Analysis

Arif Hasanic

WS 20/21

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgleichungen allgemein

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Funktion in der Ableitung von genau dieser Funktion auftreten können und hat die Form:

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \tag{1}$$

Ist $b(x) = 0$ nennt man die DGL eine homogene DGL, ansonsten hat man eine inhomogene DGL. Die Ordnung einer DGL ist gleich der höchsten Ableitung, welche in der DGL zu finden ist.
Löst man eine DGL nach der höchsten Ableitung auf[1] hat man die DGL in die explizite Form gebracht; ansonsten hat man die implizite Form.
Eine DGL kann man entweder allgemein lösen oder man findet eine spezielle/partikuläre Lösung. Bei der allgemeinen Lösung bleiben idR. n Integrationskonstanten stehen, wenn n gleich der Ordnung der DGL ist. Möchte man die partikuläre Lösung, rechnet man zuerst die allgemeine Lösung aus. Nun müssen bestimmte Werte vorgeben werden um die Werte der Integrationskonstanten errechnen zu können. Diese Werte heißen auch Anfangswerte und um eine spezielle Lösung zu finden werden auch n Werte gebraucht.

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Trennung der Variablen

Ein relatives einfaches Verfahren zum Lösen von DGLs 1. Ordnung nennt sich TTrennung der Variablen". Damit man das Verfahren anwenden kann muss die DGL aber separabel sein, also alle x-Werte und alle y-Werte müssen jeweils auf einer Seite stehen können.
Da man ein DGL erster Ordnung hat, ist die höchste vorkommende Ableitung y', was man aber auch als $\frac{dy}{dx}$ schreiben kann. Wenn man jetzt sowohl alle x-Werte als auch alle y-Werte auf einer Seite stehen hat, kann man beide nach x bzw. y integrieren. Nach der Integration kann alles nach y umstellen und hat die allgemeine Lösung der DGL gefunden. Beispiel:

$$\begin{aligned} &y' = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y' = x \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow \\ &y\ dy = x\ dx \Leftrightarrow \int y\ dy = \int x\ dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \\ &y = \sqrt{x^2 + 2C} \end{aligned} \tag{2}$$

2.2 Substitutionsmethode

Bei der Lösung durch Substitution muss man zuerst wieder die Gleichung nach y' auflösen. Nun schaut man, von welchen Typ die DGL ist. Die zwei Typen sind $y' = f(ax + by + c)$ und $y' = \frac{y}{x}$.

[1] Falls überhaupt möglich

2.2.1 Typ: linear

Sei u die Variabel die zur Substitution genommen wird. Zuerst wird u der Gleichung gleichgesetzt: $u = ax+by+c$. Wenn man u nun differenziert erhält man $u' = a+by'$. u ist von x abhängig, da u nur von den Variablen x und y abhängig ist und y wiederum nur von x abhängig ist. Daraus folgt, dass $u' = \frac{du}{dx}$ gilt.

$$u' = \frac{du}{dx} = a + b \cdot y' \tag{3}$$

y' kann man wiederum durch $f(u)$ ersetzen, wodurch man eine DGL erhält, welche nur noch von u abhängig ist:

$$u' = \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u) \tag{4}$$

Diese DGL kann man dann durch Trennung der Variablen lösen und rücksubstituiert das u mit den ursprünglichen Werten.

2.2.2 Typ: quotient

Es gilt dasselbe Prinzip wie bei der linearen Funktion. Man substituiert nun $\frac{y}{x} = u$. Dementsprechend gilt auch $y = x \cdot u$.
Wird dies nun differenziert erhält man $y' = u+x \cdot u'$. Dabei gilt wiederum $y' = f(\frac{y}{x}) = f(u)$. Wird dies entsprechend eingesetzt gilt:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{5}$$

2.3 lineare DGL mit Störfunktion

Eine lineare Differentialgleichung hat die Form:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \tag{6}$$

Hier wird $g(x)$ auch als Störfunktion bezeichnet. Ist $g(x) = 0$ ist die DGL homogen, ansonsten ist sie inhomogen. Eine homogene DGL lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dazu gibt es auch eine allgemein Lösungsform:

$$\begin{aligned}
&y' + f(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)\ dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\ dx \Rightarrow ln|y| = -\int f(x)\ dx + ln|C| \\
&\Rightarrow ln|y| - ln|C| = -\int f(x)\ dx \Rightarrow ln|\frac{y}{C} = \int f(x)\ \Rightarrow y - C = \int f(x)\ dx \\
&\Rightarrow y = C \cdot e^{-\int f(x)\ dx}
\end{aligned} \tag{7}$$

