Revista uniabeu ISSN 2179-5037

A MATEMÁTICA DISCRETA E SUAS APLICAÇÕES: um modelo para conexão de sistemas computacionais em nuvem

Abel Rodolfo Garcia Lozano[1]
Angelo Santos Siqueira[2]
Samuel Jurkiewicz[3]
Valessa Leal Lessa de Sá Pinto[4]

RESUMO: A Teoria dos Grafos é uma importante área da Matemática Discreta capaz de modelar e solucionar problemas reais, através do desenvolvimento de algoritmos eficientes. Esta teoria permite a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos e é base da ciência da computação moderna. Além disso, é uma área da Matemática onde não são necessários grandes pré-requisitos, podendo abordar praticamente todos os conceitos básicos envolvidos em qualquer nível de ensino. Neste trabalho, apresentamos uma aplicação deste campo a partir de um estudo sobre produto funcional e coloração total equilibrada onde propomos um modelo de conexão entre sistemas multiagentes.

Palavras-chave: Produto funcional. Coloração total equilibrada. Sistemas multiagentes.

THE DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS: a model for cloud computing systems connection

ABSTRACT: The Graph Theory is an important part of Discrete Mathematics able to model and solve real problems through the development of efficient algorithms. This theory allows the construction of basic ideas that permeate the algorithmic processes and is the foundation of modern computer science. Besides, it is an area of mathematics that not required major prerequisites and almost all the basics concepts can be developed at any level of education. We present an application of this field using functional product and equitable total coloring and we propose a connection between model multi-agent systems.

Keywords: Functional product. Equitable total coloring. Multi-agent systems.

[1] Doutor em Engenharia de Produção pela COPPE/UFRJ. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UNIGRANRIO. Professor da Faculdade de Formação de Professores da UERJ.
[2] Doutor em Engenharia de Produção pela COPPE/UFRJ. Professor do Programa de Pós-Graduação em Letras e Ciências Humanas da UNIGRANRIO.
[3] Doutor em Matemática pela Université Pierre et Marie Curie, França. Professor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ.
[4] Doutoranda em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia pela UFRJ. Professora da Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades da UNIGRANRIO.

Introdução

A Matemática é uma ciência abstrata em que muitos de seus modelos e estruturas formam bases para as teorias de outras ciências e para o desenvolvimento de tecnologias. Além disso, ela é fundamental para a compreensão de aspectos referentes ao cotidiano social, político e econômico. Segundo D'Ambrósio (2005), a Matemática se impôs com forte presença em todas as áreas de conhecimento e em todas as ações do mundo moderno.

Aqui, abordamos, especialmente, a Matemática Discreta, que se refere ao estudo das estruturas matemáticas que não requerem a noção de continuidade, como números inteiros, recorrências, grafos, geometria finita, entre outros. Neste contexto, a Matemática Discreta e o estudo de sistemas finitos assumem um papel importante, entre outros aspectos, porque a tecnologia necessária à era do computador é basicamente uma estrutura discreta na qual muitas de suas propriedades são entendidas a partir dos sistemas matemáticos finitos.

Jurkiewicz (2008) defende as razões pelas quais alguns conteúdos da Matemática Discreta se apresentam como adequados para serem abordados, inclusive, na Educação Básica, e, em especial, destaca a Teoria dos Grafos, que, além de não necessitar de pré-requisitos matemáticos especiais, é de compreensão acessível.

Em relação à teoria dos grafos, seu estudo permite o conhecimento de noções de modelagem matemática e a criação de modelos que representam problemas reais. O conhecimento deste campo da Matemática também possibilita a compreensão de planilhas eletrônicas e *softwares*, o domínio da escrita matemática formal e a linguagem computacional, e a elaboração de argumentos matemáticos. Muitos problemas trabalhados na teoria dos grafos incentivam o desenvolvimento do pensamento algorítmico. No entanto, este assunto é pouco estudado no Brasil em todos os níveis de ensino, e, no Ensino Médio é praticamente ausente.

