«Билеты по алгему»
МФТИ

Муниров Султан

Лето 2025

Билет №1

1. **Теория:** Норма в линейном пространстве. Норма оператора. Вычисление многочлена и аналитической функции от линейного преобразования.

2. **Задача:** Есть некий оператор f. Известно, что $f^2 = E$. Доказать, что $\text{Ker}(f-E) \oplus \text{Ker}(f+E) = V$. (все решение заключается в применении теоремы о взаимнопростых делителях аннулирующего многочлена)

Решение задачи 1:

Условие $f^2 = E$ означает, что многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ является аннулирующим для оператора f. Разложим $P(\lambda)$ на множители: $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Обозначим $P_1(\lambda) = \lambda - 1$ и $P_2(\lambda) = \lambda + 1$.

Многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ являются взаимно простыми (их НОД равен 1, если характеристика поля не равна 2, так как $P_2(\lambda) - P_1(\lambda) = 2 \neq 0$).

Согласно теореме о разложении пространства в прямую сумму ядер, если аннулирующий многочлен $P(\lambda)$ оператора f разлагается на взаимно простые множители $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$, то $V = \text{Ker}(P_1(f)) \oplus \text{Ker}(P_2(f))$. В нашем случае $P_1(f) = f - E$ и $P_2(f) = f + E$. Следовательно, $V = \text{Ker}(f-E) \oplus \text{Ker}(f+E)$.

Билет №2

1. **Теория:** Аннулирующий и минимальный многочлен. Связь минимального с ЖНФ.

2. **Задача:** Ортогонализовать базис $(1, x-1, x^2+1)$ в пространстве многочленов степени не выше 2 методом Грама-Шмидта. Скалярное произведение это интеграл от 0 до 1 $fg\,dx$.

Решение задачи 2:

Обозначим базисные векторы: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 + 1$. Скалярное произведение $(g, h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$. Построим ортогональный базис e_1, e_2, e_3.

1. $e_1 = f_1 = 1$. $(e_1, e_1) = \int_0^1 1^2 dx = 1$.

2. $e_2 = f_2 - \frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)} e_1$. $(f_2, e_1) = \int_0^1 (x-1) \cdot 1 dx = -1/2$. $e_2 = (x-1) - \frac{-1/2}{1} \cdot 1 = x - 1/2$. $(e_2, e_2) = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$.

3. $e_3 = f_3 - \frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)} e_1 - \frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)} e_2$. $(f_3, e_1) = \int_0^1 (x^2+1) \cdot 1 dx = 4/3$. $(f_3, e_2) = \int_0^1 (x^2+1)(x-1/2) dx = 1/12$. $e_3 = (x^2+1) - \frac{4/3}{1} \cdot 1 - \frac{1/12}{1/12} \cdot (x - 1/2) = x^2 - x + 1/6$. $(e_3, e_3) = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx = 1/180$.

Ортогональный базис: $\{1, \quad x - 1/2, \quad x^2 - x + 1/6\}$.

Ортонормированный базис $u_i = e_i / \|e_i\|$: $u_1(x) = 1$. $u_2(x) = \frac{x-1/2}{\sqrt{1/12}} = \sqrt{3}(2x - 1)$. $u_3(x) = \frac{x^2-x+1/6}{\sqrt{1/180}} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$.

Билет №3

1. **Теория:** Закон инерции, метод Якоби.

2. **Задача:** Построить матрицу линейного оператора $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, если известно, что $v_1 = (1, 0, 1)^T$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda_1 = 2$, $v_2 = (0, 1, 1)^T$ – собственный вектор с $\lambda_2 = -1$, и $v_3 = (1, 1, 0)^T$ – собственный вектор с $\lambda_3 = 3$.

Решение задачи 3:

Векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы (т.к. отвечают различным СЗ) и образуют базис B. Матрица оператора ϕ в базисе B: $A_B = \mathrm{diag}(2, -1, 3)$. Матрица перехода от стандартного базиса E к базису B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица оператора в стандартном базисе $A_E = PA_BP^{-1}$.

Вычисляем P^{-1}: $\det(P) = -2$. $P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычисляем произведение: $PA_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $A_E = (PA_B)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Билет №4

1. **Теория:** Эрмитовы формы и квадратичные формы в эрмитовом пространстве, их связь. Закон инерции эрмитовых форм, Критерий Сильвестра.

2. **Задача (конкретизированная):** Для симметричной матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ найти ортогональную матрицу Q и диагональную матрицу D такие, что $Q^TAQ = D$.

Решение задачи 4:

1. Находим собственные значения из $\det(A - \lambda E) = 0$. Характеристический многочлен: $-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$. Корни (собственные значения): $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

2. Находим собственные векторы для каждого λ_i, решая $(A - \lambda_i E)v = 0$. Для $\lambda_1 = 3$, собственный вектор $v_1' = (2, -2, 1)^T$. Нормируем: $u_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$. Для $\lambda_2 = 6$, собственный вектор $v_2' = (2, 1, -2)^T$.

Нормируем: $u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$. Для $\lambda_3 = 9$, собственный вектор $v_3' = (1, 2, 2)^T$. Нормируем: $u_3 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$.

3. Составляем ортогональную матрицу Q из столбцов u_1, u_2, u_3: $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Диагональная матрица D состоит из собственных значений: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. По теореме о диагонализации симметричных матриц $Q^T A Q = D$.

Билет №5

1. **Теория:** Приведение квадратичной формы в пространстве со скалярным произведением к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

2. **Задача:** Необходимое и достаточное условие ортогональности подматрицы ортогональной матрицы.

Решение задачи 5:

Пусть Q – ортогональная $n \times n$ матрица. Разобьем Q на блоки: $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A – $k \times k$ подматрица.

Условие ортогональности Q: $Q^T Q = E_n$ и $QQ^T = E_n$.

Из $Q^T Q = E_n$ следует $A^T A + C^T C = E_k$ (блок (1,1)). Из $QQ^T = E_n$ следует $AA^T + BB^T = E_k$ (блок (1,1)).

Утверждение: A ортогональна $\iff$ $B = 0$ и $C = 0$.

