ಅಂತರ್ವೇಶನ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಚಲರಾಶಿಯ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ (¥sóÀಂಕ್ಷನ್) ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚಲರಾಶಿಯ ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳು ಅಥವಾ ಸ್ಥಾನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವುವು. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ನಡುವಣ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅಂತರ್ವೇಶನ (ಇಂಟರ್‍ಪೊಲೇಷನ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪರಿಮಿತವಿಕಲನ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಂತರ್ವೇಶನವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಉಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಹುಪದಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಕಷ್ಟು ನಿಖರತೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಅಂತರ್ವೇಶನದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಮಾನವು ಟಿ ಆದರೆ ಬಹುಪದಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ (ಟಿ+1) ಅಜ್ಞಾತ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು (ಅನ್ನೋನ್ ಕಾನ್‍ಸ್ಟೆಂಟ್ಸ್) ಇರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಟಿ+1) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ, ಉತ್ಪನ್ನದ (ಟಿ+1) ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಾಗಬೇಕು. ಆದಕಾರಣ ಉತ್ಪನ್ನದ (ಟಿ+1) ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ಟಿ ಘಾತಮಾನದ ಬಹುಪದಿಯೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದಾಗಿ (ಟಿ+1) ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ಗದ ವಿಕಲಿತಗಳು (ಡಿ¥sóÀರೆನ್ಸಸ್) ಶೂನ್ಯವಾಗುವುವು.

ಉತ್ಪನ್ನದ (ಟಿ+1) ಬೆಲೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಉಪಸಮವಾದ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿರುವ (ಟಿ+1) ಅಜ್ಞಾತ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಹಿಡಿಯುವುದು ಮಾತ್ರ ಅವಶ್ಯ. ಅನಂತರ ಚಲಕದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಬೇಕಾದರೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಇದರ ಅಗತ್ಯವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ (ಟಿ+1) ಅಜ್ಞಾತ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯದೆಯೇ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಂತರ್ವೇಶನವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರಗಳು : ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಅಂತರ್ವೇಶನಕ್ಕೆ ಸಹಾಯವಾದ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದುವೆಂದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಸೂತ್ರ. ಚಲರಾಶಿಯ ಚಿ, ಚಿ+h, ಚಿ+2h, ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ h ಅಂತರವುಳ್ಳ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಜಿ(x) ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಗೊತ್ತಾಗಿವೆ. ಪರಿಮಿತ ವಿಕಲನದ ಕಾರಕಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಡಿ ಎಂದು sಸೂಚಿಸಿದರೆ ಡಿಜಿ(ಚಿ) = ಜಿ(ಚಿ+h) -ಜಿ(ಚಿ); ಡಿ2ಜಿ(ಚಿ) = ಡಿಜಿ(ಚಿ+h) - ಜಿ(h) ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರವರ್ಧಕ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಇ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ ಇಜಿ(x) = ಜಿ(x+h) ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಮಿತ ವಿಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಡಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಒಳಪಡಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಇ = 1 + ಡಿಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದಾಗಿ (1) ಎಂದು ಬರೆದು ಬಲಪಾಶ್ರ್ವದ ಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವೀಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ (2)

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ `ನ್ಯೂಟನ್ ವಿಕಲಿತ ಸೂತ್ರ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇಲ್ಲಿ ಜಿ(ಚಿ) ಉತ್ಪನ್ನದ (ಟಿ+1) ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ಗದ ಎಲ್ಲ ವಿಕಲಿತಗಳೂ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುವು. ಇದಲ್ಲದೆ ಜಿ(x) ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಮಾನವು ಟಿ ಆದುದರಿಂದ

ಜಿ(ಚಿ + uh) ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೀಗೆ ರೂಪಿಸಬಹುದು. (3) ಇಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ, u ಎನ್ನುವುದರ ಕ್ರಮಗಣಿತ. ಈಗ ಇಲ್ಲಿ (3) ರಲ್ಲಿ u = 0 ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಲು ಜಿ(ಚಿ) = ಅ0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂತರ ಕಲನವನ್ನು ತೆಗೆದು ಅನಂತರ u = 0 ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಡಿ ಜಿ(ಚಿ) = ಅ1 ದೊರೆಯುವುದು. ಅಂತರಕಲನವನ್ನು ಪನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತ ಪ್ರತಿ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿಯೂ u = 0 ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

ಹೀಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಅ0, ಅ1,…….ಅಟಿ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಸೂತ್ರ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. ಈಗ ಚಿ = 0, h = 1, u = x ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು: (4)

ಸೌಲಭ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ h = 1ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಜಿ(x) ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅವರೋಹಿ ವಿಕಲಿತಗಳ (ಡಿಸೆಂಡಿಂಗ್ ಡಿ¥sóÀರೆನ್ಸಸ್) ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನ್ಯೂಟನ್ ಅವರೋಹಿ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅವರೋಹಿ ವಿಕಲಿತಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಆರೋಹಿ (ಅಸೆಂಡಿಂಗ್) ವಿಕಲಿತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧಿಸುವ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನ್ಯೂಟನ್ ಆರೋಹಿ ಸೂತ್ರವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅದಾಗಿ

(5)

ಕೇಂದ್ರ ವಿಕಲಿತ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರ : ನ್ಯೂಟನ್ ಅವರೋಹಿ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅಗ್ರವಿಕಲಿತಗಳು ಪರಂಪರೆಯ ಸೋಪಾನಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗುವುದು ಜಿ(ಚಿ) ಯ ಒಂದೇ ಪಾಶ್ರ್ವದಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪನ್ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಜಿ(ಚಿ)ಯ ಉಭಯ ಪಾಶ್ರ್ವದಲ್ಲೂ ಇರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಗಾóಸ್ ಎಂಬುವನು ಈ ಬಗೆಯ ಎರಡು ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಅನ್ನು xಡಿ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

(6) (7)

ಮೊದಲನೆಯ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ನ್ಯೂಟನ್-ಗಾóಸ್ ಅಗ್ರಗಾಮಿ ಸೂತ್ರ (¥sóÁರ್‍ವರ್ಡ್ ¥sóÁರ್ಮುಲ) ಎಂದೂ ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ ನ್ಯೂಟನ್-ಗಾóಸ್ ಅಪಗಾಮಿ ಸೂತ್ರ (ಬ್ಯಾಕ್‍ವರ್ಡ್ ¥sóÁರ್ಮುಲ) ಎಂದೂ ಹೆಸರು. ವಿಕಲಿತಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ, ಈ ಎರಡು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಜಿ(0) ಗೆ ಸಮಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಿರುವ ವಿಕಲಿತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಗ್ರಗಾಮಿ ಸೂತ್ರದ ವಿಕಲಿತಗಳೆಲ್ಲ ಸಮಮಟ್ಟದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಿ ಮೇಲು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ ವಂಕಿಯಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಅಪಗಾಮಿ ಸೂತ್ರದ ವಿಕಲಿತಗಳೆಲ್ಲ ಸಮಮಟ್ಟದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಿ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯೂ ವಂಕಿಯಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ ಈ ಎರಡು ಸೂತ್ರಗಳಿಗೂ ವಂಕಿಯಾಕಾರದ (ಜಿûಗ್ ಜ್ಯಾóಗ್) ಸೂತ್ರಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಎಂಬುದನ್ನು ಜಿ(x) ನ ಕೇಂದ್ರವಿಕಲಿತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

ಜ ಜಿ(x) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡಿ ವಿಭಿನ್ನವಿಕಲಿತಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಮತ್ತು

ಈ ಸಾಮ್ಯಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಂಕಿಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

(8) (9)

ಈ ಎರಡೂ ಪದಾವಳಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಸ್ಟರ್ಲಿಂಗ್ ಸೂತ್ರ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ (10) \ ಈಗ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ mಎಂಬ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅಂದರೆ,

ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ m ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ( 9) ನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು: (11) ನ್ಯೂಟನ್-ಗಾóಸ್ ಅಪಗಾಮಿ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಗಮಸ್ಥಾನವನ್ನು 1ರಲ್ಲೂ ಅಂತರವನ್ನು (x—1) ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

(12) ಇದರ ಮತ್ತು (6)ರ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು

ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ `ಬೆಸ್ಸಲ್ ಸೂತ್ರ ' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಕೇಂದ್ರ ವಿಕಲನಕಾರಕಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ,

ಎಂದು ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು. ಗಾóಸ್ ಅಗ್ರಗಾಮಿ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿನ ಬೆಸವರ್ಗದ ವಿಕಲಿತಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕೆಳಗಿನ ವಿಕಲಿತಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ,

