Analysis

Arif Hasanic

28. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgelichungen allgemein

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Funktion in der Ableitung von genau dieser Funktion auftreten können und hat die Form:

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \tag{1}$$

Ist $b(x) = 0$ nennt man die DGL eine homgene DGL, ansonsten hat man eine inhomogene DGL. Die Ordnung einer DGL ist gleich der höchsten Ableitung, welche in der DGL zu finden ist.
Löst man eine DGL nach der höchsten Ableitung auf[1] hat man die DGL in die explizite Form gebracht; ansonsten hat man die implizite Form.
Eine DGL kann man entweder allgemein lösen oder man findet eine spezielle/partikuläre Lösung. Bei der allgemeinen Lösung bleiben idR. n Integrationskonstanten stehen, wenn n gleich der Ordnung der DGL ist. Möchte man die partikuläre Lösung, rechnet man zuerst die allgemeine Lösung aus. Nun müssen bestimmte Werte vorgeben werden um die Werte der Integrationskonstanten errechnen zu können. Diese Werte heißen auch Anfangswerte und um eine spezielle Lösung zu finden werden auch n Werte gebraucht.

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Trennung der Variabeln

Ein relatives einfaches Verfahren zum Lösen von DGLs 1. Ordnung nennt sich TTrennung der Variablen". Damit man das Verfahren anwenden kann muss die DGL aber separabel sein, also alle x-Werte und alle y-Werte müssen jeweils auf einer Seite stehen können.
Da man ein DGL erster Ordnung hat, ist die höchste vorkommende Ableitung y', was man aber auch als $\frac{dy}{dx}$ schreiben kann. Wenn man jetzt sowohl alle x-Werte als auch alle y-Werte auf einer Seite stehen hat, kann man beide nach x bzw. y integrieren. Nach der Integration kann alles nach y umstellen und hat die allgemeine Lösung der DGL gefunden. Beispiel:

$$\begin{aligned} &y' = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y' = x \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow \\ &y\ dy = x\ dx \Leftrightarrow \int y\ dy = \int x\ dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \\ &y = \sqrt{x^2 + 2C} \end{aligned} \tag{2}$$

2.2 Substitutionsmethode

Bei der Lösung durch Substitution muss man zuerst wieder die Gleichung nach y' auflösen. Nun schaut man, von welchen Typ die DGL ist. Die zwei Typen sind $y' = f(ax + bx + c)$ und $y' = \frac{y}{x}$.

[1] Falls überhaupt möglich

2.2.1 Typ: linear

Sei u die Variabel die zur Substitution genommen wird. Zuerst wird u der Gleichung gleichgesetzt: $u = ax+by+c$. Wenn man u nun differenziert erhält man $u' = a+by'$. u ist von x abhängig, da u nur von den variabeln x und y abhängig ist und y wiederum nur von x abhängig ist. Daraus folgt, dass $u' = \frac{du}{dx}$ gilt.

$$u' = \frac{du}{dx} = a + b \cdot y' \tag{3}$$

y' kann man wiederum durch $f(u)$ ersezten, wodurch man eine DGL erhält, welche nur noch von u abhängig ist:

$$u' = \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u) \tag{4}$$

Diese DGL kann man dann durch Trennung der Variabeln lösen und rücksubstituiert das u mit den ursprünglichen Werten.

2.2.2 Typ: quotient

Es gilt dasselbe Prinzip wie bei der linearen Funktion. Man substitutiert nun $\frac{y}{x} = u$. Dementsprechend gilt auch $y = x \cdot u$.
Wird dies nun differenziert erhält man $y' = u+x\cdot u'$. Dabei gilt wiederum $y' = f(\frac{y}{x}) = f(u)$. Wird dies entsprechend eingesetzt gilt:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{5}$$

2.3 lineare DGL mit Störfunktion

Eine lineare Differentialgleichung hat die Form:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \tag{6}$$

