

모나드 이해하기

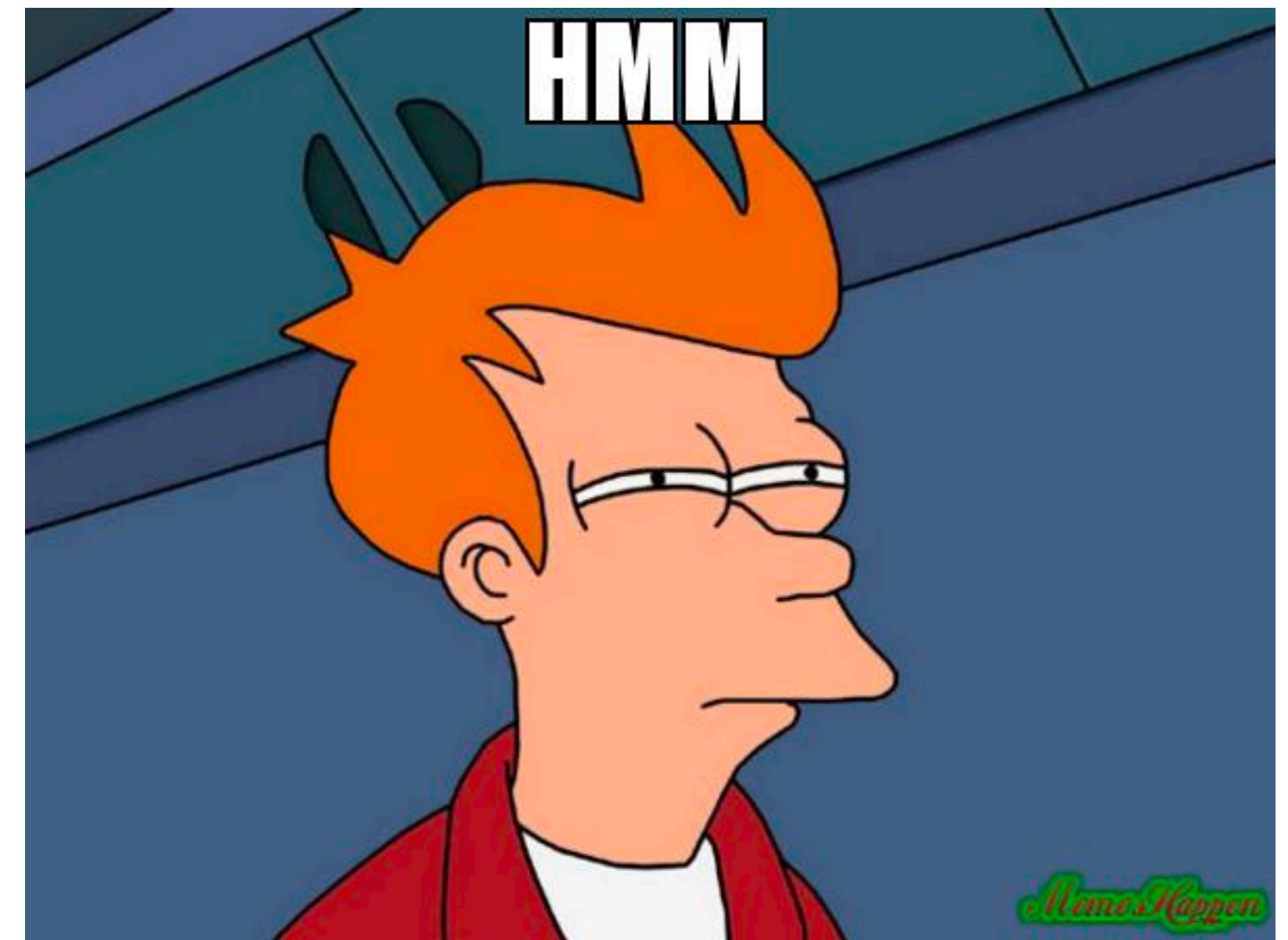
2023.08.27

프로그래머의 특기

- 다른 분야에서 개념을 비슷한 개념을 차용해서 프로그래밍에 적용시킨 다음, 똑같은 이름으로 불러서 헷갈리게 만들기
- Ex) Router, 물리기기? Api server의 라우터?

모나드가 무엇인가?