($\Rightarrow$) Если A ортогональна ($A^T A = E_k$ и $AA^T = E_k$): $A^T A + C^T C = E_k \implies E_k + C^T C = E_k \implies C^T C = 0$. Для вещественных C, это значит $C = 0$. $AA^T + BB^T = E_k \implies E_k + BB^T = E_k \implies BB^T = 0$. Для вещественных B, это значит $B = 0$.

($\Leftarrow$) Если $B = 0$ и $C = 0$: $A^T A + C^T C = E_k \implies A^T A + 0 = E_k \implies A^T A = E_k$. $AA^T + BB^T = E_k \implies AA^T + 0 = E_k \implies AA^T = E_k$. Следовательно, A ортогональна.

Вывод: $k \times k$ подматрица A в левом верхнем углу ортогональной матрицы Q ортогональна т. и т.т., когда блоки B и C нулевые.

Билет №6

1. **Теория:** Лемма Даламбера, основная теорема алгебры.

2. **Задача:** Является ли билинейная форма $f(X, Y) = n \cdot \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$ для матриц $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ а) симметричной б) невырожденной.

Решение задачи 6:

а) Симметричность: $f(Y, X) = n \cdot \operatorname{tr}(YX) - \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(X)$. Так как $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ и $\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y) = \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(X)$, то $f(X, Y) = f(Y, X)$. Форма f симметрична.

б) Невырожденность: Рассмотрим $X = E_n$. Тогда $\operatorname{tr}(X) = n$. $f(E_n, Y) = n \cdot \operatorname{tr}(E_nY) - \operatorname{tr}(E_n)\operatorname{tr}(Y) = n \cdot \operatorname{tr}(Y) - n \cdot \operatorname{tr}(Y) = 0$. Это верно для любой Y. Поскольку $E_n \neq 0$ (для $n \geq 1$), а $f(E_n, Y) = 0$ для всех Y, форма f вырождена.

Билет №7

1. **Теория:** Унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного преобразования.

2. **Задача:** Привести пример n-мерного пространства V и линейного оператора $\phi : V \to V$, для которого неверно, что $V = \operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi$.

Решение задачи 7:

Пусть $V = P_1(\mathbb{R})$ (многочлены степени ≤ 1). $\dim V = 2$. Оператор $\phi(p(x)) = p'(x)$ (дифференцирование). $\phi(a_0 + a_1x) = a_1$.

$\operatorname{Ker}\phi = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{1\}$. $\dim(\operatorname{Ker}\phi) = 1$. $\operatorname{Im}\phi = \{a_1 \mid a_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{1\}$. $\dim(\operatorname{Im}\phi) = 1$.

$\operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi = \operatorname{span}\{1\} + \operatorname{span}\{1\} = \operatorname{span}\{1\}$. $\dim(\operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi) = 1$. Поскольку $\dim V = 2$, то $V \neq \operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi$.

Билет №8

1. **Теория:** Ортогональное дополнение к подпространству. Задача об ортогональной проекции и ортогональной составляющей. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Объем параллелепипеда.

2. **Задача:** Даны две квадратичные формы в $\mathbb{R}^3$ (переменные x_1, x_2, x_3): $q_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ $q_2(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ Определите, можно ли одновременно привести эти формы к диагональному виду с помощью одного и того же невырожденного линейного преобразования. Если это возможно, найдите преобразование и результирующие диагональные формы.

Решение задачи 8:

Матрицы квадратичных форм: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Проверка A_1 на положительную определенность:** $\Delta_1 = 2 > 0$. $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$. $\Delta_3 = \det(A_1) = 3 > 0$. Форма $q_1(x)$ (матрица A_1) положительно определена.

2. Поскольку $q_1(x)$ положительно определена, можно найти невырожденное линейное преобразование $x = Sy'$, приводящее $q_1(x)$ к каноническому виду $q_1(y') = (y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2$, а $q_2(x)$ к диагональному виду $q_2(y') = \lambda_1(y_1')^2 + \lambda_2(y_2')^2 + \lambda_3(y_3')^2$. Коэффициенты λ_i являются корнями обобщенного характеристического уравнения $\det(A_2 - \lambda A_1) = 0$.

3. **Нахождение обобщенных собственных значений:** $\det(A_2 - \lambda A_1) = \det \begin{pmatrix} 1-2\lambda & 2-\lambda & 1-2\lambda \\ 2-\lambda & 3-2\lambda & 2-\lambda \\ 1-2\lambda & 2-\lambda & 2-3\lambda \end{pmatrix} = 0$. Раскрытие определителя приводит к уравнению: $15\lambda^3 - 23\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1/5$, $\lambda_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$.

4. **Построение преобразования и итоговые формы:** Для каждого λ_i находится собственный вектор v_i из системы $(A_2 - \lambda_i A_1)v_i = 0$. Эти векторы A_1-ортонормируются (т.е. $v_i^T A_1 v_j = \delta_{ij}$). Матрица S, столбцами которой являются эти A_1-ортонормированные векторы, задает преобразование $x = Sy'$. В новых координатах y': $q_1(y') = (y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2$. $q_2(y') = \frac{1}{5}(y_1')^2 + \frac{2+\sqrt{7}}{3}(y_2')^2 + \frac{2-\sqrt{7}}{3}(y_3')^2$ (порядок λ_i соответствует порядку A_1-ортонормированных векторов в S).

Да, формы можно одновременно привести к диагональному виду.

Билет №9

1. **Теория:** Тензоры, операции над ними (свёртка, перестановка индексов). Симметричные и кососимметричные тензоры. Операторы симметрирования и альтернирования, их свойства.

2. **Задача:** Найти полярное разложение $A = UP$ (где U ортогональная, P симметричная положительно полуопределенная) для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 9:

1. **Находим $P = \sqrt{A^TA}$.** $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\det(A^TA - \mu E) = 0$ дает $-(\mu-1)^2(\mu-4) = 0$. Собственные значения матрицы A^TA: $\mu_1 = 4$ (кратности 1), $\mu_2 = 1$ (кратности 2). Собственные значения матрицы P (квадратные корни из СЗ A^TA):

$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1$. Диагональная форма P в базисе из ее собственных векторов: $D_P = \mathrm{diag}(2,1,1)$ (порядок СЗ может быть иным, но он должен соответствовать порядку СВ в Q_P).