Hier wird $g(x)$ auch als Störfunktion bezeichnet. Ist $g(x) = 0$ ist die DGL homogen, ansonsten ist sie inhomogen. Eine homogene DGL lässt sich durch Trennung der Variabeln lösen. Dazu gibt es auch eine allgemein Lösungsform:

$$\begin{aligned}
&y' + f(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)\ dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\ dx \Rightarrow ln|y| = -\int f(x)\ dx + ln|C| \\
&\Rightarrow ln|y| - ln|C| = -\int f(x)\ dx \Rightarrow ln|\frac{y}{C} = \int f(x)\ \ \Rightarrow y - C = \int f(x)\ dx \\
&\Rightarrow y = C \cdot e^{-\int f(x)\ dx}
\end{aligned} \tag{7}$$

Tauchen in der DGL konstante Vorfaktoren auf muss die Lösungsformel noch leicht verändert werden:

$$y' + ay = 0 \Rightarrow y_h = C \cdot e^{-ax} \tag{8}$$

2.3.1 Variation der Konstanten

2.3.2 Aufsuchen der partikulären Lösung

Inhomogene Differentialgleichungen (auch höherer Ordnung) können auch durchs Aufsuchen der partikulären Lösung gelöst werden. Die Lösung einer DGL ist dann die Summe zwischen der homogenen Lösung y_0/y_h und der partikulären Lösung y_p, also:

$$y = y_h + y_p \tag{9}$$

Zuerst wird die homogene Lösung berechnent. Nun muss noch der richtige Ansatz gewählt werden um die partikuläre Lösung zu finden.

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	$y_p = C_0$
2. Lineare Funktion	$y_p = C_1 x + C_0$
3. Quadratische Funktion	$y_p = C_2 x^2 + C_1 x + C_0$
4. Polynom Funktion mit Grad n	$y_p = C_n x^n + ... + C_1 x + C_0$
5. $g(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x)$ 6. $g(x) = C_2 \cdot \cos(\omega x)$ 7. $g(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ für $b \neq -a$ $y_p = Cx \cdot e^{bx}$ für $b = -a$

Um nun die partikulöre Lösung zu finden nimmt den gefundenen Ansatz her und leitet diesen ab. y_p' und y_p werden nun in die ursprüngliche, inhomogene Gleichung eingesetzt. Nun muss man nur noch umformen und einen Koeffizientenvergleich vornehmen um die unbestimmeten Konstanten[2] zu finden.
Beim Koeffizientenvergleich schaut man auf beiden Seiten, was als Vorfaktoren bei den x-Werten steht. Beispiel:

$$2C_1x^2 + (2C_1 + 2C_2)x + (C_2 + 3C_3) = 2x^2 + 0 \cdot x - 4$$

Auf beiden Seiten steht ein x^2. Hier sieht man auch, dass $C_1 = 1$ sein muss damit die Koeffizienten auf beiden Seiten übereinstimmen. Den "Vergleichführt man nun mit allen C_n durchgeführt. Zum Schluss werden die C_n-Werte in den zuvor gewählten Ansatz eingefügt und man erhält die partikuläre Lösung.

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine DGL 2. Ordnung löst man weitesgehend wie eine eine DGL 1. Ordnung, indem man wieder die homgene und die partikuläre Lösung findet und aus diesen die Summe bildet:

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= g(x) \\ \Rightarrow y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \end{aligned} \tag{10}$$

[2] Damit sind die C_n aus der Tabelle gemeint

Homogene Lösung

Bei der homogenen Lösung wählt man vorerst den $y = e^{\lambda x}$. Dies wird dann in die DGL eingesetzt und Entsprechend oft abgeleitet (2 Mal also).

$$\begin{aligned} & y'' = ay' + by = 0 \\ & \Rightarrow e^{\lambda x\,\prime\prime} + ae^{\lambda x\,\prime} + e^{\lambda x} = 0 \\ & \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \quad |\text{Division durch } e^{\lambda x} \\ & \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Man erhält somit einer Formel die man durch die pq-Formel oder der Mitternachtsformel lösen kann. Je nachdem welche Werte λ_1 und λ_2 haben, muss ein andere Ansatz gewählt werden.

