Analysis Formelsammlung

31. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

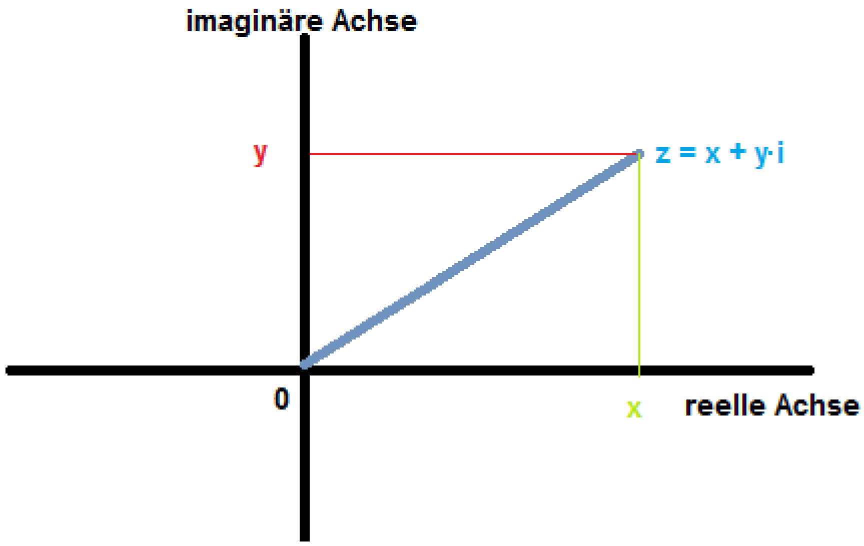
1.1 Definitionen

1.1.1 Definitionen

Die Menge der Komplexen Zahlen werden mit dem Symbol $\mathbb{C}$ beschrieben.
Sei z ein Element aus $\mathbb{C}$ so gilt:

$$z \,\epsilon\, \mathbb{C} : (z = x + iy \,|\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wobei x der reelle Anteil und y der imaginäre Anteil der komplexen Zahl ist.



1.1.2 Formen

Kartesische Form $z = x + y \cdot i$

Trigonometrische Form $r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$

Herleitung: Es gilt: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$
$z = x + i \cdot y = r \cdot cos\varphi + i \cdot r \cdot sin\varphi = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$,
$r = |z|$

Berechnung von φ: Je nachdem, in welchem Quadranten sich z befindet, ändert sich die Formel leicht um φ zu bestimmen.

Allgemein gilt $sin\varphi = \frac{y}{|z|} \rightarrow \varphi = arcsin(\frac{y}{|z|})$

- Quadrant 1: $\varphi = \varphi_{Rechenr}$
- Quadrant 2 : $\varphi = \pi - \varphi_{Rechner}$
- Quadrant 3 : $\varphi = \pi + |\varphi_{Rechner}|$
- Quadrant 4: $\varphi = \varphi_{Rechner}$

Exponentialform $r \cdot e^{i\varphi}$

Herleitung: Es gilt:$e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot sin\varphi$
$z = r \cdot (e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$, φ wird wie oben berechnet.

1.1.3 Grundrechenarten

Addieren $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) \cdot i$

Subtrahieren $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) \cdot i$

Multiplizieren beim Multiplizieren wird unterschieden ob mit einem konstanten Faktor oder einer weiteren komplexen Zahl multipliziert wird.

- mit einem Faktor a: $a \cdot z = a \cdot x + a \cdot y \cdot i$
- mit einer Komplexen Zahl z_2: $z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i$

Dividieren $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$

Betrag $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Komplex Konjugiert $z = x \pm y \cdot i \rightarrow z^{\cdot} = x \mp y \cdot i$

1.1.4 Radizieren

Wenn aus einer Komplexen Zahl z die n-te Wurzel gezogen wird, entstehen somit auch n verschiedene Wurzeln. Die allgemeine Formel dafür lautet

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} \cdot 2\pi)}$$

Das n bleibt immer konstant und m startet bei 0 und wird bis $m = n - 1$ hochgezählt, wodurch man die n Wurzel herbekommt, lediglich φ und $|z|$ müssen wie oben beschrieben berechnet werden und ggf. muss z in die Exponentialform gebracht werden, um die Berechnungen zu erleichtern.

