Homework 3

P74.2 $2x^3-5x^2-19x+42=0$ 在 $x=3.0$ 附近有根. 写出该方程的三种不同的等价形式, 并判断迭代格式在 $x=3.0$ 的收敛性.

P62 Thm3.1 条件 ① $x\in[a,b] \Rightarrow \varphi(x)\in[a,b]$

② $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $\exists L<1$, s.t. $\forall x\in[a,b], |\varphi'(x)|\le L$

观察到

$$2x^3-5x^2-19x+42=(x-2)(2x^2-x-21)=(x-2)(x+3)(2x-7)$$

(1) $x^3=\dfrac{5x^2+19x-42}{2}$ $\Rightarrow$ 迭代格式: $x_{k+1}=\sqrt[3]{\dfrac{5x_k^2+19x_k-42}{2}}$

- $\varphi(x)=\left(\dfrac{5x^2+19x-42}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\rightarrow$ $[0,+\infty)$ 上单调递增, 于是寻找满足 $[\varphi(a),\varphi(b)]\subset[a,b]$ 的区间 $[a,b]$

先用 $[a,b]=[3-0.5,3+0.5]=[2.5,3.5]$ 试一下, $[\varphi(2.5),\varphi(3.5)]=[2.6388,3.5]\subset[2.5,3.5]$

- $\varphi'(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5x^2+19x-42}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(5x+\dfrac{19}{2}\right)<1$, $\forall x\in[2.7,3.5]$

$\left[\in(0.7347,0.9514)\right.$, $0.7347 \leftarrow \varphi'(3.5)$, $0.9514 \leftarrow \varphi'(2.7)$; $\varphi'(x)$ 在 $[2.7,3.5]$ 上单调递减$\left.\right]$

$\left(\varphi'(2.5)=1.0531>1\right.$ 需要找区间, 经画图发现 $[2.7,3.5]$ 满足$\left.\right)$

由 Thm3.1 (P62), 迭代格式对任意的初值 $x_0\in[2.7,3.5]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点, 故该格式在 $x=3.0$ 处收敛.

(2) $x=\dfrac{2x^3-5x^2+42}{19}$ $\Rightarrow$ 迭代格式: $x_{k+1}=\dfrac{2x_k^3-5x_k^2+42}{19}$

(2) 这个格式有的同学用 $\varphi'(3)>1$ 来说明在 $x=3.0$ 处不收敛, 我认为应该也可以

- $\varphi(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+42}{19}$ $\qquad \varphi(3)=2.6842$

$\Rightarrow \varphi([1.5,2.7])\subset[1.5,2.7]$

$\downarrow$ 表示 $\varphi(x)$ 在 $x\in[1.5,2.7]$ 的值域

- $\varphi'(x)=\dfrac{6x^2-10x}{19}$, $\varphi'([1.5,2.7])=[-0.0789,0.881053]$

$\Rightarrow |\varphi'(x)|<1 \quad \forall x\in[1.5,2.7]$

由 Thm3.1 (P62), 迭代格式对任意的初值 $x_0\in[1.5,2.7]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点, 故该格式在 $x=3.0$ 处收敛.

[由于 $\varphi(3.0)=2.6842\in[1.5,2.7]$]

注意: 此时收敛到的不动点并非离 3 最近的 3.5, 而是 2

(3) $x^3 = -x^3+5x^2+19x-42 \Rightarrow$ 迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{-x_k^3+5x_k^2+19x_k-42}$

- $\varphi(x) = \sqrt[3]{-x^3+5x^2+19x-42} \Rightarrow \varphi([3,4]) = [3.2, 3.69] \subset [3,4]$

- $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(-x^3+5x^2+19x-42)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2+10x+19) \Rightarrow \varphi'([3,4]) = [0.27, 0.72] < 1$

由 Thm3.1 (P62), 迭代格式对任意的初值 $x_0 \in [3,4]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点、故该格式在 $x=3.0$ 处收敛.

(4) $x^2 = \frac{2x^3-19x+42}{5} \Rightarrow$ 迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{2x_k^3-19x_k+42}{5}}$

- $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2x^3-19x+42}{5}}$

- $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \frac{6x^2-19}{\sqrt{2x^3-19x+42}}$ $\quad \varphi'(3) = 1.2532 > 1$

故不存在一个包含 3 的区间 I, 使得 $\varphi'(x) < 1 \quad \forall x \in I$, 故该格式在 $x=3$ 处不收敛

(5) (参考章展同学)

$2x^3 = 5x^2+19x-42 \Rightarrow x = \frac{5x^2+19x-42}{2x^2}$ 迭代格式 $x_{k+1} = \frac{5x_k^2+19x_k-42}{2x_k^2}$

- $\varphi(x) = \frac{5x^2+19x-42}{2x^2}$ $\quad \varphi([2.6, 3.5]) \subset [2.6, 3.5]$

- $\varphi'(x) = \frac{-19x+84}{2x^3}$ $\quad |\varphi'(x)| < 1, \ \forall x \in [2.6, 3.5]$

故该迭代格式收敛

P107 1.(2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 计算 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

回顾课本P8三种范数的证明

设 $A=(a_{ij})_{i,j}$ ① $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$ ，设 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$

而 $\|Ax\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \overset{\text{交换求和顺序}}{=} \sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum\limits_{j=1}^n \Big(\underbrace{\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|}_{\text{与j有关}}\Big)|x_j| \le \Big(\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|\Big)\sum\limits_{j=1}^n |x_j|$

提出来,取最大值

$= \Big(\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|\Big)\|x\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$

即 $\|Ax\|_1 \le \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$ $\forall x$ s.t. $\|x\|_1=1$ $\Rightarrow \|A\|_1 \le \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$

