

1 Kalibrierung des Temperatursensors

Da wir bei der Hauptmessung einen Temperatursensor verwenden und nicht genau wissen, ob die angezeigte Temperatur am Cassy auch der tatsächlichen Temperatur entspricht, bestimmen wir in diesem Versuch den systematischen Fehler durch die Kalibrierung der Temperatur.

Beide Gruppen haben für die Kalibrierung des Temperatursensors eine Rauschmessung mit Eiswasser in einem offenen Behälter durchgeführt.

Bevor die tatsächliche Hauptmessung (Abkühlung) gemessen werden konnte, musste das Wasser zunächst auf Siedetemperatur gebracht werden. Diese Temperatur ist wieder sehr konstant bei einem konstanten Druck gemessen worden um die Temperatursensoren zu kalibrieren.

Leider hat Gruppe 1 ihre Rauschmessung bei Siedetemperatur auf Geheiß eines Tutors verworfen „for your eyes only“. Deshalb mussten wir hier allein auf die Messdaten von Gruppe 2 zurückgreifen.

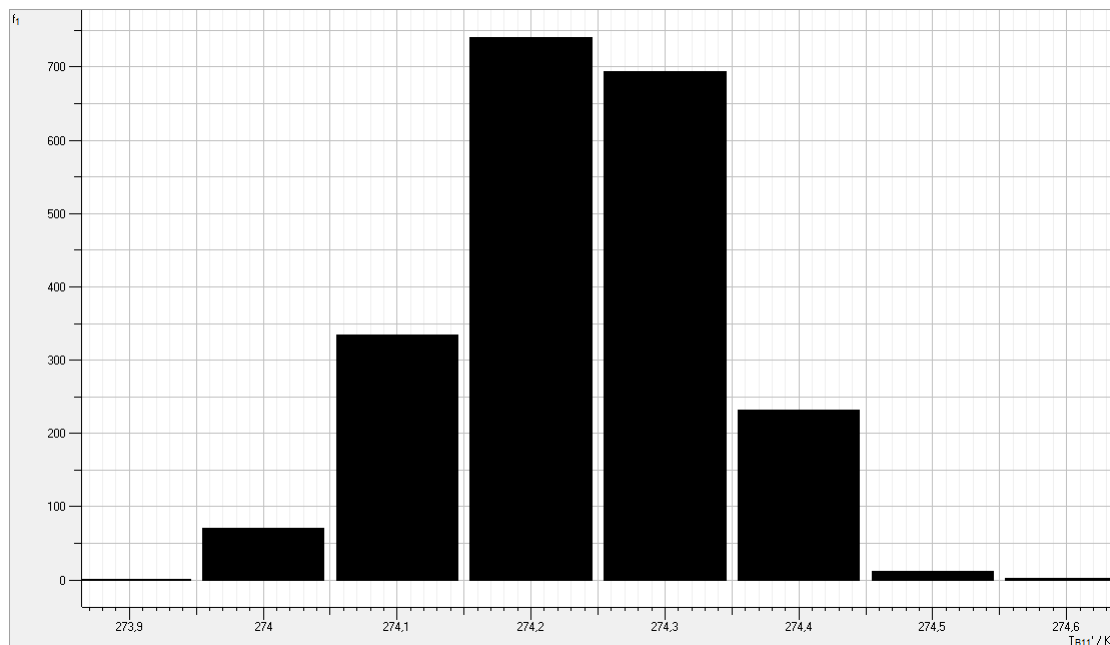


Abbildung 1: Kalibrierung bei Eiswasser