2 Funktionen

2.1 Nullstellen

$f(x)$ hat Nullstellen wenn gilt x_0 $f(x_0) = 0$

2.2 Symmetrie

Eine Funktion heißt gerade (spiegelsymmetrisch) wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

Eine Funktion heißt ungerade(punktsymmetrisch): $f(-x) = -f(x)$

2.3 Monotonoie

Die Definition für die Monotonie wird unten aufgelistet. Es gilt außerdem: $x_1 < x_2$

- monoton wachsend: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend: $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend: $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend: $f(x_1) > f(x_2)$

2.4 Periodizät

Wenn ein p existiert für das gilt $f(x \pm p) = f(x)$ und $x \pm p$ ist im Definitionsbereich, ist f periodisch mit der Periode p,
p kann auch $\pm k \cdot p$ sein, wobei $k \epsilon \mathbb{N}^{\cdot}$. Kleinstes positives p nennt man die primitive Periode

2.5 Umkehrfunktion

Funktion f heißt umkehrbar wenn gilt:

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oder

wenn f streng monoton ist.

Definitions- und Wertebereich sind bei der Umkehrfunktion "vertauscht".
Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, formt man $f(x)$ nach x um und vertauscht danach x und y wodurch man f^{-1} erhält. Oft muss der Definitionsbereich dabei eingeschränkt werden, da z.B. die Parabel nur für $x \geq 0$ monoton ist (bzw. $x \leq 0$).

2.6 Grenzwert einer Funktion

Existiert ein g für das gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

so ist g der Grenzwert von f. x_n wird durch den limes immer höher, g kann auch gegen unendlich gehen und g muss auch nicht im Wertebereich liegen. Wenn g nicht im Wertebereich liegt, so ist g auch die Asymptote.
lim kann auch gegen $-\infty$ oder auch gegen einen Punkt gehen.

2.7 Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion heißt stetig im Punkt x_0:

$f(x_0)$ ist definiert: Beispielsweiße ist $\frac{1}{x}$ nicht stetig in $\mathbb{R}$ jedoch in $\mathbb{R} \setminus 0$ da hier $x_0 = 0$ nicht definiert ist (nicht definierte Werte werden bei der Überprüfung der Stetigkeit nicht berücksichtigt)

$lim_{x\to x_0} : f(x) existiert$: An allen definierten Punkten muss ein Grenzwert nach x_0 vorliegen. Es dürfen sozusagen keine Lücken vorhanden sein ($\frac{1}{x}$ mit $\mathbb{R}$ hat z.B. eine Lückefür $x_0 = 0$).

$lim_{x\to x_0} : f(x) = f(x_0)$: Der Grenzwert an Stelle x_0 muss gleich dem Funktionswert an Stelle x_0 sein.

Ist eine Funktion in jedem Punkt stetig, heißt die komplette Funktion stetig.

2.8 Tabelle mit Funktionen und deren Eigenschaften

2.8.1 Polynomfunktion

Definition $f(x) = a_n \cdot x^n ... a_1 \cdot x + a_0$ wobei n auch der Grad der Funktion ist

Symmetrie Eine Polynomfunktion ist gerade, wenn alle Polynome eine gerade Potenz haben und ist ungerade, wenn alle Polynome ungerade Exponenten haben.

2.8.2 Gebrochenrationale Funktion

Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m \cdot x^m ... a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n ... b_1 \cdot x + b_0}$ $g(x)$ unf $h(x)$ sind wiederum Polynomfunktionen. Außerdem wird unterschieden zwischen:

- $n > m$: echt gebrochenrational und
- $n \leq m$ unecht gebrochenrational

Nullstellen $f(x)$ hat Nullstellen wo $g(x)$ Nullstellen hat aber $h(x) \neq 0$ ist.

Pol $f(x)$ hat Pole wo $h(x)$ Nullstellen hat. Wichtig ist, dass zuerst umgerechnet werden muss, da sich teilweise Terme aus dem Bruch rauskürzen können. Die Anzahl der Nullstellen in $h(x)$ wird mit k bezeichnet und man spricht von eimem Pol k-ter Ordnung. Ist k gerade, gibt es keinen Vorzeichenwechsel am Pol, ist k ungerade gibt es einen Vorzeichenwechsel.

Asymptote Um die Asymptote zu finden muss zuerst zwischen einer echten und unechten gebrochenrationalen Funktion unterschieden werden.

- Echt gebrochenrational: hat eine Asymptote bei $y = 0$.
- Unecht gebrochenrational: $f(x)$ wird durch Polynomdivison in seine Linearkombination aufgeteilt. $f(x)$ kann nun in eine Polynomfunktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ augeteilt werden

  $$f(x) = p(x) + r(x)$$

  $r(x)$ strebt gegen 0 weshalb die Asymptote von $p(x)$ gleich der Asymptote von $f(x)$ ist.

Symmetrie je nachdem welche Symmetrie die Polynomfunktionen haben ist auch die Symmetrie der gebrochenrationale Funktion anders.

