SNM_Report_FinalProject

PB19111713钟颖康

> 考虑数值求解如下的优化问题
>
> $$min_{u(x)\in C_0^1([0,1])}\int_0^1\{\frac{1}{2}(u'(x))^2+\frac{\alpha}{4}u^4(x)-f(x)u(x)\}dx. \tag{1}$$
>
> 令$h=\frac{1}{n}, x_i=ih, i=0,\dots,n$。记$f_i=f(x_i), u_i$为$u(x_i)$的数值逼近，则$u_0=u_n=0$。对**(1)**采用如下的数值积分格式
>
> $$min_{\{u_1,\dots,u_{n-1}\}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2h+\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{\alpha}{4}u_i^4-f_iu_i)h. \tag{2}$$
>
> 分别记$u_h=(u_1,\dots,u_{n-1})^T, f_h=(f_1,\dots,f_{n-1})^T$。试回答如下问题：

1. 当$\alpha=0$时，推导$u_1,\dots,u_{n-1}$满足的线性方程组$A_hu_h=f_h$；

A1:

不妨设所求积分为I。由于是取最小值，故$\triangledown I=0$，可得

$$\frac{1}{h^2}(2u_i-u_{i-1}-u_{i+1})=f_i,\quad i=1,\dots,n-1$$

即

$$A_h=\begin{pmatrix}\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}\end{pmatrix}$$

2. 当$f(x)=\pi^2\sin(\pi x), n=10,20,40,80,160$时，分别利用$Jacobi$和$Gauss-Seidel$迭代法求解$A_hu_h=f_h$（迭代法的终止准则$\varepsilon=10^{-10}$），并比较$u_h$与精确解$u_e(x)=\sin(\pi x)$之间的误差$e_h=\|u_h-u_e\|_2$，记录在一张表中；

A2:

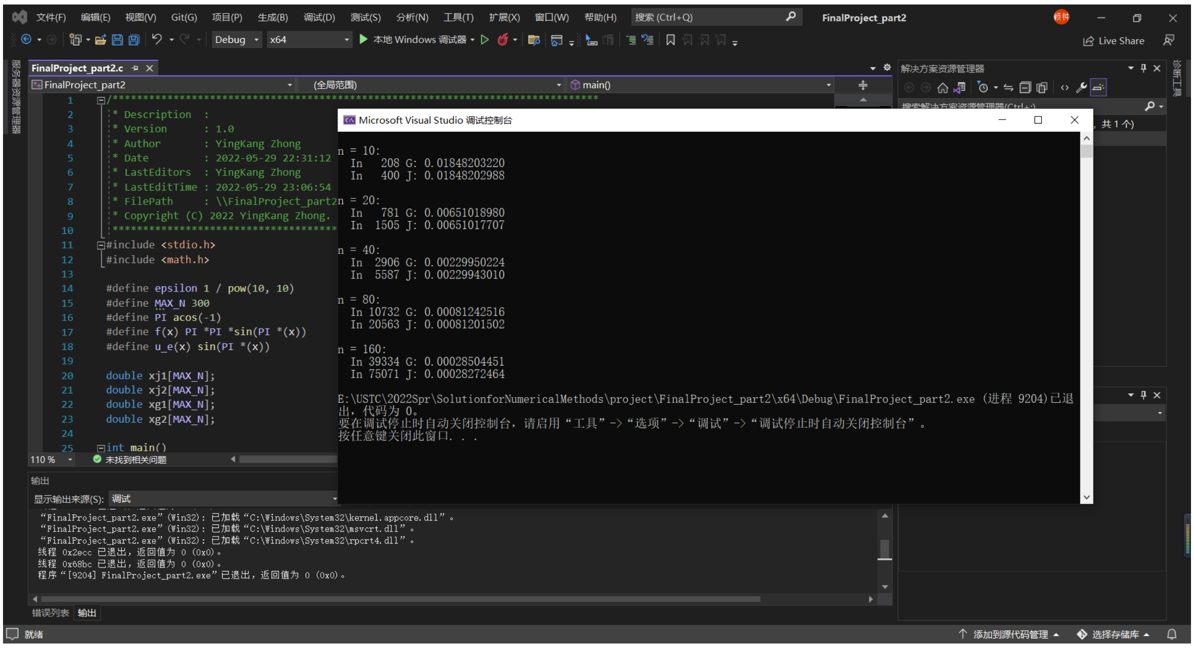
易知方程组的$Jacobi$迭代格式为

$$
\begin{cases}
u_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_2^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_1 \\
u_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_1^{(k)} + \frac{1}{2}u_3^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_2 \\
\cdots \\
u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{i-1}^{(k)} + \frac{1}{2}u_{i+1}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_i \\
\cdots \\
u_{n-1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{n-2}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_{n-1}
\end{cases}
$$

