdot \theta^* \cdot \theta \cdot \psi = (\theta \cdot \psi)^*(\theta \cdot \psi) = \varphi^* \cdot \varphi$ из свойств самосопряженных и унитарных операторов ☐

10.3 Приведение квадратичной (эрмитово квадратичной) функции к диагональному виду в ОНБ

Теорема 10.5. *Пусть V - евклидово (эрмитово) пространство, $q(x)$ - квадратичная форма в V. Тогда существует ортонормированный базис в V, в котором матрица q диагональна.*

Доказательство. По $q(x)$ можно восстановить полярную функцию $f(x, y)$, которая θ симметрична в случае евклидова пространства или эрмитово симметрична в случае эрмитова пространства. По $f(x, y)$ можно восстановить оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ такой, что $f(x, y) = (\varphi(x), y)$. Покажем, что φ - самосопряженный.

1. Евклидов случай:

$$(\varphi(x), y) = f(x, y) = f(y, x) = (\varphi(y), x) = (x, \varphi(y)).$$

2. Эрмитов случай:

$$(\varphi(x), y) = f(x, y) = \overline{f(y, x)} = \overline{\varphi(y), x} = (x, \varphi(y))$$

Тогда по предыдущим теоремам существует базис, в котором матрица φ диагональна. По основной теореме $\exists$ ОНБ, в котором φ имеет диагональную матрицу с вещественными собственными значениями на главной диагонали. Если A - матрица φ, то A^T - матрица $f(x, y), q(x)$ - откуда и следует искомое. $\square$

10.4 Одновременная диагонализация пары квадратичных(эримтово квадратичных) функций

Теорема 10.6 (Об одновременном приведении двух квадратичных (эрмитовых квадратичных) форм, одна из которых положительно определена, к диагональному виду)**.** *Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или над $\mathbb{C}$), q_1, q_2 - (эрмитовы) квадратичные формы на V и пусть q_2 - положительно опеределена. Тогда в V существует базис e, в котором обе формы одновременно приводятся к диагональному виду.*

Доказательство. Пусть $f(x, y)$ - полярная функция, соответствующая $q_1(x)$, $g(x, y)$ - полярная функция, соответствующая $q_2(x)$ ($[f(x, y) = \frac{1}{4}(q_1(x + y) = q_1(x - y)]$). Тогда $g(x, y)$ удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Примем её за скалярное произведение: $(x, y) = g(x, y)$. Тогда по теореме 10.5 существует ортонормированный базис e относительно скалярного произведения g, в котором $f(x, y)$ диагональна. Матрица Грама для ортонормированного базиса e – единичная. Она же равна матрице скалярного произведения $g(x, y)$. Получаем, что обе матрицы с помощью перехода к базису e стали единичными.

$$q_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2, q_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$\square$

Замечание. Положительная определенность одной из форма существенна. Например, $V = \mathbb{R}^2, q_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_1, q_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2$ - обе неопределенные(несложно проверить, что и вторая форма также дает как положительные, так и отрицательные значения). От противного. Пусть $\exists \mathfrak{F}$, в котором q_1, q_2 - диагональные, тогда $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1' \end{pmatrix} \longleftrightarrow q_1, B_2 = \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2' \end{pmatrix} \longleftrightarrow q_2$. У изначальных форм $\operatorname{rk} q_1 = \operatorname{rk} q_2 = 2 \Longrightarrow \operatorname{rk} B_1 = 2, \operatorname{rk} B_2 = 2$. Тогда $\exists \alpha . \beta$ не равные 0, что $\alpha B_1 + \beta B_2$ - вырождена(например можно занулить угол).Тогда $\alpha B_1 + \beta B_2 = S^T(\alpha A_1 + \beta A_2)S$. Перейдем к определителям, тогда $0 = \det(\alpha B_1 + \beta B_2) = \det S^T \cdot \det(\alpha A_1 + \beta A_2) \cdot \det S = (\det S)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = (\det S)^2(-\alpha^2 - \beta^2) < 0$. Противоречие

11 Тензоры

Пусть V - конечномерное линейное пространство над F, $\dim V = n$.