Segundo Feiteira e Ribeiro (2008), a teoria dos grafos pode assumir um papel preponderante na criação e desenvolvimento de competências expectáveis e a potencializar a existência de alunos matematicamente competentes, através da diversidade de suas aplicações, potencialidades e facilidade de exploração em contexto acadêmico, contribuindo para que os alunos adquiram uma cultura matemática mais rica que os ajude a se tornarem cidadãos mais aptos para intervirem na sociedade.

Nos próximos parágrafos, descrevemos sucintamente, algumas aplicações reais feitas recentemente, utilizando como base a teoria dos grafos, e é com esse enfoque que desenvolveremos o presente trabalho, apresentando um modelo para conexão computacional em nuvem, que pode ser utilizada por qualquer agente (empresa, escola, indústria, etc.) que necessite ampliar sua capacidade de processamento e transmissão de dados num dado momento.

Pereira *et. al.* (2005) propuseram, através de uma modelagem em grafos, uma solução para o posicionamento de cabines de segurança em parte do bairro do Leblon na cidade do Rio de Janeiro, utilizando a metodologia associada ao problema de *p*-centros. O objetivo foi obter a localização de até 3 (três) cabines, de forma que o deslocamento do policial ao local da chamada de emergência obedeça a percursos globalmente otimizados, respeitando o sentido do deslocamento de veículos em vias públicas.

Em 2008, Lozano *et. al.* descreveram uma aplicação sobre coloração total equilibrada em grafos associada a redes de interconexão. Este conceito foi empregado para obter uma representação natural para o processamento paralelo nesse tipo de redes, onde uma coloração total equilibrada, que satisfizesse a conjectura de Vizing[5], foi utilizada para modelar as principais topologias das redes.

Já Siqueira *et. al.* (2010) analisaram alternativas de alocação de câmeras de vigilância no bairro de Ipanema de modo que todas as ruas fossem

[5] Vadim G. Vizing, matemático russo que em 1965 conjecturou que todo grafo pode ser colorido totalmente com $\Delta + 2$ cores.

cobertas, bem como propuseram uma ou mais soluções de alocação com custo mínimo de câmeras de vigilância.

Em 2013, novamente Lozano *et. al*. trabalharam com as redes de interconexão, apresentando inicialmente dois conceitos novos na literatura; produto funcional de grafos e grafo *k*-suporte, com o objetivo de ampliar estas estruturas computacionais, tomando como base estes dois conceitos.

Melo *et. al.* (2013) relataram que um dos grandes problemas das Instituições de Ensino Superior (IES) brasileiras, a cada novo período letivo, é a alocação de turmas nas salas de aulas. Devido ao grande número de restrições, muitas das quais conflitantes entre si, este é um problema de difícil solução e objeto de estudo de diversos pesquisadores. Na prática, é uma tarefa que demanda tempo e que nem sempre o problema é resolvido sem conflitos de disponibilidades dos recursos envolvidos. Desta forma, propuseram uma distribuição mais equilibrada no uso de salas e na distribuição de professores em uma IES.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos os conceitos básicos. Em seguida, definimos os diversos tipos de colorações de grafos utilizadas neste trabalho, e logo depois introduzimos a ideia de produto funcional. Após, adentramos no aspecto computacional com modelos de redes de interconexão, juntamente com os sistemas multiagentes, e finalizamos, apresentando um exemplo de conexão entre dois sistemas multiagentes, utilizando como base o produto funcional.

Conceitos Básicos

Nesta seção, serão apresentadas definições básicas e terminologias da teoria de grafos utilizadas neste trabalho. Outros conceitos sobre grafos podem ser encontrados em Bondy e Murty (1976), Yap (1986), Boaventura Netto (1996) e Yap (1996).

Denota-se por $G(V, E)$ um grafo G composto por um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas E, tais que cada aresta conecta dois vértices. A Figura 1 ilustra um grafo com 6 vértices e 10 arestas.

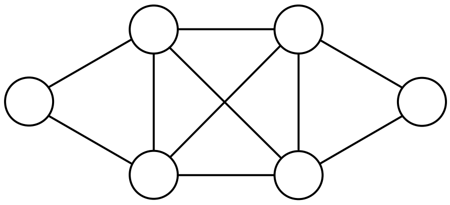


Figura 1. Um grafo $G(V, E)$ com 6 vértices e 10 arestas.

