

Protokoll
Mechanik - Trägheitsmomente

Gruppe B02

Bastian Kargoll
Jonas Morgenweg
Carsten Robens
Rüdiger Matti Schmidt

23. September 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Einführung Kreisbewegungen	3
2.2	Rotationsschwingungen	6
2.3	Herleitung der benötigten Trägheitsmomente	6
2.3.1	Zylinder	6
2.3.2	Hohlzylinder	7
2.3.3	Kugel	7
2.4	Winkelaufnehmer	7
2.4.1	Der Hall-Effekt	8
2.5	Fourieranalyse	9
3	Versuchsdurchführung	11
3.1	Versuchsbeschreibung	11
3.2	Aufbau	11
4	Auswertung	15
4.1	Bemerkungen	15
4.2	Bestimmung des Direktionsmomentes und des Trägheitsmomentes der Spiralfeder	16
4.3	Vergleich der experimentell ermittelten Werte mit den theoretischen Vorhersagen	19
4.4	Vergleichende Messung der Holzkugeln mit beiden Versuchsaufbauten	20
4.5	Bestätigung des Steinerschen Satzes	21
4.6	Oberschwingungen	23
4.7	Fehler durch die Schraube am Aufnahmeteller	24
5	Fazit	25

1 Ziel des Versuchs

In dem vorliegenden Protokoll wird eine Versuchsreihe zum Thema Trägheitsmomente beschrieben, die Durchführung dokumentiert sowie die Ergebnisse analysiert. Ziel ist es, verschiedene theoretische Vorhersagen zu diesem Thema aufzustellen und experimentell zu bestätigen bzw. zu widerlegen. Auch sollen die physikalischen Grundlagen knapp erörtert werden, die zum Verständnis dieses Themengebiets von Nöten sind.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Einführung Kreisbewegungen

In der Physik spielen Drehbewegungen von Körpern um eine Achse eine große Rolle. Da bei diesen Bewegungen die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte von dem Abstand zur Drehachse abhängen, ist es sinnvoll, Größen einzuführen, die den bewährten Größen der linearen Translation entsprechen. Bezeichnet man den Drehwinkel mit ϑ , so definiert man die Winkelgeschwindigkeit ω als erste, die Winkelbeschleunigung α als zweite zeitliche Ableitung des Drehwinkels ϑ :

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\vartheta}{dt} \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\end{aligned}$$

Diese Größen bilden ein Äquivalent zu den Größen Δx , v und a bei der linearen Bewegung.

Möchte man die tangentielle Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung eines Massenpunkts des Körpers bestimmen, so können die eben eingeführten Werte dazu verwendet werden. Es ergibt sich für einen Massenpunkt mit Abstand r_i zur Drehachse:

$$\begin{aligned}v_i &= r_i \cdot \omega \\ a_i &= r_i \cdot \alpha\end{aligned}$$

Zusätzlich wirkt auf jeden Massenpunkt eine Zentripetalbeschleunigung $a_{n,i}$, die in Richtung der Drehachse zeigt.

$$a_{n,i} = r_i \cdot \omega^2 \quad (1)$$

Die kinetische Energie $E_{kin,i}$ eines Masseteilchens des Körpers ergibt sich zu

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (2)$$

Möchte man die kinetische Energie des gesamten Körpers bestimmen, so muss man über alle Masseteilchen des Körpers summieren:

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_i (m_i v_i^2) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_i (m_i r_i^2 \omega^2) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_i (m_i r_i^2)}_{:=I} \cdot \omega^2 \\
 \Rightarrow E_{kin} &= \frac{1}{2} I \omega^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Die hier eingeführte Größe

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{4}$$

bezeichnet man als Trägheitsmoment und kann als Analogie zur trägen Masse bei der linearen Bewegung angesehen werden. So wie diese ein Maß für den Widerstand gegen eine Bewegungsänderung ist, so gibt das Trägheitsmoment den Widerstand des Körpers gegen eine Änderung der Rotationsbewegung an. Anders als die träge Masse, die eine rein körperimmanente Eigenschaft ist, hängt das Trägheitsmoment jedoch auch von der Lage der Masse bezüglich der Drehachse ab. Für eine Punktmasse m mit Radius r von der Drehachse gilt:

$$I = m \cdot r^2 \tag{5}$$

Hat der Körper eine kontinuierliche Massenverteilung, so geht die Summe in Gleichung (4) in ein Integral über und es ergibt sich:

$$I = \int r^2 dm \tag{6}$$

Führt ein Körper eine Rotation um eine Achse aus, die nicht durch seinen Massenmittelpunkt geht, so lässt sich das Trägheitsmoment I_a bezüglich dieser Achse häufig leicht mit Hilfe des Steinerschen Satzes

$$I_a = I_0 + m \cdot a^2 \tag{7}$$

bestimmen. I_0 bezeichnet hierbei das Trägheitsmoment bei Rotation um die Schwerpunktachse, m die Gesamtmasse des Körpers und a den Abstand der Rotationsachse von der Schwerpunktachse. Anhand dieser Gleichung lässt sich leicht erkennen, dass das Trägheitsmoment eines Körpers bei der Rotation um seine Schwerpunktachse minimal ist.