Определение 11.1. Тензором $(p, q), p, q \in \mathbb{Z}_+$ называется полилинейная функция

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \to F$$

. T - p раз контрвариантен и q раз ковариантен. Обозначение множества всех таких функций $T_q^p, T_q^p(V)$ - линейные пространства над полем F(несложно показать)

Пример. 1. $(0,0)$ - скаляр. $T_0^0 = F$

2. $(0,1) : T : V \to F \Longrightarrow T \in V^*$ - линейный функционал. $T_1^0 = V^*$

3. $(1,0) : T : V^* \to F \Longrightarrow T \in V^{**} \cong V$. Тогда можем сказать, что $T_0^1 = V$

4. $(0,2) : T : V \times V \to F, T \in B(V)$ - билинейный оператор. $T_2^0 = B(V)$

5. $(2,0) : T : V^* \times V^*, T \in B(V^*)$. $T_0^2 = B(V^*)$

6. $(1,1) : T : V^* \times V \to F, T(f,x) = \alpha \in F$. Зафиксируем вектор x_0. $T(f,x_0) \in V$(тип $(1,0)$), $x \to \varphi(x_0) \in V$. Можно сопоставить тензору типа $(1,1)$ сопоставить линейный оператор из $L(V)$.

$$T(f,x) = f(\varphi(x))$$

. Докажем, что φ линейный оператор в V. $T(f, \alpha x_1 + \beta x_2) = f(\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2)) \overset{\text{по лин T}}{=} \alpha T(f,x_1) + \beta T(f,x_2) = \alpha f(\varphi(x_1)) + \beta f(\varphi(x)2) = f(\alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2))$. Перенеся всё в левую часть, получим $f(\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha\varphi(x_1) - \beta\varphi(x_2)) = 0 \forall f \in V^* \forall \alpha, \beta \in F, \forall x_1, x_2 \in V \Longrightarrow \varphi \in L(V)$. В силу выделенного равенства $T_1^1 = L(V)$

7. Пусть в $V = V_3$ задано векторное произведение. Тогда $\forall x_1, x_2 \in V$ определен $[x_1, x_2] = w$. Тогда по определению тензор типа $(1,2) : T(f, x_1, x_2) = f(w) = f([x_1, x_2])$

8. A - ассоциативная алгебра. (Есть операция $A \times A \to A(x_1, x_2 \to x_1 \cdot x_2)$, "$\cdot$" - ассоциативная дистрибутивная операция).$x_1 \cdot x_2 = w.T(f, x_1, x_2) = f(x_1 \cdot x_2), T \in T_2^1$

9. $V = V_3, V \times V \times V \to \mathbb{R}$ - смешанное произведение $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3), T(x_1, x_2, x_3) = \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow T \in T_3^0$

10. Пусть V - произвольное евклидово пространство. Тогда $V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n) \to \det(\overset{\uparrow}{x}_1, \ldots, \overset{\uparrow}{x}_n)$ - ориентированный объем(тоже тензор). $T \in T_n^0$

11.1 Тензорное произведение тензоров

$\otimes$ - значок тензорного произведения.

Определение 11.2. $T \in T_q^p, S \in T_s^r \Longrightarrow T \otimes S \in T_{q+s}^{p+r}$. Пусть $f_i \in V^*, x_i \in V$. Тогда $T \otimes S(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+s}, x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{q+s}) \overset{def}{\equiv}$
$T(f_1, \ldots, f_p, x_1, \ldots, x_q) \cdot S(f_{p+1}, \ldots, f_{p+s}, x_{q+1}, \ldots, x_{q+s})$