Neste trabalho, a palavra grafo, tem o significado de grafos simples (não possuem arestas repetidas) e sem laços (não possuem arestas com extremidade comum). Para cada vértice v o número de arestas incidentes em v é dito grau do vértice v e denotado por $d(v)$. O grau mínimo será denotado por δ, enquanto o grau máximo é representado por Δ. Um grafo $G(V, E)$, tal que todos os seus vértices tenham o mesmo grau k é chamado de grafo k-regular. Na Figura 1, temos $\delta = 2$ e $\Delta = 4$, enquanto que na Figura 2, o grafo é 4-regular com 8 vértices, 16 arestas e $\delta = \Delta = 4$.

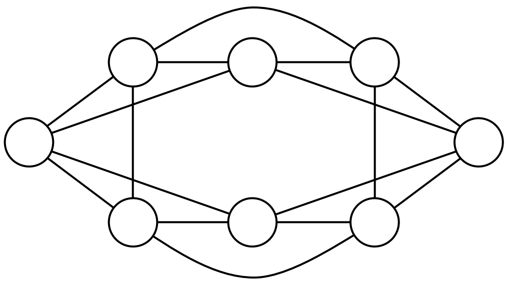


Figura 2. Um grafo 4-regular com 8 vértices e 16 arestas.

Um caminho em um grafo $G(V, E)$ é uma sequência finita e não nula $P_k = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_kv_k$ cujos termos são alternativamente vértices e arestas, tais que, para $i = 1, \ldots, k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i e nenhum elemento de P_k se repete. Neste caso, diz-se que o caminho P_k liga ou conecta os vértices v_0 e v_k. Se uma sequência satisfaz as condições acima, e, além disso, $v_k = v_0$, então a sequência é chamada de ciclo C_k.

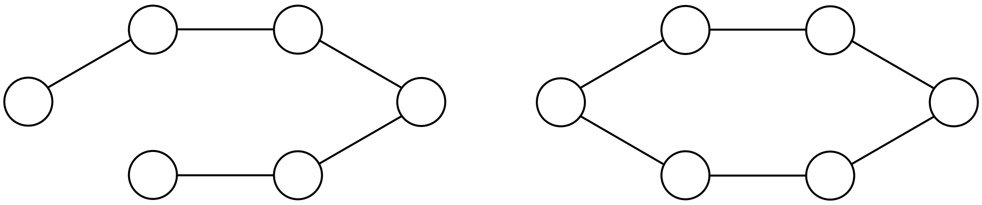


Figura 3. Um caminho P_6 e um ciclo C_6.

Coloração em Grafos

Nesta seção, serão apresentados os conceitos de coloração de vértices, coloração total e coloração total equilibrada que servirão de suporte para o restante do trabalho. Para um estudo mais aprofundado, consultar Yap (1996), Lozano (2005), Lozano *et. al.* (2009) e Siqueira (2011).

Dado um grafo $G(V, E)$, uma coloração de vértices de G é uma aplicação do conjunto de vértices V em um conjunto de cores $C = \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Uma coloração de vértices com k cores, é chamada de k-coloração de vértices, e será dita própria, se nenhum par de vértices adjacentes tiver a mesma cor associada.

Uma coloração total de G é uma aplicação do conjunto $E \cup V$ em um conjunto de cores $C = \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Uma coloração total com k cores, é chamada de k-coloração total, e será própria é se nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tiver a mesma cor associada. Esta coloração total será equilibrada se, para todo par de cores c_1 e c_2, tem-se $|a(c_1) - a(c_2)| \leq 1$, onde, $a(c_i)$ representa o número de aparições da cor c na coloração. A Figura 4 ilustra uma 4-coloração total equilibrada, com as cores 1, 2, 3 e 4. Nela, observa-se $a(1) = a(2) = a(4) = 4$ e $a(3) = 5$, o que de fato caracteriza uma coloração equilibrada.