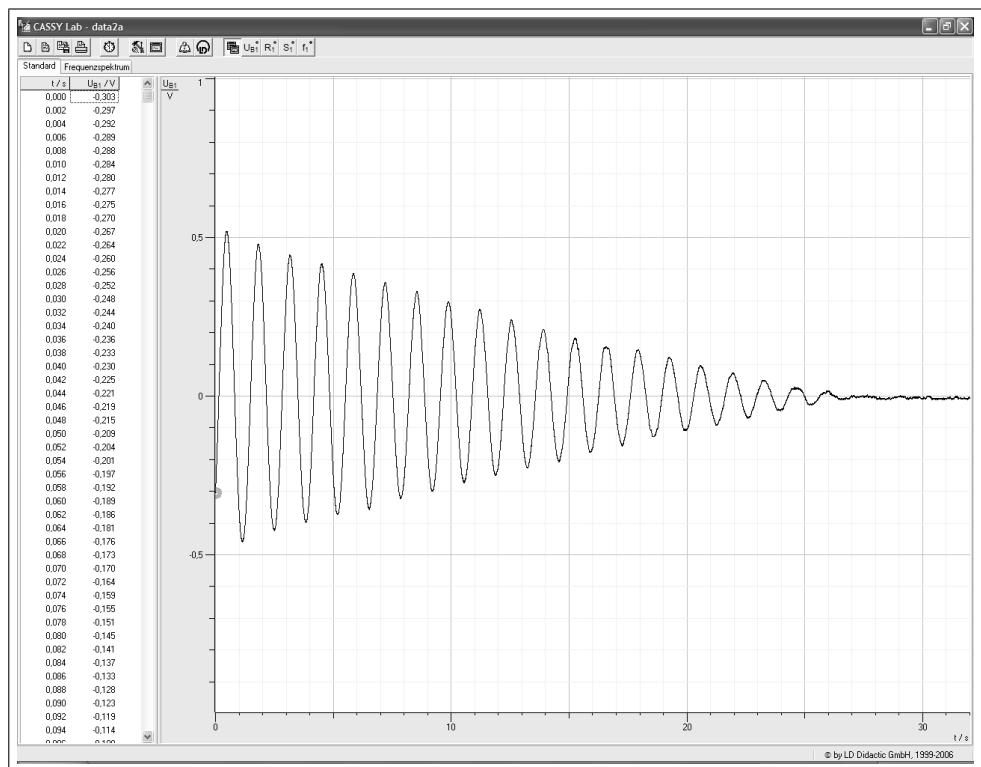


Abbildung 1: Beispiel für eine Rotationsschwingung, aufgenommen mit einem CASSY-Interface

2.2 Rotationsschwingungen

Wird ein Körper mit Trägheitsmoment I , der auf einer Schneckenfeder mit Direktionsmoment D befestigt ist, um einen Winkel φ ausgelenkt, so wirkt ein rückstellendes Drehmoment:

$$M = -D \cdot \varphi$$

Auf Grund des Trägheitsmoment I ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\varphi} &= -D \cdot \varphi \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{D}{I} \cdot \varphi \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt eine Schwingung:

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

wobei T die Periodendauer der Schwingung, φ_{max} die Amplitude und φ_0 eine eventuelle Phasenverschiebung bezeichnet. Die Winkelgeschwindigkeit ω wird dabei bestimmt durch

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{D}{I}} \\ \Rightarrow T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 Herleitung der benötigten Trägheitsmomente

2.3.1 Zylinder

DREHUNG UM Z-ACHSE (HÖHE DES ZYLINDERS)

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi dz \\ \Rightarrow I_{Z,z} &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned} \quad (10)$$