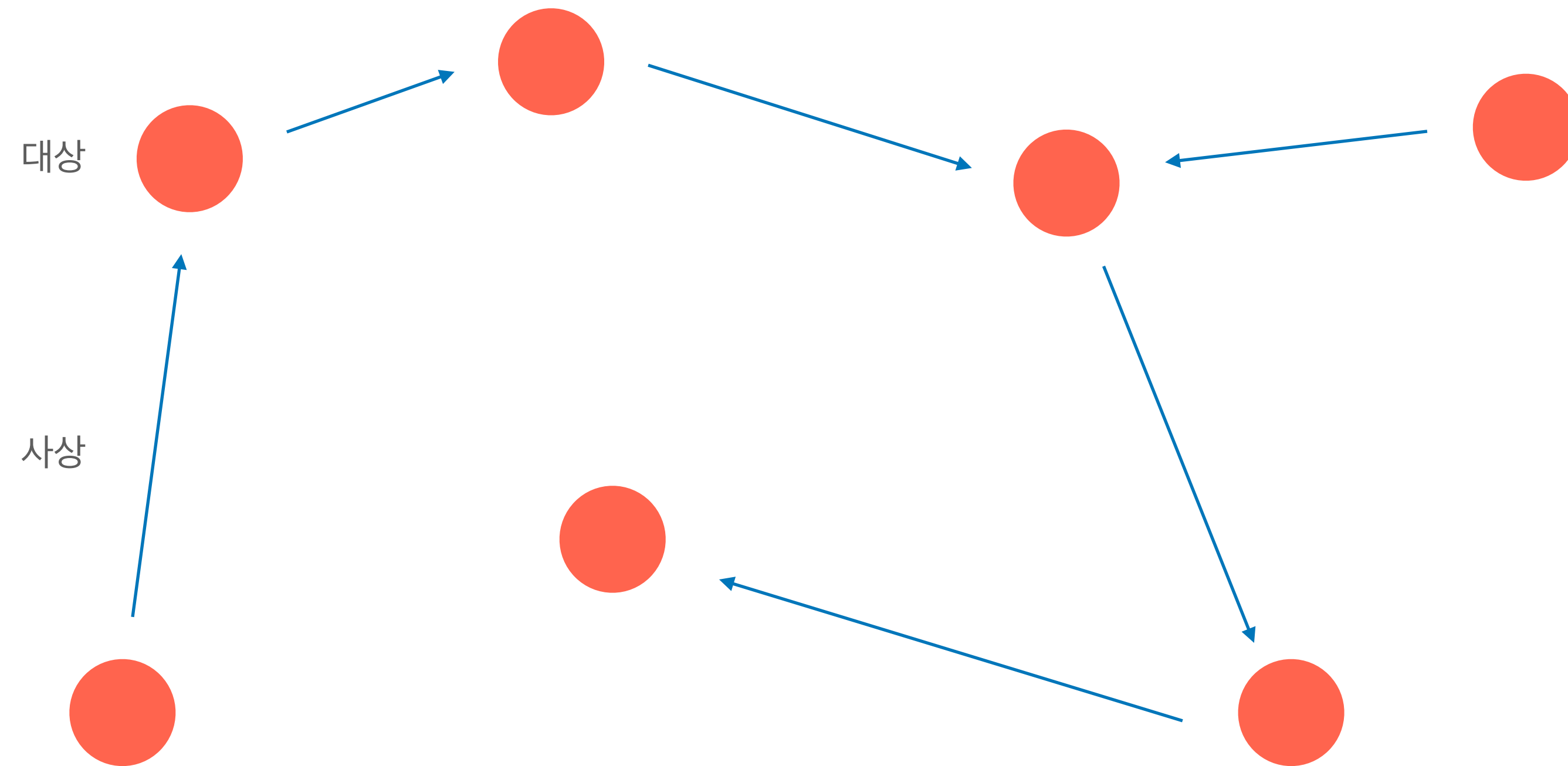
- In **category theory**, a branch of **mathematics**, a **monad** (also **triple**, **triad**, **standard construction** and **fundamental construction**) is a **monoid** in the **category** of **endofunctors** of some fixed category.



