SNM_Report_Project3

PB19111713钟颖康

Program10

10.1 Introduction

程序 10　用 Newton 迭代法求解非线性方程组

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g(x) = x^3 - y = 0 \end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$，误差控制 $\max(|x_k|, |y_k|) \leqslant 10^{-5}$.

输入： 初始点 $(x_0, y_0) = (0.8, 0.6)$，精度控制值 e，定义函数 $f(x), g(x)$.

输出： 迭代次数 k，第 k 步的迭代解 (x_k, y_k).

10.2 Method

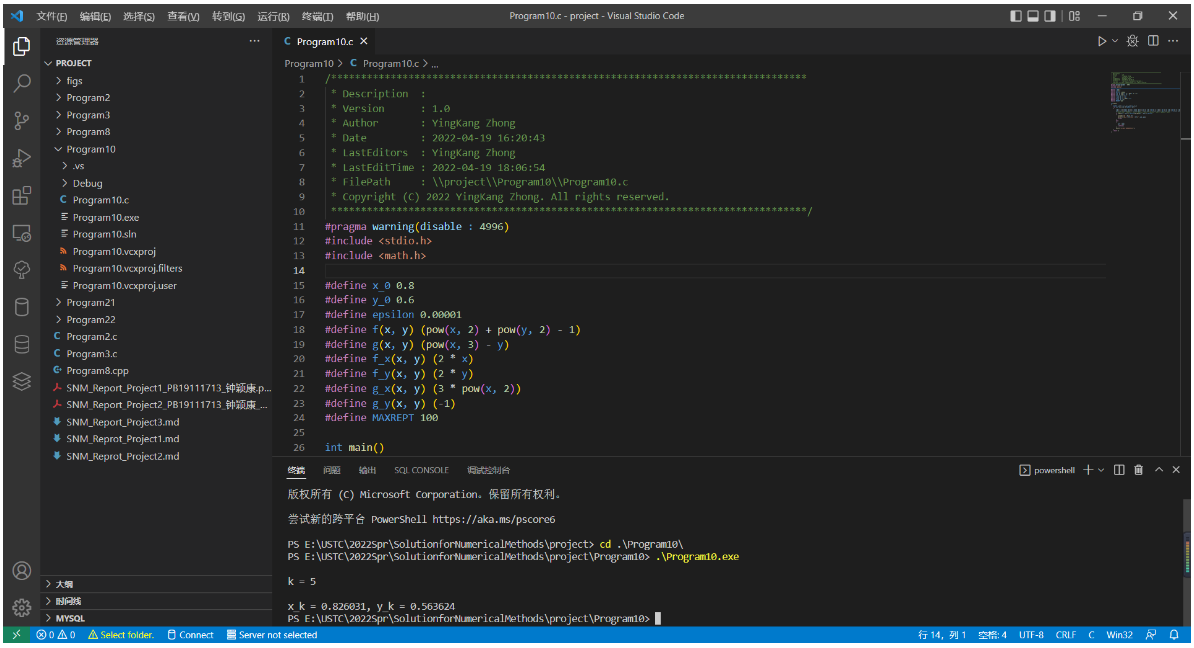
解课本P71的方程可得

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k,y_k)\cdot g_y(x_k,y_k) - g(x_k,y_k)\cdot f_y(x_k,y_k)}{g_x(x_k,y_k)\cdot f_y(x_k,y_k) - f_x(x_k,y_k)\cdot g_y(x_k,y_k)} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{g(x_k,y_k)\cdot f_x(x_k,y_k) - f(x_k,y_k)\cdot f_x(x_k,y_k)}{g_x(x_k,y_k)\cdot f_y(x_k,y_k) - f_x(x_k,y_k)\cdot g_y(x_k,y_k)} \end{cases}$$

根据要求，当$max(|x_k|, |y_k|) \leq 10^{-5}$时停止迭代。

据此可直接写出相应的C语言程序。

10.3 Result



根据程序运行结果，迭代到第5次时得到符合精度要求的迭代解

$$k=5,\quad (x_k,y_k)=(0.826031,0.563624)$$

10.4 Discussion

考虑到要实现从$Input$获取函数成本过于巨大，故直接在程序内部预设好函数。又由于C语言库中没有合适的求导函数，故对于预设的$f(x),g(x)$采取手动求偏导、手动定义的方式进行计算。

Program21

21.1 Introduction

程序 21　用二阶 Runge-Kutta 公式求解常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y), \\ y(a)=y_0, \end{cases} \quad a\leqslant x\leqslant b$$

$$(1)\begin{cases} y'(x)=y\sin\pi x, \\ y(0)=1; \end{cases}$$

输入：区间剖分点数 n，区间端点 a，b；定义函数 $y'(x)=f(x,y)$.