Утверждение 11.1 (Свойства тензорного произведения)**.**

$T \otimes (\alpha S_1 + \beta S_2) = \alpha T \otimes S_1 + \beta T \otimes S_2$
$(\alpha T_1 + \beta T_2) \otimes S = \alpha T_1 \otimes S + \beta T_2 \otimes S$ - *левая и правая дистрибутивность*

$T \otimes (S \otimes R) = (T \otimes S) \otimes R$ - *ассоциативность*

Коммутативность не выполняется. Например $f_1 \in V^* = T_0^1, f_2 \in V^* = T_0^1$. *Проверим, что* $f_1 \otimes f_2 \neq f_2 \otimes f_1$. *Действительно,* $f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f_2(x_2) \overset{?}{=} f_2 \otimes f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1) \cdot f_1(x_2)$ *- В общем случае это неверно, так как мы можем взять любой набор векторов и линейных функционалов. Хотя порой в задаче случайно может совпасть, что коммутативность выполняется.*

11.2 Тензорная алгебра пространства V

Определение 11.3. V, W - два линейных пространства над F. Внешняя прямая сумма: $V \oplus W = \{(x,w) | x \in V, w \in W\}$. По определению $(x_1, w_1) + (x_2, w_2) \overset{def}{\equiv} (x_1 + x_2, w_1 + w_2), \lambda(x,w) = (\lambda x, \lambda w)$. Нетрудно показать, что $V \oplus W$ - линейное пространство с $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$. Также нетрудно выбрать базис в этом пространстве. Пусть $\mathfrak{E}$ - базис в V, $\mathfrak{F}$ - базис в W, тогда базис в $V \oplus W : (e_i, 0), (0, f_j) \forall i, j$.

Замечание. Обратите внимание, что значок у внешней прямой суммы такой же как у прямой суммы, но определение другое.

Определение 11.4. Пусть $v_1, \dots, v_n, \dots$ - линейные пространства над F, тогда $\bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) | x_i \in V_i\}$, что число ненулевых x_i конечно.

Пример. Например тогда можно записать $F[x] =< 1 > \oplus < x > \oplus \dots \oplus < x^n > \oplus \dots$

Определение 11.5. Тензорной алгеброй над линейным пространством V называется внешняя прямая сумма $T(V) = F \oplus T_0^1(V) \oplus \dots \oplus T_0^n(V) \oplus \dots$. Пока оно является только линейным пространством. Пусть $T \in T_0^n, S \in T_0^m, T \otimes S \in T_0^{n+m}$. Далее обобщим по линейности на произвольную линейную комбинацию тензоров тензорного произведение на алгебре. Тогда это будет линейным пространством и алгеброй относительно тензорного произведения - то есть алгеброй по определению.

11.3 Координатная запись тензора

Замечание. Примем соглашение Эйнштейна: Если выражении имеется 2 одинаковых индекса - один верхний, другой - нижний, то по такому индексу ведется суммирование. Например $f_i = a_i^j e_j$ будет подразумеваться как $f_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$ в обычном представлении. Иногда лектор, как и авторы конспекта будут писать значок суммы - это не подразумевает, что суммирование подразумевается дважды(явное и скрытое соглашением).

