# HW1

PB19111713钟颖康

## 1.

**a)错误。**

若等式成立，则n充分大时有

$$0 \le f(n) \le cf(n)^2$$

即1≤cf(n)，而这显然不是对任何f(n)都恒成立的，比如f(n)=$\frac{1}{n}$。

**b)正确。**

不妨设f(n)≤g(n)，由于f(n)与g(n)均非负，故当n充分大时，显然有

$$0 \le max(f(n), g(n)) = g(n) \le f(n) + g(n) \le 2g(n) = 2max(f(n), g(n))$$

**c)正确。**

当n充分大时，有

$$0 \le O(f(n)) \le c_0 f(n)$$

故

$$f(n) \le O(f(n)) + f(n) \le (c_0 + 1)f(n)$$

即

$$f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$$

**d)错误。**

不妨取f(n)=g(n)=n，显然有f(n)=Ω(g(n))，但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$=1≠0。

## 2.

**a)**

**证明：**

根据斯特林公式可知

$$n! \ = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \Theta(\frac{1}{n}))$$

即n充分大时，有

$$\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + c_1\frac{1}{n}) \le n! \ \le \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + c_2\frac{1}{n}) \tag{2.1}$$

在(2.1)中取左半部不等式可得

$$lg(n!) \geq nlg(\frac{n}{e}) + lg(\sqrt{2\pi n}(1 + c_1\frac{1}{n})) \geq nlg(\frac{n}{e}) = n(lg(n) - 1)$$

对于充分大的n，显然有n(lg(n)-1)≥$\frac{1}{2}$nlg(n)，故

$$lg(n!) \geq \frac{1}{2}nlg(n) \tag{2.2}$$

又由于

$$lg(n!) = \sum_{i=1}^{n} lg(i) \leq \sum_{i=1}^{n} lg(n) = nlg(n) \tag{2.3}$$

根据(2.2)以及(2.3)可知

$$\frac{1}{2}nlg(n) \leq lg(n!) \leq nlg(n) \tag{2.4}$$

由(2.3)变换整理可得

$$(n^{\frac{1}{2}})^n \leq n! \leq n^n \tag{2.5}$$

对于充分大的n，显然有2≤n$^{\frac{1}{2}}$，故

$$0 \leq 2^n \leq n! \leq n^n \tag{2.6}$$

**根据(2.4)与(2.6)，原命题得证。**

**b)**

1. n=2时，0≤T(2)=T(1)+1≤$c_0$lg(n)在$c_0$充分大时显然成立。
2. 设对于任意2≤k<n均有T(k)≤$c_0$lg(k)成立

   则对于T(n)有

$$T(n) = T(\lceil\frac{n}{2}\rceil) + 1 \leq c_0lg(\lceil\frac{n}{2}\rceil) + 1 = c_0lg(n) + c_0lg(\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}) + 1 \tag{2.7}$$

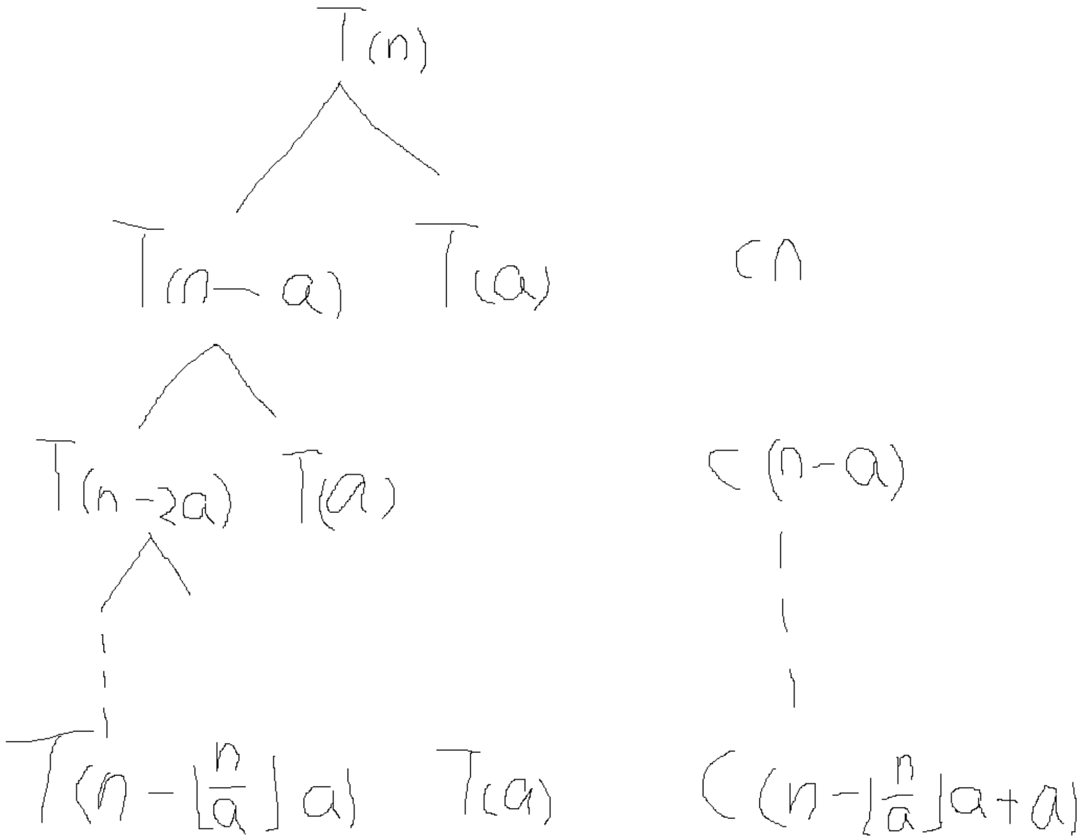
   显然$\frac{1}{2}$<$\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}$<1，即-lg2<lg($\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}$)<0，故当c_0充分大时$c_0$lg($\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}$)+1<0，结合(2.7)可知