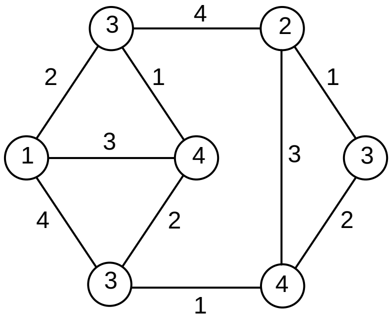


Figura 4. Uma 4-coloração total equilibrada.

Produto Funcional de Grafos

O produto funcional de grafos é uma generalização do produto cartesiano, e tem como principal objetivo construir novas estruturas nas quais conexões não-usuais entre vértices possam ser realizadas, através do uso de funções pré-determinadas. Até o presente momento, não se tem notícia de uma aplicação real isolada do produto funcional, mas segundo Lozano *et. al.* (2013) e Lozano *et. al.* (2014) através da junção deste conceito com outros, como por exemplo, a coloração, é possível criar novas topologias para redes de interconexão.

Não mostraremos aqui como os produtos (cartesiano e funcional) entre dois grafos são obtidos, pois não é objetivo deste trabalho, mas que podem ser encontrados em Sabidussi (1960), Vizing (1963), Siqueira (2011) e Lozano *et. al.* (2012).

Como exemplo, mostramos abaixo, na Figura 5, os produtos cartesiano (linha pontilhada) e funcional (linha contínua) entre dois caminhos P_3.

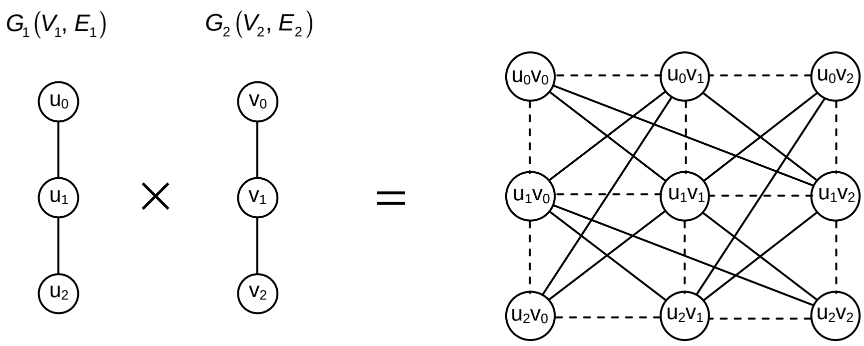


Figura 5. Produtos cartesiano e funcional entre os grafos G_1 e G_2.

Em 2012 e 2013, Lozano *et. al.* provaram que a partir do conceito de produto funcional, é sempre possível gerar subfamílias de grafos regulares que podem ser coloridas total e equilibradamente com, no máximo $\Delta + 2$ cores.

Mostraremos adiante, como estas estruturas podem servir de suporte para ampliar redes de interconexão e sistemas multiagentes, mantendo-se as propriedades iniciais preservadas.

Redes de Interconexão

Uma rede de interconexão é uma estrutura composta por um conjunto *P* de $n > 1$ processadores e um conjunto *T* de ligações (conexões) entre os processadores e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Cada processador tem sua memória local;

(ii) Cada processador pode executar, em determinado momento, uma e somente uma das seguintes tarefas:

a) processar alguma informação;
b) enviar alguma informação;
c) receber alguma informação.

(iii) Cada uma das tarefas gasta o mesmo tempo para sua realização.

Em uma rede de interconexão, cada processador deve pertencer a alguma ligação, podendo estar em várias. Denomina-se canal, uma conexão que possui somente dois processadores. Uma rede de interconexão pode ser representada por um grafo $G(V, E)$, neste caso, os vértices são os processadores e estão associados ao processamento de informações; as arestas são os canais e representam a transmissão de informações.

A Figura 6 apresenta uma coloração total equilibrada em uma topologia de rede em forma de anel (ou ciclo). A partir dessa coloração, pode-se associar que os processadores ou os canais coloridos com a mesma cor, por exemplo, com a cor 3, processam ou transmitem informações simultaneamente. Lozano *et. al.* (2008) ressaltam que:

> Observa-se que a ideia de associar coloração total equilibrada ao processamento e transmissão de dados pode ajudar na elaboração de algoritmos que independam da topologia da rede. Em uma coloração total não equilibrada, embora exista a possibilidade desse tipo de associação, a falta de equilíbrio na distribuição das cores não permite um bom aproveitamento da rede. (p. 164).

