Chapter 13
不确定性的量化

不确定性

概率

概率推理

独立性带来的简化

贝叶斯规则

不确定性

信念状态表示和应急规划会面临什么问题？

信念状态和应急措施处理不确定性仍有缺陷{13.1}

- 当解释观察到的部分信息时，逻辑Agent必须考虑每一种逻辑上可能的解释。这导致信念状态的表示无法忍受地庞大而复杂。

- 一个处理所有可能意外情况的正确的应急规划必须考虑每一种可能情况（即使是可能性很小的情况），可能会变得非常庞大。

限制问题、信念度{13.1}

- 有时，没有可以保证达到Agent的目标的规划，然而Agent仍需要有所行动。Agent必须能够对这些不能确保达到目标的行动规划的好坏做出对比。

限制问题、信念度{13.1}

- Agent的目标是将乘客按时送到机场。规划A_{90}：在飞机起飞90分钟前出发。一个逻辑Agent无法确定地得到结论："A_{90}将让我们及时到达机场"，然而可以做出弱一些的结论："规划A_{90}将让我们及时到达机场，只要车不抛锚，汽油不耗尽，不遇到任何交通事故，……"。这些条件没有一个是能够演绎的，所以也无法推断这个规划能否成功。这就是**限制问题**。

- 对于A_{90}，Agent拥有的知识不能保证实现其中任何一个目标，但可以提供它们将被实现的某种程度的**信念度**。

牙病诊断{13.1.1}

- $Toothache \Rightarrow Cavity$
- 这条规则是错误的。不是所有的牙痛toothache都是因为牙齿有洞*Cavity*
- *如何修改？*

牙病诊断{13.1.1}

- *Toothache* ⇒ *Cavity*
- 这条规则是错误的。不是所有的牙痛toothache都是因为牙齿有洞*Cavity*
- *Toothache* ⇒ *Cavity*∨*GumDisease*∨*Abscess* …
- 为了使得规则正确，我们不得不增加一个几乎无限长的可能原因的列表——几乎不可能！怎么办？

牙病诊断{13.1.1}

- *Toothache* $\Rightarrow$ *Cavity*
- *对换位置：*
- *Cavity* $\Rightarrow$ *Toothache*
- 但不是所有的牙洞都会引起牙痛。
- 修正该规则的唯一途径是从逻辑上穷举各种可能的情形：用一个牙洞引起牙痛所需的所有**限制**（qualifications）扩充规则的左边。限制可能也是无穷的！
- 如何解决限制问题？

牙病诊断{13.1.1}

- 逻辑Agent相信每个语句是正确的或错误的，或不做评价；而概率Agent为每条语句赋予一个0到1之间的数值作为其信念度，从而解决限制问题。

偏好、效用{13.1.2}

- 再次考虑A_{90}。假设A_{90}有97%的机会赶上航班，这意味着这个规划是一个理性的选择吗？不一定：可能其他规划有更高的概率，比如A_{180}。如果绝对不允许错过航班，那么在机场的长时间等待是值得的。A_{1440}是一个提前24小时出门的规划，这个规划怎么样呢？

偏好、效用{13.1.2}

- 为了做出选择，Agent首先必须在各种规划的不同**结果**之间有所**偏好**。一个结果是一个完全特定的状态，效用理论认为，每个状态对一个Agent而言都有一定程度的有用性，即效用，而Agent会偏好那些效用更高的状态。

概率

相关概念

- 逻辑断言　概率断言
- 样本空间　总概率　事件　命题
- 无条件概率　先验概率　条件概率　后验概率
- 随机变量　值
- A=true：　a，　Weather=sunny：　sunny
- 概率分布　**P**(Weather)=< , , , >
- 条件分布　**P**(X|Y)
- 概率密度　P(X=x)　P(x)
- 联合概率分布　**P**(Weather, Cavity)

样本空间{13.2.1}

- 逻辑断言考虑的是要排除所有那些断言不成立的世界，而概率断言考虑的是各种可能世界的可能性有多大。
- 在概率理论中，所有可能世界组成的集合称为**样本空间**。如果掷两个色子，就有36个可能世界：(1,1)、(1,2)、…、(6,6)。
- 用希腊字母Ω（omega的大写）表示样本空间，用ω（omega的小写）表示样本空间中的一个样本，即ω是一个特定的可能世界。