범주론 (category theory)

- 범주론 : 수학 전반에서 등장하는 각종 수학적 구조와 그들 간의 관계를 메타 개념으로 생각하여, 그들을 범주(category)라는 추상적인 개념으로 묶어서 다루는 이론
- 범주 : 범주는 다음과 같은 데이터로 이루어진다
 - 대상, 사상, 사상의 합성(composition), 항등 사상(identity morphism)
 - 사상의 합성은 결합 법칙이 적용되어야한다
 - 특정 사상에 항등 사상을 결합해도 결과는 동일한 사상이어야한다

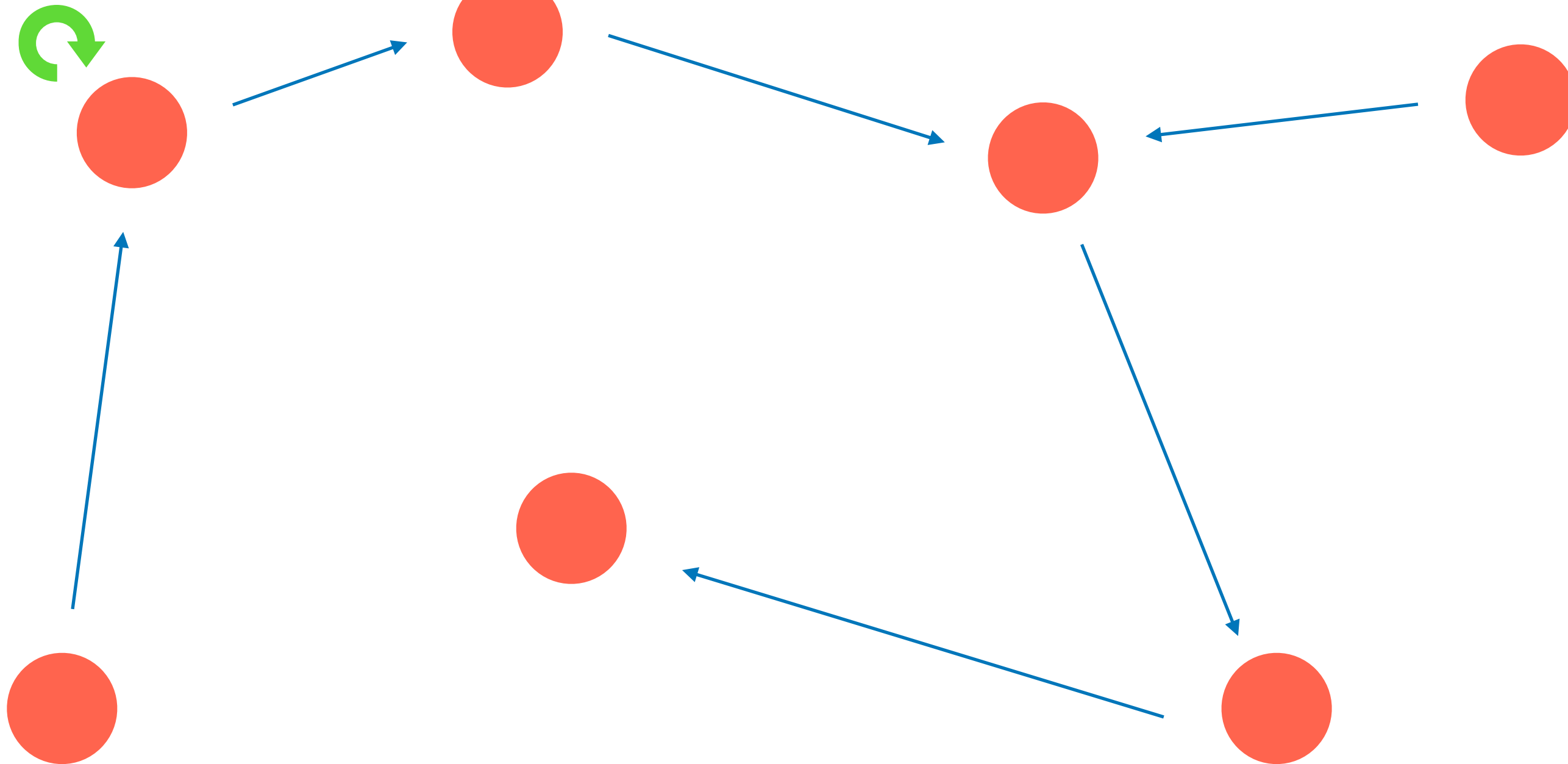
대상과 사상



- 대상(object)가 있고, 이를 연결하는 화살표가 사상(morphism)이다
- 대상간의 단방향 관계를 의미 (함수의 추상화)