2. **Находим ортонормированные собственные векторы для A^TA.** Для $\mu_1 = 4$: $(A^TA - 4E)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v = 0$. Решая, получаем $v_1' = (1,1,1)^T$. Нормированный $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Для $\mu_2 = 1$: $(A^TA - E)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \implies x + y + z = 0$. Выберем два ортогональных вектора из этого подпространства: $v_2' = (1,-1,0)^T$. Нормированный $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$. v_3' ищем ортогональным u_1 и u_2: $v_3' = u_1 \times u_2$ (с точностью до знака и нормы) или решая систему. $v_3' = (1,1,-2)^T$. Нормированный $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$. Матрица Q_P, составленная из столбцов u_1, u_2, u_3: $Q_P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

3. **Вычисляем $P = Q_P D_P Q_P^T$.** $D_P = \mathrm{diag}(2,1,1)$ (соответственно порядку u_1, u_2, u_3). $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. **Находим $U = AP^{-1}$.** Сначала $P^{-1} = Q_P D_P^{-1} Q_P^T$, где $D_P^{-1} = \mathrm{diag}(1/2,1,1)$. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. $U = AP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Можно проверить, что U ортогональна ($U^TU = E$).

Таким образом, полярное разложение: $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Билет №10

1. **Теория:** Корневое подпространство линейного оператора. Свойства корневых подпространств. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств (случай, когда характеристический многочлен линейного оператора раскладывается на линейные множители).

2. **Задача:** Найти при каких p квадратичная форма $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2pxy + 2xz + 2pyz$ положительно определена.

Решение задачи 10: Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 2 & p \\ 1 & p & 5 \end{pmatrix}$. По критерию Сильвестра все главные угловые миноры должны быть положительны. $\Delta_1 = 1 > 0$. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & p \\ p & 2 \end{vmatrix} = 2 - p^2$. Условие $\Delta_2 > 0 \implies 2-p^2 > 0 \implies p^2 < 2 \implies -\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$. $\Delta_3 = \det(A) = 1(10-p^2)-p(5p-p)+1(p^2-2) = 10 - p^2 - 4p^2 + p^2 - 2 = -4p^2 + 8$. Условие $\Delta_3 > 0 \implies -4p^2 + 8 > 0 \implies 4p^2 < 8 \implies p^2 < 2 \implies -\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$.

Объединяя условия, получаем: $-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$.

Билет №11

1. **Теория:** Билинейные функции. Координатная запись билинейной функции. Матрица билинейной функции и ее изменение при замене базиса. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметричной (кососимметричной) билинейной функции и его свойства.

2. **Задача:** Дан оператор ϕ на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ многочленов степени не выше 2: $\phi(f(x)) = (x^2 + x + 1)f''(x) + (x + 1)f'(x) + f(x)$. Исследовать на диагонализируемость.

Решение задачи 11:

Пространство $V = P_2(\mathbb{R})$ – многочлены степени не выше 2. Стандартный базис $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$. Найдем матрицу оператора ϕ в этом базисе.

Вычисляем образы базисных векторов: $\phi(e_0) = \phi(1) = (x^2+x+1)\cdot 0+(x+1)\cdot 0+1 = 1$. В координатах это $(1, 0, 0)^T$.

$\phi(e_1) = \phi(x) = (x^2 + x + 1) \cdot 0 + (x + 1) \cdot 1 + x = x + 1 + x = 2x + 1$. В координатах это $(1, 2, 0)^T$.

$\phi(e_2) = \phi(x^2) = (x^2 + x + 1) \cdot 2 + (x + 1) \cdot 2x + x^2 = (2x^2 + 2x + 2) + (2x^2 + 2x) + x^2 = 5x^2 + 4x + 2$. В координатах это $(2, 4, 5)^T$.

Матрица оператора A в базисе $\{1, x, x^2\}$ (координаты образов по столбцам): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Матрица A является верхнетреугольной. Ее собственные значения находятся на главной диагонали: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. Поскольку все три собственных значения оператора в 3-мерном пространстве различны, оператор ϕ диагонализируем.

Билет №12

1. **Теория:** Билинейные симметричные и квадратичные функции и их связь. Поляризационное тождество. Метод Лагранжа.

2. **Задача:** Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 12:

1. Находим собственные значения. Матрица A верхнетреугольная, поэтому собственные значения стоят на диагонали: $\lambda_1 = 3$ (алгебраическая кратность $m_1 = 2$), $\lambda_2 = 2$ (алгебраическая кратность $m_2 = 1$).

2. Для собственного значения $\lambda_2 = 2$: $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решаем систему $(A - 2E)v = 0$. Из второй и третьей строки $z = 0$. Из первой $x + y - z = 0 \implies x + y = 0 \implies y = -x$. Собственный вектор, например, $v_2' = (1, -1, 0)^T$. Геометрическая кратность $d_2 = \dim \operatorname{Ker}(A-2E) = 3-\operatorname{rk}(A-2E) = 3 - 2 = 1$. Так как $m_2 = d_2 = 1$, этому СЗ соответствует одна жорданова клетка размера 1.

3. Для собственного значения $\lambda_1 = 3$: $A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Решаем систему $(A - 3E)v = 0$. $y - z = 0 \implies y = z$. x – любое. Геометрическая кратность $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - 3E) = 3 - \operatorname{rk}(A - 3E) = 3 - 1 = 2$. Так как $m_1 = d_1 = 2$, этому СЗ соответствуют две жордановы клетки размера 1.

4. Поскольку для каждого собственного значения алгебраическая кратность равна геометрической, оператор диагонализируем. Жорданова нормальная форма является диагональной матрицей (с точностью до порядка блоков): $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Жорданов базис состоит из линейно независимых собственных векторов. Для $\lambda_1 = 3$, базис $\operatorname{Ker}(A - 3E)$: $v_{11}' = (1, 0, 0)^T$, $v_{12}' = (0, 1, 1)^T$. Для $\lambda_2 = 2$, базис $\operatorname{Ker}(A - 2E)$: $v_2' = (1, -1, 0)^T$. Искомый жорданов (в данном случае собственный) базис: $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, -1, 0)^T\}$.