Fall	Allgemeine Lösung
1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = c$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{cx}$
3. $\lambda_{1/2} = a + bi$	$y = e^{ax}(C_1 \cdot \sin(bx) + C_2 \cdot \cos(bx))$

Die Werte die man für $\lambda_{1/2}$ berechnet hat werden nun in den richtigen Ansatz eingefügt, wodurch man die homogene Lösung bekommt.

Inhomogene Lösung

Die inhomogene Lösung berechnet sich wie die inhomogene Lösung bei einer DGL 1. Ordnung, nur muss man noch u.U. die Werte von $\lambda_{1/2}$ berücksichtigen.

4 Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Homgene Lösung

Für die Lösung wird wieder das Prinzip aus der DGL 2. Ordnung genommen. Bei der homogonen Lösung wird nun eine Linearkombination aus $C_n \cdot \lambda^n$ und zwar aus allen n gebildet. Sind die Nullstellen gefunden, werden diese dann in den Ansatz eingefügt. Mehrfache Nullstellen werden zusammengefasst:
Hat man eine r-Fache Nullstelle multipliziert man den $e^{\lambda x}$ Teil mit einem Polym $(r-1)$-sten Grades.
Als besispiel: Man hat eine DGL 5. Grades und eine 4-Fache Nullstelle. Somit ergibt sich der Ansatz

$$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + c_5 x^3) \cdot e^{x \cdot \lambda_{2/3/4/5}} \tag{12}$$

Inhomogene Lösung

5 Systeme linearer Differentialgleichungen

Systeme von Differentialgleichungen sind DGLen mit verschiedenen y (Es extistieren y_1, y_2, y_3 etc.), die aber miteiander verkoppelt sind.

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x)$$
$$y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x)$$

Für die Lösung von DGL Systemen gibt es 2 Lösungsansätze.

Homogene Lösung durch Matrix

Mit dem Matrixverfahren kann die homogene Lösung gefunden werden. Beim Matrixverfahren werden aus den Koeffizienten eine Matrix gebildet. Die Koeffizientenmatrix wird mit $\lambda \cdot E$[3] subtrahiert und daraus wird die Determinante gebildet. λ wird so gewählt, dass $\det(A - \lambda E) = 0$ ergibt. Die λ-Werte werden dann in den allgemeinen Lösungsansatz für homogene DGl n-ter Ordnung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
&y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\
&y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x) \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \det(A - \lambda E))
\end{aligned}$$

Für DGL Systeme 2. Ordnung ergibt sich eine $2x2$ Matrix und die Determinante lässt sich durch $\det = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0)$ berechnen. Man erhält dann $\lambda_{1/2}$ und muss wieder eine Fallunterscheidung wie bei normalen DGLs durchführen.

Inhomogene Lösung durch Einsetzverfahren

Ein weiteres Verfahren ist das Einsetzverfahren. Man löst besipielsweise die Gleichung von y_1 nach y y_2 auf und differenziert y_2 nach x. Die Ergebnisse von y_2 und y_2' kann man in die 2. Gleichung einsetzen. Man erhält eine DGL die nur noch von y_1 abghänging ist und löst diese DGL wie eine inhomogene DGL n-ter Ordnung. Man erhält dann das Ergebnis für y_1, und dieses Ergebnis kann man dann in die andere DGL einsetzen und hat somit das ganze System gelöst.

[3] Einheitsmatrix

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \qquad (1)$$
$$y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x) \qquad (2)$$
$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)) \qquad (3)\ ((1) \text{ nach } y_2)$$
$$\Rightarrow y_2' = \frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}y_1' - g_1(x)') \qquad (3')$$

(3) und (3') werden in (2) eingesetzt und (2) wird wie eine normale DGL behandet. Das Ergebnis vonn (2) wird dann in (1) eingesetzt.