Пусть $T \in T_q^p, \mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в V, $\mathfrak{E}^* = (e^1, \dots, e^n)$ - биортогональный базис, и другой $\mathfrak{F}$ - базис в V, $\mathfrak{F}^* = (f^1, \dots, f^n)$ - биортогональный к нему базис. Напомним, что $e^i(e_j) = e_j(e^i) = \delta_{ij}$. Тогда $f_i = a_i^j e_j (f_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$(по соглашению)). Тогда матрица с коэффициентами a_{ij} - матрица $A = S_{\mathfrak{E} \to \mathfrak{F}}$. Аналогично $f^i = b_j^i e^j$ - задает матрицу перехода B для биортогональных базисов.
Найдем связь между A и B. $\delta_{ij} = f^i(f_j) = b_k^i e^k(a_j^l e_l) = b_k^i a_j^l e^k(e_l) = b_k^i a_j^l \delta_l^k = b_k^i a_j^k$. Тогда $E_{ij} = \sum_{k=1}^n b_k^i a_j^k \implies E = B \cdot A \implies B = A^{-1}$ - А матрица перехода между базисами, поэтому обратная есть.
Теперь рассмотрим произведение $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \in T_q^p$. Подействуем на набор из базис векторов $e^{s_1}, \dots, e^{s_p}, e_{t_1}, \dots, e_{t_q} : e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}(e^{s_1}, \dots, e^{s_p}, e_{t_1}, \dots, e_{t_q}) = e_{i_1}(e^{s_1}) \cdot \ldots \cdot e_{i_p}(e^{s_p}) \cdot e^{j_1}(e_{t_1}) \cdot \ldots \cdot e^{j_q}(e_{t_q}) = \delta_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_1}^{s_p} \cdot \delta_{t_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{t_q}^{j_q} = \begin{cases} 1, s_1 = i_1, \dots s_p = i_p, j_1 = t_1, \dots, j_q = t_q \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Теорема 11.1. *(о базисе T_q^p) Набор из n^{p+q} элементов вида $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}$ образует базис в $T_q^p(V)$, где $1 \leqslant i_\alpha, j_\beta \leqslant n = \dim V$.*

Доказательство. Докажем в 2 этапа.

1. Докажем ЛнЗ. Пусть $\sum \lambda_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} = 0$ (здесь знак суммы написан, чтобы показать, что здесь действительно сумма, действительно, берутся всевозможные суммирования по каждому из $i_1, \dots i_p, j_1, j_q$ по соглашению Эйнштейна). Применив к левой и правой части $(e^{s_1}, \dots, e^{s_p}, e_{t_1}, \dots, e_{t_q})$ мы получим $\lambda_{t_1, \dots, t_q}^{s_1, \dots, s_p} = 0 \forall t_\alpha, s_\beta$. Откуда и вытекает линейная независимость.

2. Покажем, что любой $T \in T_q^p$ можно представить в виде $\sum \lambda_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}$. $T(f^1,\dots,f^p,x_1,\dots,x_q)$, разложим по базисам $f^i = \alpha_j^i e^j, x_j = \beta_j^l e_l$. Теперь подставим вместо $(f^1,\dots,f^p,x_1,\dots,x_q)$ их разложения и по линейности получим $\sum$(скаляры)$T(e^{i_1},\dots,e^{i_p},e_{j_1},\dots,e_{j_q})$. Тогда пусть $T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} = T(e^{i_1},\dots,e^{i_p},e_{j_1},\dots,e_{j_q})$ называются коэффициентами тензора относительно базиса $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ (иногда просто говорят в базисе $\mathfrak{E}$). Тогда заметим, что $T = \sum T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$

□

11.4 Координаты тензоров

$T_1^1, T = T_j^i e_i \otimes e^j, T_j^i = T(e^i, e_j), T_1^1(V) \cong L(V), T(f,x) = f(\varphi(x)) \implies T_j^i = T(E^i, e_j) = e^i(\varphi(e_j)) = a_{ij}$ - a_{ij} - элемент матрицы преобразования φ. Если считать - верхний индекс - номер строки, а нижний - номер столбца, то координаты тензора типа $(1,1)$ в точности будут координатами матрицы оператора φ в базисе E. И наоборот. Если $A \underset{E}{\longleftrightarrow} \varphi, T = T_j^i e_i \otimes e^j, T_j^i = a_{ij}$.

11.5 Изменение координат тензора при замене базиса

V - Линейное пространство с базисами E и F. $f_i = a_i^j e_j, f^i = b_j^i e^j, A = S_{E\to F}, B = A^{-1}$. Пусть сменяем базис. $T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}$ - координата T в E. $(T')_{l_1,\dots,l_q}^{k_1,\dots,k_p}$ - координата T в F.