Билет №13

1. **Теория:** Линейная независимость собственных векторов, имеющих попарно различные собственные значения. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения. Условия диагонализируемости линейного оператора.

2. **Задача:** Квадратичная форма $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$. Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа. Найти невырожденное линейное преобразование координат, приводящее форму к этому виду. Указать положительный и отрицательный индексы инерции.

Решение задачи 13: Дана квадратичная форма $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$.

1. Выделяем полный квадрат по x_1: $q(x) = (x_1^2 - 2x_1(2x_2 - x_3)) + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_1 - (2x_2 - x_3))^2 - (2x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2) + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

2. Оставшаяся часть $q_1(x_2, x_3) = x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$. Выделяем полный квадрат по x_2: $q_1(x_2, x_3) = (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 + 2x_3^2 = (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$.

3. Подставляем обратно: $q(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$. Делаем замену координат: $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$ $y_2 = x_2 - x_3$ $y_3 = x_3$ Канонический вид: $q(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

4. Индексы инерции: Положительный индекс инерции $r_+ = 3$. Отрицательный индекс инерции $r_- = 0$. Ранг формы $r = r_+ + r_- = 3$. Форма положительно определена.

5. Невырожденное линейное преобразование координат (выражаем x_i через y_i): $x_3 = y_3$ $x_2 = y_2 + x_3 = y_2 + y_3$ $x_1 = y_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 + 2(y_2 + y_3) - y_3 = y_1 + 2y_2 + y_3$. Матрица преобразования S (такая, что $x = Sy'$): $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Билет №14

1. **Теория:** Жорданова диаграмма. Построение ЖД без поиска базиса. Теорема о единственности ЖНФ с точностью до перестановки клеток.

2. **Задача:** Ортогональный оператор ϕ в $\mathbb{R}^3$ задан в ортонормированном базисе матрицей $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет канонический вид.

Решение задачи 14: 1. Проверяем, что A ортогональна ($A^TA = E$) и находим $\det A$. $A^TA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = E$. (Вычисления были верны). $\det A = 1$. (Пересчет показал, что $\det A = 1$). Так как A ортогональна и $\det A = 1$, оператор ϕ является вращением. Существует собственный вектор u_1 (ось вращения) с собственным значением $\lambda_1 = 1$.

2. Находим ось вращения u_1 из $(A - E)u_1 = 0 \implies (3A - 3E)u_1 = 0$: $3A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Решая систему, получаем $x_1 = x_2 = x_3$. Собственный вектор $v_1' = (1, 1, 1)^T$. Нормируем: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$.

3. Находим угол вращения α из формулы $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\alpha$. $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{3}(2 + 2 + 2) = 2$. $1 + 2\cos\alpha = 2 \implies 2\cos\alpha = 1 \implies \cos\alpha = 1/2$.

4. Строим ортонормированный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$, где u_1 - ось, u_2, u_3 - ОНБ в плоскости $L = \operatorname{span}\{u_1\}^\perp$. Возьмем u_2' ортогональный u_1, например $u_2' = (1, -1, 0)^T$. Нормируем: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$. $u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$.

5. Определяем знак $\sin\alpha$. Канонический вид матрицы вращения: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. $\sin\alpha = (Au_2, u_3)$. $Au_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$. $(Au_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)(-2)) = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку $\cos\alpha = 1/2$ и $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, то $\alpha = \pi/3$. Искомый ортонормированный базис: $\{u_1, u_2, u_3\}$. Матрица оператора в этом базисе (канонический вид): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Билет №15

1. **Теория:** Положительно определенные квадратичные функции. Критерий Сильвестра. Кососиметрические билинейные функции, приведение их к каноническому виду.

2. **Задача:** Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора, заданного матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 15: 1. Находим собственные значения. Характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^4$. Единственное собственное значение $\lambda_0 = 2$ с алгебраической кратностью $m = 4$.

2. Определяем структуру жордановых клеток. Матрица $B = A - 2E$: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг $\operatorname{rk}(B) = 3$. Геометрическая кратность (число клеток) $d_1 = \dim\operatorname{Ker}(B) = n - \operatorname{rk}(B) = 4 - 3 = 1$. Поскольку есть только одна жорданова клетка, а алгебраическая кратность равна 4, то эта клетка должна быть размера 4×4. Жорданова нормальная форма: $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Строим жорданов базис. Нужна цепочка $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ такая, что $Bf_1 = 0, Bf_2 = f_1, Bf_3 = f_2, Bf_4 = f_3$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $B^4 = 0$. Выбираем вектор f_4 так, чтобы $B^3 f_4 \neq 0$. Например, $f_4 = (0,0,1,0)^T$. Тогда последовательно находим: $f_3 = Bf_4 = (0,1,0,0)^T$. $f_2 = Bf_3 = (1,0,0,0)^T$. $f_1 = Bf_2 = (0,0,0,1)^T$. Вектор f_1 является собственным, так как $Bf_1 = 0$. Жорданов базис (в порядке f_1, f_2, f_3, f_4, чтобы матрица оператора A в этом базисе имела вид J): $f_1 = (0,0,0,1)^T$, $f_2 = (1,0,0,0)^T$, $f_3 = (0,1,0,0)^T$, $f_4 = (0,0,1,0)^T$.

Билет №16

1. **Теория:** Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики для многочленов.

2. **Задача:** Дана квадратичная форма в ОНБ. Найти ОНБ в котором она будет иметь диагональный вид. Квадратичная форма: $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 - 7x_2^2 + 3x_3^2$.

Решение задачи 16 (Исправленное):

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **Нахождение собственных значений матрицы** A**.** Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$: $\lambda^3 + \lambda^2 - 81\lambda - 81 = 0$. $(\lambda^2 - 81)(\lambda + 1) = 0 \implies (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda + 1) = 0$. Собственные значения: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = -1$.