Tabelle 1: Rauschmessung der Temperatur beim Gefrierpunkt

T_M in K	274.277
σ_T in K	0.103
σ_{T_M} in K	0.002
T_{Theo}	272.2

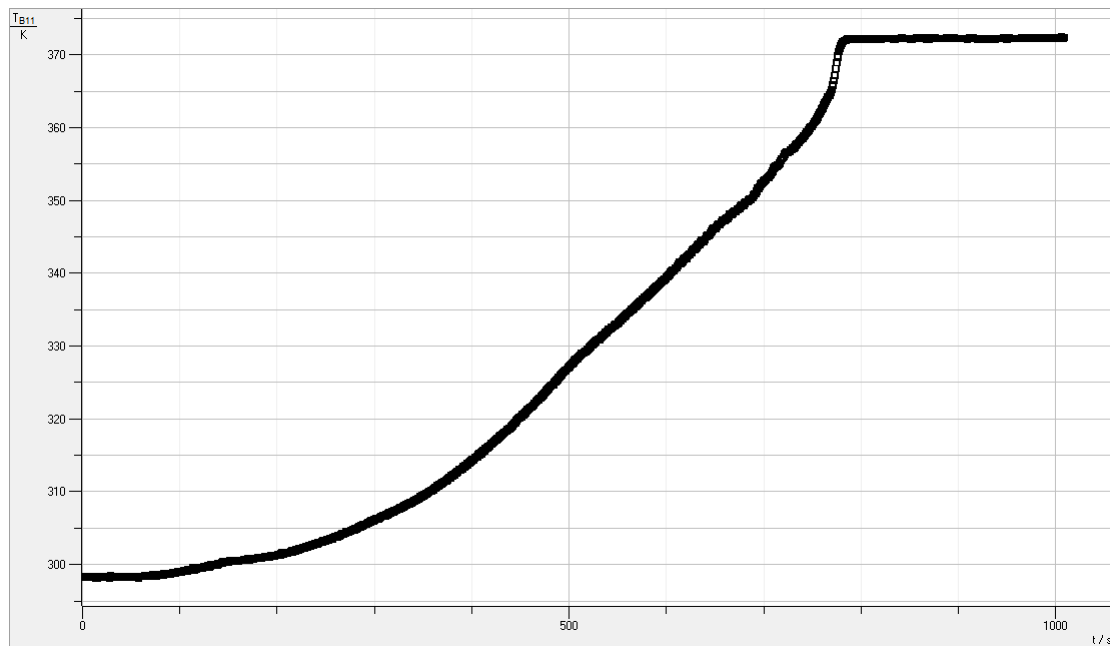


Abbildung 2: Heizvorgang. Die Siedetemperatur ist erreicht, wenn die Kurve abflacht.

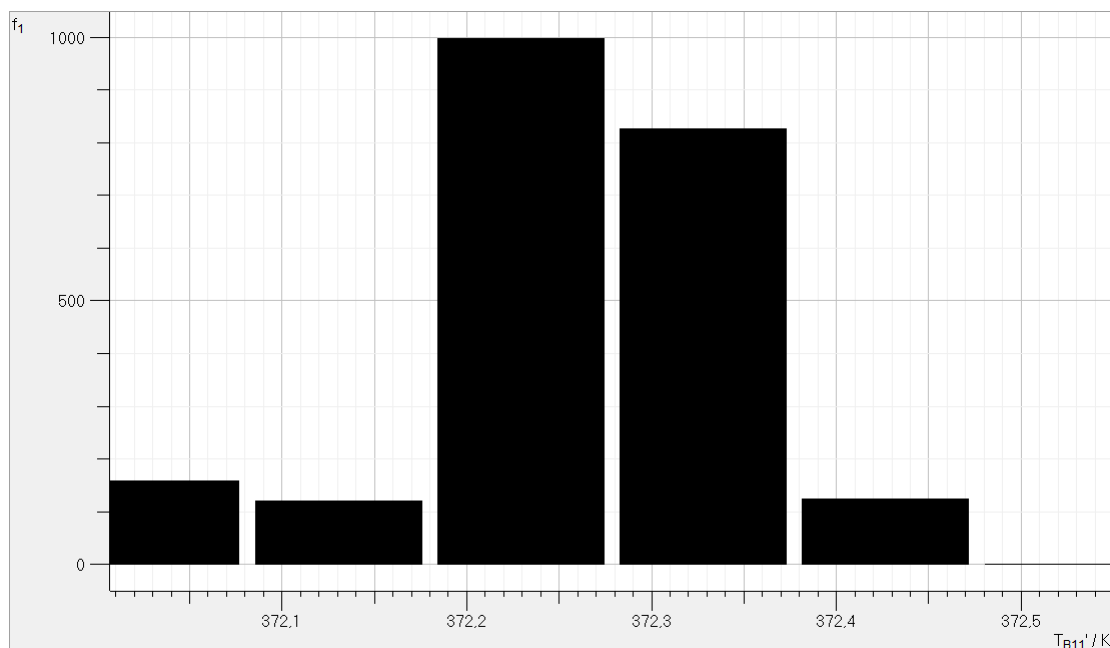


Abbildung 3: Kalibrierung bei Siedetemperatur.

Tabelle 2: Rauschmessung der Temperatur beim Siedepunkt.

T_M in K	372.227
σ_T in K	0.083
σ_{T_M} in K	0.002
T_{Theo} in K	372.5

Der Theoretische Wert für die Siedetemperatur ergibt sich aus dem Druck. Gemessen hat das Cassy bei Normalbedingungen im Labor einen Wert von: $p_C = 1006.5\text{hPa}$. Die Wetterstation gab allerdings einen Wert von $p_W = 984\text{hPa}$ an. Also eine Differenz von

22.5 hPa. Beim **sieden** haben wir einen Druck von 1015hPa gemessen. Mit der Korrektur von der Wetterstation ergibt sich also ein Druck von $p_{\text{siede}} = 992.5\text{hPa}$. Bei diesem Druck ist eine Siedetemperatur von 99.4°C zu erwarten, also 372.5K .

