

AI_HW7

PB19111713钟颖康

13.15 在一年一度的体检之后，医生告诉你一些坏消息和一些好消息。坏消息是你有一种严重疾病的测试中结果呈阳性，而这个测试的准确度为99%(即当你确实患这种病时，测试结果为阳性的概率为0.99；而当你未患这种疾病时测试结果为阴性的概率也是0.99)。好消息是，这是一种罕见的病，在你这个年龄段大约10000人中才有1例。为什么“这种病很罕见”对于你而言是一个好消息？你确实患有这种病的概率是多少？

- 因为与“未患病但测试结果为阳性的概率”相比，若这种病很罕见（即患病的概率远低于此），则表示大多数阳性测试结果均为误判。
- 设患病为 M ，检测结果阳性为 N ，则确实患病的概率可表示为 $P(M|N)$

$$P(M|N) = \frac{P(M \cdot N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{10000} \cdot 99\%}{\frac{10000-1}{10000} \cdot 1\% + \frac{1}{10000} \cdot 99\%} \approx 0.0098$$

13.18 假设给你一只袋子，装有 n 个无偏差的硬币，并且告诉你其中 $n - 1$ 个硬币是正常的，一面是正面而另一面是反面。不过剩余1枚硬币是伪造的，它的两面都是正面。

a. 假设你把手伸进口袋均匀随机地取出一枚硬币，把它抛出去，硬币落地后正面朝上。那么你取出伪币的（条件）概率是多少？

b. 假设你不停地抛这枚硬币，一共抛了 k 次，而且看到 k 次正面向上。那么你取出伪币的条件概率是多少？

c. 假设你希望通过把取出的硬币抛 k 次的方法来确定它是不是伪造的。如果抛 k 次后都是正面朝上，那么决策过程返回fake（伪造），否则返回normal（正常）。这个过程发生错误的（无条件）概率是多少？

- a. 设取出伪币为 R ，抛一次正面朝上为 S ，则取出伪币的概率可表示为 $P(R|S)$

$$P(R|S) = \frac{P(R \cdot S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot 1} = \frac{2}{n+1}$$

- b. 设抛了 k 次正面朝上为 T ，则取出伪币的概率可表示为 $P(R|T)$

$$P(R|T) = \frac{P(R \cdot T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{n} \cdot 1^k}{\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{n} \cdot 1^k} = \frac{2^k}{n-1+2^k}$$

- c. 发生错误即取出的不是伪币且抛 k 次正面朝上，故发生错误的概率可表示为 $P(\bar{R} \cdot T)$

$$P(\bar{R} \cdot T) = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n-1}{n \cdot 2^k}$$

13.21 (改编自Pearl (1988)的著述。) 假设你是雅典一次夜间出租车肇事逃逸的交通事的目击者。雅典所有的出租车都是蓝色或者绿色的。而你发誓所看见的肇事出租车是蓝色的。大量测试表明, 在昏暗的灯光条件下, 区分蓝色和绿色的可靠度为75%。

a. 有可能据此计算出肇事出租车最可能是什么颜色吗? (提示:请仔细区分命题“肇事车是蓝色的”和命题“肇事车看起来是蓝色的”。)

b. 如果你知道雅典的出租车10辆中有9辆是绿色的呢?

- a. 设肇事车是蓝色的为 M , 肇事车看起来是蓝色的为 N , 则肇事出租车的确是蓝色可表示为 $P(M|N)$

$$P(M|N) = \frac{P(M \cdot N)}{P(N)} = \frac{75\% \cdot P(M)}{25\% \cdot (1 - P(M)) + 75\% \cdot P(M)} = \frac{3 \cdot P(M)}{1 + 2 \cdot P(M)}$$

若想判断是 $P(M|N)$ 较大还是 $P(\bar{M}|N)$ 较大需要知道 $P(M)$ 的具体数值, 即光凭现有条件不能计算最可能是什么颜色

- b. 根据题意, $P(M) = \frac{1}{10}$, 结合a.可知 $P(M|N) = 0.25$, 故最可能是绿色

13.22 文本分类是基于文本内容将给定的一个文档分类成固定的几个类中的一类。朴素贝叶斯模型经常用于这个问题。在朴素贝叶斯模型中, 查询 (query) 变量是这个文档的类别, 而结果 (effect) 变量是语言中每个单词的存在与否; 假设文档中单词的出现是独立的, 单词的出现频率由文档类别决定。

a. 给定一组已经被分类的文档, 准确解释如何构造这样的模型。

b. 准确解释如何分类一个新文档。

c. 题目中的条件独立性假设合理吗?请讨论。

- a. 构造模型如下:
 - 该模型包含各个类别的先验概率 $P(category)$, 以及各个类别文档下各个单词出现的条件概率 $P(word_i|category)$
 - $P(category = c)$ 可以用该组已经被分类的文档中, c 类文档的比例来估计
 - $P(word_i = true|category = c)$ 可以用所有 c 类文档中单词 $word_i$ 出现的比例来估计
 - $P(word_i = false)$ 可以用所有文档中各个单词出现的比例来估计
- b. 当得到一个新文档时, 根据新文档中包含的词来判断文档是否包含某个词 $word_i$, 最后来计算该文档为 c 类的概率 $P(category = c | \dots, word_i = w_i, \dots)$, 选取最大的可能作为新文档的分类。
- c. 不合理。因为一篇文档中很多单词都是互相联系的, 一些组合大概率会同时出现。