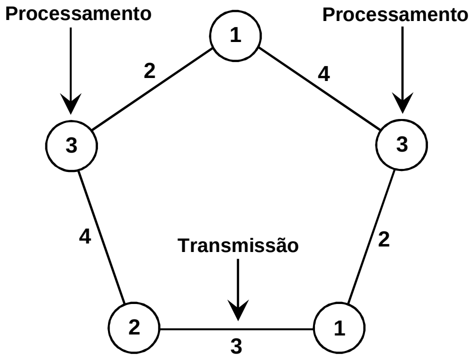


Figura 6. Processamento e transmissão de informações utilizando coloração.

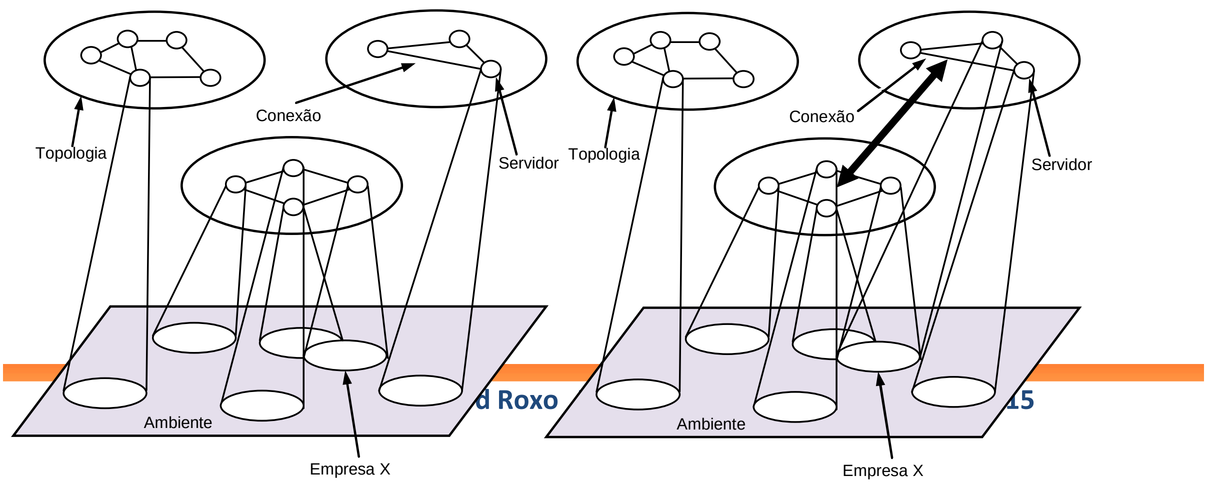
Em 2008, Lozano *et. al.* desenvolveram um algoritmo que envolve unicamente transmissão de dados. Consideraram que a medida de tempo de um algoritmo era dada pelo número de passos que ele efetuava. Em uma rede, admite-se que toda computação possa ser realizada instantaneamente por qualquer processador e que a comunicação entre processadores vizinhos deve consumir um passo de computação. Este algoritmo de comunicação foi baseado na coloração total, e envolveu a troca completa de informações, ou seja, cada processador possuía uma informação e era necessário que todos os processadores conhecessem todas as informações. O algoritmo apresentado independe da topologia da rede de interconexão, mas funciona com qualquer coloração. Entretanto, uma coloração total equilibrada do grafo, que representa a rede, torna o processamento mais eficiente.

Sistemas Multiagentes (SMA)

Segundo Lesser (1999), “Sistemas Multiagentes (SMA) são sistemas computacionais em que dois ou mais agentes interagem ou trabalham em conjunto para executar um conjunto de tarefas ou para satisfazer um conjunto de objetivos”. Diante da natureza distribuída dos sistemas multiagentes, Reis (2003) destaca, como ponto essencial na construção de sociedades de agentes, a capacidade de coordenar as interações e as dependências das atividades do diferentes agentes do SMA. O autor também aponta que para que um agente possa operar como parte do sistema, é necessária a existência de uma infraestrutura que permita a comunicação e/ou interação entre os agentes que compõem o SMA.