$T_{l_1,\dots,l_q}^{k_1,\dots,k_p} = T(f^{k_1},\dots,f^{k_p},f_{l_1},\dots,f_{l_q}) =$
$T(b_{i_1}^{k_1}e^{i_1},\dots,b_{i_p}^{k_p}e^{i_p},a_{l_1}^{j_1}e_{j_1},\dots,a_{l_q}^{j_q}e_{j_q}) = b_{i_1}^{k_1}\dots b_{i_p}^{k_p}a_{l_1}^{j_1}\dots a_{l_q}^{j_q}T(e^{i_1},\dots,e^{i_p},e_{j_1},e_{j_q})$. Тогда $(T')_{l_1,\dots,l_q}^{k_1,\dots,k_p} = b_{i_1}^{k_1}\dots b_{i_p}^{k_p}a_{l_1}^{j_1}\dots a_{l_q}^{j_q}T(e^{i_1},\dots,e^{i_p},e_{j_1},e_{j_q})$. Поэтому и говорят, что тензор типа (p,q) р контринвариантен, так как используется матрица $B = A^{-1}$. Иногда эту формулу применяют за определение тензора.

Пример. 1. Тензор T_0^1 - вектор. Тогда $(T')^k = b_i^k T^i$. Тогда $\alpha' = S^{-1}\alpha$, где $\alpha' \longleftrightarrow x(F), \alpha \longleftrightarrow x(E)$

2. Тензор T_1^0 - ковектор(линейный функционал на V). $T_l^i = a_l^j T_j, f \longleftrightarrow (b_1,\dots,b_n)$. Тогда $b_l' = \sum s_{jl} b_j \longleftrightarrow \sum b_j s_{jl}$

3. Тензор T_2^0(билинейная функция). $T_{l_1,l_2}' = a_{l_1}^{j_1} a_{l_2}^{j_2} T_{j_1,j_2}, T_{j_1,j_2} = b_{j_1 j_2}, b_{l_1 l_2}' = \sum_{j_1} \sum j_2 a_{j_1 l_1} b_{j_1,j_2} a_{j_2,l_2}$ $= \sum_{j_1}\sum_{j_2}(a_{l_1 j_1}^T) b_{j_1 j_2} a_{j_2 l_2}$. То есть $B' = S^T B S$.

4. $T_1, T_2 \in T_q^p, (\alpha T_1 + \beta T_2)_{j_1\dots j_q}^{i_p,\dots,i_p} = \alpha(T_1)_{j_1\dots j_q}^{i_p,\dots,i_p} + \beta(T_2)_{j_1\dots j_q}^{i_p,\dots,i_p}$

5. $T \in T_q^p, S \in T_s^r \longrightarrow T\otimes S \in T_{q+s}^{p+r}, [T\otimes S]_{j_1,\dots,j_q,j_{q+1},j_{q+s}}^{i_1,\dots,i_p,i_{p+1},\dots,i_{p+r}} = T\otimes S(e^{i_1},\dots,e^{i_{p+r}},e_{j_1},\dots,e_{j_{q+s}}) = T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} S_{j_{q+1},\dots,j_{q+s}}^{i_{p+1},\dots,i_{p+r}}$ - операция тензорного произведения тензоров соотвествует умножению их координат.

11.6 Алгебраические операции над тензорами

Пусть $\sigma \in S_q$ - перестановка ковариантых индексов. $\sigma(1,\dots,n) = (\sigma(1),\dots,\sigma(n))$.
Пусть $(x_{i_1},\dots,x_{i_q})$ - набор векторов. То $\sigma(x_{i_1},\dots,x_{i_q}) = (x_{i_{\sigma(1)}},\dots,x_{i_{\sigma(n)}})$.
$T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \to (\overline{T})_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} = T_{j_{\sigma(q)},\dots,j_{\sigma(q)}}^{i_1,\dots,i_p}$ - перестановка нижней строки тензора.