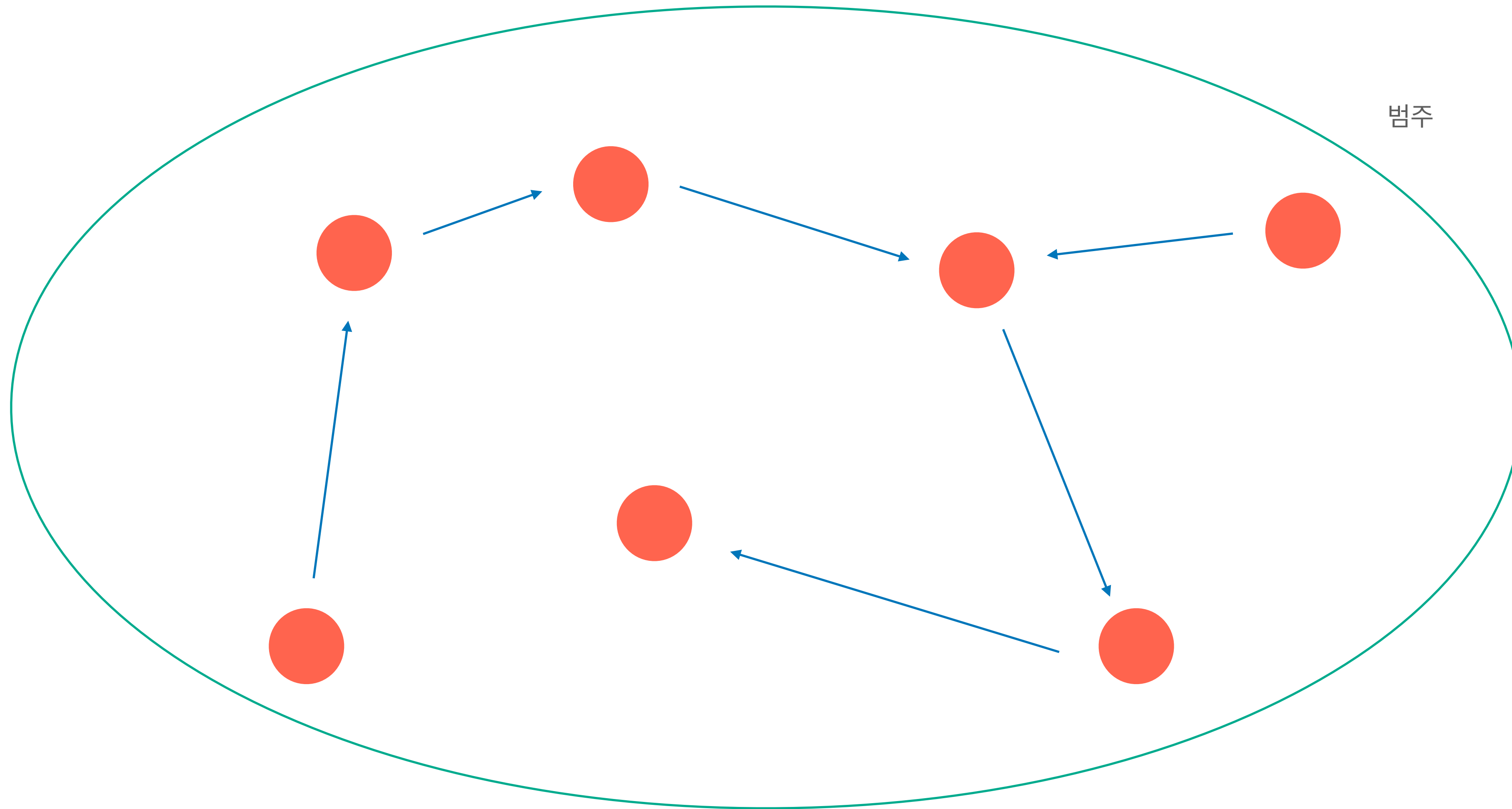
자기 사상

자기 사상



- 스스로를 가르키는 화살표를 자기 사상(endomorphism)이라고 부른다
- 정의역과 공역이 같은 함수로 이해할 수 있다

범주



- 대상(object) 사이의 사상(morphism)들의 모임이 범주(category)를 이룬다

사상 합성

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$A \xrightarrow{f \circ g} C$$

- 사상 f 와 g 가 존재하면, 사상 f 와 g 를 합성하는 방법이 존재해야한다.