输出：y_k，$k=1,2,\cdots,n$.

21.2 Method

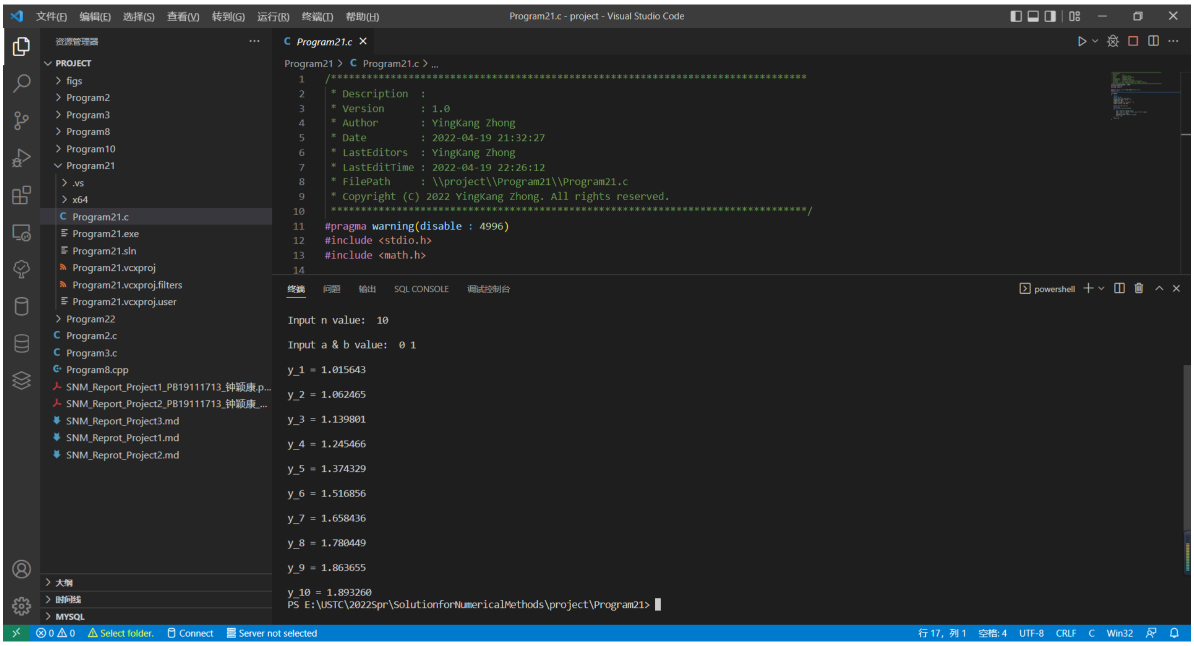
参考课本P148式(7.13)

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(c_1\cdot k_1+c_2\cdot k_2) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+a\cdot h,y_n+b\cdot h\cdot k_1) \end{cases}$$

简便起见，取$c_1=0,c_2=1$，即采用中点公式进行编程计算：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\cdot k_2 \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+a\cdot h,y_n+b\cdot h\cdot k_1) \end{cases}$$

21.3 Result



根据程序运行结果，对于$n = 10, a = 0, b = 1$，有

k	y_k
1	1.015643
2	1.062465
3	1.139801
4	1.245466
5	1.374329
6	1.516856
7	1.658436
8	1.780449
9	1.863655
10	1.893260

21.4 Discussion

考虑到要实现从$Input$获取函数成本过于巨大，故直接在程序内部预设好函数。经过搜索，π值决定采用反三角函数计算获得，即$acos(-1)$。

Program22

22.1 Introduction

使用程序22求解课本P156的例7.7

程序 22 用改进的 Euler 公式求解常微分方程组初值问题.

