

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

## по курсу «Алгебра и геометрия»

1 курс, 2 семестр, 2024/25 уч.г.

(Поток Штепина В.В., ФПМИ)

1. Кольцо многочленов над полем. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное выражение НОД.
2. Неприводимость многочленов. Основная теорема арифметики для многочленов.
3. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.
4. Лемма Даламбера. Основная теорема алгебры (схема доказательства) и ее следствия.
5. Поле частных области целостности. Теоремы о разложениях правильной рациональной дроби.
6. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его свойства. Инвариантность следа и определителя матрицы оператора.
7. Линейная независимость собственных векторов, имеющих попарно различные собственные значения. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения. Условия диагонализруемости линейного оператора.
8. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона-Кэли (случай, когда характеристический многочлен линейного оператора раскладывается на линейные множители).
9. Корневое подпространство линейного оператора. Свойства корневых подпространств. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств (случай, когда характеристический многочлен линейного оператора раскладывается на линейные множители).
10. Циклические подпространства. Теорема о нильпотентном операторе. Жорданова нормальная форма и жорданов базис линейного оператора. (Теорема существования жорданова базиса).
11. Жорданова диаграмма. Метод ее построения без поиска жорданова базиса. Теорема о единственности жордановой нормальной формы с точностью до перестановки клеток.
12. Аннулирующий и минимальный многочлен линейного оператора. Связь минимального многочлена с жордановой нормальной формой.
13. Норма в линейном пространстве. Норма линейного оператора. вычисление многочлена и аналитической функции от линейного оператора.
14. Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (случай, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
15. Билинейные функции. Координатная запись билинейной функции. Матрица билинейной функции и ее изменение при замене базиса. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметричной (кососимметричной) билинейной функции и его свойства.
16. Симметричные билинейные и квадратичные функции, связь между ними. Поляризационное тождество. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

17. Индексы инерции квадратичной формы в действительном линейном пространстве. Закон инерции. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду.
18. Положительно определенные квадратичные функции. Критерий Сильвестра. Кососимметрические билинейные функции, приведение их к каноническому виду.
19. Полуторалинейные формы в комплексном линейном пространстве. Эрмитовы полуторалинейные и квадратичные формы, связь между ними. Приведение их к каноническому виду. Закон инерции для эрмитовых квадратичных форм. Критерий Сильвестра.
20. Евклидово и эрмитово пространство. Выражение скалярного произведения в координатах. Матрица Грама системы векторов и ее свойства. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
21. Ортонормированные базисы и ортогональные (унитарные) матрицы. Существование ортонормированного базиса в пространстве со скалярным произведением. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряженного к нему.
22. Ортогональное дополнение к подпространству. Задача об ортогональной проекции и ортогональной составляющей. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Объем параллелепипеда.
23. Преобразование, сопряженное данному. Существование и единственность такого преобразования, его свойства. Теорема Фредгольма.
24. Самосопряженное линейное преобразование. Свойства самосопряженных преобразований. основная теорема о самосопряженных операторах (существование ортонормированного базиса из собственных векторов).
25. Ортогональные преобразования и их свойства. Канонический вид ортогонального преобразования. Инвариантные подпространства малых размерностей для линейного оператора в действительном линейном пространстве.
26. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве. Единственность полярного разложения для невырожденного оператора.
27. Приведение квадратичной формы в пространстве со скалярным произведением к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
28. Унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного преобразования.
29. Тензоры типа  $(p, q)$ . Тензорное произведение тензоров. Координатная запись тензора, изменение координат при замене базиса, тензорный базис.
30. Алгебраические операции над тензорами (перестановка индексов, свертка). Симметричные и кососимметричные тензоры. Операторы симметрирования и альтернирования и их свойства.