1 — x = ಥಿ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

(15)

ಇದಕ್ಕೆ ಎವರೆಟ್ ಸೂತ್ರವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದು ಕೋಷ್ಟಕದ ರಚನೆಗೆ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. x, ಥಿ ಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡಿ ಬರೆದರೆ,

ಇದರಲ್ಲಿನ ಭರಣರಾಶಿ (ಆಗ್ರ್ಯುಮೆಂಟ್)ಯನ್ನು ಒಂದರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, (16) ಭರಣರಾಶಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಹಲವು ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವಣ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಸೂತ್ರ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. (15) ರಲ್ಲಿ ಜಿ(x)ನ ಬೆಲೆ ಒಂದನೇ ಪಂಕ್ತಿಯ(16) ರಲ್ಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಪಂಕ್ತಿಯ ಪದಾವಳಿಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗುಣಕ ಹಾಕಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಶ್ರಮ ಉಳಿತಾಯವಾಗುವುದು.

ಅಸಮಾನಾಂತರ ಅಂತರ್ವೇಶನ: ಇದುವರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿದದ್ದಾಯಿತು. ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಡುವಣ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗಳ ಅಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತಿರಬಹುದು. ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತ (ಡಿವೈಡೆಡ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಸ್) ಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು. ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವು ಜಿ(x) ಆದರೆ ಅನ್ನು ಜಿ(x) ನ ಪ್ರಥಮ ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಜಿ[x0, x1] ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪುನರಾವೃತ್ತಿಸುತ್ತಾ ಎಂಬುದನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ವಿಭಜಿತ ವಿಕಲಿತ ಎನ್ನುತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೃತೀಯ ವಿಭಜಿತ ವಿಕಲಿತ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ಗದ ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತಗಳ ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರವೆಂದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರ. (x —x0) (x —x1) ….. (x —xಟಿ) [x, x0,x1, …..xಟಿ] ಎಂಬುದನ್ನು ಖಟಿ+1 (x) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರವನ್ನು

(17)

ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಗಳಾದ x0, x1,…….. xಟಿ ಗಳಲ್ಲಿ ಜಿ(x) ನ ಬೆಲೆಯು ಗೊತ್ತಿದ್ದಾಗ ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಮಾಡಬಹುದು. ಜಿ(x) ಉತ್ಪನ್ನ ಟಿ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿಯಾದರೆ ಅದರ ((ಟಿ+1) ವರ್ಗದ ವಿಭಾಜಿತ ವಿಕಲಿತವು - ಎಂದರೆ [x, x0, x1, ……xಟಿ] ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು. (17) ರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ ಅಂತರ್ವೇಶಿತ ಬೆಲೆ ನಿಖರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಜಿ(x) ಉತ್ಪನ್ನ ಒಳಗಾಗದಿದ್ದರೂ ಖಟಿ+1 (x) ನಗಣ್ಯವಾದರೆ À (17) ರಿಂದ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಮಾಡಿ ಸ್ಥೂಲಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಲೆಗ್ರಾಂಜ್ ಸೂತ್ರದಿಂದಲೂ ಅಸಮಾನಾಂತರ ಅಂತರ್ವೇಶನವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಜಿ(x) ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಟಿ ಆದಾಗ

ಅನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ(ಪಾರ್ಷಿಯಲ್ ¥sóÁಕ್ಷನ್) ಗಳಾಗಿ

ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅದರಂತೆ

(18)

ಇದರ ಉಭಯ ಪಾಶ್ರ್ವವನ್ನೂ (x — ಚಿ0) (x — ಚಿ1)…….. (x — ಚಿಟಿ) ಇಂದ ಗುಣಿಸಲು

(19)

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಲೆಗ್ರಾಂಜ್ ಸೂತ್ರವೆಂದು ಹೆಸರು. ವಿಲೋಮ ಅಂತರ್ವೇಶನ (ಇನ್ವರ್ಸ್ ಇಂಟರ್‍ಪೊಲೇಷನ್): ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಚಲರಾಶಿಯ ದತ್ತ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದಾಗ ಅವಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಚಲರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಿಲೋಮ ಅಂತರ್ವೇಶನವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳುಂಟು. I ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಲೆಗ್ರಾಂಜ್ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಜಿ(x) = ಥಿ, ಜಿ(ಚಿ0) = ಥಿ0, ಜಿ(ಚಿ1) = ಥಿ1………ಜಿ(ಚಿಟಿ) = ಥಿಟಿ ಎಂದು ಬರೆದು (18) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಲೆಗ್ರಾಂಜ್ ಸೂತ್ರ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. (20)