Os SMA podem ter um comportamento dinâmico, com relação à quantidade de agentes, por exemplo, grandes empresas de vendas *online*, podem precisar de um aumento na capacidade de processamento durante o lançamento de um produto, mas depois de certo tempo, podem não precisar mais de toda essa capacidade. Por este motivo, um modelo que permita criar topologias eficientes de forma dinâmica pode ajudar a gerenciar os sistemas.

Desta forma, apresentaremos um modelo que permite a conexão entre SMA, tomando como base a coloração total equilibrada, o produto funcional de grafos e um raciocínio similar ao utilizado nos modelos de redes de interconexão, descrito em Lozano *et. al.* (2008). Suponhamos que a Empresa X, ver Figura 6(A), deseja expandir sua estrutura computacional, durante o Natal, por exemplo, como mostra a Figura 6(B), e logo após, retornar a sua estrutura normal. A pergunta em questão é: Como realizar esta expansão temporária otimizando recursos, que podem ser financeiros e/ou de tempo de processamento?



(A) (B)

Figura 6. Estrutura de um Sistema Multiagente (Adaptado de Reis, 2003)

Ressaltamos novamente, que para o processamento se tornar mais eficiente, sugere-se que cada SMA seja modelado por uma topologia que permita uma coloração total equilibrada, tal como descrevem Lozano *et. al.* (2008) e Lozano *et. al.* (2013).

Conexão entre Sistemas Multiagentes

Como já foi dito antes, em muitas situações pode ser interessante ou até mesmo necessário expandir um SMA. Os motivos para se ampliar uma estrutura computacional vão desde a abertura de um novo setor de uma empresa à necessidade de compartilhar servidores interligados a internet para suprir a demanda de vendas em datas especiais, como no Natal, por exemplo.

Não temos a pretensão de esgotar o assunto com este exemplo, mas sim chamar a atenção, e lançar uma semente, para novas possibilidades de expansão de SMA com o auxílio do produto funcional de grafos.

A Figura 7 ilustra uma conexão entre dois SMA, obtida a partir de duas topologias em forma de anéis, ambas representadas na Figura 6(B):

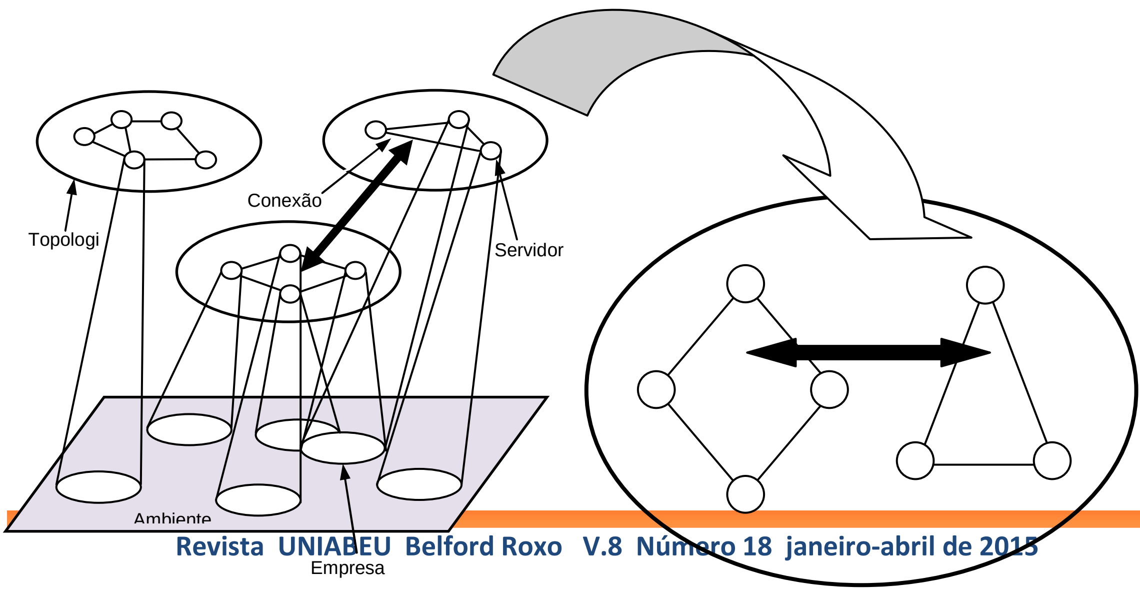


Figura 7. Destaque para a conexão entre duas topologias em anéis (ou ciclos).