Tauchen in der DGL konstante Vorfaktoren auf muss die Lösungsformel noch leicht verändert werden:

$$y' + ay = 0 \Rightarrow y_h = C \cdot e^{-ax} \tag{8}$$

2.3.1 Variation der Konstanten

2.3.2 Aufsuchen der partikulären Lösung

Inhomogene Differentialgleichungen (auch höherer Ordnung) können auch durchs Aufsuchen der partikulären Lösung gelöst werden. Die Lösung einer DGL ist dann die Summe zwischen der homogenen Lösung y_0/y_h und der partikulären Lösung y_p, also:

$$y = y_h + y_p \tag{9}$$

Zuerst wird die homogene Lösung berechnet. Nun muss noch der richtige Ansatz gewählt werden um die partikuläre Lösung zu finden.

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	$y_p = C_0$
2. Lineare Funktion	$y_p = C_1 x + C_0$
3. Quadratische Funktion	$y_p = C_2 x^2 + C_1 x + C_0$
4. Polynom Funktion mit Grad n	$y_p = C_n x^n + ... + C_1 x + C_0$
5. $g(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x)$ 6. $g(x) = C_2 \cdot \cos(\omega x)$ 7. $g(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ für $b \neq -a$ $y_p = Cx \cdot e^{bx}$ für $b = -a$

Um nun die partikuläre Lösung zu finden nimmt den gefundenen Ansatz her und leitet diesen ab. y_p' und y_p werden nun in die ursprüngliche, inhomogene Gleichung eingesetzt. Nun muss man nur noch umformen und einen Koeffizientenvergleich vornehmen um die unbestimmten Konstanten[2] zu finden.
Beim Koeffizientenvergleich schaut man auf beiden Seiten, was als Vorfaktoren bei den x-Werten steht. Beispiel:

$$2C_1x^2 + (2C_1 + 2C_2)x + (C_2 + 3C_3) = 2x^2 + 0 \cdot x - 4$$

Auf beiden Seiten steht ein x^2. Hier sieht man auch, dass $C_1 = 1$ sein muss damit die Koeffizienten auf beiden Seiten übereinstimmen. Den "Vergleichführt man nun mit allen C_n durchgeführt. Zum Schluss werden die C_n-Werte in den zuvor gewählten Ansatz eingefügt und man erhält die partikuläre Lösung.

2.4 Bernoulli DGL

Bernoulli Differentialgleichungen haben die Form

$$y' = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^\alpha$$

[2]Damit sind die C_n aus der Tabelle gemeint

Dabei substituiert man $z = y^{1-\alpha}$, was zu

$$z' = (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)$$

führt und als inhomogene DGL gelöst werden kann.

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine DGL 2. Ordnung löst man weitesgehend wie eine eine DGL 1. Ordnung, indem man wieder die homogene und die partikuläre Lösung findet und aus diesen die Summe bildet:

$$\begin{aligned} & y'' + ay' + by = g(x) \\ & \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Homogene Lösung

Bei der homogenen Lösung wählt man vorerst den $y = e^{\lambda x}$. Dies wird dann in die DGL eingesetzt und Entsprechend oft abgeleitet (2 Mal also).

$$\begin{aligned} & y'' = ay' + by = 0 \\ & \Rightarrow e^{\lambda x\,''} + ae^{\lambda x\,'} + e^{\lambda x} = 0 \\ & \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \quad |\text{Division durch } e^{\lambda x} \\ & \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Man erhält somit einer Formel die man durch die pq-Formel oder der Mitternachtsformel lösen kann. Je nachdem welche Werte λ_1 und λ_2 haben, muss ein andere Ansatz gewählt werden.

Fall	Allgemeine Lösung
1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = c$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{cx}$
3. $\lambda_{1/2} = a + bi$	$y = e^{ax}(C_1 \cdot \sin(bx) + C_2 \cdot \cos(bx))$

Die Werte die man für $\lambda_{1/2}$ berechnet hat werden nun in den richtigen Ansatz eingefügt, wodurch man die homogene Lösung bekommt.

