

SNM_Report_FinalProject

PB19111713钟颖康

考虑数值求解如下的优化问题

$$\min_{u(x) \in C_0^1([0,1])} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} (u'(x))^2 + \frac{\alpha}{4} u^4(x) - f(x)u(x) \right\} dx. \quad (1)$$

令 $h = \frac{1}{n}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$. 记 $f_i = f(x_i)$, u_i 为 $u(x_i)$ 的数值逼近, 则 $u_0 = u_n = 0$.
对(1)采用如下的数值积分格式

$$\min_{\{u_1, \dots, u_{n-1}\}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)^2 h + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{4} u_i^4 - f_i u_i \right) h. \quad (2)$$

分别记 $u_h = (u_1, \dots, u_{n-1})^T$, $f_h = (f_1, \dots, f_{n-1})^T$. 试回答如下问题:

1. 当 $\alpha = 0$ 时, 推导 u_1, \dots, u_{n-1} 满足的线性方程组 $A_h u_h = f_h$;

A1:

不妨设所求积分为 I . 由于是取最小值, 故 $\nabla I = 0$, 可得

$$\frac{1}{h^2} (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

即

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$$

2. 当 $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$, $n = 10, 20, 40, 80, 160$ 时, 分别利用 *Jacobi* 和 *Gauss-Seidel* 迭代法求解 $A_h u_h = f_h$ (迭代法的终止准则 $\varepsilon = 10^{-10}$), 并比较 u_h 与精确解 $u_e(x) = \sin(\pi x)$ 之间的误差 $e_h = \|u_h - u_e\|_2$, 记录在一张表中;

A2:

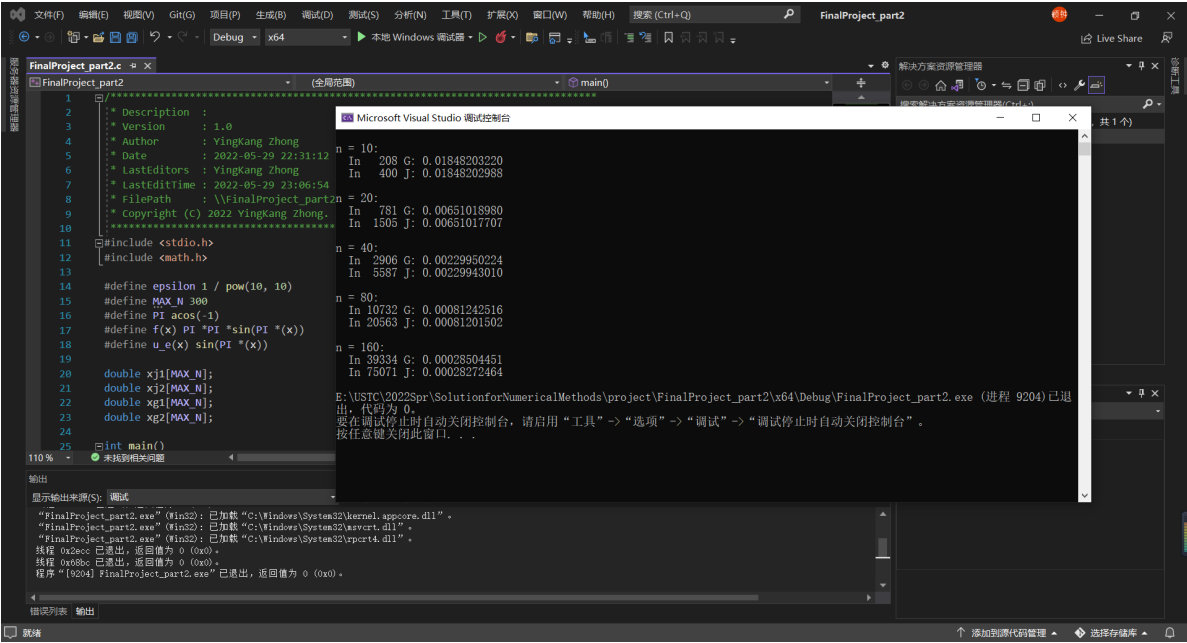
易知方程组的 *Jacobi* 迭代格式为

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_2^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_1 \\ u_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_1^{(k)} + \frac{1}{2}u_3^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_2 \\ \dots \\ u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{i-1}^{(k)} + \frac{1}{2}u_{i+1}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_i \\ \dots \\ u_{n-1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{n-2}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_{n-1} \end{cases}$$

