Chapter 15
时间上的概率推理

1. 时间与不确定性
2. 时序模型中的推理
3. 隐马尔可夫模型
4. 卡尔曼滤波
5. 动态贝叶斯网络
6. 跟踪多个对象

时间与不确定性

静态世界{15.1}

- **静态**世界中进行概率推理，其中每个随机变量都有一个唯一的固定取值。
- 例如，在修理汽车时，我们总是假设发生故障的部分在整个诊断过程中一直都是有故障的；我们的任务是根据已经观察到的证据推断汽车的状态，这个状态也是保持不变的。

动态世界{15.1}

- 考虑一个动态世界。我们有诸如病人近期的胰岛素服用剂量、食物摄入量、血糖水平测量值等证据。任务是要评价病人的当前状态，包括真实的血糖水平和胰岛素水平。血糖水平及其测量值会随着时间发生变化，这取决于近期的食物摄入量、胰岛素剂量、新陈代谢活动、每天里的不同时间等。为了根据历史证据评价当前状态，并预测治疗方案的结果，我们必须对这些变化建模。

时间片{15.1.1}

- 将世界看作一系列**时间片**，每个时间片包含了一组随机变量，其中一部分是可观察的，而另一部分是不可观察的。符号$\mathbf{X}_t$来表示在时刻t的不可观察的状态变量集，符号$\mathbf{E}_t$表示可观察的证据变量集。时刻t的观察结果为$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_t$，$\mathbf{e}_t$是变量值的某个集合。

雨伞问题{15.1.1}

- 考虑雨伞问题：你是某个秘密地下设施的警卫。你想知道今天是否会下雨，但是你了解外界的唯一渠道是你每天早上观察主管进来时有没有带着雨伞。在每天t，集合$\mathbf{E}_t$只包含单一证据变量$Umbrella_t$或简写形式U_t（雨伞是否出现了），而集合$\mathbf{X}_t$也只包含单一状态变量$Rain_t$或简写形式R_t（是否在下雨）。

变量的整数标注{15.1.1}

- 状态序列从时刻$t = 0$开始；我们假设证据变量从$t = 1$开始。雨伞问题被表示为状态变量$R_0, R_1, R_2, \ldots$以及证据变量$U_1, U_2, \ldots$。符号$a:b$来表示从a到b的整数序列（包括a和b），于是符号$\mathbf{X}_{a:b}$表示从$\mathbf{X}_a$到$\mathbf{X}_b$的一组变量。例如，符号$U_{1:3}$对应于变量U_1, U_2, U_3。

转移模型{15.1.2}

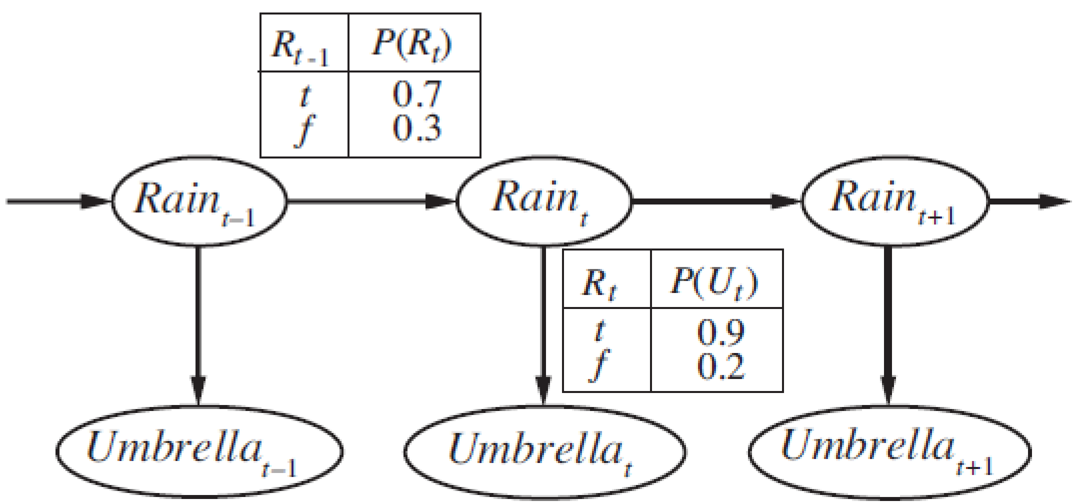
- 转移模型描述在给定过去的状态变量的值之后，确定最新状态变量的概率分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1})$。
- **马尔可夫假设**——当前状态只依赖于有限的固定数量的过去状态。满足马尔可夫假设的过程称为马尔可夫过程。
- 一阶马尔可夫过程中，转移模型是条件分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$。 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$
- 二阶马尔可夫过程的转移模型是条件分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-2}, \mathbf{X}_{t-1})$。 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-2}, \mathbf{X}_{t-1})$

传感器模型{15.1.2}

- 证据变量$\mathbf{E}_t$可能依赖于前面的变量也依赖于当前的状态变量，但任何称职的状态对于产生当前的传感器值应该足够了。因此，我们做如下的**传感器马尔可夫假设**：
- $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_t)$

稳态过程{15.1.2}

- 是否要为每个时间步确定一个不同的分布？
- 我们假设世界状态的变化是由一个**稳态过程**引起的——变化的过程是由本身不随时间变化的规律支配的。
  $P(X_t \mid X_{t-1})$ 与$P(E_t \mid X_t)$不变。



时刻0先验概率{15.1.2}

- 除了转移模型和传感器模型，还需要指定事情是如何开始的——时刻0时的先验概率分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$。

联合概率分布{15.1.2}

$P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_n, \ldots, x_1) =$
$P(x_n \mid x_{n-1}, \ldots, x_1)\ P(x_{n-1} \mid x_{n-2}, \ldots, x_1) \ldots P(x_2 \mid x_1)\ P(x_1)$

- 有了这些（一阶马尔可夫假设、传感器马尔可夫假设、时刻0的先验概率分布），就能确定所有变量上完整的联合概率分布。对于任何*t*，我们有

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{1:t}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) \prod_{i=1}^{t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_{i-1}) \mathbf{P}(\mathbf{E}_i \mid \mathbf{X}_i)$$