2. **Нахождение ортонормированных собственных векторов.** Для $\lambda_1 = 9$: Система $(A - 9E)v = 0$ имеет вид $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ 4 & -16 & -4 \\ -4 & -4 & -6 \end{pmatrix} v = 0$. Решение (с точностью до пропорциональности): $v_1' = (2, 1, -2)^T$. Нормируем: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}}(2, 1, -2)^T = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$.

Для $\lambda_2 = -9$: Система $(A + 9E)v = 0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} v = 0$. Решение (с точностью до пропорциональности): $v_2' = (-1, 4, 1)^T$. Нормируем: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{1+16+1}}(-1, 4, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{18}}(-1, 4, 1)^T = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)^T$.

Для $\lambda_3 = -1$: Система $(A + E)v = 0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & -6 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} v = 0$. Решение (с точностью до пропорциональности): $v_3' = (1, 0, 1)^T$. Нормируем: $u_3 = \frac{1}{\sqrt{1+0+1}}(1, 0, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$.

3. **Ортонормированный базис и диагональный вид.** Искомый ОНБ состоит из векторов $\{u_1, u_2, u_3\}$: $u_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$ $u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)^T$ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$. В этом базисе матрица квадратичной формы будет диагональной $D = \text{diag}(9, -9, -1)$. Канонический вид квадратичной формы: $q(y') = 9(y_1')^2 - 9(y_2')^2 - (y_3')^2$, где y' - координаты в новом ОНБ.

Билет №17

1. **Теория:** Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его свойства. Инвариантность следа и определителя матрицы оператора.

2. **Задача:** Дана симметричная билинейная форма $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3$. Доказать, что если $f(a, a) = 0$ для некоторого ненулевого вектора $a \in \mathbb{R}^3$, то это не означает, что форма не является положительно полуопределенной (привести пример такого a, если возможно, или объяснить почему невозможно). Проверить форму на положительную полуопределенность.

Решение задачи 17: Матрица билинейной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Квадратичная форма: $q(x) = f(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2$.

1. Проверка на положительную полуопределенность (по критерию Сильвестра): $\Delta_1 = 1 > 0$. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$. $\Delta_3 = \det(A) = -1 < 0$. Так как $\Delta_3 < 0$, форма не является положительно полуопределенной. Она знакопеременная.

2. Поиск ненулевого вектора a такого, что $q(a) = 0$: $q(x) = (x_1+x_2)^2+x_2^2-x_3^2$. Ищем $a = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ такой, что $(a_1 + a_2)^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0$. Пусть $a_2 = 0$. Тогда $(a_1)^2 - a_3^2 = 0 \implies a_1^2 = a_3^2$. Возьмем $a = (1, 0, 1)^T \neq 0$. $q(1, 0, 1) = (1 + 0)^2 + 0^2 - 1^2 = 0$. Такой вектор существует.

3. Утверждение: "если $f(a, a) = 0$ для ненулевого a, то это не означает, что форма не является положительно полуопределенной"верно в общем. Например, $q(x) = (x_1 - x_2)^2$ положительно полуопределена, но $q(1, 1) = 0$. Для данной конкретной формы, она не является положительно полуопределенной, что показано критерием Сильвестра.

Билет №18

1. **Теория:** Ортонормированные базисы и ортогональные (унитарные) матрицы. Существование ортонормированного базиса в пространстве со скалярным произведением. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряженного к нему.

2. **Задача:** В эрмитовом пространстве оператор ϕ удовлетворяет $\phi^3 - 5\phi^2 + 6\phi = 0$. ϕ унитарен? ϕ диагонализируем?

Решение задачи 18: Аннулирующий многочлен $P(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$.

1. Диагонализируемость: $P(\lambda)$ имеет только простые корни (0, 2, 3). Минимальный многочлен $\mu_\phi(\lambda)$ делит $P(\lambda)$, значит, $\mu_\phi(\lambda)$ также имеет только простые корни. Оператор диагонализируем т. и т.т., когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней. Следовательно, ϕ диагонализируем.

2. Унитарность: Если ϕ унитарен, то все его собственные значения (корни $\mu_\phi(\lambda)$) должны лежать на единичной окружности ($|\lambda| = 1$). Собственные значения ϕ принадлежат множеству $\{0, 2, 3\}$. $|0| = 0 \neq 1$, $|2| = 2 \neq 1$, $|3| = 3 \neq 1$. Если пространство не нулевое, то ϕ имеет хотя бы одно СЗ из $\{0, 2, 3\}$ (если ϕ не нулевой оператор). Ни одно из них не имеет модуль 1. Следовательно, ϕ не унитарен (если $V \neq \{0\}$).

Билет №19

1. **Теория:** Циклические подпространства. Теорема о нильпотентном операторе. Жорданова нормальная форма и жорданов базис линейного оператора. (Теорема существования жорданова базиса).

2. **Задача:** Пусть q - квадратичная функция на V, $\dim V = n$. Известно, что знаки её угловых миноров чередуются: $D_1 > 0, D_2 < 0, D_3 > 0, \dots, (-1)^{k-1}D_k > 0, \dots$. Какую максимальную размерность может иметь подпространство U, на котором q отрицательно определена?

Решение задачи 19: По теореме Якоби, если все угловые миноры $D_k \neq 0$, существует базис, в котором $q(y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$, где $\lambda_k = D_k/D_{k-1}$ ($D_0 = 1$).

Коэффициенты: $\lambda_1 = D_1/D_0 = D_1 > 0$. $\lambda_2 = D_2/D_1$. Знак D_2 отрицательный, D_1 положительный $\implies \lambda_2 < 0$. $\lambda_3 = D_3/D_2$. Знак D_3 положительный, D_2 отрицательный $\implies \lambda_3 < 0$.

В общем, для $k \geq 2$, знак D_k есть $(-1)^{k-1}$, знак D_{k-1} есть $(-1)^{k-2}$. Тогда знак $\lambda_k = D_k/D_{k-1}$ есть $\frac{(-1)^{k-1}}{(-1)^{k-2}} = -1$.