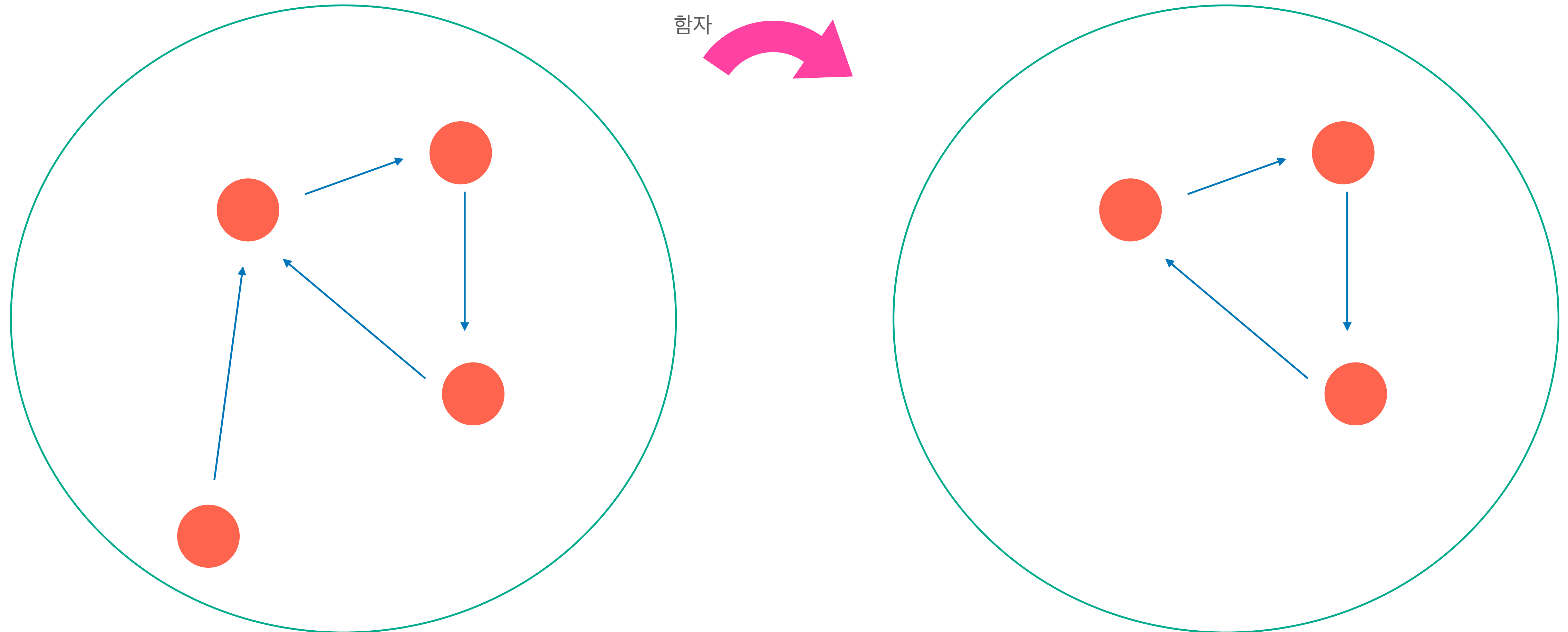
결합 법칙, 항등 법칙

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \\ &= h \circ g \circ f\end{aligned}$$