Antes de prosseguir, note que estas topologias admitem uma coloração total equilibrada com $\Delta + 2$ cores, no máximo, conforme ilustrado na Figura 8:

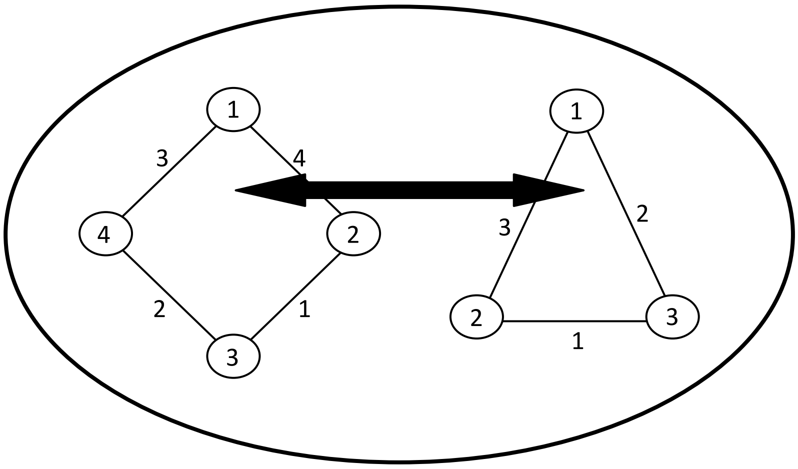


Figura 8. Duas topologias em anéis (ou ciclos), e suas respectivas colorações equilibradas.

É importante ressaltar que após gerar a conexão entre os SMA, é necessário recolorir essa nova estrutura. Tal técnica é descrita com detalhes em Siqueira (2011). A Figura 9 mostra a conexão final entre essas duas topologias que, neste caso, será realizada através do produto cartesiano, e sua coloração total equilibrada. Em matemática, esta importante estrutura recebe o nome de Toro.

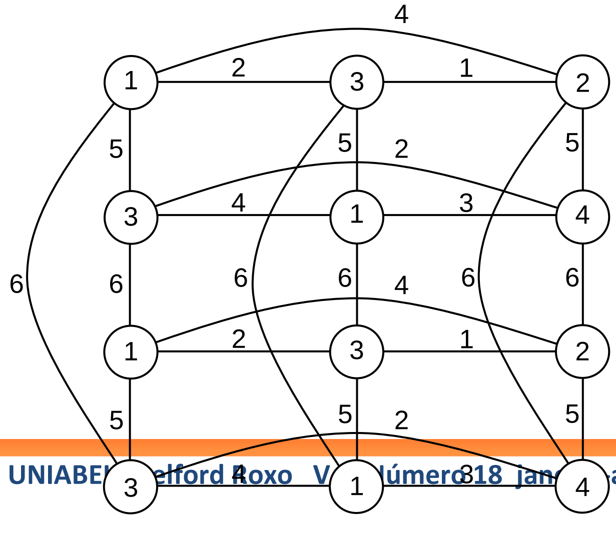


Figura 9. Estrutura final resultante da conexão entre duas topologias em anéis.

Considerações Finais

Muitos campos da Matemática Discreta são reconhecidos como instrumentos matemáticos fundamentais em investigações e aplicações precisas de outras áreas do conhecimento, pelo estudo de assuntos que são indispensáveis ao desenvolvimento de outras ciências e de tecnologias, como mencionamos na introdução do trabalho.

O artigo trata da Teoria dos Grafos, que além de não necessitar de pré-requisitos matemáticos especiais, serve de porta de entrada para introduzir problemas importantes de gestão e de computação. Jurkiewicz (2002) acrescenta sua aplicação em atividades produtivas e sociais modernas, como por exemplo, no transporte, telecomunicação, informática, entre outras.