事件{13.2.1}

- 概率理论的基本公理规定，每个可能世界具有一个0到1之间的概率，且样本空间中的可能世界的**总概率**是1
- 概率断言和质询通常是关于可能世界集合的。例如，我们可能对两个数相同(Doubles)的情况集合感兴趣，也可能对两个数之和(Total)为11的情况感兴趣。这些集合称为**事件**——与第12章中的“事件”在概念内含上是不同的。在AI中，总是用形式语言的**命题**来表示这些集合

$$P(\phi)=\sum_{\omega\in\phi} P(\omega)$$

无条件概率、条件概率{13.2.1}

- 称$P(Total=11)$和$P(doubles)$这样的概率为**无条件概率**或**先验概率**；是指不知道其他信息的情况下对命题的信念度。
- $P(doubles|Die_1=5)$ 这样的概率称为**条件概率**或**后验概率**
- 条件概率是由无条件概率定义的

$$P(a|b)=\frac{P(a\wedge b)}{P(b)}$$

$$P(a\wedge b)=P(a|b)P(b)$$

变量、定义域、命题{13.2.2}

- 概率理论中变量被称为**随机变量**，变量名以大写字母开头。每个随机变量有一个**定义域**, *Total*的定义域是{2,...,12}, Doulbles的定义域是{true,false},值总是小写
- A=*true*形式的命题可简写为*a*，而A=*false*简写为¬*a*， 例如doubles

变量、定义域、命题{13.2.2}

- 定义域可以是一些记号组成的集合；例如*Weather*的定义域定义为{*sunny*, *rain*, *cloudy*, *snow*}。不引起歧义的情况下，可用一个值本身表示“一个特定的变量取这个值”的命题；这样，*sunny*就可以代表*Weather=sunny*。

概率分布{13.2.2}

- 有时，我们要讨论一个随机变量每个可能取值的概率。我们可以写：

  $P(Weather = sunny) = 0.6$

  $P(Weather = rain) = 0.1$

  $P(Weather = cloudy) = 0.29$

  $P(Weather = snow) = 0.01$

- 这可以简写为：

  $\mathbf{P}(Weather) = \langle 0.6, 0.1, 0.29, 0.01 \rangle$

  P定义了随机变量Weather的一个**概率分布**

条件概率分布{13.2.2}

- **P**也被用于条件分布（conditional distributions）：**P**$(X|Y)$给出每个可能的i、j组合下的值$P(X=x_i|Y=y_j)$

概率密度{13.2.2}

- 对于连续变量，我们不可能用一个向量写出整个分布，因为有无限多的值
- 我们将一个连续随机变量X在值x处的**概率密度**写作$P(X = x)$或简写为$P(x)$；$P(x)$的直观定义是X落在以x开始的一个相当小的区域内的概率除以这个区间的宽度：

$$P(x) = \lim_{dx \to 0} P(x \le X \le x + dx) / dx$$

联合概率分布{13.2.2}

- **P**(*Weather*, *Cavity*)表示*Weather*和*Cavity*的取值的所有组合的概率。这是一个4×2的概率表，称为*Weather*和*Cavity*的**联合概率分布。**
- **P**(*sunny*, *Cavity*)是一个二元向量，给出晴天且有牙洞的概率和晴天且无牙洞的概率
- *Weather*和*Cavity*所有可能取值的乘法规则可以写成一个单一的等式：

P(*Weather*, *Cavity*)= **P**(*Weather*|*Cavity*) **P**(*Cavity*) ,

概率公理{13.2.3}

- $P(\neg a) = 1 - \sum_{\omega \in a} P(\omega)$
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

概率summary

- 逻辑断言 概率断言
- 样本空间 总概率 事件 命题
- 无条件概率 先验概率 条件概率 后验概率
- 随机变量 值
- A=true: a, Weather=sunny: sunny
- 概率分布 **P**(Weather)=< , , , >
- 条件分布 **P**(X|Y)
- 概率密度 P(X=x) P(x)
- 联合概率分布 **P**(Weather, Cavity)

概率推理

概率推理{13.3}

- 根据已观察到的证据计算查询命题的后验概率。我们使用完全联合概率分布作为“知识库”，从中可以导出所有问题的答案。

一个完全联合分布{13.3}

- 简单例子：一个由三个布尔变量*Toothache*，*Cavity*以及*Catch*（由于牙医的钢探针不洁而导致的牙龈感染）组成的问题域。其完全联合分布是一个2 × 2 × 2的表格。

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

计算命题概率的直接方法{13.3}

- 计算任何命题概率的一种直接方法：只需识别使命题为真的那些可能世界，然后把它们的概率加起来。
  - $P(cavity \vee toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.0165 + 0.064 = 0.28$

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

边缘概率/求和消元{13.3}

- $P(cavity) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$
- 这个过程称为**边缘化**，或称**求和消元**，除了*Cavity*以外的其他变量取每个可能值的概率相加，所以它们都被从公式中消除了