- Haben $g(x)$ und $h(x)$ die gleiche Symmetrie ist $f(x)$ auch gerade.
- Haben $g(x)$ und $h(x)$ verschiedene Symmetrien so ist $f(x)$ ungerade.
- Haben entweder $g(x)$ oder $h(x)$ (oder beide) keine Symmetrie so hat $f(x)$ auch keine Symmetrie.

2.8.3 Potenzfunktion

Funktion $f(x) = x^n$

Symmetrie ist n gerade dann ist auch $f(x)$ gerade

- Ist n gerade dann ist auch $f(x)$ gerade
- Ist n ungerade dann ist auch $f(x)$ ungerade

2.9 Kurvendiskussion

Extrema $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Maximum $f''(x) < 0$

Minimum $f''(x) > 0$

Wendepunkt $f'(x) \neq 0 \wedge f''(x) = 0$

Sattelpunkt $f'(x) = f''(x) = 0$

3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungsregeln Funktion

Art der Funktion	Funktion	Ableitung
Konstante Funktion	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Gerade	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$ $= e^{xln(a)}$ $f(x) = x^x = e^{x \cdot ln(x)}$	$f'(x) = ln(a) \cdot e^{ln(a) \cdot x}$ $f'(x) = ln(a) \cdot a^x$ $f'(x) = x^x \cdot (ln(x) + 1)$
Logarithmusfunktion	$f(x) = ln(x)$ $f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = sin(x)$ $f(x) = cos(x)$ $f(x) = tan(x)$ $f(x) = cotan(x)$	$f'(x) = cos(x)$ $f'(x) = -sin(x)$ $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$ $f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)} = -1 - cotan^2(x)$
Arkusfunktionen	$f(x) = arcsin(x)$ $f(x) = arccos(x)$ $f(x) = arctan(x)$ $f(x) = arccotan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbelfunktion	$f(x) = sinh(x)$ $f(x) = cosh(x)$ $f(x) = tanh(x)$ $f(x) = coth(x)$	$f'(x) = cosh(x)$ $f'(x) = sinh(x)$ $f'(x) = \frac{1}{cosh^2(x)} = 1 - tanh^2(x)$ $f'(x) = -\frac{1}{sinh^2(x)} = 1 - coth^2(x)$
Areafunktion	$f(x) = arsinh(x)$ $f(x) = arcosh(x)$ $f(x) = artanh(x)$ $f(x) = arcotan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3.2 Ableitungsregeln Arithmetik

Regeln	**Funktion**	**Ableitung**
Summenregel	f(x) = u(x) + v(x)	f'(x) = u'(x) + v'(x)
Faktorregel	f(x) = c · u(x)	f'(x) = c · u'(x)
Produktregel	f(x) = u(x) · v(x)	f'(x) = u'(x) · v(x) + u(x) · v'(x)
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	f(x) = u(v(x))	f = u'(v(x)) · v'(x)
Kettenregel 2.	f(x) = u(v(w(x)))	f(x) = u'(v(w(x))) · v'(w(x)) · w'(x)

4 Integralrechnung

Die Integralrechnung ist die Umkehrung zur Differentialrechnung, weshalb man die Tabelle von der Differentialrechnung nutzen kann indem man sie von rechts nach links liest. Wird eine Funktion f integriert erhält man die Stammfunktion F. Man schreibt auch:

Unbestimmtes Integral $\int f(x)dx = F(x)$

Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ wobei a und b das Intervall angeben in dem man integrieren möchte.

4.1 Rechenregeln

Faktorregel $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$

Summenregel $\int f(x) + g(x)dx = F(x) + G(x)$

4.2 Integrationsmethoden

Partielle Integration $\int f(x) \cdot g(x)dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)dx$

Hier sollte man schauen, dass man (wenn möglich) die Funktionen zum integrieren und differenzieren so wählt, dass sie im nächsten Schritt 'einfacher' werden. Teilweise hilft es auch wenn nur $f(x)$ vorhanden ist, $g(x) = 1$ zu setzen da ja $1 \cdot f(x) = f(x)$ ergibt.

Integration durch Substitution $\int f(x) \cdot g(x)\,dx = \int d(F(x) + C) \cdot g(x)\,dx$

Sei nun $F(x) + C = u$ und $F(x) + C$ so gewählt dass man $u = g(x)$, bzw. u möglichst ähnlich zu $g(x)$ ist. Dann gilt wiedereum: $\int 1 \cdot u\,du$

Hier wurde jetzt $F(x)$ substituiert. Jetzt kann man, je nach Form der Gleichung schauen welche Regeln man anwenden kann, bzw. ob man in der Ableitungstabelle nachschauen ob direkt integriert werden kann. In diesem Fall kann man einfach integrieren:

$\frac{1}{2}u^2$ jetzt wird noch rücksubstituiert und man kommt auf das Ergebnis: $\frac{1}{2}(F(x)+c)^2$