$$1_A = A \rightarrow A$$

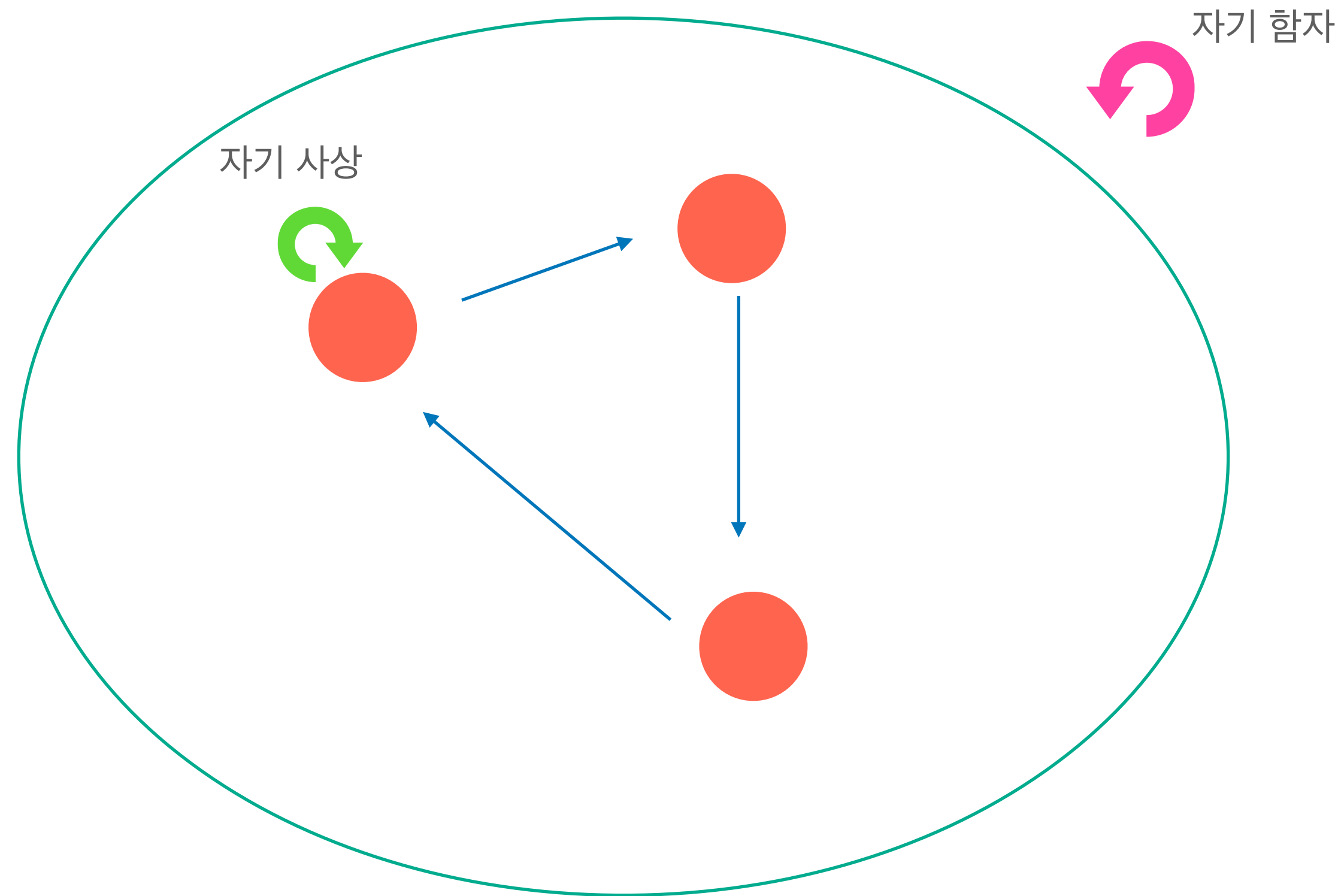
$$f \circ 1_A = f$$

함자



- 함자(functor)는 두 범주 사이의 함수에 해당하는 구조이다
- 대상을 대상으로 사상을 사상으로 대응(mapping) 시킨다

자기 함자



- 자기 함자(endofunctor)는 정의역과 공역이 같은 함자이다
- 자기 함자는 모든 대상/사상을 범주안의 대상/사상에 대응시킨다

반군과 모노이드

- **반군** : 반군(semigroup)은 집합과 그에 대한 이항 연산이 부여된 대수 구조이다.
해당 이항 연산은 결합법칙을 따르고, 닫혀 있어야 한다
- 반군에 항등원이 존재하는 경우 **모노이드**(monoid)가 된다.