$$T(n) = c_0lg(n) + c_0lg(\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}) + 1 \leq c_0lg(n) \tag{2.8}$$

   即k=n时也成立

**综上，由代入法可知T(n)=T(⌈$\frac{n}{2}$⌉)+1的解为O(lgn)。**

**c)**




共有$\lfloor\frac{n}{a}\rfloor$层，易知

$$T(n)=T(n-\lfloor\frac{n}{a}\rfloor a)+\lfloor\frac{n}{a}\rfloor T(a)+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{a}\rfloor}c(n-ia+a)=\Theta(n^2)$$

**d)**

根据主方法，a=4，b=2，$n^{\log_b a}=n^2$，$f(n)=n^2lgn$

1. 显然不存在这样的常数$\epsilon>0$使得$f(n)=O(n^{2-\epsilon})$
2. 显然$f(n)!=\Theta(n^2)$
3. 若存在常数$\epsilon>0$使得$f(n)=\Omega(n^{2+\epsilon})$，即存在常数$c_0>0$使得对任意充分大的n均有$n^2lgn\geq c_0n^{2+\epsilon}$，

   整理可得

$$c_0\leq n^{-\epsilon}lgn$$

   分析易知不等式右端极限为0，显然不存在这样的正常量$c_0$。

故不能用主方法。

渐进上界$O(n^2lg^2n)$.

# 3.

**a)**

a=2，b=4，$f(n)=\sqrt{n}$

显然有$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

由主方法第二条可知$T(n)=\Theta(\sqrt{n}lgn)$

**b)**

a=2，b=4，f(n)=$n^2$

显然存在$\epsilon=\frac{3}{2}$使得f(n)=$\Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$且对常数c=$\frac{1}{8}$和所有足够大的n有af($\frac{n}{b}$)$\leq$cf(n)

由主方法第三条可知T(n)=$\Theta(n^2)$

# 4.

**a)**

```
LINEAR-SEARCH(A,tar)
for i = 1 to A.length
    if A[i] == v
        return i
return NIL
```

初始化：当i=1时，子数组A[1..i-1]为空，循环不变式A[1..i-1]$\neq$v

保持：若第i次迭代之前为真且A[i]$\neq$v，则有A[1..i]$\neq$v，可知下一次迭代之前也为真

终止：若A[i]==v，表示找到了相对应的i并且返回当前的i。若直到迭代结束都未找到这样的i，则返回NIL表示v不在A中出现

**b)**

平均需要检查$\frac{n+1}{2}$个元素。

| 平均情况 | $\Theta(\frac{n+1}{2})=\Theta(n)$ |
| --- | --- |
| 最坏情况 | $\Theta$(n) |

# 5.

对于升序排列，建立堆需要O(n)；对于降序排列，建立堆需要O(1)。建好堆之后，排序都需要O(nlgn)。

故升序和降序的时间复杂度都是O(nlgn)。

# 6.

**1.**

最小深度：

显然，由于$0<\alpha\leq\frac{1}{2}$，最小深度应为每次划分比例为$\alpha$的部分，不妨设深度为$h_1$，则有$\alpha^{h_1}n=1$，即得$h_1=-\frac{lgn}{lg\alpha}$

最大深度：

显然，由于$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$，最大深度应为每次划分比例为1-$\alpha$的部分，不妨设深度为$h_2$，则有$(1-\alpha)^{h_2}n=1$，即得$h_2=h_1=-\frac{lgn}{lg(1-\alpha)}$

**2.**

分析易知，要产生比$\alpha$更平衡的划分，即划分比例应比$\alpha$大

可知

$$P(\text{更平衡}) = \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\alpha$$