时序模型中有哪些推理？

任务1：滤波{15.2}

- **滤波（状态估计）**：计算**信念状态**，即给定目前为止的所有证据，计算*当前*状态的后验概率分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$。
- 在雨伞世界的例子中，这将意味着给定目前为止对雨伞携带者的过去的所有观察数据，计算今天下雨的概率。

任务2：预测{15.2}

- **预测**：给定目前为止的所有证据，计算*未来*状态的后验分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$。
- 在雨伞例子中，这也许意味着给定目前为止对雨伞携带者的过去的所有观察数据，计算今天开始三天以后下雨的概率。

任务3：平滑{15.2}

- **平滑**：给定目前为止的所有证据，计算*过去*某一状态的后验概率。也就是说，我们希望对某个满足$0 \le k < t$的k计算$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$。
- 在雨伞例子中，这也许意味着给定目前为止对雨伞携带者的过去的所有观察数据，计算上星期三下雨的概率。平滑为该状态提供了一个比当时能得到的结果更好的估计，因为它结合了更多的证据。

任务4：最可能解释{15.2}

- **最可能解释**：给定观察序列，我们可能希望找到最可能生成这些观察结果的状态序列。也就是说，我们希望计算

$$\arg\max_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

- 例如，如果前三天每天都出现雨伞，但第四天没出现，那么最可能的解释是前三天下了雨，而第四天没有下。再如语音识别——给定声音序列找到最可能的单词序列。

任务5：学习{15.2}

- **学习**：如果还不知道转移模型和传感器模型，则可以从观察中学习。和静态贝叶斯网络一样，动态贝叶斯网的学习可以作为推理的一个副产品而完成。推理为哪些转移确实会发生和哪些状态会产生传感器读数提供了估计，而且这些估计可以用于对模型进行更新。更新过的模型又提供新的估计，这个过程迭代至收敛。整个算法是期望最大化算法（或者称**EM算法**）的一个特例（20.3节）。

滤波

滤波{15.2.1}

- **滤波（状态估计）**：计算**信念状态**，即给定目前为止的所有证据，计算当前状态的后验概率分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$。
- 一个有用的滤波算法不是每次更新时回到整个感知历史。给定直到时刻t的滤波结果，Agent需要根据新的证据$\mathbf{e}_{t+1}$来计算时刻$t+1$的滤波结果。也就是说，存在某个函数f满足：
  - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{t+1}, \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t}))$
  - 即根据过去的滤波和当前证据计算当前的滤波

滤波{15.2.1}

- 这个过程被称为**递归估计**，相应的计算可视为由传感器模型和单步预测构成：

$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$ （证据分解）

$= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$ （使用贝叶斯规则）

$= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$ （根据传感器马尔可夫假设）

- 将当前状态$\mathbf{X}_t$条件化，得到单步预测结果：

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{e}_{1:t})P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

$$= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$ 马尔可夫假设（**15.5**）

求和的第一个因子来自转移模型，第二个因子来自当前状态分布

可以认为$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$是沿着序列向前传播的“消息”$\mathbf{f}_{1:t}$

$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \text{FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$

雨伞问题的滤波{15.2.1}

- 第0天，观察还没开始，只有警卫的先验信念，假设为$\mathbf{P}(R_0) = \langle 0.5, 0.5\rangle$。
- 从$t = 0$到$t = 1$的预测结果为：

$$\mathbf{P}(R_1) = \sum_{r_0} \mathbf{P}(R_1 \mid r_0) P(r_0)$$

$$= \langle 0.7, 0.3\rangle \times 0.5 + \langle 0.3, 0.7\rangle \times 0.5 = \langle 0.5, 0.5\rangle$$

第1天，出现了雨伞，所以$U_1 = true$。
根据t=1时刻的证据进行更新：

$$\mathbf{P}(R_1 \mid u_1) = \alpha \mathbf{P}(u_1 \mid R_1)\mathbf{P}(R_1) = \alpha\langle 0.9, 0.2\rangle\langle 0.5, 0.5\rangle$$

$$= \alpha\langle 0.45, 0.1\rangle \approx \langle 0.818, 0.182\rangle$$

雨伞问题的滤波{15.2.1}

- 由t = 1到t = 2的预测结果为

$$\mathbf{P}(R_2 \mid u_1) = \sum_{r_1} \mathbf{P}(R_2 \mid r_1) P(r_1 \mid u_1)$$

$$= \langle 0.7, 0.3 \rangle \times 0.818 + \langle 0.3, 0.7 \rangle \times 0.182 \approx \langle 0.627, 0.373 \rangle$$

第2天，又出现了雨伞，因此U_2 = *true*。根据t = 2 时刻的证据进行更新，得到

$$\mathbf{P}(R_2 \mid u_1, u_2) = \alpha \mathbf{P}(u_2 \mid R_2) \mathbf{P}(R_2 \mid u_1) = \alpha \langle 0.9, 0.2 \rangle \langle 0.627, 0.373 \rangle$$

$$= \alpha \langle 0.565, 0.075 \rangle \approx \langle 0.883, 0.117 \rangle$$

预测

预测{15.2.1}

- 根据对$t+k$时刻的预测能够推导出对$t+k+1$时刻的状态预测的递归计算过程如下

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_{t+k}} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{x}_{t+k}) P(\mathbf{x}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

混合时间{15.2.1}

- 对越来越远的未来进行预测时会发生什么。对是否下雨的预测（习题15.2(b)）的分布会收敛到一个不动点$\langle 0.5, 0.5\rangle$。**混合时间**就是达到这个不动点所需要的时间。转移模型中的不确定性越多，混合时间就越短，未来就越模糊。

平滑

平滑{15.2.2}

- **平滑**是给定直到现在的已知证据，来计算过去的状态的分布；也就是，对于$1 \le k < t$计算$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$。这个计算分成两部分：直到时刻$k$的证据以及从时刻$k+1$到时刻$t$的证据：

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:k}, \mathbf{e}_{k+1:t})$$

$$= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:k})\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k, \mathbf{e}_{1:k}) \qquad \text{贝叶斯规则}$$

$$= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:k})\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k) \qquad \text{条件独立性}$$

$$= \alpha\, \mathbf{f}_{1:k} \times \mathbf{b}_{k+1:t}$$

（15.8）

- $\mathbf{f}_{1:k} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:k})$通过从时刻1到$k$的前向滤波过程计算

平滑{15.2.2}

- $\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k)$通过一个从$t$开始向后运行的递归过程来计算