Утверждение 11.2. *Перестановка ковариантных индексов является тензорной операцией(то есть результат не зависит от выбора базиса в пространстве V)*

Доказательство. Пусть

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}} & T' \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma(1\quad 2)} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(1\quad 2)} \\ \overline{T} & \xrightarrow{\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}} & (\overline{T})' \end{array}$$

Докажем корректность диаграммы(тогда любая перестановка будет получаться из композиции инверсий).
$T^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q} = b^{k_1}_{i_1}\ldots b^{k_p}_{i_p} a^{j_1}_{l_1}\ldots a T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_p}$. Сделаем преобразование σ. $(\overline{T})^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q} = b^{k_1}_{i_1}\ldots b^{k_p}_{i_p} a^{j_1}_{l_2} a^{j_2}_{l_1}\ldots a^{i_q}_{j_q}\cdot T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \begin{vmatrix} j_1 \to j_2 \\ j_2 \to j_1 \end{vmatrix} = b^{k_1}_{i_1}\ldots b^{k_p}_{i_p} a^{j_1}_{l_1} a^{j_2}_{l_2}\ldots a^{j_q}_{l_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_2 j_1,\ldots,j_q}$.
Сделаем преобразование σ. $(\overline{T})^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_2,j_1,\ldots,j_q}.(\overline{T})^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q} =$
$b^{k_1}_{l_1}\ldots b^{k_p}_{l_p} a^{j_1}_{l_1}\ldots a^{i_q}_{j_q}\cdot T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = b^{k_1}_{i_1}\ldots b^{k_p}_{i_p} a^{j_1}_{l_1} a^{j_2}_{l_2}\ldots a^{j_q}_{l_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_2 j_1,\ldots,j_q}$. Результат получится таким же в обоих случаях. □

Замечание. Нельзя менять местами ковариантные и контрвариантные индексы. Такая операция зависит от выбора базиса.

Определение 11.6. Свертка: $T^p_q(V) \to T^{p-1(V)}_{q-1}$. Частный случай: $T \in T^1_1(V)$, то сверткой в базисе E будет называется скаляр $\overline{T} = \sum_{i=1}^n T(e^i, e_j) \in F$

Утверждение 11.3. *Свертка тензора типа* $(1,1)$ *- тензорная операци, то есть не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. $T^k_k = T(f^k, f_k) = T(b^k_j e^j, a^i_k e_i) = b^k_j a^i_k T(e^j, e_i) = \delta^i_j T(e^j, e_i) = T(e^i, e_i) = T^i_i$, так как $b^k_j a^i_k = a^i_k b^k_j = \delta^i_j (A\cdot B = E)$ □

Замечание. Фактически мы доказали, что след матрицы не зависит от выбора базиса. $T^k_k = \sum_{k=1}^n b_{kk} = \operatorname{tr} B$. Тогда $\operatorname{tr} A_F = \operatorname{tr} A_E$

Определение 11.7. Общий случай. Пусть $1 \leqslant r \leqslant p, 1 \leqslant s \leqslant q$. Тогда $\operatorname{tr}^r_s T = \sum_{i=1}^n T(\ldots \underset{e^r}{e^i}, \ldots; \ldots, \underset{e^s}{e^i}, \ldots)$. То есть $\operatorname{tr}^r_s T \in T^{p-1}_{q-1}$

Утверждение 11.4. *Свертка по r-ому верхнему и s-ому нижнего является тензорной операцией, то есть не зависит от выбора базиса в* V.