Inhomogene Lösung

Die inhomogene Lösung berechnet sich wie die inhomogene Lösung bei einer DGL 1. Ordnung, nur muss man noch u.U. die Werte von $\lambda_{1/2}$ berücksichtigen.

4 Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Homogene Lösung

Für die Lösung wird wieder das Prinzip aus der DGL 2. Ordnung genommen. Bei der homogenen Lösung wird nun eine Linearkombination aus $C_n \cdot \lambda^n$ und zwar aus allen n gebildet. Sind die Nullstellen gefunden, werden diese dann in den Ansatz eingefügt. Mehrfache Nullstellen werden zusammengefasst:
Hat man eine r-Fache Nullstelle multipliziert man den $e^{\lambda x}$ Teil mit einem Polynom $(r-1)$-sten Grades.
Als beispiel: Man hat eine DGL 5. Grades und eine 4-Fache Nullstelle. Somit ergibt sich der Ansatz

$$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + c_5 x^3) \cdot e^{x \cdot \lambda_{2/3/4/5}} \tag{12}$$

Inhomogene Lösung

5 Systeme linearer Differentialgleichungen

Systeme von Differentialgleichungen sind DGLen mit verschiedenen y (Es extstieren y_1, y_2, y_3 etc.), die aber miteinander verkoppelt sind.

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x)$$
$$y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x)$$

Für die Lösung von DGL Systemen gibt es 2 Lösungsansätze.

Homogene Lösung durch Matrix

Mit dem Matrixverfahren kann die homogene Lösung gefunden werden. Beim Matrixverfahren werden aus den Koeffizienten eine Matrix gebildet. Die Koeffizientenmatrix wird mit $\lambda \cdot E$[3] subtrahiert und daraus wird die Determinante gebildet. λ wird so gewählt, dass $\det(A - \lambda E) = 0$ ergibt. Die λ-Werte werden dann in den allgemeinen Lösungsansatz für homogene DGl n-ter Ordnung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
&y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\
&y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x) \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \det(A - \lambda E))
\end{aligned}$$

Für DGL Systeme 2. Ordnung ergibt sich eine $2x2$ Matrix und die Determinante lässt sich durch $\det = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0)$ berechnen. Man erhält dann $\lambda_{1/2}$ und muss wieder eine Fallunterscheidung wie bei normalen DGLs durchführen.

[3] Einheitsmatrix

Inhomogene Lösung durch Einsetzverfahren

Ein weiteres Verfahren ist das Einsetzverfahren. Man löst beispielsweise die Gleichung von y_1 nach y y_2 auf und differenziert y_2 nach x. Die Ergebnisse von y_2 und y_2' kann man in die 2. Gleichung einsetzen. Man erhält eine DGL die nur noch von y_1 abhängig ist und löst diese DGL wie eine inhomogene DGL n-ter Ordnung. Man erhält dann das Ergebnis für y_1, und dieses Ergebnis kann man dann in die andere DGL einsetzen und hat somit das ganze System gelöst.

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \qquad (1)$$
$$y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + g_2(x) \qquad (2)$$
$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)) \qquad (3)\ ((1)\text{ nach } y_2)$$
$$\Rightarrow y_2' = \frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}y_1' - g_1(x)') \qquad (3')$$

(3) und (3’) werden in (2) eingesetzt und (2) wird wie eine normale DGL behandelt. Das Ergebnis von (2) wird dann in (1) eingesetzt.

6 Vektoralgebra

6.1 Vektordarstellung einer Kurve

Kurven in einer Ebene können in der Form:

$$C : x = x(t); y = y(t)$$

Können durch den Kurvenpunkt P (bestimmt durch x(t), y(t)) und durch den Ortsvektor auch as Vektor dargestellt werden:

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Dies gilt für Kurven in der Ebene, für höhere Dimensionen muss der Vektor entsprechend angepasst werden. Vektoren werden Komponentenweiße abgeleitet; es gelten die selben Produktregeln[4] und Summenregeln.

Bogenlänge

Die Bogenlänge einer Vektorkurve ist definiert durch das Integral des Betrages des abgeleiteten Vektor:

$$s = \int_{t1}^{t2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Um den Tangentenvektor (T) von $\vec{r}$ zu berechnen, muss dieser nur normalisiert werden. Der Hauptnormaleinheitsvektor ist der der Vektor T nur wird dieser nochmals normalisiert.