DREHUNG UM X-ACHSE

$$\begin{aligned} I_{Z,x} &= I_{Z,y} \text{ (Symmetrie)} \\ \Rightarrow I_{Z,x} = I_{Z,y} &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int y^2 + z^2 dm + \int x^2 + z^2 dm \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(2 \int z^2 dm + \int x^2 + y^2 dm \right) \\
&\stackrel{(10)}{=} \int z^2 dm + \frac{1}{2} I_{Z,z} \\
&= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R z^2 r dr d\varphi dz + \frac{1}{2} I_{Z,z} \\
&= \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M R^2 \\
\Rightarrow I_{Z,x} = I_{Z,y} &= \frac{1}{12} M (3R^2 + L^2) \tag{11}
\end{aligned}$$

2.3.2 Hohlzylinder

$$\begin{aligned}
I_{HZ,z} &= \frac{1}{2} (M_a R_a^2 - M_i R_i^2) \\
&= \frac{1}{2} \pi \varrho (R_a^4 - R_i^4) \\
(M_{HZ} &= \pi (R_a^2 - R_i^2) \varrho) \\
&= \frac{1}{2} M_{HZ} (R_a^2 + R_i^2) \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_a &\simeq R_i \simeq R) \\
\Rightarrow I_{HZ,z} &= M R^2 \tag{13}
\end{aligned}$$

2.3.3 Kugel

$$\begin{aligned}
I_K &= I_{K,x} = I_{K,y} = I_{K,z} \text{ (Symmetrie)} \\
\Rightarrow I_K &= \frac{1}{3} \left(\int y^2 + z^2 dm + \int x^2 + z^2 dm + \int x^2 + y^2 dm \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\int x^2 + y^2 + z^2 dm \right) \\
&= \frac{2}{3} \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta dr \\
\Rightarrow I_K &= \frac{2}{5} M R^2 \tag{14}
\end{aligned}$$

2.4 Winkelaufnehmer

Ein mechanischer Schwingungsvorgang kann mit Hilfe eines Winkelmessers in elektrische Signale umgewandelt werden. Der Winkelmesser besteht aus einem vernickelten Messingrohr (1cm Durchmesser) mit angeschraubtem Klingehäuse für die elektrischen Bauteile. Innerhalb des Rohres befindet

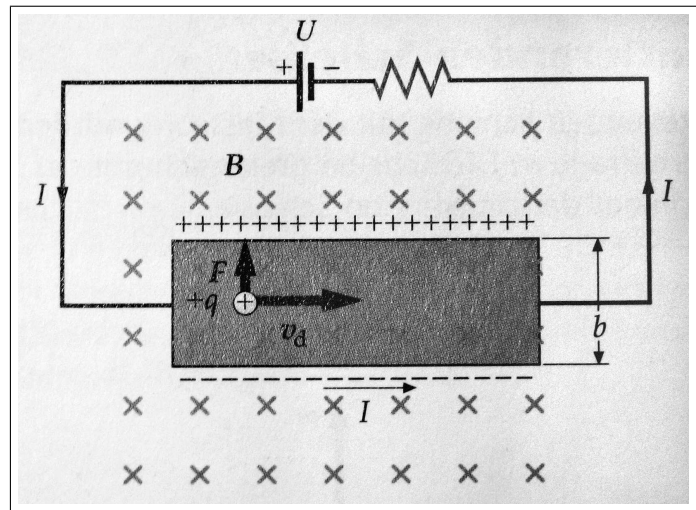


Abbildung 2: Der Hall-Effekt

(aus Tipler: Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage 2004)

sich eine Nut, an deren Ende eine Hallsonde eingeklebt ist. Die Sonde ist so orientiert, dass sie auf die zur Nut senkrecht stehende Komponente eines Magnetfeldes reagiert. Dieses Magnetfeld wird von zwei Permanentmagneten erzeugt, die auf die Innenseiten einer U-förmigen Metallgabel geklebt sind, und zwar so, dass Nord- und Südpol der Magnete gegenüberliegen. So entsteht ein nahezu homogenes Magnetfeld zwischen den Magneten. Die Metallgabel kann wiederum z.B. an einer Drillachse befestigt werden. Auf diese Weise drehen sich die Magnete um das Rohr mit der Nut und geben so den zu messenden Winkel wieder. Die Gabel wird so zur Nut ausgerichtet, dass bei einem Winkel von 0° die vertikale Komponente des magnetischen Feldes verschwindet; die Hall-Sonde zeichnet dann keine Spannung auf. Wird die Gabel um einen Winkel α ausgelenkt, so registriert die Sonde eine Spannung entsprechend der vertikalen Komponente des magnetischen Feldes. Die exakte Abhängigkeit

$$B_{\perp} = B \cdot \sin(\alpha)$$

kann im Falle kleiner Winkel (also $|\alpha| \leq 14^\circ$) durch

$$B_{\perp} = B \cdot \alpha$$

mit nur geringem Fehler approximiert werden.