Следовательно, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$. Число отрицательных членов (отрицательный индекс инерции r_-) равно $n-1$. Максимальная размерность подпространства, на котором q отрицательно определена, равна $r_- = n-1$.

Билет №20

1. **Теория:** Евклидовы и эрмитовы пространства. Матрица Грама системы векторов, ее свойства, неравенства КБШ и треугольника.

2. **Задача:** Пусть $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На пространстве вещественных матриц $V = M_2(\mathbb{R})$ задано отображение $\phi(X) = (MX)^T - XM^T$. а) Доказать, что ϕ является линейным оператором. б) Найти матрицу этого оператора в базисе $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ (матричные единицы). в) Найти его собственные значения и, если возможно, собственные векторы.

Решение задачи 20: а) Линейность: $\phi(X+Y) = (M(X+Y))^T - (X+Y)M^T = (MX)^T + (MY)^T - XM^T - YM^T = \phi(X) + \phi(Y)$. $\phi(cX) = (M(cX))^T - (cX)M^T = c(MX)^T - cXM^T = c\phi(X)$. ϕ линеен.

б) Матрица оператора A_ϕ. $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Столбец $(0,0,0,0)^T$. $\phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Столбец $(-2,-1,1,0)^T$. $\phi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Столбец $(2,1,-1,0)^T$. $\phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Столбец $(0,0,0,0)^T$. $A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) Собственные значения: $\det(A_\phi - \lambda E) = \lambda^3(\lambda+2)$. СЗ: $\lambda_1 = 0$ (алг. кратность 3), $\lambda_2 = -2$ (алг. кратность 1).

Для $\lambda_1 = 0$: $A_\phi v = 0 \implies -x_2 + x_3 = 0$. Базис $\operatorname{Ker} A_\phi$: $v_1 = (1,0,0,0)^T \leftrightarrow E_{11}$ $v_2 = (0,1,1,0)^T \leftrightarrow E_{12} + E_{21}$ $v_3 = (0,0,0,1)^T \leftrightarrow E_{22}$. Геом. кратность 3.

Для $\lambda_2 = -2$: $(A_\phi + 2E)v = 0$. Решая систему, получаем $x_4 = 0, x_3 = -x_2, x_1 = 2x_2$. Собственный вектор $v_4 = (2,1,-1,0)^T \leftrightarrow 2E_{11} + E_{12} - E_{21}$.

Билет №21

1. **Теория:** Преобразования, сопряжённые к ним. Существование и единственность, свойства. Теорема Фредгольма.

2. **Задача:** $\operatorname{Exp}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение задачи 21:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

1. **Собственные значения:** Характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda I) = (6-\lambda)(-6-\lambda) - (5)(-4) = \lambda^2 - 36 + 20 = \lambda^2 - 16 = 0$. Собственные значения: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$.

2. **Вычисление** $\operatorname{Exp}(A)$ **через** $e^A = c_0 I + c_1 A$: Так как собственные значения различны, такой вид представления возможен. $e^{\lambda_i} = c_0 + c_1\lambda_i$: $e^4 = c_0 + 4c_1$ $e^{-4} = c_0 - 4c_1$

Решая систему: $c_0 = \frac{e^4+e^{-4}}{2} = \cosh(4)$. $c_1 = \frac{e^4-e^{-4}}{8} = \frac{\sinh(4)}{4}$.

3. $\text{Exp}(A) = c_0 I + c_1 A = \cosh(4)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\sinh(4)}{4}\begin{pmatrix}6 & 5\\-4 & -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(4)+\frac{6}{4}\sinh(4) & \frac{5}{4}\sinh(4)\\ -\sinh(4) & \cosh(4)-\frac{6}{4}\sinh(4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(4)+\frac{3}{2}\sinh(4) & \frac{5}{4}\sinh(4)\\ -\sinh(4) & \cosh(4)-\frac{3}{2}\sinh(4)\end{pmatrix}$.

Выражая через экспоненты: $\cosh(4) = \frac{e^4+e^{-4}}{2}$, $\sinh(4) = \frac{e^4-e^{-4}}{2}$. Первый элемент: $\frac{e^4+e^{-4}}{2} + \frac{3}{2}\frac{e^4-e^{-4}}{2} = \frac{2e^4+2e^{-4}+3e^4-3e^{-4}}{4} = \frac{5e^4-e^{-4}}{4}$. Второй элемент: $\frac{5}{4}\frac{e^4-e^{-4}}{2} = \frac{5(e^4-e^{-4})}{8}$. Третий элемент: $-\frac{e^4-e^{-4}}{2} = \frac{-4e^4+4e^{-4}}{8}$. Четвертый элемент: $\frac{e^4+e^{-4}}{2} - \frac{3}{2}\frac{e^4-e^{-4}}{2} = \frac{2e^4+2e^{-4}-3e^4+3e^{-4}}{4} = \frac{-e^4+5e^{-4}}{4}$.

$\text{Exp}(A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}10e^4-2e^{-4} & 5e^4-5e^{-4}\\ -4e^4+4e^{-4} & -2e^4+10e^{-4}\end{pmatrix}$.

Билет №22

1. **Теория:** Полярное разложение линейного оператора. Единственность полярного разложения невырожденного оператора.

2. **Задача:** Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4+x^3+2x^2+x+1$ и $g(x) = x^3-x^2-x-2$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ и выразить его линейно через $f(x)$ и $g(x)$.

Решение задачи 22:

Применим алгоритм Евклида для нахождения НОД $f(x)$ и $g(x)$.

1. Делим $f(x) = x^4+x^3+2x^2+x+1$ на $g(x) = x^3-x^2-x-2$. Выполняя деление столбиком: $x^4+x^3+2x^2+x+1 = (x+2)(x^3-x^2-x-2)+(5x^2+5x+5)$. Обозначим остаток $r_1(x) = 5x^2+5x+5 = 5(x^2+x+1)$. Для дальнейших шагов удобнее использовать $r_1'(x) = x^2+x+1$.