$Gauss-Seidel$迭代格式为

$$
\begin{cases}
u_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_2^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_1 \\
u_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_1^{(k+1)} + \frac{1}{2}u_3^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_2 \\
\cdots \\
u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{i-1}^{(k+1)} + \frac{1}{2}u_{i+1}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_i \\
\cdots \\
u_{n-1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{n-2}^{(k+1)} + \frac{h^2}{2}f_{n-1}
\end{cases}
$$

编写程序`FinalProject_part2.c`可以得到结果如下：



n	Jacobi	Gauss-Seidel
10	0.01848202988	0.01848203220
20	0.00651017707	0.00651018980
40	0.00229943010	0.00229950224
80	0.00081201502	0.00081242516
160	0.00028272464	0.00028504451

3. 假设(2)中的u_h对(1)中的$u_e(x)$的逼近误差满足$e_h = \Theta(h^\beta)$，基于上表中的数据试利用最小二乘方法找到β;

A3:

根据 **2.** 中的程序输出结果可知

h	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
$e_{h_{Jacobi}}$	0.00028272464	0.00081201502	0.00229943010	0.00651017707	0.01848202988
$e_{h_{Gauss-Seidel}}$	0.00028504451	0.00081242516	0.00229950224	0.00651018980	0.01848203220

根据题意不妨设$e_h = \alpha h^\beta$，取对数得

$$\ln e_h = \beta \ln h + \ln \alpha = \ln \alpha + \beta \ln \frac{1}{n}$$

设$x = \ln \frac{1}{n}, y = \ln e_h$，根据课本P50的公式有

$$\ln \alpha = \frac{(\sum_{i=1}^5 x_i^2)(\sum_{i=1}^5 y_i) - (\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 x_i y_i)}{5\sum_{i=1}^5 x_i^2 - (\sum_{i=1}^5 x_i)^2}$$
$$\beta = \frac{5\sum_{i=1}^5 x_i y_i - (\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)}{5\sum_{i=1}^5 x_i^2 - (\sum_{i=1}^5 x_i)^2}$$

代入表格中的数据可得

$$\begin{cases} \ln \alpha_{Jacobi} = -0.520462 \\ \beta_{Jacobi} = 1.506428 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln \alpha_{Gauss-Seidel} = -0.527685 \\ \beta_{Gauss-Seidel} = 1.503998 \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} \beta_{Jacobi} = 1.506428 \\ \beta_{Gauss-Seidel} = 1.503998 \end{cases}$$

4. 对$n = 10, 20, 40, 80, 160$，分别记录$Jacobi$和$Gauss-Seidel$迭代法收敛所需要的迭代次数在同一张表中，从中你能得到什么结论?

A4:

根据 **2.** 中的程序输出结果可知

n	$Jacobi$	$Gauss-Seidel$
10	400	208
20	1505	781
40	5587	2906
80	20563	10732
160	75071	39334

- n值相同时，$Jacobi$迭代所需次数约为$Gauss-Seidel$迭代次数的两倍
- 无论是$Jacobi$迭代还是$Gauss-seidel$迭代，当n值翻倍时，所需迭代次数大约变为原来的4倍，即迭代次数$N=O(n^2)$

5. 当$\alpha=1$，推导$u_1,...,u_{n-1}$满足的非线性方程组；

A5:

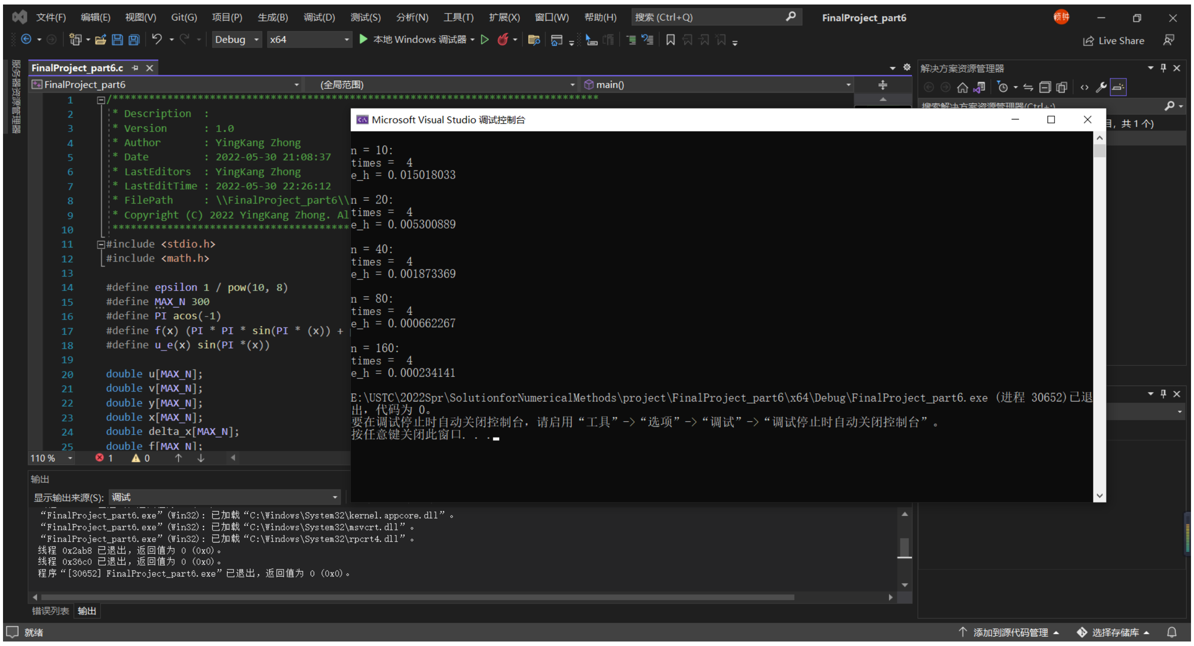
不妨设所求积分为I。由于是取最小值，故$\nabla I=0$，可得

$$\begin{cases} u_1^3+\dfrac{1}{h^2}(2u_1-u_0-u_2)=f_1 \\ u_2^3+\dfrac{1}{h^2}(2u_2-u_1-u_3)=f_2 \\ \dots \\ u_i^3+\dfrac{1}{h^2}(2u_i-u_{i-1}-u_{i+1})=f_i \\ \dots \\ u_{n-1}^3+\dfrac{1}{h^2}(2u_{n-1}-u_{n-2}-u_n)=f_{n-1} \end{cases}$$

6. 当$f(x)=\pi^2\sin(\pi x)+\sin^3(\pi x), n=10,20,40,80,160$时，利用牛顿迭代法求解上一小题中的非线性方程组（迭代法的终止准则$\varepsilon=10^{-8}$），并比较u_h与精确解$u_e(x)=\sin(\pi x)$之间的误差$e_h=||u_h-u_e||_2$，记录在一张表中，并利用最小二乘法找出该情形下算法的收敛阶。

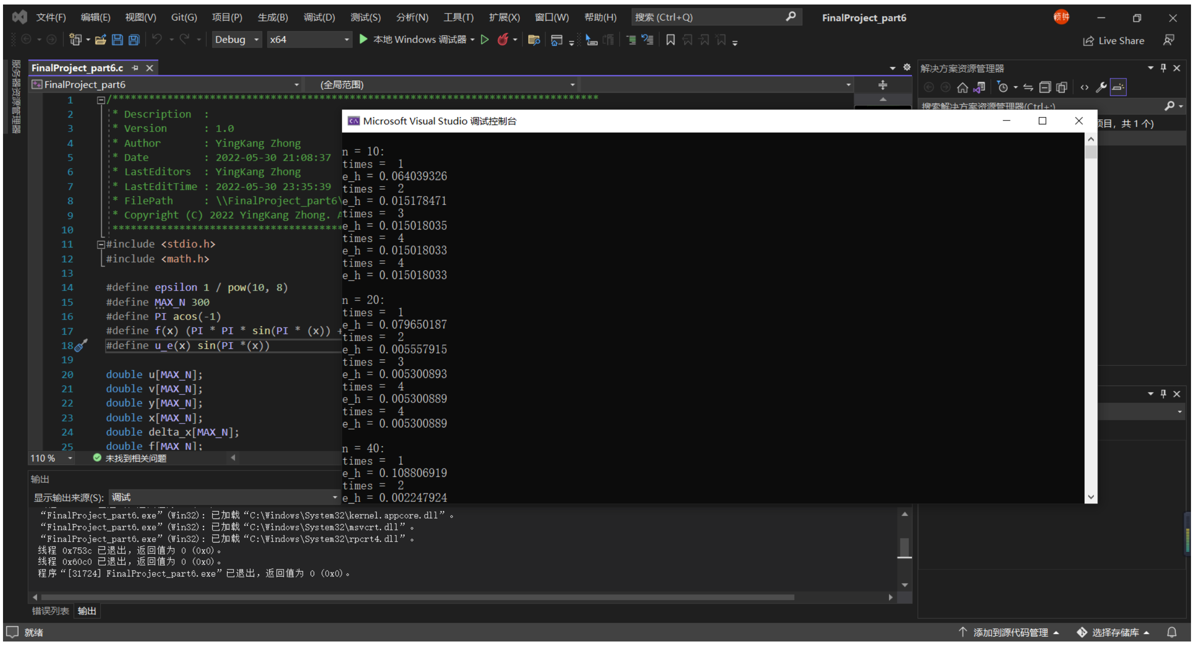
A6:

编写程序可得：



n	e_h
10	0.015018033
20	0.005300889
40	0.001873369
80	0.000662267
160	0.000234141

修改程序，使之输出每次迭代后的e_h，如下图所示：



不妨设$x = \ln e_k, y = \ln e_{k+1}$，根据课本P50的公式计算可得$n = 2.224$，故收敛阶为2。