*Gauss – Seidel*迭代格式为

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_2^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_1 \\ u_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_1^{(k+1)} + \frac{1}{2}u_3^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_2 \\ \dots \\ u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{i-1}^{(k+1)} + \frac{1}{2}u_{i+1}^{(k)} + \frac{h^2}{2}f_i \\ \dots \\ u_{n-1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}u_{n-2}^{(k+1)} + \frac{h^2}{2}f_{n-1} \end{cases}$$

编写程序 `FinalProject_part2.c` 可以得到结果如下：



n	Jacobi	Gauss-Seidel
10	0.01848202988	0.01848203220
20	0.00651017707	0.00651018980
40	0.00229943010	0.00229950224
80	0.00081201502	0.00081242516
160	0.00028272464	0.00028504451

3. 假设(2)中的 u_h 对(1)中的 $u_e(x)$ 的逼近误差满足 $e_h = \Theta(h^\beta)$, 基于上表中的数据试利用最小二乘方法找到 β ;

A3:

根据 2. 中的程序输出结果可知

h	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
$e_{h_{Jacobi}}$	0.00028272464	0.00081201502	0.00229943010	0.00651017707	0.01848202988
$e_{h_{Gauss-Seidel}}$	0.00028504451	0.00081242516	0.00229950224	0.00651018980	0.01848203220

根据题意不妨设 $e_h = \alpha h^\beta$, 取对数得

$$\ln e_h = \beta \ln h + \ln \alpha = \ln \alpha + \beta \ln \frac{1}{n}$$

设 $x = \ln \frac{1}{n}$, $y = \ln e_h$, 根据课本P50的公式有

$$\ln \alpha = \frac{(\sum_{i=1}^5 x_i^2)(\sum_{i=1}^5 y_i) - (\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 x_i y_i)}{5 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - (\sum_{i=1}^5 x_i)^2}$$

$$\beta = \frac{5 \sum_{i=1}^5 x_i y_i - (\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)}{5 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - (\sum_{i=1}^5 x_i)^2}$$

代入表格中的数据可得

$$\begin{cases} \ln \alpha_{Jacobi} = -0.520462 \\ \beta_{Jacobi} = 1.506428 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln \alpha_{Gauss-Seidel} = -0.527685 \\ \beta_{Gauss-Seidel} = 1.503998 \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} \beta_{Jacobi} = 1.506428 \\ \beta_{Gauss-Seidel} = 1.503998 \end{cases}$$

4. 对 $n = 10, 20, 40, 80, 160$, 分别记录 $Jacobi$ 和 $Gauss - Seidel$ 迭代法收敛所需要的迭代次数在同一张表中, 从中你能得到什么结论?

A4:

根据 2. 中的程序输出结果可知

n	$Jacobi$	$Gauss - Seidel$
10	400	208
20	1505	781
40	5587	2906
80	20563	10732
160	75071	39334

- n 值相同时, $Jacobi$ 迭代所需次数约为 $Gauss - Seidel$ 迭代次数的两倍
- 无论是 $Jacobi$ 迭代还是 $Gauss - seidel$ 迭代, 当 n 值翻倍时, 所需迭代次数大约变为原来的4倍, 即迭代次数 $N = O(n^2)$

5. 当 $\alpha = 1$, 推导 u_1, \dots, u_{n-1} 满足的非线性方程组;

A5:

不妨设所求积分为 I 。由于是取最小值, 故 $\nabla I = 0$, 可得

$$\begin{cases} u_1^3 + \frac{1}{h^2}(2u_1 - u_0 - u_2) = f_1 \\ u_2^3 + \frac{1}{h^2}(2u_2 - u_1 - u_3) = f_2 \\ \dots \\ u_i^3 + \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = f_i \\ \dots \\ u_{n-1}^3 + \frac{1}{h^2}(2u_{n-1} - u_{n-2} - u_n) = f_{n-1} \end{cases}$$

6. 当 $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin^3(\pi x)$, $n = 10, 20, 40, 80, 160$ 时, 利用牛顿迭代法求解上一小题中的非线性方程组 (迭代法的终止准则 $\varepsilon = 10^{-8}$), 并比较 u_h 与精确解 $u_e(x) = \sin(\pi x)$ 之间的误差 $e_h = \|u_h - u_e\|_2$, 记录在一张表中, 并利用最小二乘法找出该情形下算法的收敛阶。

A6:

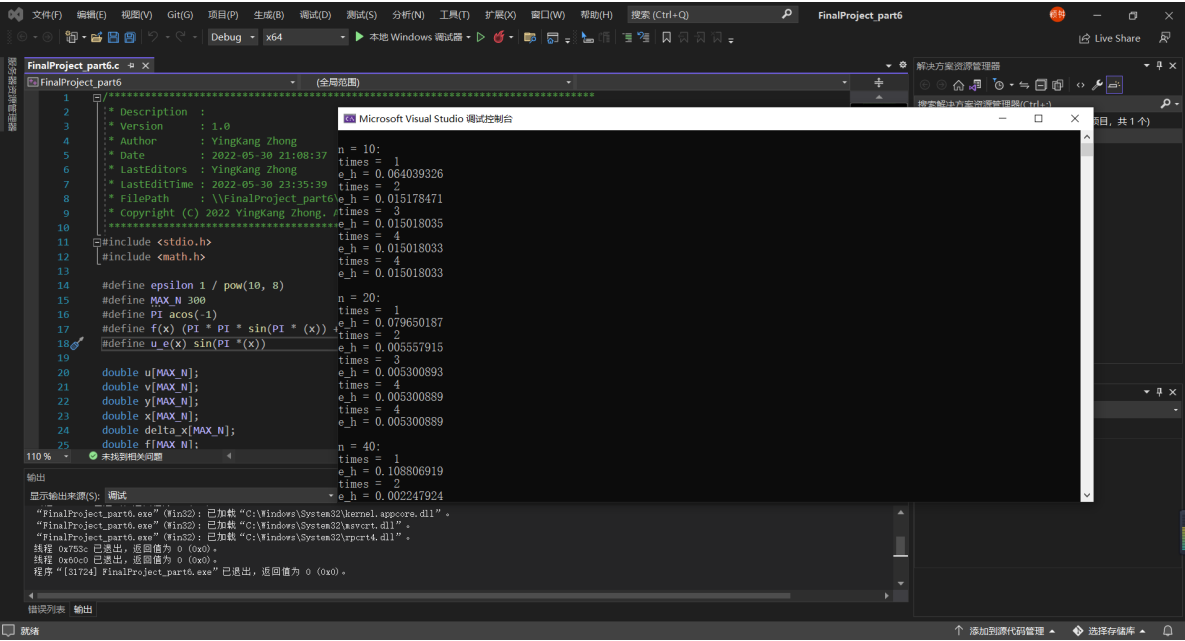
编写程序可得:

```

1 //*****
2 /* Description :
3 /* Version : 1.0
4 /* Author : YingKang Zhong
5 /* Date : 2022-05-30 21:08:37
6 /* LastEditors : YingKang Zhong
7 /* LastEditTime : 2022-05-30 22:26:12
8 /* FilePath : \\FinalProject_part6\\n = 10:
9 /* Copyright (C) 2022 YingKang Zhong, All rights reserved.
10 //*****
11 #include <stdio.h>
12 #include <math.h>
13
14 #define epsilon 1 / pow(10, 8)
15 #define MAX_N 300
16 #define PI acos(-1)
17 #define f(x) (PI * PI * sin(PI * (x)) +
18 #define u_e(x) sin(PI * (x))
19
20 double u[MAX_N];
21 double v[MAX_N];
22 double y[MAX_N];
23 double x[MAX_N];
24 double delta_x[MAX_N];
25 double f[MAX_N];
26
27 int main()
28 {
29     n = 10;
30     times = 4;
31     e_h = 0.015018033
32
33     n = 20;
34     times = 4;
35     e_h = 0.005300889
36
37     n = 40;
38     times = 4;
39     e_h = 0.001873369
40
41     n = 80;
42     times = 4;
43     e_h = 0.000662267
44
45     n = 160;
46     times = 4;
47     e_h = 0.000234141
48
49     E:\USTC\2022Spr\SolutionforNumericalMethods\project\FinalProject_part6\x64\Debug\FinalProject_part6.exe (进程 30652) 已退出, 代码为 0。
50     要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
51     按任意键关闭此窗口。 . .
52
53     输出
54     显示输出来源(S): 调试
55
56     "FinalProject_part6.exe" (Win32): 已加载 "C:\Windows\System32\kernel.appcore.dll"。
57     "FinalProject_part6.exe" (Win32): 已加载 "C:\Windows\System32\user32.dll"。
58     "FinalProject_part6.exe" (Win32): 已加载 "C:\Windows\System32\user32.dll"。
59     线程 0x2ab8 已退出, 返回值为 0 (0x0)。
60     线程 0x36c0 已退出, 返回值为 0 (0x0)。
61     程序 "30652" FinalProject_part6.exe 已退出, 返回值为 0 (0x0)。
62
63     错误列表
64
65     添加代码管理
66     选择存储库
  