Um nun von den von Cassy gemessenen Werte T_C mit Fehlern σ_{T_M} auf die realen Werte T_R und ihre Fehler σ_{T_R} zu kommen trägt man die theoretischen Werte gegen die gemessenen auf. Aus der Steigung und dem y-Achsen-Abschnitt ließe sich dann eine Umrechnung bestimmen.

$$T_R = aT_C + b \quad (1)$$

Hätte man eine solche Formel könnte man durch Fehlerfortpflanzung den Fehler auf den realen Messwert berechnen.

$$\sigma_{T_R} = \sqrt{(T_C \sigma_a)^2 + \sigma_b^2} \quad (2)$$

Haben wir diesen Fehler können wir berechnen wie sich dieser dann auf die Werte der Hauptmessung(Λ) niederschlägt und daraus die systematischen Fehler durch die Temperaturkalibrierung bestimmen.

$$\sigma_{\lambda_T} = \frac{\sigma_T}{T} \cdot \Lambda \quad (3)$$

Über eine lineare Regression durch T_{Schmelz} und T_{Siede} mit ihren Fehlern legt kann man eine solche gesuchte Funktion finden. Damit die Werte beim Auftragen von T_R gegen T_C für Steigung und Y-Achsenabschnitt möglichst unkorreliert **sind** verschieben wir die Y-Achse um den Mittelwert von Siedetemperatur und Schmelztemperatur.

$$\bar{T} = \frac{T_{\text{Schmelz}} + T_{\text{siede}}}{2} \quad (4)$$

Die Theoretischen Werte (y-Werte) sind also nicht Fehlerbehaftet. T_{Schmelz} und T_{Siede} (x-Werte) allerdings schon. Leider haben wir in der Praktikumsbibliothek nur eine Funktion gefunden, die entweder **fehler** auf beiden Achsen akzeptiert oder nur Fehler auf y.

Deshalb haben wir die Gleichung invertiert und die so gefundene Steigung und Y-Achsenabschnitt in die eigentlich gesuchten umgeformt. Die eigentliche Gleichung wäre:

$$T_R = a_1(T_C - \bar{T}) + b_1 \quad (5)$$

Die von uns zunächst bestimmte Gleichung ist:

$$(T_C - \bar{T}) = a_2 T_R + b_2 \quad (6)$$

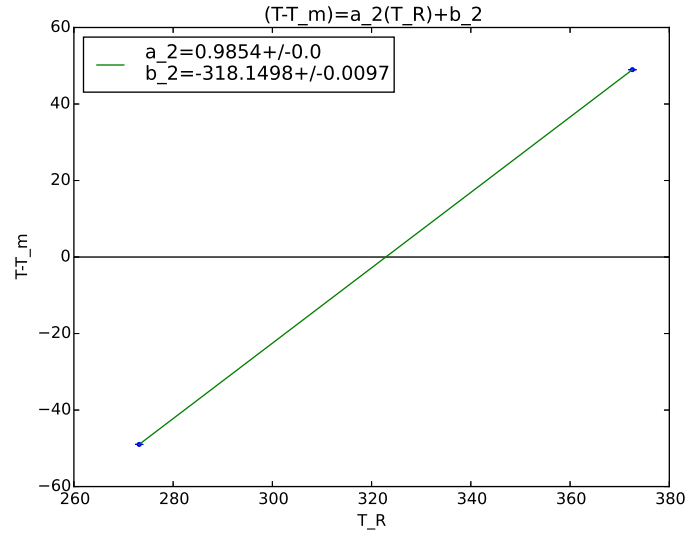


Abbildung 4: Lineare Regression zur Kalibrierung des Temperatursensors

$$a_2 = 0.985, \quad \sigma_{a_2} = 2.870 \cdot 10^{-5} \quad (7)$$

$$b_2 = -318.150K, \quad \sigma_{b_2} = 0.010K \quad (8)$$

Da die zweite Gleichung die invertierte der ersten ist, gilt dass der x-Achsenabschnitt der einen dem y-Achsenabschnitt der anderen Gleichung entspricht und dass die eine Steigung das inverse der anderen Steigung ist.

$$a_1 = \frac{1}{a_2}, \quad \sigma_{a_1} = \frac{\sigma_{a_2}}{a_2^2} \quad (9)$$

$$b_1 = -\frac{b_2}{a_2}, \quad \sigma_{b_1} = b_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{b_2}}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{a_2}}{a_2}\right)^2} \quad (10)$$