2. Делим $g(x) = x^3-x^2-x-2$ на $r_1'(x) = x^2+x+1$. Выполняя деление столбиком: $x^3-x^2-x-2 = (x-2)(x^2+x+1)+0$. Остаток равен 0.

3. Последний ненулевой остаток (с точностью до константного множителя) является НОД. Следовательно, НОД$(f(x), g(x)) = x^2+x+1$.

4. Выразим НОД линейно через $f(x)$ и $g(x)$, используя результаты первого шага деления: $5(x^2+x+1) = f(x)-(x+2)g(x)$. Разделив на 5, получаем: $x^2+x+1 = \frac{1}{5}f(x) - \frac{x+2}{5}g(x)$.

Билет №23

1. **Теория:** Самосопряженное линейное преобразование. Свойства самосопряженных преобразований. Основная теорема о самосопряженных операторах (существование ортонормированного базиса из собственных векторов).

2. **Задача:** Найти матрицу ортогонального проектирования на пространство $L \subset \mathbb{R}^4$, заданное системой: $L: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение задачи 23:

1. **Находим базис подпространства** L**.** Из системы уравнений: $x_2 = -x_1$ и $x_3 = 4x_4$. Общее решение: $x = (x_1, -x_1, 4x_4, x_4)^T = x_1(1, -1, 0, 0)^T + x_4(0, 0, 4, 1)^T$. Базисные векторы L: $a_1 = (1, -1, 0, 0)^T$ и $a_2 = (0, 0, 4, 1)^T$. Проверяем их ортогональность (в стандартном скалярном произведении): $(a_1, a_2) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 0$. Так как $(a_1, a_2) = 0$, векторы a_1, a_2 образуют ортогональный базис L.

2. **Нормируем базисные векторы для получения ортонормированного базиса (ОНБ)** L**.** $\|a_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. $u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T$. $\|a_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$. $u_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(0, 0, 4, 1)^T$. ОНБ L: $\{u_1, u_2\}$.

3. **Находим матрицу ортогонального проектора** P_L**.** Матрица проектора A_{P_L} на подпространство L с ОНБ $\{u_1, u_2\}$ вычисляется по формуле $A_{P_L} = u_1 u_1^T + u_2 u_2^T$.

$$u_1 u_1^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 u_2^T = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{P_L} = u_1 u_1^T + u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/17 & 4/17 \\ 0 & 0 & 4/17 & 1/17 \end{pmatrix}.$$

Билет №24

1. **Теория:** Тензоры (p, q). Тензорное произведение тензоров. Координатная запись тензоров, изменение координат при переходе от одного базиса к другому. Тензорный базис.

2. **Задача:** $\phi : V \to V$ - линейный оператор, $q \in Q(V)$ - квадратичная форма. Оператор $\phi^+ : Q(V) \to Q(V)$ такой, что $(\phi^+ q)(x) = q(\phi(x))$. а) Доказать, что ϕ^+ линейный оператор на $Q(V)$. б) Доказать, что ϕ^+ невырожден тогда и только тогда, когда ϕ невырожден.

Решение задачи 24:

Пространство $Q(V)$ квадратичных форм на V само является линейным пространством.

а) **Линейность оператора ϕ^+**

Пусть $q_1, q_2 \in Q(V)$ и c - скаляр из поля, над которым определено V. 1. Проверка аддитивности: $(\phi^+(q_1+q_2))(x) = (q_1+q_2)(\phi(x))$ (по определению ϕ^+) $= q_1(\phi(x)) + q_2(\phi(x))$ (по определению суммы квадратичных форм) $= (\phi^+q_1)(x) + (\phi^+q_2)(x) = (\phi^+q_1 + \phi^+q_2)(x)$ (по определению суммы операторов на $Q(V)$). Так как это верно для любого $x \in V$, то $\phi^+(q_1+q_2) = \phi^+q_1 + \phi^+q_2$.

2. Проверка однородности: $(\phi^+(cq_1))(x) = (cq_1)(\phi(x))$ (по определению ϕ^+) $= c \cdot q_1(\phi(x))$ (по определению умножения квадратичной формы на скаляр) $= c \cdot (\phi^+q_1)(x) = (c(\phi^+q_1))(x)$ (по определению умножения оператора на скаляр). Так как это верно для любого $x \in V$, то $\phi^+(cq_1) = c(\phi^+q_1)$. Следовательно, ϕ^+ является линейным оператором на пространстве $Q(V)$.

б) **Невырожденность ϕ^+ и ϕ**

Оператор ϕ^+ невырожден тогда и только тогда, когда его ядро $\mathrm{Ker}(\phi^+) = \{0_{Q(V)}\}$, где $0_{Q(V)}$ - нулевая квадратичная форма. Условие $q \in \mathrm{Ker}(\phi^+)$ означает, что $(\phi^+q)(x) = 0$ для всех $x \in V$, то есть $q(\phi(x)) = 0$ для всех $x \in V$.

($\Rightarrow$) Докажем: если ϕ^+ невырожден, то ϕ невырожден. Предположим противное: ϕ^+ невырожден, а ϕ вырожден. Если ϕ вырожден, то его образ $\mathrm{Im}\,\phi$ является собственным подпространством V, т.е. $\mathrm{Im}\,\phi \neq V$. Можно построить ненулевую квадратичную форму $q_0 \neq 0_{Q(V)}$ такую, что $q_0(y) = 0$ для всех $y \in \mathrm{Im}\,\phi$, но $q_0(z) \neq 0$ для некоторого $z \notin \mathrm{Im}\,\phi$. (Например, если $\dim V = n$, $\dim \mathrm{Im}\,\phi = k < n$, выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ в $\mathrm{Im}\,\phi$, дополним до базиса $e_1, \ldots, e_n$ в V. Тогда форма $q_0(x) = (\text{координата при } e_{k+1})^2$ будет такой). Для этой q_0: $(\phi^+q_0)(x) = q_0(\phi(x))$. Поскольку $\phi(x) \in \mathrm{Im}\,\phi$ для любого x, то $q_0(\phi(x)) = 0$ для всех x. Это означает, что $\phi^+q_0 = 0_{Q(V)}$. Но $q_0 \neq 0_{Q(V)}$, значит $q_0 \in \mathrm{Ker}(\phi^+)$ и $q_0 \neq 0_{Q(V)}$. Это противоречит невырожденности ϕ^+. Следовательно, наше предположение неверно, и ϕ должен быть невырожден.