- k=t时，初始值
  $\mathbf{b}_{t+1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1:t} \mid \mathbf{X}_t) = \mathbf{P}(\mid \mathbf{X}_t) = \mathbf{1}$
- 再计算
  $\mathbf{b}_{t:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t:t} \mid \mathbf{X}_{t-1})$
  $\mathbf{b}_{t-1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t-1:t} \mid \mathbf{X}_{t-2})$
  。。。

平滑{15.2.2}

- $\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k)$通过一个从$t$开始向后运行的递归过程来计算

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k) = \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k) \quad \text{将}\mathbf{x}_{k+1}\text{条件化}$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k) \quad \text{条件独立性}$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \underbrace{P(\mathbf{e}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1})}_{\text{观察模型}} \underbrace{P(\mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})}_{\text{后向递归}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k)}_{\text{转移模型}} \quad \text{条件独立性（15.9）}$$

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \text{BACKWARD}(\mathbf{b}_{k+2:t}, \mathbf{e}_{k+1})$$

雨伞问题的平滑{15.2.2}

- 给定第1天和第2天都观察到雨伞，要计算$k = 1$时下雨概率的平滑估计。
- **根据公式15.8：**
  $\mathbf{P}(R_1 \mid u_1, u_2) = \alpha\, \mathbf{P}(R_1 \mid u_1)\, \mathbf{P}(u_2 \mid R_1)$
- 在滤波中已获得第一项等于$\langle 0.818, 0.182\rangle$
- 根据向后递归过程

$$\mathbf{P}(u_2 \mid R_1) = \sum_{r_2} P(u_2 \mid r_2) P(\mid r_2) \mathbf{P}(r_2 \mid R_1)$$

$$= (0.9 \times 1 \times \langle 0.7, 0.3\rangle) + (0.2 \times 1 \times \langle 0.3, 0.7\rangle) = \langle 0.69, 0.41\rangle$$

- $\mathbf{P}(R_1 \mid u_1, u_2) = \alpha\, \langle 0.818, 0.182\rangle \times \langle 0.69, 0.41\rangle \approx \langle 0.883, 0.117\rangle$

最可能序列

寻找最可能序列{15.2.3}

- 假设[*true*,*true*,*false*,*true*,*true*]是警卫观察到的前5天的雨伞序列。解释这个序列的最可能的天气序列是什么？

$$\arg\max_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

- 是否可以不用枚举所有序列？

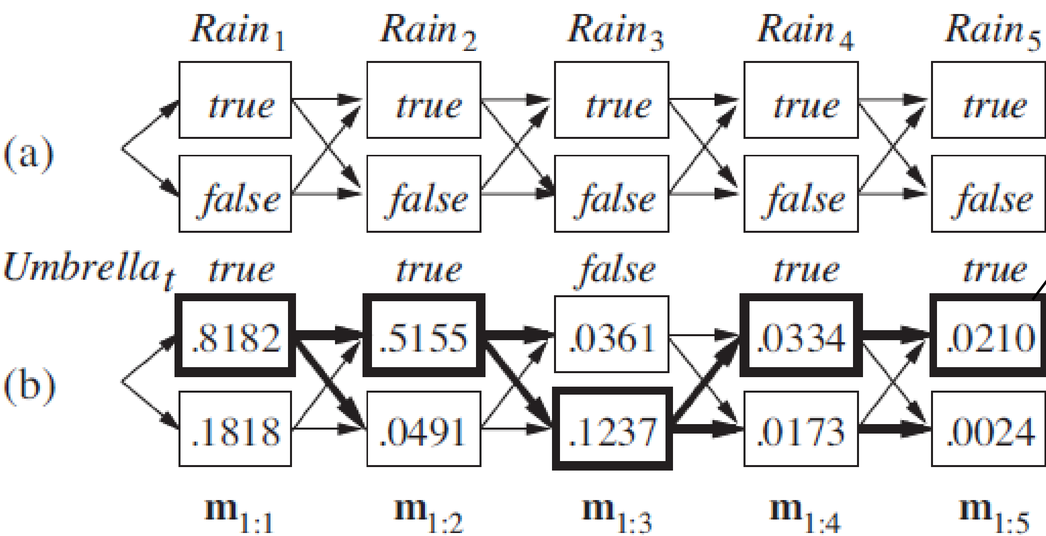
寻找最可能序列{15.2.3}

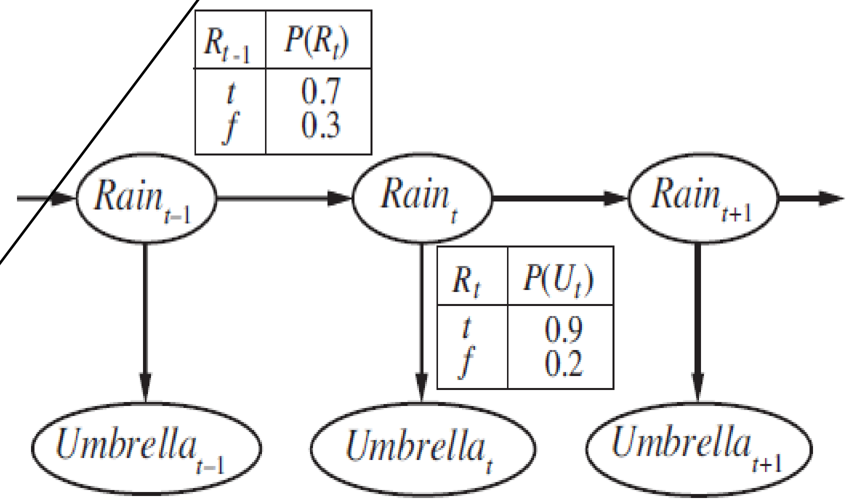
- 考虑：用平滑算法找到每个时间步上的天气后验分布；然后用每个时间步上与后验分布最可能一致的天气来构造这个序列。

- 这与期望的最可能序列仍有很大差异。通过平滑计算得到的是*单个*时间步上的后验分布，然而要寻找最可能*序列*，我们必须考虑所有时间步上的*联合*概率（ex15.4）

