

HW9

PB19111713钟颖康

1.

若存在权重为负值的环路，则对角线上会出现负数

2.

根据定义 $\hat{w}(u_i, u_{i+1}) = w(u, v) + h(u) - h(v) \geq 0$ 对任意 u, v 均成立

若环路 $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} = u_1$ 权重为0，则 $\sum_{i=1}^k w(u_i, u_{i+1}) = 0$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1, i \neq j}^k \hat{w}(u_i, u_{i+1}) &= \sum_{i=1, i \neq j}^k (w(u_i, u_{i+1}) + h(u_i) - h(u_{i+1})) \\ &= \sum_{i=1}^k w(u_i, u_{i+1}) + \sum_{i=1}^k (h(u_i) - h(u_{i+1}) - (w(u_j, u_{j+1}) + h(u_j) - h(u_{j+1}))) \\ &= -(w(u_j, u_{j+1}) + h(u_j) - h(u_{j+1}))\end{aligned}$$

又由于 $\hat{w}(u_i, u_{i+1}) \geq 0$

可知

$$0 \leq \sum_{i=1, i \neq j}^k \hat{w}(u_i, u_{i+1}) = -(w(u_j, u_{j+1}) + h(u_j) - h(u_{j+1}))$$

整理得

$$0 \leq -(w(u_j, u_{j+1}) + h(u_j) - h(u_{j+1})) = -\hat{w}(u_j, u_{j+1}) \leq 0$$

从而

$$\hat{w}(u_j, u_{j+1}) = 0$$

对所有的 j 均成立，即对环路上的每条边都有 $\hat{w}(u, v) = 0$

3.

a.先用DFS找出一条含 (u, v) 的增广路径，若没找到则不用更新，若找到了则运行Ford-Fulkerson算法

b.先用BFS找出包含 (u, v) 的路径，令该路径上所有边的流量减一，然后执行一遍**a.**中的所有步骤