HW4

PB19111713钟颖康

1.

- 当交易佣金为0时，不妨设从货币1经过一系列的交换最终兑换为货币n的最优交易序列为$s_{1\text{-}n}$，$s_{1\text{-}k}$表示这个序列的第一部分，它将货币1兑换为货币k，$s_{k\text{-}n}$表示这个序列的第二部分，它将货币k兑换为货币n。若存在$s'_{1\text{-}k}$比$s_{1\text{-}k}$更优，则显然$s'_{1\text{-}k}$-$s_{k\text{-}n}$会比$s_{1\text{-}n}$更优，矛盾。$s_{k\text{-}n}$同理。
- 如果交易佣金c_k为任意值，不妨n = 3, $c_i = 100000000000000000^{i-1}$，汇率表$d_{ij}$如下

i\j	1	2	3
1	1	2	5
2	0.5	1	4
3	0.2	0.25	1

显然，1到3的收益最高的方案是$1 \to 2 \to 3$，但成本上的亏损却比$1 \to 3$高得多，导致子问题全取最优时总问题不一定是最优。

2.

算法：

①：先将点集从大到小排序，得到新的点集X_n = { x'_1, ... , x'_n }，其中，对任意$i \le j$，均有$x'_i \ge x'_j$，所求的区间集合Result为空集

②：取集合s = [x'_i, $x'_i + 1$]，将x'_i从X_i中移出得到X_{i-1} = { x'_1, ... , x'_{i-1} }，Result = Result $\bigcup$ s

③：步骤②执行n次，其中i依次取n到1，所得集合Result即为所求集合

证明：

若区间的左端点不是点集中的某个点，则可以将区间下界增大直到到达第一个点，此时整体区间缩小或不变，该区间上的解达到最优；

根据步骤②，每个区间均是 [x'_i, $x'_i + 1$]类型，故是最优解。

3.

在结构树的每个结点增添4个整数域：员工P的交际评分P->sco、邀请员工P时以P为根的子树所能提供的最大交际评分P->sco1与不邀请员工P时以P为根的子树所能提供的最大交际评分P->sco0、邀请状态P->status（0表示未被邀请，1表示被邀请）

不妨设员工P有k个直接下属P_1、...、P_k，则$P.sco1 = P.sco + \sum_{i=1}^{k}(P_i.sco0)$，$P.sco0 = \sum_{i=1}^{k} max\{P_i.sco1, P_i.sco0\}$，P.status = (P.sco1 > P.sco0) ? 1 : 0

设该公司的根结点为P_0，显然整个宴会的最大交际评分和为max{ P_0->sco1, P_0->sco0 }

最后遍历整棵公司结构树的status域即可得到宾客名单。

复杂度：每个结点处只需计算一次，故复杂度为O(n)

4.

算法：

①取$a' < a$个25美分硬币

②取$b = \lfloor \frac{n-25a}{10} \rfloor$个10美分硬币

③取$c = \lfloor \frac{n-25a-10b}{5} \rfloor$个5美分硬币

④取$d = n - 25a - 10b - 5c$个1美分硬币

证明最优：

以下采用反证法：

设存在与算法得到的结果(a, b, c, d)不同的最优找零结果(a', b', c', d')，根据步骤①分析易知$a' \le a$

若$a' < a$，则(0, b’, c’, d’)的价值(0, b, c, d)的价值大25 * (a - a')，而至少需要3枚10、5、1美分的组合才能达到1个25美分硬币的价值，将这些组合全部用25美分的硬币替换掉可以得到更优的组合，与(a', b', c', d')最优矛盾，故$a' = a$

若$b' < b$，则(0, 0, c’, d’)的价值(0, 0, c, d)的价值大10 * (b - b')，而至少需要2枚5、1美分的组合才能达到1个10美分硬币的价值，将这些组合全部用10美分的硬币替换掉可以得到更优的组合，与(a', b', c', d')最优矛盾，结合$a' = a$可知$b' = b$

若$c' < c$，则(0, 0, 0, d’)的价值(0, 0, 0, d)的价值大5 * (c - c')，而至少需要5枚1美分的组合才能达到1个5美分硬币的价值，将这些组合全部用5美分的硬币替换掉可以得到更优的组合，与(a', b', c', d')最优矛盾，结合$a' = a$、$b' = b$可知$c' = c$，进而$d' = d$，矛盾

故给出的算法能找到最优解