Доказательство. $\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}} & T' \\ \downarrow{\scriptstyle \operatorname{tr}^r_s} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{tr}^r_s} \\ \overline{T} & \xrightarrow{\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}} & (\overline{T})' \end{array}$ Аналогично нужно доказать коммутативность диаграммы. Вертикальная часть - просто формула перехода тензора к новым координатам. Стрелка вниз(давайте договоримся, что $\hat{k^j_i}$ - произведение по всем, кроме текущего):
$\operatorname{tr}^r_s T^{k_1,\ldots,k_p}_{l_1,\ldots,l_q} = \sum_k T'(f^{k_1},\ldots,f^k,\ldots,f^{k_p}, f_{l_1},\ldots,f_k,\ldots,f_{l_q}) = T'(b^{k_1}_{i_1}e^{i_1},\ldots,b^{k_p}_{i_p}e^{i_p}; a^{j_1}_{l_1}e_{j_1},\ldots,a^{j_q}_{l_q}e_{i_q}) = \delta^{j_s}_{i_r} b^{\hat{k}_i}_{i_p} a^{\hat{j}_s}_{l_s} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \sum_i b^{\hat{k}_i}_{i_p} a^{\hat{j}_s}_{l_s} T^{i_1,\ldots,i,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,i,\ldots,j_q}$. Аналогично получим обходом сначала вниз, потом вправо мы получим то же самое. □

Пример. $\varphi,\psi \in L(V), \varphi \longleftrightarrow T^1_1 = T^i_j, \psi \longleftrightarrow T^1_1 \longleftrightarrow T^k_l, T^i_j \otimes T^k_l = T^{ik}_{jl} \in T^2_2, \operatorname{tr}^2_1(T^{ik}_{jl}) = \varphi\cdot\psi, \operatorname{tr}^1_2(T^{ik}_{jl}) = \psi\cdot\varphi$, так как $\sum_k T^{ik}_{kl} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ - элемент произведения 2 матриц.

11.7 Симметричный и кососимметричные тензоры

$T_q^0(V) = T_q(V)$, $\sigma \in S_q$
$\varphi_\sigma(T)(x_1, \ldots, x_q) = T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)})$

Определение 11.8. Тензор называется симметричным $T \in T_q(V)$, если $\forall \sigma \in S_q : \varphi_\sigma(T) = T$

Определение 11.9. Тензор называется кососсимметричным, если $\forall \sigma \varphi_\sigma(T) = \varepsilon(\sigma) \cdot T$, $\varepsilon(\sigma)$ - четность перестановки.

Определение 11.10. Оператор симметрии S: $T_q(V) \to T_q(V)$ определяется равенством $S(T) = \dfrac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varphi_\sigma(T)$

Пусть $T_q^+(V)$ - пространство симметричных тензоров.
Пусть $T_q^-(V)$ - пространство кососимметричных тензоров.

Теорема 11.2. *Операция симметрии S обладает свойствами*

1. $\operatorname{Im} S = T_q^+(V)$
2. $S^2 = S$.

Иначе говоря, S - проектор T_q на T_q^+

Идея доказательства. $\varphi_\tau \circ \varphi_\sigma = \varphi_{\tau \circ \sigma}$ - отсюда получим, что применяя φ_τ к S мы получим тот же тензор(так как будут проходиться те же значения, только, возможно, в разном порядке) - то есть симметричный тензор по определению. В обратную сторону также несложно проверить. 2 Пункт также несложно проверяется по определению.
$S(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_q}) = e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_q}$. $\{(e^1)^{d_1} \ldots (e^n)^{\alpha_2}, \sum \alpha_i = q, \alpha_i \geqslant 0\}$ - базис.

Теорема 11.3. *Тензор вида $\{(e^1)^{d_1} \ldots (e^n)^{\alpha_2}, \sum \alpha_i = q, \alpha_i \geqslant 0\}$ образует базис в пространстве $T_q^+(V)$*

Следствие. $\dim T_q^+(V) = C_{n+q-1}^q$ - чисто комбинаторная задача на шары и перегородки.

Определение 11.11. Оператор альтернации $A : T_q(V) \to T_q(V)$ определяется равенством $A(T) = \dfrac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma) \varphi_\sigma(T)$

Теорема 11.4. *Оператор альтернации A обладает свойствами*

1. $\operatorname{Im} A = T_q^-(V)$
2. $A^2 = A$

Тогда A - оператор проектирования T_q на T_q^-.