2.4.1 Der Hall-Effekt

Der Hall-Effekt tritt immer dann auf, wenn ein Strom durch ein Magnetfeld fließt. Bei der Bewegung eines elektrischen Ladungsträgers q durch das Magnetfeld wirkt auf die Ladung die magnetische Kraft

$$F = q \cdot v_d \times B,$$

wobei v_d die Driftgeschwindigkeit der Ladungen und B die Magnetfeldstärke bezeichnet. In Abb. 2 ist dies am Beispiel positiver Ladungen, die durch einen Leiterstreifen der Breite b fließen, dargestellt. Die Kraft F lenkt die Ladungen nach oben ab, so dass dort ein Überschuss positiver Ladungsträger entsteht, im Bereich des unteren Rands des Streifens herrscht dann ein Mangel an positiven Ladungen. Auf Grund dieser Ladungstrennung entsteht innerhalb des Streifens eine Potentialdifferenz, die die Bildung eines elektrischen Feldes E zur Folge hat. Die dadurch entstehende elektrische Kraft

$$F_{el} = -q \cdot E$$

ist entgegengesetzt zur magnetischen Kraft. Gleichen sich die beiden Kräfte aus, so verbleibt eine Potentialdifferenz innerhalb des Streifens, die mit einem empfindlichen Voltmeter gemessen werden kann:

$$U_H = v_d \cdot B \cdot b$$

Diese Spannung ist also proportional zur Magnetfeldstärke B und kann genutzt werden, um das magnetische Feld zu messen.

2.5 Fourieranalyse

Die Fourieranalyse stellt in der Physik sowie in den technischen Anwendungen eine der wichtigsten Auswertungs- und Umwandlungsmethoden von Messgrößen dar. Ziel ist es dabei, periodische Schwingungen, die entweder als Funktion oder nur in Form einzelner Messwerte vorliegen, so umzuwandeln, dass ein Frequenzspektrum entsteht. Dieses zu analysieren oder zu übertragen ist häufig deutlich leichter, als mit den Daten direkt zu arbeiten.

Es kann mathematisch bewiesen werden, dass jede Funktion $f(t)$ in eine unendliche Reihe von Basisfunktionen $g(t)$ entwickelt werden kann, wobei die $g(t)$ ein vollständiges System bilden. Für Funktionen, die Schwingungen beschreiben, bietet sich an, die Funktionen $g_{1,n}(t) = \sin(n\omega t)$ sowie $g_{2,n}(t) = \cos(n\omega t)$ (mit $n = 0, 1, 2, \dots$) als Basisfunktionen zu wählen. Die Funktion $f(t)$ lässt sich dann als Reihe dieser Funktionen entwickeln:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)] \quad (15)$$

Die Funktion wird also aufgeteilt in eine Grundschiwingung mit der Frequenz ω sowie die höherfrequenten Oberschwingungen mit den ganzzahligen Vielfachen $n\omega$. Die Koeffizienten lassen sich mit $T = 2\pi/\omega$ durch Integration nach folgenden Formeln bestimmen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (17)$$