정수와 곱셈으로 이루어진 군은 모노이드다

1. 곱셈은 결합 법칙을 만족한다
2. 함수의 치역이 정수이로, 닫혀있다
3. 항등원 1이 존재한다

정수와 나눗셈으로 이루어진 군은 모노이드가 아니다

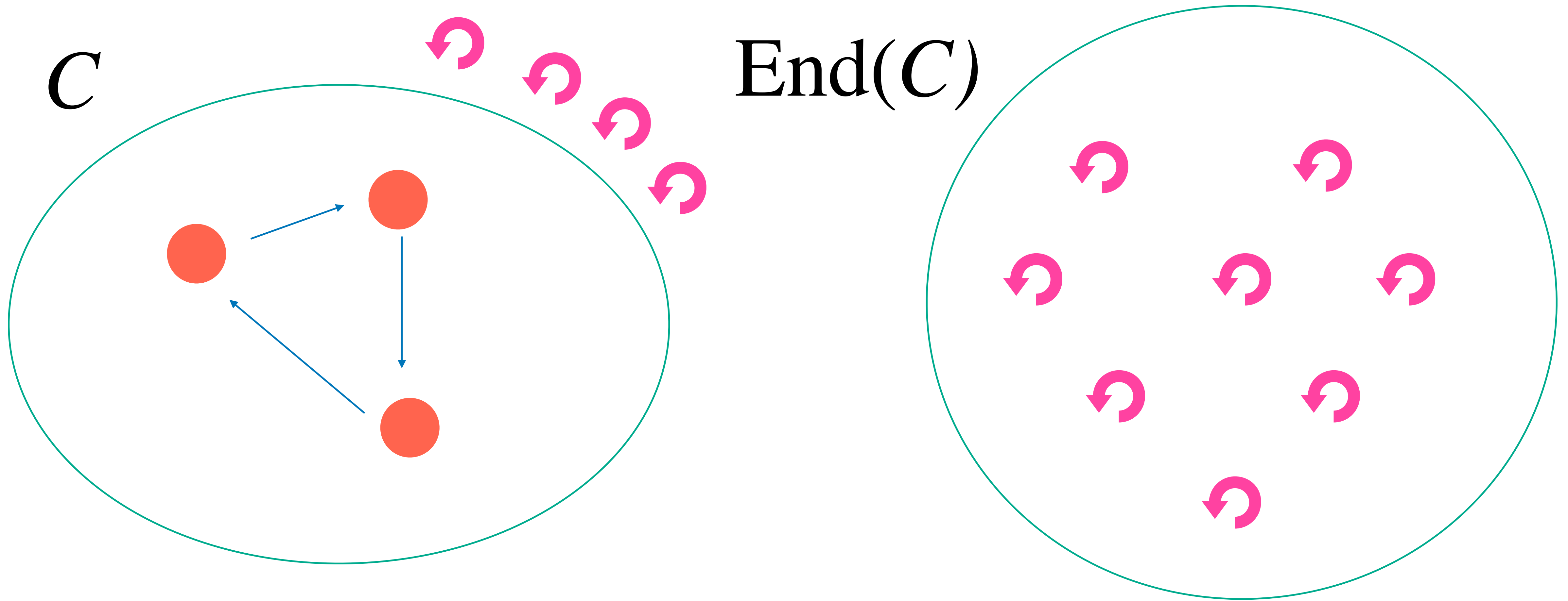
1. 나눗셈은 결합법칙을 만족하지 않는다
2. 함수의 치역은 실수로, 열려있다
3. 항등원(양쪽 항등원)이 존재하지 않는다

준비완료!

- 범주는 대상, 사상, 사상 합성, 항등 사상으로 이루어진다
- 함자는 범주를 범주로 대응 시키는 구조이다
- 자기 함자는 범주 C 를 C 에 대응 시키는 구조이다
- 반군은 집합과 결합 법칙을 만족하는 이항 연산(완전 함수)로 이루어진다
- 항등원이 존재하는 반군을 **모노이드**라고 부른다
- **모노이드**는 수학적 구조이다

준비완료!





- $\text{End}(C)$ 가 항등원을 포함하면서, 닫혀있는 이항 연산이 존재하면 $\text{End}(C)$ 에 모노이드(수학적 구조)가 존재한다고 할 수 있음
- 해당 모노이드를 C 의 **모나드(monad)**라고 부름

이 개념을 어떻게 차용 하는지는 다음 시간에...

- A **monad** is a **monoid** in the **category** of **endofunctors** of some fixed category.
- 모나드란 특정 범주에 대한 자기 함자로 이루어진 범주의 모노이드다.