寻找最可能序列{15.2.3}

计算公式？

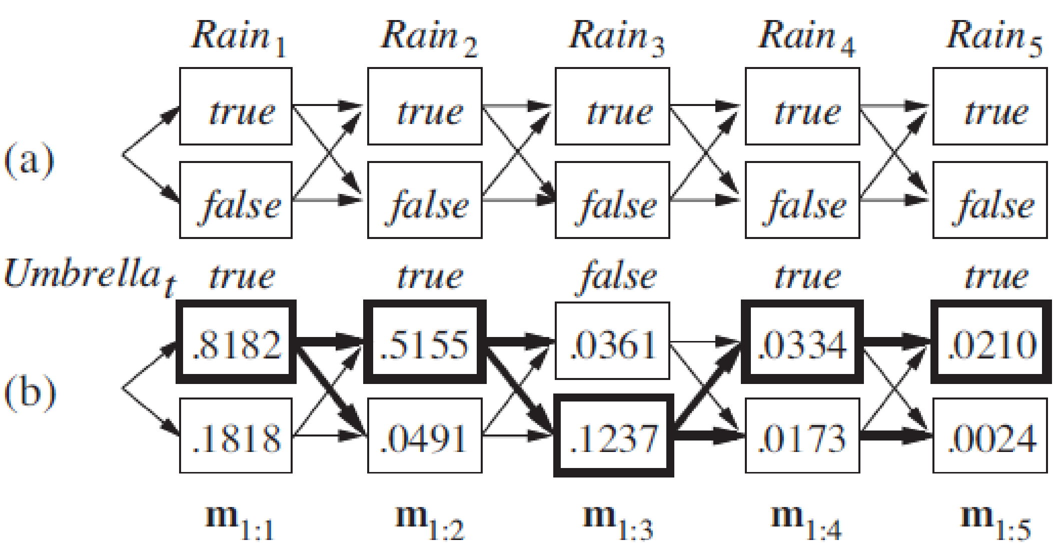


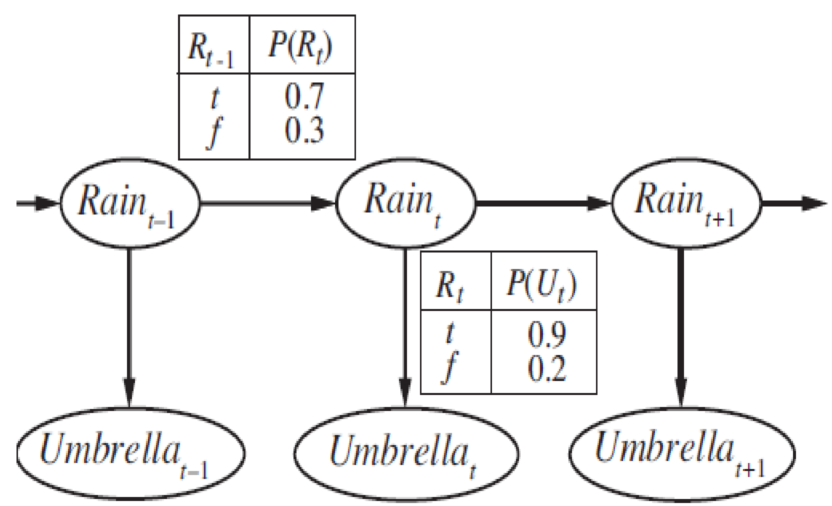


- $\mathbf{m}_{1:t}$给出了在时刻t到达每个状态的最佳序列的概率。对于每个状态，指向它的粗箭头指出了其最佳先辈节点，由前面序列的概率与转移概率相乘来度量最佳先辈节点。从$\mathbf{m}_{1:5}$中最可能的状态出发，沿着粗箭头反方向就可以得到最可能序列

寻找最可能序列{15.2.3}

- 将每个序列视为以每个时间步上的可能状态为节点所构成的图中的一条路径。其中任何一条路径的似然是沿该路径的转移概率和每个状态的所给定的观察结果的概率的乘积（写出公式）





Viterbi算法{15.2.3}

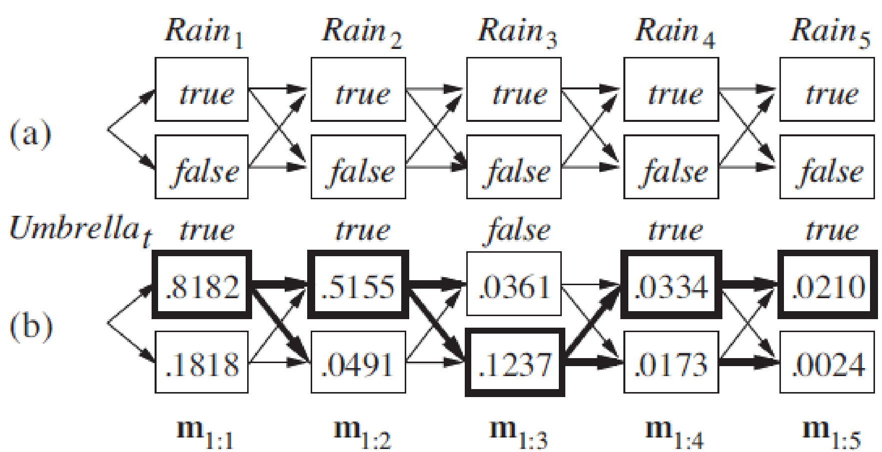
- *在到达每个状态$\mathbf{x}_{t+1}$的最可能路径与到达每个状态$\mathbf{x}_t$的最可能路径之间存在一种递归关系。*

$$\max_{\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{X}_{t+1}\mid\mathbf{e}_{1:t+1})$$

$$=\alpha\max_{\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_t}\left(\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\mid\mathbf{x}_{1:t},\mathbf{X}_{t+1},\mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\mid\mathbf{x}_{1:t},\mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{t-1},\mathbf{x}_t\mid\mathbf{e}_{1:t})\right)$$

$$=\alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\mid\mathbf{X}_{t+1})\max_{\mathbf{x}_t}\left(\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\mid\mathbf{x}_t)\max_{\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_{t-1}}\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{t-1},\mathbf{x}_t\mid\mathbf{e}_{1:t})\right)$$