下证 $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$，只需证对某个 x，$\|x\|_1=1$，有 $\|Ax\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$

设 $\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$ 在第 k 列达到，也就是 $\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^n |a_{ik}|$

取 $x=e_k=(0,\cdots,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{第}k\text{个分量}}}{1},0\cdots0)$ 易知 $\|Ax\|_1 = \|Ae_k\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |a_{ik}| = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$

$\Rightarrow \|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\Big(\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|\Big)$

② $\|A\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

$\|Ax\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|\Big) \le \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\overbrace{\max\limits_{1\le j\le n}|x_j|}^{=\|x\|_\infty=1}\Big) = \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\Big)$

$\Rightarrow \|A\|_\infty \le \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\Big)$

下证 $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\Big)$，只需证对某个 x，$\|x\|_\infty=1$，有 $\|Ax\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\Big)$

设 $\max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ 在第k行达到，也就是 $\max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|$

取 $x=(\operatorname{sign} a_{k1}, \operatorname{sign} a_{k2}, \cdots \operatorname{sign} a_{kn})^T$ 其中 $\operatorname{sign} a=\begin{cases}1 & a\ge 0\\ -1 & a<0\end{cases}$

$$\|Ax\|_\infty=\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

③ $\|A\|_2=\sup\limits_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$

回顾线性代数：A^TA 半正定 $\Rightarrow$ A^TA 的特征值非负 且 正交相似于对角阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 其中 $\lambda_i\ge 0$ 为 A^TA 的特征值

且设 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$

这也说明了有n个相互正交的单位特征向量，设 λ_i 对应的特征向量为 u_i $(1\le i\le n)$

由 $\{u_i\}$ 相互正交且为单位正交基

设 $x=x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_nu_n$ $\quad \|x\|_2^2=\langle x,x\rangle=\left\langle\sum\limits_{i=1}^{n}x_iu_i,\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_ju_j\right\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$

$\langle x,x\rangle$ 表示x与x内积

由 u_i 为 A^TA 特征值 $\Rightarrow$ $\quad A^TAx=\sum\limits_{i=1}^{n}A^TA(x_iu_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iA^TAu_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\lambda_iu_i$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2=\langle Ax,Ax\rangle=x^TA^TAx=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\le\lambda_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad (\text{由于}\lambda_1\text{是最大的特征值})$$

$$=\lambda_1$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2\le\sqrt{\lambda_1}\quad \forall \|x\|_2=1 \quad\Rightarrow \|A\|_2\le\sqrt{\lambda_1}$$

下证 $\|A\|_2=(\rho(A^TA))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda_1}$，只需证对某个 x，$\|x\|_2=1$，有 $\|Ax\|_2=\sqrt{\lambda_1}$

取 $x=u_1$，$\|Ax\|_2^2=x^TA^TAx=u_1^T\cdot\lambda_1u_1=\lambda_1$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2=\sqrt{\lambda_1}\Rightarrow \|A\|_2=(\rho(A^TA))^{\frac{1}{2}}$$

接下来代入公式就行：

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

$$= \max(6, 4, 7) = 7$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right|$$

$$= \max|7, 3, 8) = 8$$

对 $\|A\|_2$，先求 A^TA 的特征值.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 4 & -1 \\ 4 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 37 \end{pmatrix}$$

特征多项式 $\varphi_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-26 & -4 & 1 \\ -4 & \lambda-11 & -7 \\ 1 & -7 & \lambda-37 \end{vmatrix} = (\lambda-26)(\lambda-11)(\lambda-37) + 28+28-(\lambda-11)-49(\lambda-26)-16(\lambda-37)$

$$(\lambda^2-37\lambda+286)(\lambda-37)$$

$$= \lambda^3-37\lambda^2+286\lambda-37\lambda^2+37^2\lambda-286\cdot37+56-\lambda+11-49\lambda+49\cdot26-16\lambda+16\times37$$

$$= \lambda^3-74\lambda^2+1589\lambda-8649$$

$\lambda_1 = 38.7648$ $\quad\lambda_2 = 26.9591$ $\quad\lambda_3 = 8.276$

$$\Rightarrow \rho(A^TA) = \lambda_1 = 38.7648 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{38.7648} = 6.2261$$

P108 2-(2) $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 求B的谱半径及2-范数

特征多项式 $\varphi_B(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-6 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-4)-4(\lambda-6)-4(\lambda-4)$

$=(\lambda^2-11\lambda+30)(\lambda-4)-8\lambda+40$

$=\lambda^3-11\lambda^2+30\lambda-4\lambda^2+44\lambda-120-8\lambda+40$

$=\lambda^3-15\lambda^2+66\lambda-80$

$=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-8)$

$\Rightarrow \lambda_1=8,\quad \lambda_2=5,\quad \lambda_3=2$

所以 B的谱半径为 $\rho(B)=8$.

另外, $\|B\|_2=\left(\rho(B^TB)\right)^{\frac{1}{2}}\overset{\text{B对称}}{=}\left(\rho(B\cdot B)\right)^{\frac{1}{2}}$

设 B对应于 λ_i 的特征向量为 v_i $\quad B\cdot Bv_i=B\cdot(\lambda_iv_i)=\lambda_iBv_i=\lambda_i^2v_i$

$\Rightarrow$ B^TB的特征值为 $\tilde{\lambda}_1=\lambda_1^2=64\quad \tilde{\lambda}_2=\lambda_2^2=25\quad \tilde{\lambda}_3=\lambda_3^2=4$

$\Rightarrow \|B\|_2=8$

(不必用 $\det(\lambda I-B^TB)$ 的方法,这样做太麻烦了)