($\Leftarrow$) Докажем: если ϕ невырожден, то ϕ^+ невырожден. Если ϕ невырожден, то он является автоморфизмом V, то есть $\mathrm{Im}\,\phi = V$. Любой вектор $y \in V$ можно представить как $y = \phi(x)$ для некоторого $x \in V$. Пусть $q \in \mathrm{Ker}(\phi^+)$. Это означает, что $q(\phi(x)) = 0$ для всех $x \in V$. Так как $\mathrm{Im}\,\phi = V$, то для любого $y \in V$ существует x такой, что $y = \phi(x)$. Тогда $q(y) = 0$ для всех $y \in V$. Это означает, что $q = 0_{Q(V)}$ (является нулевой квадратичной формой). Следовательно, $\mathrm{Ker}(\phi^+) = \{0_{Q(V)}\}$, и оператор ϕ^+ невырожден.

Таким образом, доказано, что ϕ^+ невырожден тогда и только тогда, когда ϕ невырожден.

Билет №25

1. **Теория:** Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (случай, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).

2. **Задача:** Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $Q(x) = x(x-2)(x-4)$, если известно, что остаток от деления $P(x)$ на $x(x-2)$ равен $r_1(x) = x+2$, а остаток от деления $P(x)$ на

$(x-2)(x-4)$ равен $r_2(x) = 3x - 2$.

Решение задачи 25:

Пусть $P(x)$ - данный многочлен. По условию имеем: 1) $P(x) = D_1(x) \cdot x(x-2) + (x+2)$ 2) $P(x) = D_2(x) \cdot (x-2)(x-4) + (3x-2)$

Пусть $R(x)$ - искомый остаток от деления $P(x)$ на $Q(x) = x(x-2)(x-4)$. Поскольку степень $Q(x)$ равна 3, степень $R(x)$ не выше 2. Запишем $R(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $P(x) = D(x) \cdot x(x-2)(x-4) + (ax^2 + bx + c)$.

Используем значения $P(x)$ в корнях делителя $Q(x)$, то есть в точках $x = 0, x = 2, x = 4$. Значения $P(x)$ в этих точках совпадают со значениями $R(x)$ в этих точках.

Из условия (1): $P(0) = r_1(0) = 0 + 2 = 2$. $P(2) = r_1(2) = 2 + 2 = 4$.

Из условия (2): $P(2) = r_2(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$. (Значение совпадает, данные корректны). $P(4) = r_2(4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$.

Теперь составим систему уравнений для коэффициентов a, b, c остатка $R(x)$: $R(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$. Так как $R(0) = P(0)$, то $c = 2$.

$R(2) = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$. Так как $R(2) = P(2)$, то $4a + 2b + c = 4$.

$R(4) = a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$. Так как $R(4) = P(4)$, то $16a + 4b + c = 10$.

Подставляем $c = 2$ в остальные уравнения: 1) $4a + 2b + 2 = 4 \implies 4a + 2b = 2 \implies 2a + b = 1$. 2) $16a + 4b + 2 = 10 \implies 16a + 4b = 8 \implies 4a + b = 2$.

Решаем систему для a и b: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 2 \end{cases}$ Вычтем первое уравнение из второго: $(4a - 2a) + (b - b) = 2 - 1 \implies 2a = 1 \implies a = 1/2$.

Подставим $a = 1/2$ в первое уравнение $2a + b = 1$: $2(1/2) + b = 1 \implies 1 + b = 1 \implies b = 0$.

Итак, коэффициенты остатка: $a = 1/2, b = 0, c = 2$.

Искомый остаток: $R(x) = \frac{1}{2}x^2 + 0x + 2 = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

Ответ: Остаток от деления равен $\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Билет №26

1. **Теория:** Корни многочлена, теорема Безу, кратные корни, теорема о них, формальная производная.

2. **Задача:** Докажите, что всякий многочлен $p(\lambda)$ степени n со старшим членом $(-1)^n\lambda^n$ является характеристическим для некоторой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ (при условии, что коэффициенты $p(\lambda)$ вещественны).

Решение задачи 26:

Пусть дан многочлен $p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, где $a_i \in \mathbb{R}$. Характеристический многочлен матрицы A определяется как $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. При раскрытии этого определителя коэффициент при λ^n всегда равен $(-1)^n$.

Рассмотрим многочлен $p_0(\lambda) = (-1)^n p(\lambda) = \lambda^n + \frac{a_{n-1}}{(-1)^n}\lambda^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{(-1)^n}\lambda + \frac{a_0}{(-1)^n}$. Обозначим коэффициенты $p_0(\lambda)$ как: $p_0(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$, где $d_k = \frac{a_k}{(-1)^n}$ для $k = 0, \dots, n-1$. Все коэффициенты d_k вещественны, так как a_k вещественны.

Построим так называемую сопровождающую матрицу (или фробениусову клетку) для многочлена $p_0(\lambda)$:

$$C(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Эта матрица $C(p_0)$ имеет размер $n \times n$, и все ее элементы вещественны. Известно (это стандартный результат теории матриц), что характеристический многочлен сопровождающей матрицы $C(p_0)$ равен $\chi_{C(p_0)}(\lambda) = (-1)^n p_0(\lambda)$.

Подставим выражение для $p_0(\lambda)$: $\chi_{C(p_0)}(\lambda) = (-1)^n\left(\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_0\right) = (-1)^n\left(\lambda^n + \frac{a_{n-1}}{(-1)^n}\lambda^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{(-1)^n}\right) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^n\frac{a_{n-1}}{(-1)^n}\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n\frac{a_0}{(-1)^n} = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = p(\lambda)$.

Таким образом, мы построили матрицу $A = C(p_0) \in M_n(\mathbb{R})$, характеристический многочлен которой $\chi_A(\lambda)$ совпадает с данным многочленом $p(\lambda)$. Это доказывает утверждение.