利用条件独立性



隐马尔可夫模型HMM

何谓HMM{15.3}

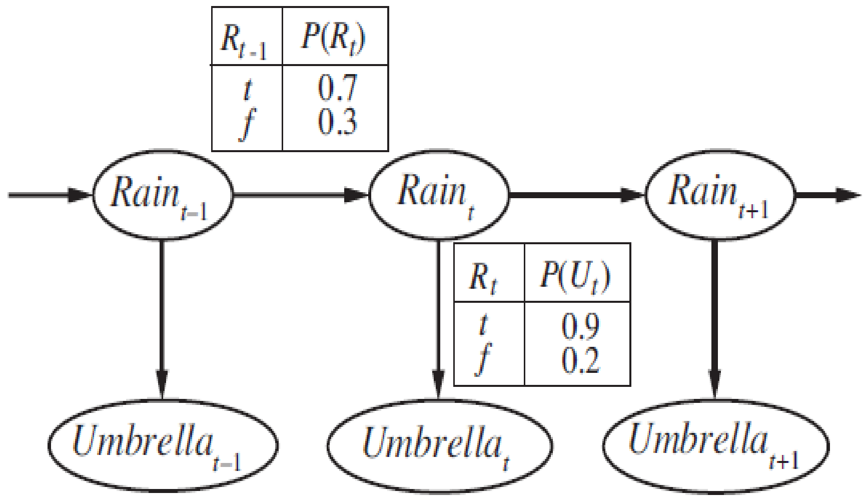
- 隐马尔可夫模型是用*单个离散*随机变量描述过程状态的时序概率模型。因此雨伞例子是一个隐马尔可夫模型。
- 若模型有两个或多个状态变量怎么办？
  - 组合为单个“大变量”,它的值是多元组。
- 这种受限制的结构能够得到一种非常简单而明快的矩阵实现 。

HMM的转移模型{15.3.1}

- 设状态变量X_t的值用整数1, ..., S表示，其中S表示可能状态的数目。转移模型$\mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1})$成为一个$S \times S$的矩阵**T**，其中：

$$\mathbf{T}_{i\,j} = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i)$$

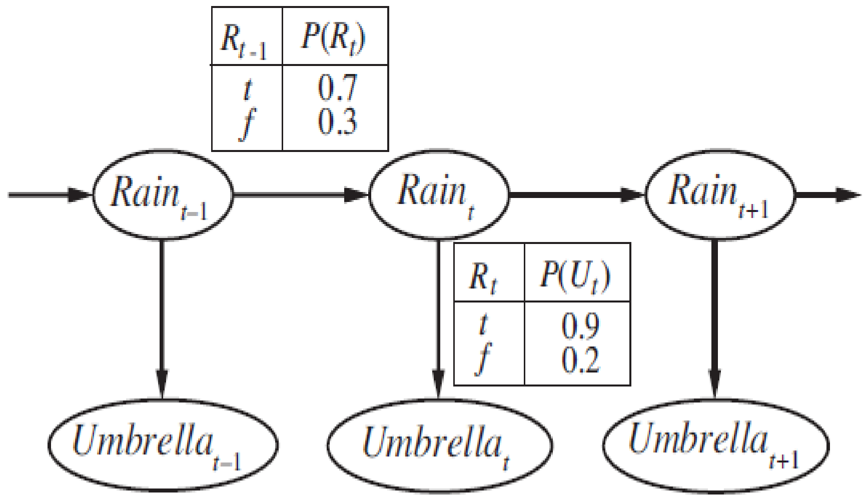
HMM的转移模型{15.3.1}



- $\mathbf{T}_{i\,j}$是从状态i转移到状态j的概率。例如，雨伞世界的转移矩阵是：

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1}) =$$

HMM的转移模型{15.3.1}



- $\mathbf{T}_{i\,j}$是从状态i转移到状态j的概率。例如，雨伞世界的转移矩阵是：

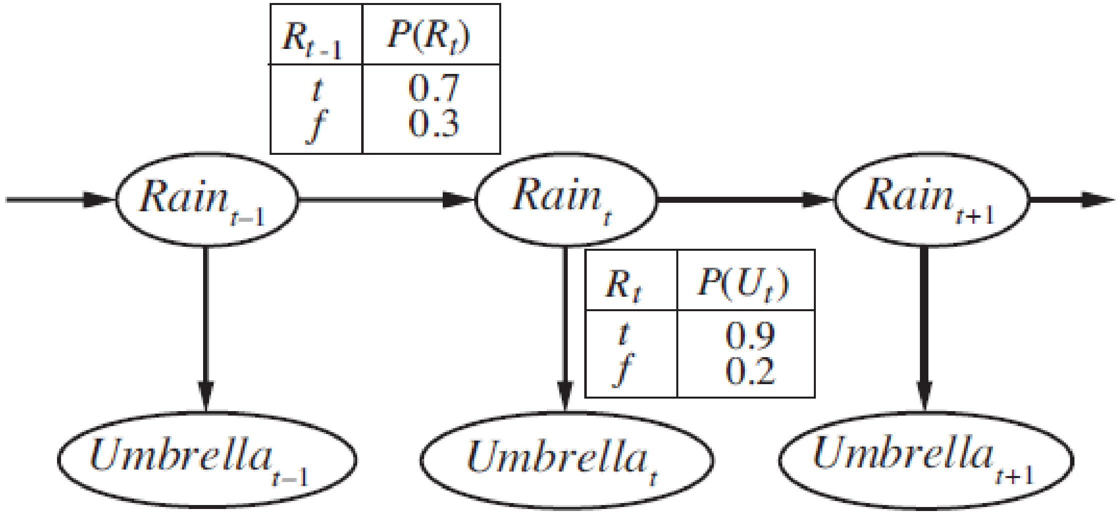
$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1}) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

HMM的传感器模型{15.3.1}

- 证据变量E_t的取值在时刻t是已知的，称作e_t，我们只需要为每个状态指定这个状态使e_t出现的概率是多少。将这些值放入一个$S \times S$的矩阵$\mathbf{O}_t$中，它的第i个对角元素是$P(e_t|X_t=i)$，其他元素是0。雨伞世界中$U_1 = true$，$U_3 = false$，因此，

$$\mathbf{O}_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$



review: 滤波{15.2.1}

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1})$$

$$= \alpha \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \sum_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha \text{ FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$$

前向公式{15.3.1}

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \mathbf{O}_{t+1} \mathbf{T}^{\top} \mathbf{f}_{1:t}$$

where $\mathbf{f}_{1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1})$$

$$= \alpha \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \sum_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \text{FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$$

review: 平滑{15.2.2}

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k) P(\mathbf{e}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1}) P(\mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})$$