Идея доказательства. Очевидно, что $A(e^{i_1} \otimes e^{i_q})$ порождает T_q^-. Также заметим, что если $i_\alpha = i_\beta, \alpha \neq \beta$, то $A(e^{i_1} \otimes e^{i_q}) = 0$, так как можно заметить, что при применении к $e^{i_1} \otimes e^{i_q}$ φ_σ мы его умножаем на знак перестановки. Тогда $\{A(e^{i_1} \otimes e^{i_q}) | 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant n\}$ - базис в $T_q^-(V)$

Утверждение 11.5. *Тензоры $\{A(e^{i_1} \otimes e^{i_q}) | 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant n\}$ - образуют базис в $T_q^-(V)$*

Идея доказательства. Можно рассмотреть их линейную комбинацию и проверить линейную независимость из линейной независимости базиса в T_q.

Следствие. $\dim T_q^-(V) = C_n^q$.

Замечание. $\dim T_3^+(V) + \dim T_3^-(V) \stackrel{?}{=} T_3(V)$. $C_{n+2}^3 + C_n^e = \dfrac{n^3 + 2n}{3} < n^3 = \dim T_3(V)$, то есть их сумма не дает всех тензоров.

12 Поверхности 2 порядка

Определение 12.1. Многочлен $P(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ - уравнение поверхности 2 порядка.

Возьмем квадратичную часть(форму): $Q(x,y,z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ с матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и линейную часть: $L(x,y,z) = 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$. Мы можем перейти к новому базису $E', S^T = S$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. При параллельном переносе $Q(x,y,z)$ - не меняется, $L(x,y,z) \to L(x',y',z')$. При повороте $A' = S^TAS = S^{-1}AS$.

Теорема 12.1. *(об инвариантах поверхностей 2 порядка) Инвариантами поверхности 2 порядка являются следующие функции*

1. $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \operatorname{tr} A$
2. $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
3. $I_3 = \det A$
4. $I_4 = \det \begin{pmatrix} . & . & . & a_{14} \\ . & A & . & a_{24} \\ . & . & . & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

Доказательство. $\chi_A(\lambda)$ - не зависит от выбора базиса, тогда I_1, I_2, I_3 - коэфициенты $\chi_A(\lambda)$ - инварианты. Рассмотрим уравнение преобразования координат: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & S_{14} \\ . & S & . & S_{24} \\ . & . & . & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \Big|_{t=t'=1}$ - Уравнение поворота. $(x,y,z,t)\begin{pmatrix} . & . & . & a_{14} \\ . & A & . & a_{24} \\ . & . & . & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\Big|_{t=1} = 0$ - ну и остается проверить, что определитель действительно не меняется.(аналогично 1 семестру) ☐

Определение 12.2. $T(x_0,y_0,z_0)$ называется центром поверхности 2 порядка. $P(x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma) = P(x_0-\alpha, y_0-\beta, z_0-\gamma)$. Поверхности 2 порядка называется центральной, если она имеет единственный центр.

Утверждение 12.1. *Поверхность 2 порядка является центральной* $\iff \det A \neq 0$. *Центр поверхности задается уравнением* $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = 0$.

Переход $\begin{matrix} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{matrix}$ уничтожит всю линейную часть. Тогда останется $a_{11}(x')^2 + a_{21}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{44} = 0$ приводя квадратичную форму к главным осям, получим: $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 + \lambda_4 = 0$.

1. $\lambda_4 \neq 0 \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - Одного знака. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ - действительный эллипсоид(с +) и мнимый эллипсоид(с -)
2. из $\lambda_{1,2,3,4}$ 2 имеют один знак, а 2 другой. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид
3. один из λ имеет знак, противоложный знаку остальных. $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3,4} < 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - двуполостный гиперболоид.
4. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = 0$. Различают $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ - мнимый конус. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - действительный конус.