```

n	e_h
10	0.015018033
20	0.005300889
40	0.001873369
80	0.000662267
160	0.000234141

修改程序，使之输出每次迭代后的 e_h ，如下图所示：



```
1  /* Description :
2  * Version : 1.0
3  * Author : YingKang Zhong
4  * Date : 2022-05-30 21:08:37
5  * LastEditors : YingKang Zhong
6  * LastEditTime : 2022-05-30 23:35:39
7  * FilePath : \\FinalProject_part6
8  * Copyright (C) 2022 YingKang Zhong. All rights reserved.
9  */
10 #include <stdio.h>
11 #include <math.h>
12 #define epsilon 1 / pow(10, 8)
13 #define MAX_N 300
14 #define PI acos(-1)
15 #define f(x) (PI * PI * sin(PI * (x)))
16 #define u_e(x) sin(PI * (x))
17 double u[MAX_N];
18 double v[MAX_N];
19 double x[MAX_N];
20 double delta_x[MAX_N];
21 double f[MAX_N];
22
23 int main()
24 {
25     int n = 10;
26     int times = 1;
27     double e_h = 0.064039326;
28     while (e_h > epsilon)
29     {
30         times++;
31         e_h = 0.015178471;
32         e_h = 0.015018033;
33         e_h = 0.015018033;
34         n = 20;
35         times = 1;
36         e_h = 0.079650187;
37         e_h = 0.005557915;
38         e_h = 0.005300893;
39         e_h = 0.005300889;
40         e_h = 0.005300889;
41         n = 40;
42         times = 1;
43         e_h = 0.108806919;
44         e_h = 0.002247924;
45     }
46     return 0;
47 }
```

输出

```
"FinalProject_part6.exe" (11p32): 已加载 "C:\Windows\System32\kernel.appcore.dll"。
"FinalProject_part6.exe" (11p32): 已加载 "C:\Windows\System32\user32.dll"。
"FinalProject_part6.exe" (11p32): 已加载 "C:\Windows\System32\RPCRT4.dll"。
线程 0x753c 已退出，返回值为 0 (0x0)。
线程 0x60c0 已退出，返回值为 0 (0x0)。
程序 "[31724] FinalProject_part6.exe" 已退出，返回值为 0 (0x0)。
```

不妨设 $x = \ln e_k, y = \ln e_{k+1}$ ，根据课本P50的公式计算可得 $n = 2.224$ ，故收敛阶为2。