AI_HW8

PB19111713钟颖康

14.12 两个来自世界上不同地方的宇航员同时用他们自己的望远镜观测了太空中某个小区域内恒星的数目N。他们的测量结果分别为M_1和M_2。通常，测量中会有不超过1颗恒星的误差，发生错误的概率e很小。每台望远镜可能出现(出现的概率f更小一些)对焦不准确的情况(分别记作F_1和F_2)，在这种情况下科学家会少数三颗甚至更多的恒星(或者说，当N小于3时，连一颗恒星都观测不到)。考虑图14.22所示的三种贝叶斯网络结构。

a. 这三种网络结构哪些是对上述信息的正确(但不一定高效)表示？

b.哪一种网络结构是最好的？请解释。

c.当$N \in 1,2,3$，$M_1 \in 0,1,2,3,4$时，请写出$P(M_1|N)$的条件概率表。概率分布表里的每个条目都应该表达为参数e和或f的一个函数。

d.假设$M_1=1$，$M_2=3$。如果我们假设N取值上没有先验概率约束,可能的恒星数目是多少？

e.在这些观测结果下，最可能的恒星数目是多少？解释如何计算这个数目，或者，如果不可能计算，请解释还需要什么附加信息以及它将如何影响结果。

- **a.** (i)不正确，因为即便M_1,M_2相同，N仍然会受F_1,F_2的影响。(ii)与(iii)均是正确的。
- **b.** (ii)最好。因为(ii)准确描述了问题且结构简单。
- **c.**

	$N=1$	$N=2$	$N=3$
$M_1=0$	$f+e(1-f)$	f	f
$M_1=1$	$(1-2e)(1-f)$	$e(1-f)$	0
$M_1=2$	$e(1-f)$	$(1-2e)(1-f)$	$e(1-f)$
$M_1=3$	0	$e(1-f)$	$(1-2e)(1-f)$
$M_1=4$	0	0	$e(1-f)$

- **d.** 可能因为失焦少了3颗或更多，也可能因为错数有±1颗的误差。由$M_1=1$可知$N=\{1,2,4,5,...\}$，由$M_2=3$可知$N=\{2,3,4,5,...\}$，故可能的恒星数目为$2,4,5,...$
- **e.** 不妨设$p_2=P(N=2),p_4=P(N=4),p_5=P(N=k),p_k=P(N=k),k\geq 6$，则
  - $P(N=2|M_1=1,M_2=3)=\frac{P(N=2,M_1=1,M_2=3)}{P(M_1=1,M_2=3)}=\frac{p_2e^2(1-f)^2}{P(M_1=1,M_2=3)}$
  - $P(N=4|M_1=1,M_2=3)=\frac{P(N=4,M_1=1,M_2=3)}{P(M_1=1,M_2=3)}=\frac{p_4ef}{P(M_1=1,M_2=3)}$
  - $P(N=5|M_1=1,M_2=3)=\frac{P(N=5,M_1=1,M_2=3)}{P(M_1=1,M_2=3)}=\frac{p_5(f+ef)ef}{P(M_1=1,M_2=3)}$
  - $P(N=k|M_1=1,M_2=3)=\frac{P(N=k,M_1=1,M_2=3)}{P(M_1=1,M_2=3)}\approx\frac{p_kf^2}{P(M_1=1,M_2=3)}$

- 由于f远小于e，若$p_2, p_4, ...$之间差距不大的话，可能性最大的就是$P(N=2|M_1, M_2=3)$，即最有可能是2颗恒星。

14.13 考虑 图14.22(ii) 的网络,假设两个望远镜完全相同。$N \in 1,2,3$，$M_1, M_2 \in 0,1,2,3,4$，CPT表和习题14.12所描述的一样。使用枚举算法(图14.9)计算概率分布$P(N|M_1=2, M_2=2)$。

- 有变量$\{N, M_1, M_2, F_1, F_2\}$，可计算如下:

$$\begin{aligned} P(N|M_1=2, M_2=2) &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N, M_1=2, M_2=2, f_1, f_2) \\ &= \alpha \sum_{f_1} \sum_{f_2} P(N)P(f_1)P(f_2)P(M_1=2|f_1, N)P(M_2=2|f_2, N) \end{aligned}$$

由于若$f_1 = true$或$f_2 = true$时对应项M_i都不可能为2，因此只要考虑$f_1 = f_2 = false$，故

$$P(N|M_1=2, M_2=2) = \alpha P(N)(1-f)^2 P(M_1=2|false, N)P(M_2=2|false, N)$$

故

$$P(N=k|M_1=2, M_2=2) = \begin{cases} \alpha P(N=1)(1-f)^2 e^2, & k=1 \\ \alpha P(N=2)(1-f)^2 (1-2e)^2, & k=2 \\ \alpha P(N=3)(1-f)^2 e^2, & k=3 \end{cases}$$