Es gilt also Gleichung ?? mit:

$$a_1 = 1.015, \quad \sigma_{a_1} = 2.955 \cdot 10^{-5} \quad (11)$$

$$b_1 = 322.86K, \quad \sigma_{b_1} = 0.013K \quad (12)$$

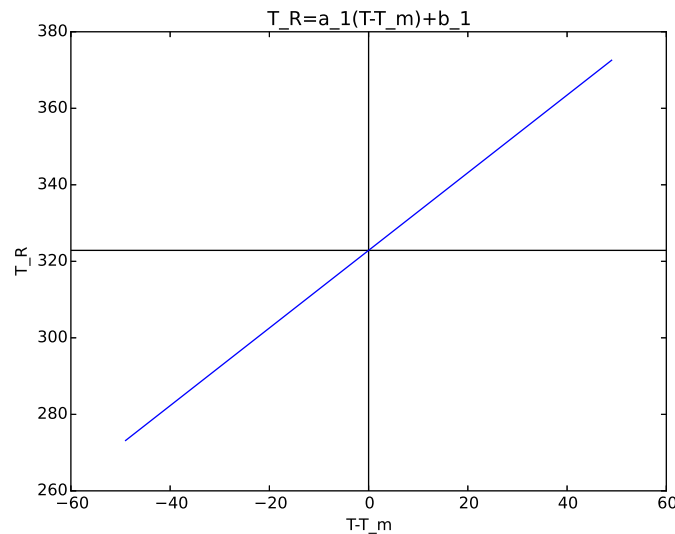


Abbildung 5: Funktion zur Kalibrierung

Wir haben nun alle Werte um mit Gleichung den systematischen Fehler auf die Temperatur und damit den systematischen Fehler auf Λ zu bestimmen.

$$\sigma_{T_R} = \sqrt{((T_C - \bar{T})\sigma_a)^2 + \sigma_b^2} = 0.0137 \quad (13)$$

$$\sigma_{\lambda_T} = \frac{\sigma_T}{T} \cdot \Lambda = \sigma_{Kalibration} \quad (14)$$

Aus dem Herstellerangaben ergaben sich weitere systematische Fehler.

Tabelle 3: Systematische Fehler aus Herstellerangaben: Druck

Linearitätsfehler	$\pm 1\%$
Sensor	$\pm 1\%$
Verstärkungsfehler	$\pm 1\%$

Tabelle 4: Systematische Fehler aus Herstellerangaben: Temperatur

Sensor	$\pm 2.5K$
Konverter	$\pm 1\%$

Diese pflanzen sich wie folgt fort.

$$\sigma_{\Lambda,T} = \frac{\sigma_T}{T} \Lambda \quad (15)$$

$$\sigma_{\Lambda,p} = RT \frac{\sigma_p}{p} = RT \sigma_p \exp\left(\frac{\Lambda}{RT}\right) \quad (16)$$

Tabelle 5: Systematische Fehler Gruppe 1

	$\sigma_{Hersteller}$	$\sigma_{Kalibration}$	σ_{Gesamt}
Λ_0	0.513	0.002	0.513
Λ_1	0.519	0.002	0.519
Λ_2	0.534	0.002	0.534
Λ_3	0.515	0.002	0.515
Λ_4	0.526	0.002	0.526
Λ_5	0.537	0.002	0.537
Λ_6	0.532	0.002	0.532
Λ_7	0.53	0.002	0.53
Λ_8	0.513	0.002	0.513
Λ_9	0.547	0.002	0.547
Λ_{10}	0.517	0.002	0.517
Λ_{11}	0.514	0.002	0.514
Λ_{12}	0.535	0.002	0.535
Λ_{13}	0.563	0.002	0.563
Λ_{14}	0.499	0.002	0.499
Λ_{15}	0.506	0.002	0.506
Λ_{16}	0.521	0.002	0.521
Λ_{17}	0.488	0.002	0.488
Λ_{18}	0.528	0.002	0.528
Λ_{19}	0.458	0.001	0.458
Λ_{20}	0.468	0.001	0.468

Tabelle 6: Systematische Fehler Gruppe 2

	$\sigma_{Hersteller}$	$\sigma_{Kalibration}$	σ_{Gesamt}
Λ_0	0.518	0.002	0.518
Λ_1	0.508	0.002	0.508
Λ_2	0.518	0.002	0.518
Λ_3	0.508	0.002	0.508
Λ_4	0.519	0.002	0.519
Λ_5	0.525	0.002	0.525
Λ_6	0.527	0.002	0.527
Λ_7	0.537	0.002	0.537
Λ_8	0.535	0.002	0.535
Λ_9	0.512	0.002	0.512