计算公式:

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_{n+1} \\ \bar{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}) \\ g(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}) \end{pmatrix} \right]$$

输入: 区间剖分点数 N, 区间端点 a, b; 定义函数

$$y'(x) = f(x, y, z), \quad z'(x) = g(x, y, z)$$

输出: $(y_k, z_k), k = 1, 2, \cdots, N.$

例 7.7 两种果树寄生虫, 其数量分别是 $u = u(t), v = v(t)$, 其中一种寄生虫以吃另一种寄生虫为生, 两种寄生虫的增长函数如下列常微分方程组所示, 预测 3 年后这一对寄生虫的数量.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.09u\left(1 - \dfrac{u}{20}\right) - 0.45uv, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.06v\left(1 - \dfrac{v}{15}\right) - 0.001uv, \\ u(0) = 1.6, \\ v(0) = 1.2 \end{cases}$$

22.2 Method

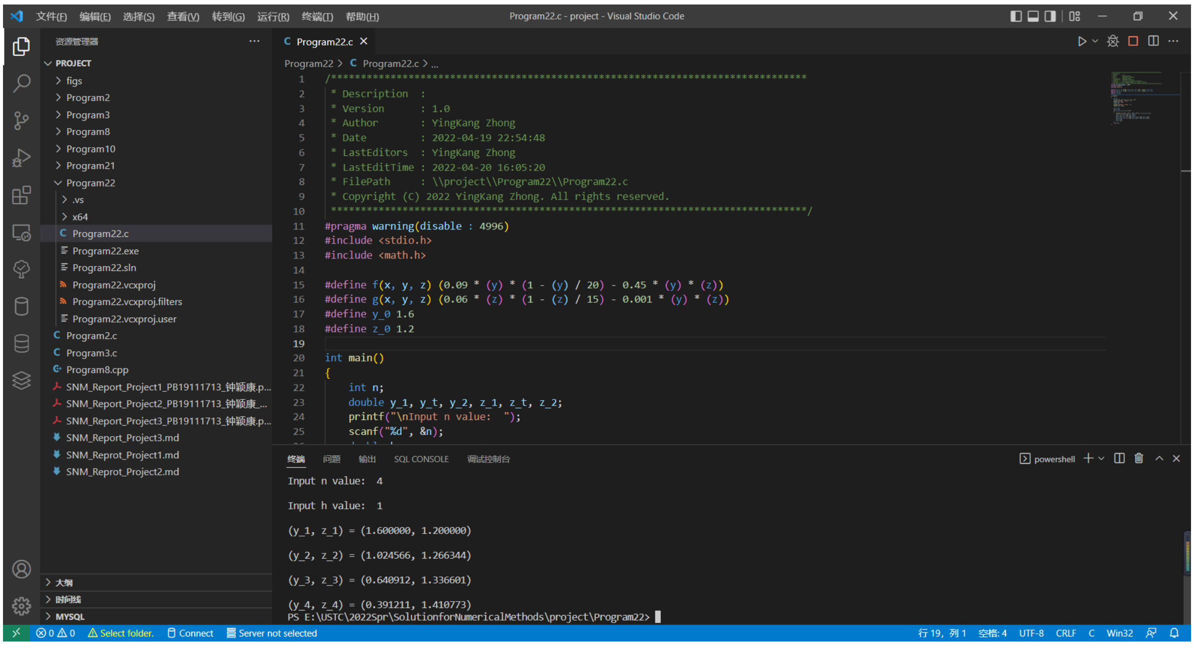
计算公式：

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_{n+1} \\ \bar{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}) \\ g(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}) \end{pmatrix} \right]$$

根据计算公式可以直接写出对应的C语言程序。

22.3 Result



根据程序运行结果，

t	y_t	z_t
1	1.600000	1.200000
2	1.024566	1.266344
3	0.640912	1.336601
4	0.391211	1.410773

与课本上的结果比对，发现只有z_2不一致，推测可能是课本印刷错误。