[4] sowohl Skalarprodukt als auch Vektorprodukt

6.2 Partielle Differentiation

Bei der partiellen Differentiation liegt eine Funktion vor, die von mehr als einer Variablen abhängig ist. Man wählt nun eine Variable, nach der differenziert werden soll, die anderen Variablen werden wie Konstanten behandelt. Ein wichtiger Operator ist der ∇ (Nabla) Operator. Wird dieser angewendet wird nach jeder Variabel abgeleitet.

6.2.1 Gradient

Der Gradient (kurz: grad) ist das Produkt aus ∇ und einem Skalar ϕ. Als Ergebnis erhält man einen Vektor, dessen Komponenten aus dem Differentialen von ϕ nach $x_1, x_2, \cdot, x_n$ besteht.

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

(1) grad $c = 0$

(2) grad $(c \cdot \phi) = c \cdot \text{grad } \phi$

(3) grad $(\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi$

(4) grad $(\phi + c) = \text{grad } \phi$

(5) grad $(\phi \cdot \psi) = \phi(\text{grad } \psi) + \psi(\text{grad } \phi)$

(5') grad $(\phi \cdot \psi) = \phi \cdot \text{grad } \psi + \psi \cdot \text{grad } \phi$

Desweiteren kann man durch den Gradienten analysieren wie sich die Funktionswerte ändern, wenn man in eine bestimmte Richtung fortschreitet. Dazu nimmt man den Vektor $\vec{a}$ als Richtungsvektor. Dieser wird normiert und dann mit dem Gradientenvektor skalar multipliziert. Das Ergebnis ist dementsprechend ein Skalar.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad}\phi) \cdot \vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}(\text{grad } \phi) \cdot \vec{a}$$

6.3 Divergenz

Bei der Divergenz nimmt man einen Vektor und differenziert dessen Komponenten einzeln (nach x_1, x_2, etc.), und addiert diese zusammen.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- div $\vec{F} > 0$: Quelle
- div $\vec{F} < 0$: Senke
- div $\vec{F} = 0$: quellenfrei

Rechenregeln

(1) div $\vec{a} = 0$

(2) div $(c \cdot \vec{A}) = c \cdot \text{div } \vec{A}$

(3) div $(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$

(4) div $(\vec{A} + \vec{a}) = \text{div } \vec{A}$

(5) div $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{A} + \phi(\text{div } \vec{A})$

(5') div $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{A} + \phi \cdot \text{div } \vec{A}$

6.4 Rotation

Die Rotation ist das Kreuzprodukt zwischen einem Vektor $\vec{F}$ und ∇.

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Im ebenen Vektorfeld gilt:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \cdot \vec{e}_z$$

Rechenregeln

(1) rot $\vec{a} = \vec{0}$

(2) rot $(c \cdot \vec{A}) = c \cdot \text{rot } \vec{A}$

(3) rot $(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$

(4) rot $(\vec{A} + \vec{a}) = \text{rot } \vec{A}$

(5) rot $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi(\text{rot } \vec{A})$

(5') rot $(\phi\vec{A}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi \cdot \text{rot } \vec{A}$

7 Koordinatendarstellungen

7.1 Polarkoordinaten

Anstatt dass zwei Punkt (x und y) gegeben sind, kann auch jeder Punkt in einem Koordinatensystem durch einen Radius r und einem Winkel φ bestimmt werden.

Polarkoordinaten → Kartesisch Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$$

Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \sin\varphi = \frac{y}{r},\ \cos\varphi = \frac{x}{r},\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{13}$$

7.1.1 Vektorform

Ein Vektor in der Form $\vec{a}a_x\vec{e}_x a_y\vec{e}_y$ (kartesische Form) kann auch durch Polarkoordinaten dargestellt werden. Das Resultat ist dann der Vektor der sich durch $\vec{a} = r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi$ darstellen lässt. Man erhält den Vektor, wenn man eine Transformationsmatrix A mit ihm multipliziert:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ohne Matrixmultiplikation:

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cdot \cos\varphi + a_y \cdot \sin\varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin + a_y \cos\varphi \\ \Rightarrow a &= a_r + a_\varphi \end{aligned}$$

A^{-1} multipliziert mit dem Polarvektor ergibt wieder den Vektor in kartesischer Form, bzw. kann man auch die Gleichungen nach x und y umstellen.