Os resultados apresentados neste texto mostram que o produto funcional permite construir grafos que podem ser coloridos total e equilibradamente com, no máximo, $\Delta + 2$ cores e que podem servir como suporte para gerar novas topologias em sistemas multiagentes, bastando para isso optar pela técnica adequada. Ressaltamos ainda, que o fato de poder expandir dinamicamente as topologias, mantendo propriedades como conexidade e regularidade, entre outras, faz do produto funcional uma ferramenta que pode ser amplamente utilizada na computação em nuvem.

Referências

BOAVENTURA NETTO, P. O. Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 2003.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. Graph Theory with Applications. New York, North-Holland, 1976.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DIESTEL, R. Graph theory. New York, Springer-Verlag, 1997.

FEITEIRA, R.; RIBEIRO, C. M. Modelagem no Básico e Secundário: um percurso possível à introdução dos Grafos, 2008. Disponível em <http://www.apm.pt/files/_Co_Ribeiro_Feiteira_486a01bf84ab8.pdf> Acesso em 21 mar. 2009.

JURKIEWICZ, S. Grafos: uma introdução (2008). Disponível em http://obmep.org.br/ Acesso em 2 jan. 2009.

LESSER, V. Cooperative Multi-Agent Systems: A Personal View of the State of the Art, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* **11**, 133-142, 1999.

LOZANO, A. R. G. Coloração total equilibrada de grafos. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., JURKIEWICZ, S. Coloração Total Equilibrada – Um Modelo para Redes de Interconexão, *Pesquisa Operacional* **28**, 161-171, 2008.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C., MARKENZON, L. Coloração de Vértices com Folga. In: XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, 3084-3091, 2009.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C. V. P. e JURKIEWICZ, S. Grafo k-suporte, produto funcional e coloração total equilibrada em grafos regulares. In: XLIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, RJ. Anais do XLIV SBPO, 4046-4057, 2012.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., JURKIEWICZ, S. e FRIEDMANN, C. V. P. Produto funcional de grafos, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* **14**, 221-232, 2013.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S. e MATTOS, S. R. P. Produto Funcional de Grafos e Modelos de Redes de Interconexão. *Almanaque Unigranrio de Pesquisa* **6** v.2, 193-207, 2013.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C. V. P. e JURKIEWICZ, S. Produto funcional de grafos: Um modelo para conexão de sistemas multiagentes. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Natal, RN.

MELO, V. A., LOZANO, A. R. G. e SIQUEIRA, A. S. Uma Proposta de Distribuição mais Equilibrada de Professores e Salas em uma IES. In: XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Natal, RN. Anais do XLV SBPO, 802-811, 2013.

PEREIRA, R. A., GARCIA, L. C., MELO, V. A., TEIXEIRA, P. J. M., BOAVENTURA NETTO, P. O. JURKIEWICZ, S. Distribuição de cabines de segurança em parte do

Bairro do Leblon na Cidade do Rio de Janeiro. In: XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Gramado, RS. Anais do XXXVII SBPO, 2353-2360, 2005.

REIS, L. P. Coordination in Multi-Agent Systems: Applications in University Management and Robotic Soccer. PhD Thesis, FEUP, Porto, 2003.

SABIDUSSI, G. Graph multiplication, *Math. Z*. **72**, 446-457, 1960.

SIQUEIRA, A. S., OLIVEIRA, G. A. T. e MELO, V. A. Modelagem em Matemática Discreta: A Teoria dos Grafos como Ferramenta para a Solução de Problemas do Cotidiano. *Almanaque Unigranrio de Pesquisa* **2**, 91-93, 2010.

SIQUEIRA, A. S. Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

VIZING, V. G. The Cartesian product of graphs, *Vyc.Sis*. **9**, 30-43, 1963.

YAP, H. P. *Some topics in graph theory*. London, Cambridge University Press, 1986.

____. *Total colorings of graphs*. Berlin, Springer, 1996.

Recebido em 01/04/2015.

Aceito em 20/04/2015.