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}, \mathbf{z})$$

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

边缘概率/求和消元{13.3}

- $P(cavity) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$
- **边缘化**, 针对变量集合**Z**的所有可能取值组合进行求和 $$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}, \mathbf{z})$$
- 例如： $$\mathbf{P}(Cavity) = \sum_{\mathbf{z} \in \{Catch, Toothache\}} \mathbf{P}(Cavity, \mathbf{z})$$

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

边缘概率/求和消元{13.3}

- $P(cavity) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$
- **边缘化**, 针对变量集合**Z**的所有可能取值组合进行求和 $$\mathbf{P(Y)=\sum_{z\in Z} P(Y,z)}$$
- **条件化** $$\mathbf{P(Y)=\sum_{z} P(Y\mid z)P(z)}$$

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

条件概率、归一化常数{13.3}

$$P(cavity \mid toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

$$P(\neg cavity \mid toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

- **P**(*Cavity* | *toothache*) = α **P**(*Cavity*, *toothache*)
  = α [**P**(*Cavity*, *toothache*, *catch*) + **P**(*Cavity*, *toothache*, $\neg$*catch*)]
  = α [$\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle$] = $\alpha \langle 0.12, 0.08\rangle = \langle 0.6, 0.4\rangle$

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

一个通用推理过程{13.3}

$$\mathbf{P}(X\mid\mathbf{e})=\alpha\,\mathbf{P}(X,\mathbf{e})=\alpha\sum_{\mathbf{y}}\mathbf{P}(X,\mathbf{e},\mathbf{y})$$

- 其中的求和针对所有可能的**y**（也就是对未观测变量**Y**的值的所有可能组合）。注意变量*X*，**E**以及**Y**一起构成了问题域中所有变量的完整集合，因此**P**(*X*, **e**, **y**)只不过是完全联合分布概率中的一个子集。

概率推理summary

- 概率推理
- 边缘化/求和消元
- 条件化
- 通用推理过程

独立性带来简化

牙病问题增加一个变量{13.4}

- 考虑加入第4个变量——*Weather*
- 完全联合分布变为**P**(*Toothache*, *Catch*, *Cavity*, *Weather*)，它有2×2×2×4=32个条目
- *P*(*toothache*, *catch*, *cavity*, *cloudy*)与*P*(*toothache*, *catch*, *cavity*)有什么关系？使用乘法规则：

P(*toothache*, *catch*, *cavity*, *cloudy*)

= *P*(*cloudy*| *toothache*, *catch*, *cavity*) *P*(*toothache*, *catch*, *cavity*)

天气不影响牙病{13.4}

- 我们可以说天气并不受牙病变量影响。所以，下面的断言似乎是合理的：

  $P(cloudy \mid toothache, catch, cavity) = P(cloudy)$

- 据此，我们可以推断：

  $P(toothache, catch, cavity, cloudy) = P(cloudy)\, P(toothache, catch, cavity)$

- 实际上，我们可以写出通用公式：

  $\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity, Weather) = \mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity)\, \mathbf{P}(Weather)$

从而条目可以减少{13.4}

- 这样，4个变量的含有32个条目的表可从8条目表与4条目表构建出来
- 这是基于“天气是独立于牙病问题的”的

何谓独立性？{13.4}

- “天气是独立于牙病问题的”这样的特性称为**独立性**，也称为**边缘独立性**或**绝对独立性**
- 两个命题a和b之间独立可以写作：

$$P(a|b) = P(a) \quad \text{or} \quad P(b|a) = P(b)$$
$$\text{or} \quad P(a \wedge b) = P(a)P(b) \qquad (13.11)$$

- 变量X和Y之间独立可以写作：

$$\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X) \quad \text{or} \quad \mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y) \quad \text{or}$$
$$\mathbf{P}(X \wedge Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$$

- 独立性断言通常是基于问题的领域知识的。

贝叶斯规则

贝叶斯规则{13.5}

- 贝叶斯规则

$$P(b \mid a) = \frac{P(a \mid b)P(b)}{P(a)}$$

- 对于多值变量的情况

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \frac{\mathbf{P}(X \mid Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)}$$

- 以某个背景证据**e**为条件的情况

$$\mathbf{P}(Y \mid X, \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{P}(X \mid Y, \mathbf{e})\mathbf{P}(Y \mid \mathbf{e})}{\mathbf{P}(X \mid \mathbf{e})}$$

应用贝叶斯规则{13.5.1}

- 经常，我们将未知因素*cause*造成的结果*effect*看作是证据，而确定那个未知因素*cause*。这种情况下，贝叶斯规则变成

$$P(cause|effect)=\frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

- 计算：诊断方向 <---- 已知：因果方向
- 医生知道P(symptoms|disease)而想得出诊断 P(disease|symptoms)

脑膜炎问题{13.5.1}

- 例如，医生知道脑膜炎(m)会引起病人脖子僵硬(s)，比如说有70%的机会。医生还了解病人患脑膜炎的先验概率P(m)是1/50000，而任何一个病人脖子僵硬的先验概率P(s)为1%。那么脖子僵硬的病人得脑膜炎的概率是多少？
- P(m|s)=?