7.1.2 Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace Operator in Polarkoordinaten

Ein Skalarfeld in Polarform ist gegeben durch $\phi = \phi(r;\varphi)$ und ein Vektorfeld in Polarform ist gegeben durch $\vec{F} = \vec{F}(r;\varphi) = F_r(r;\varphi)\vec{e}_r + F_\varphi(r;\varphi)\vec{e}_\varphi$, dann gilt für Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator folgendes:

- grad $\phi(r;\varphi) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
- div $\vec{F}(r;\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$
- rot $\vec{F}(r;\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}$
- $\Delta\phi(r;\varphi)$[5] $= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

[5] Δ (Laplace) ist ∇(Nabla) 2 mal ausgeführt

7.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind Polarkoordinaten mit einer weiteren Dimension z, wodurch ein Zylinderform entsteht. ϱ beschreibt den Abstand des eines Punktes zur z-Achse :

Zylinderkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = \varrho \cdot \cos\varphi,\ y = \varrho \cdot \sin\varphi,\ z = z$$

Kartesische Koordinaten → Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} &\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\sin\varphi = \frac{y}{\varrho},\ \cos\varphi = \frac{x}{\varrho},\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ &z = z \end{aligned} \tag{14}$$

Spezielle Werte

- Linienelement: $ds^6 = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2(d\varphi) + (dz)^2}$
- Flächenelement: $dA = \varrho\ d\varphi\ dz$
- Volumenelement: $dV = \varrho\ d\varrho\ d\varphi\ dz$

7.2.1 Vektorform

Ein Vektor in kartesischer Form ($\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$) lässt sich durch $\vec{a} = a_\varrho\vec{e}_\varrho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z$ in Zylinderkoordinatenform darstellen, wobei man $a_\varrho, a_\varphi, a_z$ wie folgt bestimmen kann:

$$\begin{aligned} a_\varrho &= a_x \cdot \cos\varphi + a_y \cdot \sin\varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin\varphi + a_y \cos\varphi \\ a_z &= a_z \end{aligned}$$

Möchte man das mit einer Matrix lösen gilt folgendes:

$$\begin{pmatrix} a_\varrho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[6] Das d ist dann der Abstand zweier Punkte

7.2.2 Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace Operator in Zylinderkoordinaten

Ein Skalarfeld ind Zylinderkoordinatenform ist gegeben durch $\phi = \phi(\varrho; \varphi; z)$ und ein Vektorfeld in Zylinderkoordinatenform ist gegeben durch $\vec{F} = \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho(\varrho; \varphi; z)\vec{e}_\varrho + F_\varphi(\varrho; \varphi; z)\vec{e}_\varphi + F_z(\varrho; \varphi; z)\vec{e}_z$, dann gilt für Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator folgendes:

- grad $\phi(\varrho; \varphi; z) = \dfrac{\partial\phi}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho + \dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$
- div $\vec{F}(\varrho; \varphi; z) = \dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho \cdot F_\varrho) + \dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$
- rot $\vec{F}(\varrho; \varphi; z) = \left(\dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\dfrac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial\varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \dfrac{1}{\varrho}\left(\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho \cdot F_\varphi) - \dfrac{\partial F_\varrho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$
- $\Delta\phi = \dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\varrho}\right) + \dfrac{1}{\varrho^2} \cdot \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

7.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten sind durch r (Abstand vom Punkt zum Ursprung), φ (Winkel auf der x, y-Ebene) und durch ϑ (Winkel auf der y, z-Ebene) definiert.

Zylinderkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi,\ z = r \cdot \cos\vartheta$$

Kartesische Koordinaten → Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta &= \arccos\frac{z}{r} = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{15}$$

Spezielle Werte

- Linienelement: $ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta(d\varphi)^2}$
- Flächenelement: $dA = r^2 \cdot \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi$
- Volumenelement: $dV = dA\ dr = r^2 \cdot \sin\vartheta\ dr\ d\vartheta\ d\varphi$

Um einen Vektor in kartesischer Form ($\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$) umzuwandeln in einen Vektor in Kugelkoordinatenform ($\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$) kann folgender Ansatz genommen werden:

$$\begin{aligned}
a_r &= a_x \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + a_y \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + a_z \cdot \cos\vartheta \\
a_\vartheta &= a_x \cos\vartheta \cdot \cos\varphi + a_y \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi - a_z \cdot \sin\vartheta \\
a_\varphi &= -a_x \cdot \sin\varphi + a_y \cdot \cos\varphi
\end{aligned}$$

bzw. mit Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi & \sin\vartheta \cdot \sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta \cdot \cos\varphi & \cos\vartheta \cdot \sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi & \cos\vartheta \cdot \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi & \cos\vartheta \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