转移模型　　后向递归　　观察模型

$$\mathbf{b}_{k+1\,:\,t} = \text{BACKWARD}(\mathbf{b}_{k+2\,:\,t}, \mathbf{e}_{k+1})$$

后向公式{15.3.1}

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{TO}_{k+1}\,\mathbf{b}_{k+2:t}$$

where $\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k)$

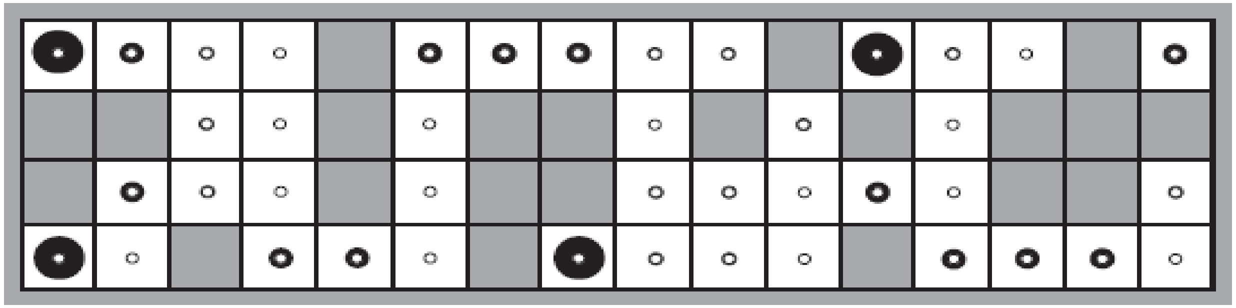
$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{X}_k)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{X}_k) P(\mathbf{e}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1}) P(\mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})$$

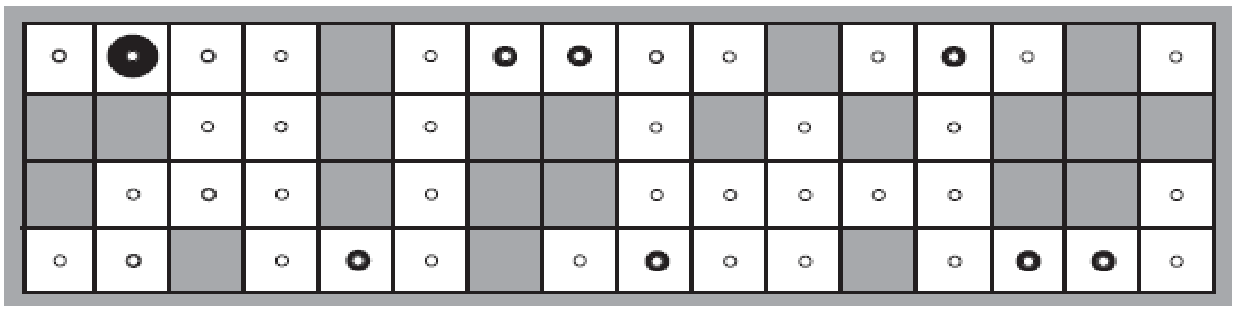
转移模型 观察模型 后向递归

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathrm{B}{\scriptstyle\mathrm{ACKWARD}}(\mathbf{b}_{k+2:t}, \mathbf{e}_{k+1})$$

HMM实例：定位{15.3.2}



(a) Posterior distribution over robot location after $E_1 = NSW$



(b) Posterior distribution over robot location after $E_1 = NSW, E_2 = NS$

- 通过move并观察周围的障碍物实现定位
- 为了定位，需要哪些已知信息？

HMM实例：定位{15.3.2}

- 为吸尘器世界的机器人的行为引入一个简单的概率模型，并允许传感器的噪声。状态变量X_t表示机器人在离散网格里的位置；这个变量的定义域是空方块组成的集合$\{s_1,\ldots,s_n\}$。设NEIGHBORS(s)是与s相邻的空方块集合，并设$N(s)$是这个集合的大小。*Move*的转移模型中，机器人等概率地移动到各相邻方块：

$$P(X_{t+1}=j|X_t=i) = \mathbf{T}_{ij} = (1/N(i) \text{ if } j \in \text{NEIGHBORS}(i) \text{ else } 0)$$

HMM实例：定位{15.3.2}

- 我们并不知道机器人的初始位置，所以假设在各方块是均匀分布的：

  $P(X_0=i)=1/n$。

HMM实例：定位{15.3.2}

- 传感器变量E_t有16个可能取值，每个取值是一个4位串（4个bit），描述每个方向上（东南西北4个方向）是否有障碍物。假设每个传感器的错误率为ε，而且四个传感器的错误是相互独立的。4个位都正确的概率是$(1-\varepsilon)^4$，都错误的概率是ε^4。如果对于方块i的真实值与实际读数e_t之间的差异——不同的位的数量——是d_{it}，那么在方块i中的机器人得到传感器读数e_t的概率是

$$P(E_t = e_t \mid X_t = i) = \mathbf{O}_{t_{ii}} = (1-\varepsilon)^{4-d_{it}} \varepsilon^{d_{it}}$$