6 Vektoralgebra

6.1 Vektordastellung einer Kurve

Kurven in einer Ebene können in der Form:

$$C : x = x(t); y = y(t)$$

Können durch den Kurvenpunkt P (bestimmt durch x(t), y(t)) und durch den Ortsvektor auch as Vektor darsgestellt werden:

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Dies gilt für Kurven in der Ebene, für höhere Dimensionen muss der Vektor entsprechend angepasst werden. Vektoren werden Komponentenweiße abgeleitet; es gelten die selben Produktregeln[4] und Summenregeln.

Bogenlänge

Die Bogenlänge einer Vektorkurve ist definiert durch das Integral des Betrages des abgeleiteten Vektor:

$$s = \int_{t1}^{t2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Um den Tangentenvektor (T) von $\vec{r}$ zu berechnen, muss dieser nur normaliesiert werden. Der Hauptnormaleinheitsvektor ist der der Vektor T nur wird dieser nochmals normalisiert.

6.2 Partielle Differentation

Bei der partiellen Differentation liegt eine Funktion vor, die von mehr als einer Variabeln abhängig ist. Man wählt nun eine Variable, nach der differenziert werden soll, die anderen Variablen werden wie Konstanten behandelt. Ein wichtiger Operator ist der ∇ (Nabla) Operator. Wird dieser angewendet wird nach jeder Variabel abgeleitet.

[4] sowohl Skalarprodukt als auch Vektorprodukt

6.2.1 Gradient

Der Gradient (kurz: grad) ist das Produkt aus ∇ und einem Skalar ϕ. Als Ergebnis erhält man einen Vektor, dessen Komponenten aus dem Differentialen von ϕ nach $x_1, x_2, \cdot, x_n$ besteht.

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned}
&(1)\ \text{grad } c = 0 \\
&(2)\ \text{div } (c \cdot \phi) = c \cdot \text{div } \phi \\
&(3)\ \text{div } (\phi + \psi) = \text{div } \phi + \text{div } \psi \\
&(4)\ \text{div } (\phi c) = \text{div } \phi \\
&(5)\ \text{div } (\phi \cdot \psi) = \phi(\text{div } \psi) + \psi(\text{div } \phi) \\
&(5')\ \text{div } (\phi \cdot \psi) = \phi \cdot \text{div } \psi + \psi \cdot \text{div } \phi
\end{aligned}$$

Desweiteren kann man durch den Gradienten analysieren wie sich die Funktionswerte ändern, wenn man in eine bestimmte Richtung fortschreitet. Dazu nimmt man den Vektor $\vec{a}$ als Richtungsvektor. Dieser wird normiert und dann mit dem Gradientenvektor skalar multipliziert. Das Ergebnis ist dementscprechend ein Skalar.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad}\phi) \cdot \vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}(\text{grad } \phi) \cdot \vec{a}$$

6.3 Divergenz

Bei der Divergenz nimmt man einen Vektor und differenziert dessen Komponenten einzeln (nach x_1, x_2, etc.), und addiert diese zusammen.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- div $\vec{F} > 0$: Quelle
- div $\vec{F} < 0$: Senke
- div $\vec{F} = 0$: quellenfrei

Rechenregeln

(1) div $\vec{a} = 0$

(2) div $(c \cdot \vec{A}) = c \cdot \text{div } \vec{A}$

(3) div $(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$

(4) div $(\vec{A}\vec{a}) = \text{div } \vec{A}$

(5) div $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{A} + \phi(\text{div } \vec{A})$

(5') div $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{A} + \phi \cdot \text{div } \vec{A}$

6.4 Rotation

Die Rotation ist das Kreuzprodukt zwischen einem Vektor $\vec{F}$ und ∇.

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

(1) rot $\vec{a} = \vec{0}$

(2) rot $(c \cdot \vec{A}) = c \cdot \text{rot } \vec{A}$

(3) rot $(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$

(4) rot $(\vec{A}\vec{a}) = \text{rot } \vec{A}$

(5) rot $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi(\text{rot } \vec{A})$

(5') rot $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi \cdot \text{rot } \vec{A}$