7.3.1 Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace Operator in Kugelkoordinaten

Ein Skalarfeld in Kugelkoordinaten ist gegeben durch $\phi = \phi(r;\vartheta;\varphi)$ und ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten ist gegeben durch $\vec{F} = \vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r(r;\vartheta;\varphi)\vec{e}_r + F_\vartheta(r;\vartheta;\varphi)\vec{e}_\vartheta + F_\varphi(r;\vartheta;\varphi)\vec{e}_\varphi$, dann gilt für Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator folgendes:

- grad $\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dfrac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
- div $\vec{F} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot F_r) + \dfrac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta \cdot F_\vartheta) + \dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right]$
- rot $\vec{F} = \dfrac{1}{r \cdot \sin\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta \cdot F_\varphi) - \dfrac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\vartheta) - \dfrac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right)$
- $\Delta\phi = \dfrac{1}{r^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right\}$

8 Linien- und Kurvenintegrale

Das Linienintegral ist angelehnt an der physikalischen Arbeit. Die Arbeit kann sich oft ändern, je nachdem wie der Weg gewählt wurde. Zum Beispiel kann eine Box diagonal

im Raum verschoben werden oder entlang 2 Wänden also von x: $0 \to 1$, y: $0 \to 1$. Das Resultat ist dasselbe aber die Arbeit ist unterschiedlich.
Der Weg wird allgemein als C beschrieben. Die Arbeit ist dann das Integral aus dem Skalarprodukt und dem Weg (vektorielle dargestellt) und einer Kraft/einem Kraftfeld. Die Integralgrenzen sind dann die Punkte die der Weg durchlaufen soll.

1. Weg C bestimmen und als Vektor $\vec{r}$ darstellen.
2. x mit t in $\vec{r}$ substituieren und y dementsprechend anpassen
3. $x(t)$ und $y(t)$ in den Kraftvektor $\vec{F}$ einsetzen.
4. $r(\vec{t})$ ableiten
5. Das Integral bilden durch: $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{t1}^{t2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt$

Analog gilt dasselbe für Vektoren mit drei Komponenten. Wenn rot$(\vec{F} = 0)$[7] gilt (Vektorfeld ist konservativ), dann ist das Linienintegral wegunabhängig dh. der Weg kann frei gewählt werden. Dabei darf $\vec{F}$ keine Singularitäten enthalten.

9 Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral wird auch oft Flussintegral genannt, da man durch das Oberflächenintegral oft den Fluss durch eine Fläche bestimmen kann. Dafür muss eben der Fluss (Vektorfeld $\vec{F}$) und die Fläche ($\vec{v}$) bestimmt sein. Für $\vec{v}$ bietet sich meistens oft an die z-Komponente durch x und y (r, φ etc.) darzustellen. $\vec{v}$ wird nun nach x und y abgeleitet und aus dem Kreuzproukt der beiden Vektoren entsteht dann der Normalenvektor $\vec{n}$. Das Skalarprodukt aus $\vec{F}$ und $\vec{v}$ wird nun doppelt integriert nach x und y (die Grenzen müssen gegebenenfalls durch die Anfangsfläche erst bestimmt werden). Das Ergebnis ist dann das Oberflächenintegral:

1. Fläche und Vektorfeld bestimmen und parametriesieren (polar, kartesische, etc.)
2. Fläche als Vektor $\vec{v}$ darstellen und z durch x und y darstellen
3. $\vec{v}$ nach x und y ableiten und das Kreuzprodukt bilden

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{dx} \times \frac{\vec{v}}{dy}$$

4. Skalarprodukt aus $\vec{F}$ und $\vec{n}$ bilden
5. Ergebnis doppelt nach dx und dy integrieren.[8]

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot \vec{n}\; dxdy$$

[7] $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = \vec{0}$

Es kann auch vorkommen, dass zum Beispiel das Oberflächenintegral von einer geschlossenen Halbkugeln berechnet werden soll. Hier muss die 'Bodenfläche' extra berechnet werden und zur Mantelfläche später dazuaddiert werden.