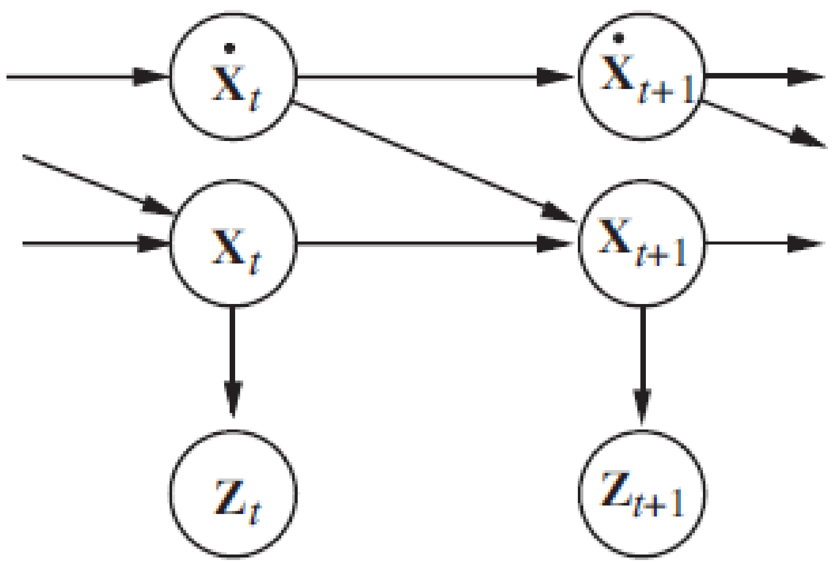
卡尔曼滤波

卡尔曼滤波用于什么{15.4}

- 想象一只小鸟飞行穿过浓密的丛林，小鸟断断续续地闪现；你试图猜测小鸟在哪里以及下一时刻它会出现在哪里。
- 或者想象一个雷达操作员跟踪一个微弱的移动目标，目标每隔10秒钟在屏幕上闪现一次。
- 这些情况下都在进行滤波：根据随时间变化和带有噪声的观察数据去估计状态变量（位置和速度）。如果是离散变量，可以用HMM建模。现在考查连续变量，将使用**卡尔曼滤波**。

小鸟问题的贝叶斯网络{15.4}

- 小鸟飞行的每个时间点用6个连续变量描述，3个用于位置(X_t, Y_t, Z_t)，3个用于速度$(\dot{X}_t, \dot{Y}_t, \dot{Z}_t)$。暂时只考虑X坐标。



转移模型？
传感器模型？

转移模型与传感器模型是线性高斯的{15.4}

- 用**线性高斯**分布表示转移模型，下一个状态$\mathbf{X}_{t+1}$是$\mathbf{X}_t$的线性函数，再加上高斯噪声。设观测间隔为Δ，且观测间隔里速度不变；那么位置更新由 $X_{t+\Delta} = X_t + \dot{X}\Delta$ 给出。增加高斯噪声（解释风向的变化等），得到一个线性高斯转移模型：

$$P(X_{t+\Delta}=x_{t+\Delta} \mid X_t=x_t, \dot{X}_t=\dot{x}_t)=N(x_t+\dot{x}_t\Delta, \sigma^2)(x_{t+\Delta})$$

review：滤波与预测{15.2.1}

- 滤波：这个过程被称为**递归估计**，相应的计算可视为由传感器模型和单步预测构成：

  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$　（证据分解）

  $= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$　（使用贝叶斯规则）

  $= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$　（根据传感器马尔可夫假设）

- 预测：根据对$t+k$时刻的预测能够推导出对$t+k+1$时刻的状态预测的递归计算过程如下

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_{t+k}} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{x}_{t+k}) P(\mathbf{x}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

更新高斯分布{15.4.1}

- 如果当前分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$是高斯分布，转移模型$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t)$是线性高斯的，那么单步预测分布也是高斯分布

$\mathbf{f}_{1:t}$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \int_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t}) d\mathbf{x}_t$$

- 如果预测分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$是高斯分布，传感器模型$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})$是线性高斯的，那么条件化新证据后，更新后的分布也是高斯分布

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

$\mathbf{f}_{1:t+1}$

卡尔曼滤波的一般描述{15.4.3}

- 转移模型和传感器模型都允许一个附加高斯噪声的*线性*变换，因此有：
  - $P(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) = N(\mathbf{F}\mathbf{x}_t, \Sigma_x)(\mathbf{x}_{t+1})$
  - $P(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) = N(\mathbf{H}\mathbf{x}_t, \Sigma_z)(\mathbf{z}_t)$
- 其中$\mathbf{F}$和Σ_x是描述线性转移模型和转移噪声协方差的矩阵，
- 而$\mathbf{H}$和Σ_z是传感器模型的相应矩阵。

动态贝叶斯网络

何谓动态贝叶斯网络{15.5}

- **动态贝叶斯网络**（DBN），是一种表示时序概率模型的贝叶斯网络。例如雨伞网络以及小鸟网络。DBN中的每个时间片可以具有任意数量的状态变量$\mathbf{X}_t$与证据变量$\mathbf{E}_t$。为了简化，假设动态贝叶斯网络表示的是一个一阶马尔可夫过程。

HMM与DBN有何关系？{15.5}

- 每个HMM是一个DBN
- DBN通过将复杂系统的状态分解成一些组成变量，可充分利用时序概率模型中的稀疏性
- 例如，假设一个DBN有20个布尔状态变量，每一个变量都在前一个时间片中有三个父节点，那么DBN的转移模型中有$20 \times 2^3 = 160$个概率；对应的HMM有2^{20}种状态，在转移矩阵中有2^{40}个概率。