ಈ ಥಿ ಅನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲರಾಶಿಯನ್ನಾಗಿಯೂ x ಅನ್ನು ಅವಲಂಬಿತ ಚಲರಾಶಿಯನ್ನಾಗಿಯೂ ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಅರ್ಥಾತ್ x, ಥಿ ಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ (21) ಎಂದಾಗಬಹುದು. ಬಲಪಾಶ್ರ್ವದ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳೂ ಗೊತ್ತಿವೆಯಾದುದರಿಂದ ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ii .ಕ್ರಮಾನುಗತ ಉಪಸಮವಿಧಾನ : ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಅಂದಾಜಿನಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅನಂತರ ಕ್ರಮಕ್ರಮವಾಗಿ ಸನ್ನಿಹಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ನ್ಯೂಟನ್ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ (22) ಪ್ರಥಮ ವಿಕಲಿತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಿದರೆ x ನ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥೂಲಬೆಲೆ x(1) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು (21)ರ ಬಲಪಾಶ್ರ್ವದ ಮೂರನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ (x — 1) ಎಂಬ ಗುಣಕದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ, ದ್ವಿತೀಯ ವಿಕಲಿತಗಳವರೆಗೆ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ಮಿಕ್ಕ ಪದಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ x ನ ದ್ವಿತೀಯ ಉಪಸಮಬೆಲೆ x( 2) ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಮತ್ತೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲು x ನ ತೃತೀಯ ಉಪಸಮಬೆಲೆಯು ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗುವುದು. (23) ಹೀಗೆ ಕ್ರಮಕ್ರಮವಾಗಿ x ನ ಇತರ ಉಪಸಮಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. iii ತೃತೀಯ ವಿಕಲಿತಗಳ ವಿಸರ್ಜನ ವಿಧಾನ : ನ್ಯೂಟನ್ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ತೃತೀಯ ವಿಕಲಿತದವರೆಗೆ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಾಗ (24) ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಗಮಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ರಲ್ಲಿರಿಸಿ (x-1) ಅಂತರ ಮಾಡಿ ಬರೆದಾಗ (25) ಎಂದಾಗುವುದು. ಈಗ x ನ ಅಂದಾಜುಬೆಲೆಯನ್ನು ಚಿ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, (26)ನ್ನು (3 - ಚಿ)ದಿಂದಲೂ (24)ನ್ನು ಚಿ ದಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿದಾಗ (26) ಇದರಲ್ಲಿ ಜಿ(x), ಜಿ(0), ಡಿಜಿ(0) ಮೊದಲಾದ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಲು xನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ x ನ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿರಬಹುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಅನ್ಯಕೀಯ (ಎಕ್ಸ್ ಟ್ರೇನಿಯಸ್) ಮೂಲವಾಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ತೊರೆದು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಗ್ರಾಹ್ಯವೆಂದು ಅರಿಯಬೇಕು. iv. ಶ್ರೇಣಿ ವಿಪರ್ಯಾಸ ವಿಧಾನ : ಆಗಿದ್ದು ಈ ಶ್ರೇಣಿ ಟಿ ಲ ¥ ಆದಾಗ ಉಪಸರಿಸುವುದೆಂದರೆ, x ನ್ನು ಥಿ ಯ ಘಾತಗಳ ಅನಂತ ಉಪಸರಣ ಶ್ರೇಣಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಎಂದರೆ,

ಈಗ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ,

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೇಣಿವಿಪರ್ಯಾಸದಿಂದ

ಎಂದಾಗಲಿ,

x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲು

ಇದೊಂದು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾದ್ದರಿಂದ ಬಲಪಾಶ್ರ್ವದಲ್ಲಿ z ಅನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ z ನ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಲೋಪವಾಗುವುದು, ಆದ್ದರಿಂದ

ಇತ್ಯಾದಿ.

ನ್ಯೂಟನ್ ಅಂತರ್ವೇಶನ ಸೂತ್ರವನ್ನು x ನ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಶ್ರೇಣಿವಿಪರ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಥಿ ಯ ಶ್ರೇಣಿರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.