利用归一化常量{13.5.1}

- $\mathbf{P}(M \mid s) = \alpha \langle P(s \mid m)P(m), P(s \mid \neg m)P(\neg m)\rangle$

- 归一化的贝叶斯规则的一般形式为：

  $$\mathbf{P}(Y \mid X) = \alpha\, \mathbf{P}(X \mid Y)\, \mathbf{P}(Y)$$

有多条证据时怎么办？{13.5.2}

- 考虑计算**P**($Cavity \mid toothache \wedge catch$)，它有两条证据
- 如果知道完全联合分布，则可以读出答案：
- $\mathbf{P}(Cavity \mid toothache \wedge catch) = \alpha \langle 0.108, 0.016 \rangle \approx \langle 0.871, 0.129 \rangle$
- 这种方法不能扩展到有大量的变量的情况。

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

有多条证据时怎么办？{13.5.2}

- 也可以试着使用贝叶斯规则重新对问题形式化：
- $\mathbf{P}(Cavity \mid toothache \wedge catch) = \alpha\, \mathbf{P}(toothache \wedge catch \mid Cavity)\, \mathbf{P}(Cavity)$
- 这需要知道$\mathbf{P}(toothache \wedge catch \mid Cavity)$。只有两个证据变量时是可行的，但证据变量太多时同样不可行。

有多条证据时怎么办？{13.5.2}

- **P** ($toothache \wedge catch$ | $Cavity$)
- 要是*Toothache*和*Catch*彼此独立就好了，但是它们并非如此：如果探针引起牙齿感染，那么牙齿可能有洞，而这个牙洞引起牙痛。不过，如果*已知病人是否有牙洞，*这两个变量就是相互独立的。每个变量取值都是由牙洞导致的，但是它们彼此之间没有直接影响：牙痛依赖于牙神经的状态，而使用探针的精确度取决于牙医的技术，牙痛与此无关。

有多条证据时怎么办？{13.5.2}

- 数学上，这个性质可以写作：
- $\mathbf{P}(toothache \wedge catch \mid Cavity) = \mathbf{P}(toothache \mid Cavity)\, \mathbf{P}(catch \mid Cavity)$
- 这个公式表达了当给定*Cavity*时*toothache*和*catch*的**条件独立性** 我们假设病人和牙医不是同一人。

有多条证据时怎么办？{13.5.2}

- **若**给定*Cavity*时*toothache*和*catch*是**条件独立**的，那么：
- $\mathbf{P}(Cavity \mid toothache \wedge catch)$

$= \alpha\, \mathbf{P}(toothache \mid Cavity)\, \mathbf{P}(catch \mid Cavity)\, \mathbf{P}(Cavity)$

条件独立性{13.5.2}

- 给定第三个随机变量*Z*后，两个随机变量*X*和*Y*的条件独立性的一般定义是：
- $\mathbf{P}(X, Y \mid Z) = \mathbf{P}(X \mid Z)\, \mathbf{P}(Y \mid Z)$
- 也可以使用以下条件独立性的等价形式（习题13.17，证明之）：
- $\mathbf{P}(X \mid Y, Z) = \mathbf{P}(X \mid Z)$ 和 $\mathbf{P}(Y \mid X, Z) = \mathbf{P}(Y \mid Z)$

条件独立性{13.5.2}

- 这个牙科的例子说明了一类普遍存在的模式，其中单一原因直接影响许多结果，这些结果在给定这个原因时都是彼此条件独立的。这时，完全联合分布可以写为：
- $\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \ldots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause)\ \Pi_i\ \mathbf{P}(Effect_i \mid Cause)$

条件独立性{13.5.2}

- 这样的一个概率分布被称为一个**朴素贝叶斯模型**。
- 在实际中，基于朴素贝叶斯模型的系统工作得出奇地好——即使条件独立性假设不成立时。

独立性 条件独立性 summary

- 独立性/边缘独立性/绝对独立性
- 贝叶斯，条件独立性，朴素贝叶斯

summary

- 重要概念：样本空间，事件/命题，无条件概率/先验概率，条件概率/后验概率，概率分布，条件分布，联合概率密度，完全联合分布；概率推理，边缘化/求和消元，条件化，归一化常量；独立性，条件独立性

- 重要公式（边缘化/求和消元，通用推理过程，独立性、条件独立性）