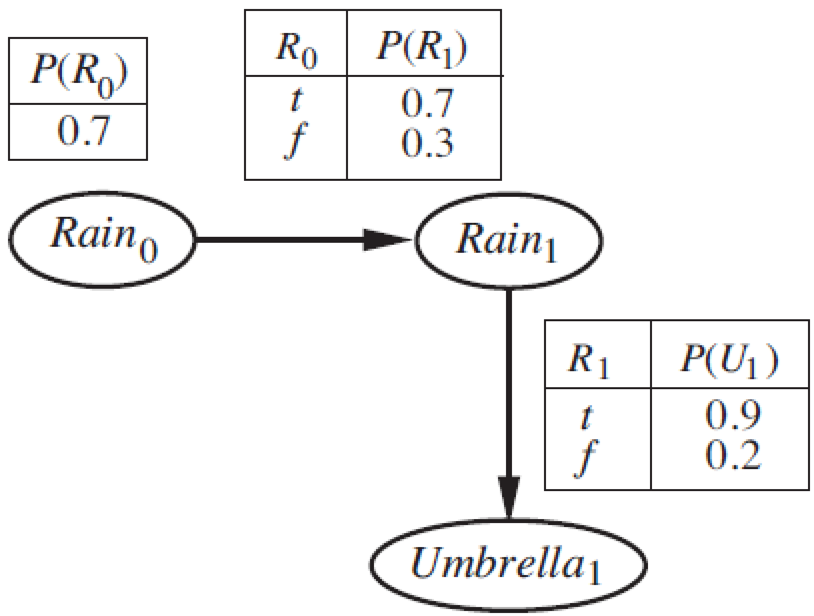
卡尔曼滤波与DBN有何关系{15.5}

- 每个卡尔曼滤波器模型是一个DBN
- 在卡尔曼滤波器中，当前状态分布总是一个单一的多元高斯分布。动态贝叶斯网络可以对任意分布建模。

- 考虑我的钥匙的当前位置。它可能在衣兜里，在床头柜上，或在厨房灶台上。一个包含了所有这些位置的单一高斯隆起可能会为“钥匙位于前厅的半空中”分配很高的概率。

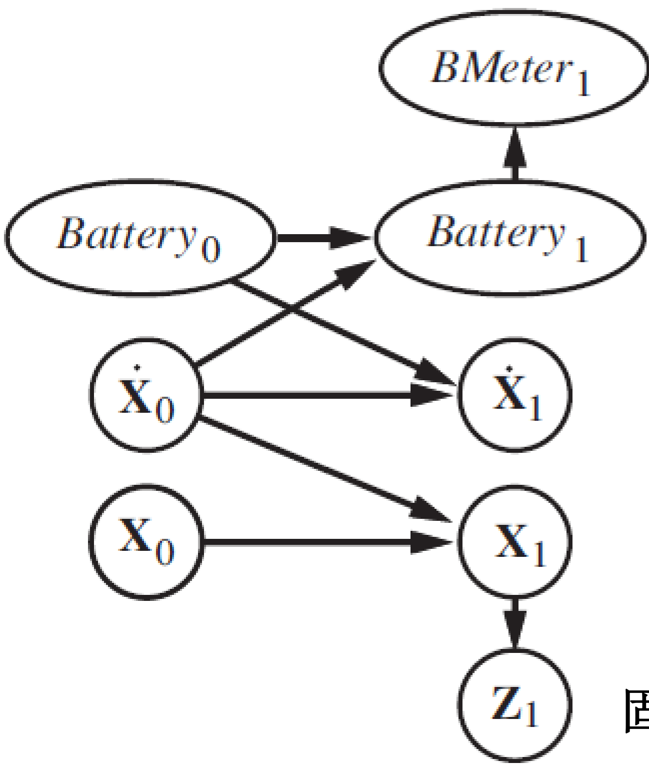
构造DBN{15.5.1}

- 构造一个DBN，必须指定状态变量的先验分布$\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$、转移模型$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t)$、以及传感器模型$\mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_t)$。还要指定连接关系的拓扑结构。因为假设转移模型和传感器模型都是稳态的，因此只要为第一个时间片指定这些信息。



构造DBN{15.5.1}

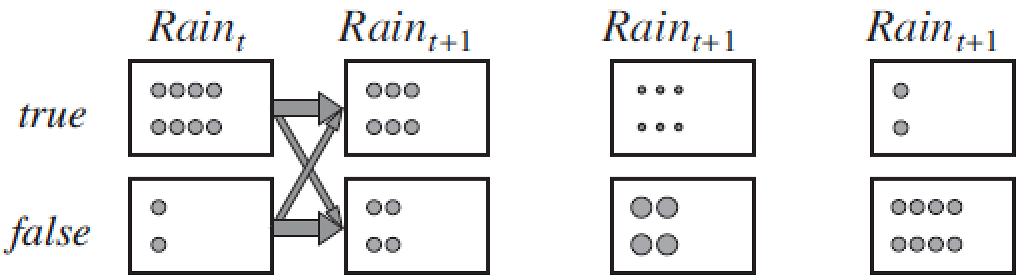
- 电池驱动的机器人



变量$BMeter_t$表示电池充电水平的测量值

固定的摄像头或者机器人载GPS获得测量值$\mathbf{Z}_t$

粒子滤波算法



(a) Propagate (b) Weight (c) Resample

- **粒子滤波**（particle filtering）算法：首先，从先验分布**P**(**X**$_0$)中采样得到N个初始状态样本构成的总体。然后为每个时间步重复下面的更新循环：
- 对于每个样本，通过转移模型**P**(**X**$_{t+1}$ | **x**$_t$)，对下一个状态值**x**$_{t+1}$进行采样，使得该样本前向传播。
- 对于每个样本，用它赋予新证据的似然值P(**e**$_{t+1}$ | **x**$_{t+1}$)做为权值。
- 对总体样本进行重新采样以生成一个新的N样本总体。每个新样本是从当前的总体中选取的；某个特定样本被选中的概率与其权值成正比。新样本是没有被赋权值的。

跟踪多个目标

- 雷达跟踪问题:旋转的雷达天线以固定的时间间隔检测反射脉冲。在每个时间步骤，屏幕上可能出现多个光点，但没有关于时刻t的哪个光点是时刻t-1的哪个光点的直接观察. t时刻两个光点位置为e_t^1和e_t^2，在这个时候恰好两个飞行器A和B产生了这个光点，它们的真实位置为X_t^A和X_t^B。每个飞行器根据一个已知的转移模型独立地飞行。

- 分布同样分解成对各时间步骤的贡献

$$P(x_{0:t}^A, x_{0:t}^B, e_{1:t}^1, e_{1:t}^2) =$$

$$P(x_0^A)P(x_0^B)\prod_{i=1}^{t} P(x_i^A | x_{i-1}^A)P(x_i^B | x_{i-1}^B)P(e_i^1, e_i^2 | x_i^A, x_i^B)$$

- 我们将对观察与对象所有可能的关联方式求和
- wi(A)：在时刻i,对象A的观察(1或2)

$$
\begin{aligned}
P(e_i^1, e_i^2 \mid x_i^A, x_i^B) &= \sum_{\omega_i} P(e_i^1, e_i^2 \mid x_i^A, x_i^B, \omega_i) P(\omega_i \mid x_i^A, x_i^B) \\
&= \sum_{\omega_i} P(e_i^{\omega_i(A)} \mid x_i^A) P(e_i^{\omega_i(B)} \mid x_i^B) P(\omega_i \mid x_i^A, x_i^B) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\omega_i} P(e_i^{\omega_i(A)} \mid x_i^A) P(e_i^{\omega_i(B)} \mid x_i^B) .
\end{aligned}
$$

滤波

- 滤波分布将是指数级数量的分布的混合，赋予A的每种观察序列有一个分布

$$P(x_t^A | e_{1:t}^1, e_{1:t}^2)$$

- 数据关联的粒子滤波算法和MCMC算法可求解此问题

summary

1 时间与不确定性
2 时序模型中的推理
3 隐马尔可夫模型
4 卡尔曼滤波
5 动态贝叶斯网络
6 跟踪多个对象