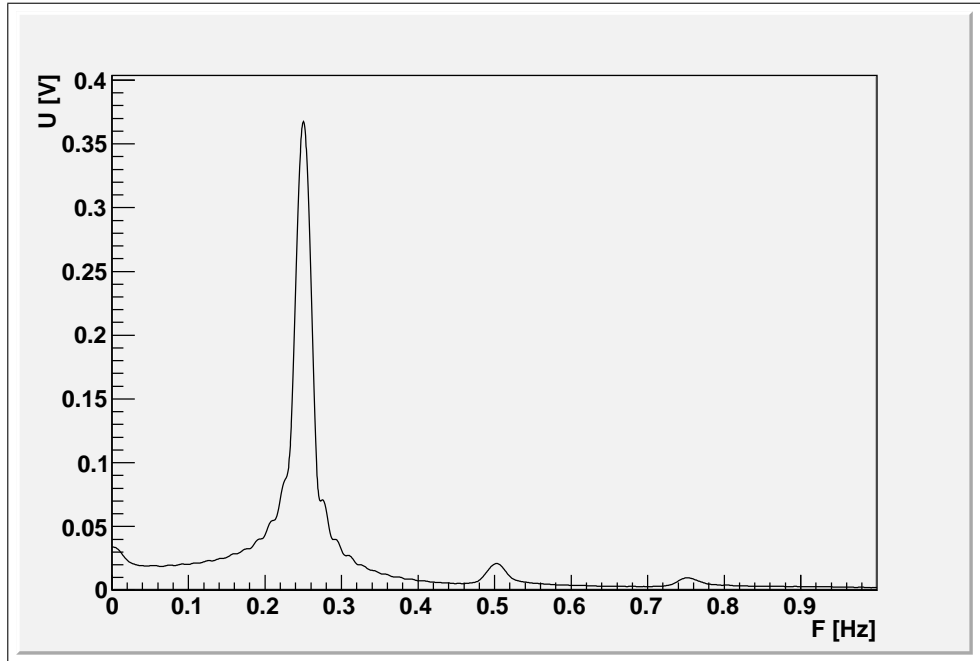


Abbildung 3: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer Fouriertransformation

Umgangssprachlich formuliert geben diese Koeffizienten also die Amplitude des in $f(t)$ enthaltenen Anteils der Frequenz $n\omega$ an der Gesamtschwingung wieder. Ist die Funktion $f(t)$ nicht bekannt, sondern nur Messwerte $f_i(t_i)$ vorhanden, so lassen sich die Berechnungen äquivalent mit numerischen Methoden durchführen. Die Reihenentwicklung wird dabei üblicherweise nach dem Glied $q = \frac{N}{2} - 1$ abgebrochen, wobei N die Anzahl der bekannten Messpunkte angibt.

Ist die Fourierreihe (Gleichung (15)) ermittelt, so werden im Frequenzspektrum die Werte

$$s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$f_n = \frac{n}{P}$$

gegeneinander aufgetragen. P bezeichnet hierbei die Gesamtmessdauer. Es bildet sich ein Peak im Bereich der Grundfrequenz, weitere kleinere bei den jeweiligen Frequenzen der Oberschwingungen (siehe Abb. 3). Die s_n haben dabei die gleiche Einheit wie die Amplituden der zu untersuchenden Schwingung.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Versuchsbeschreibung

Im Rahmen der Untersuchung werden folgende Fragestellungen bearbeitet:

- Bestätigung des Zusammenhangs $I = f(r^2)$ für einen Massenpunkt, der sich im Abstand r um eine Achse dreht (vgl. z.B. Gleichung (5))
- Vergleich von Probekörpern mit teilweise übereinstimmenden Eigenschaften in Hinsicht auf ihre Trägheitsmomente sowie der Vergleich mit den theoretischen Werten
 - Körper mit gleicher Masse, aber verschiedenem Trägheitsmoment
 - Körper mit verschiedener Massenverteilung, aber dennoch gleichem Trägheitsmoment
- Bestätigung des Steinerschen Satzes (vgl. Gleichung (7))

3.2 Aufbau

Auf einem stabilen Stativ wird eine Gabel angebracht, an welche eine Drillachse mit zweifach kugelgelagerter Welle über eine Schneckenfeder angekoppelt ist (vgl. Abb. 4). An der Drillachse ist ein Gestell mit zwei Magneten befestigt, die so ausgerichtet sind, dass der am Stativ befestigte Winkelaufnehmer die Auslenkung der Drillachse messen kann. Der Winkelaufnehmer wird über ein CASSY-System mit Spannung versorgt, gleichzeitig wird über ein anderes Leiterpaar die Spannungsänderung ausgelesen. Dieses „Grundgerüst“ wird bei allen folgenden Messvorgängen genutzt, so dass nur die Aufsätze dem Versuchsziel angepasst werden müssen.

Die Daten werden von dem Winkelausleser erfasst und von dem CASSY-System ausgelesen, dann über eine Schnittstelle auf einen PC übertragen und dort zur weiteren Auswertung gespeichert. Mit geeigneten Programmen (ROOT, MAPLE) lassen sich dort genaue Analysen der Daten vornehmen. So kann mittels einer Fourieranalyse aus den aufgezeichneten Schwingungsvorgängen die Frequenz und somit die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden.

Die Messungen werden jeweils mehrfach durchgeführt, in der Regel jede Messung 5-mal wiederholt. Auf diese Weise lässt sich durch Mittelwertbildung eine genauere Messung erreichen, indem die statistischen Fehler minimiert werden. Zudem wird zu Vergleichszwecken und in einigen Experimenten auch zum Vergleich der Versuchsaufbau zweimal aufgebaut und die Versuche parallel an beiden Versuchsaufbauten durchgeführt. Auf diese Weise lassen sich z.B. Messfehler, die auf einen Fehler in der Apperatur zurückzuführen sind, schnell erkennen.

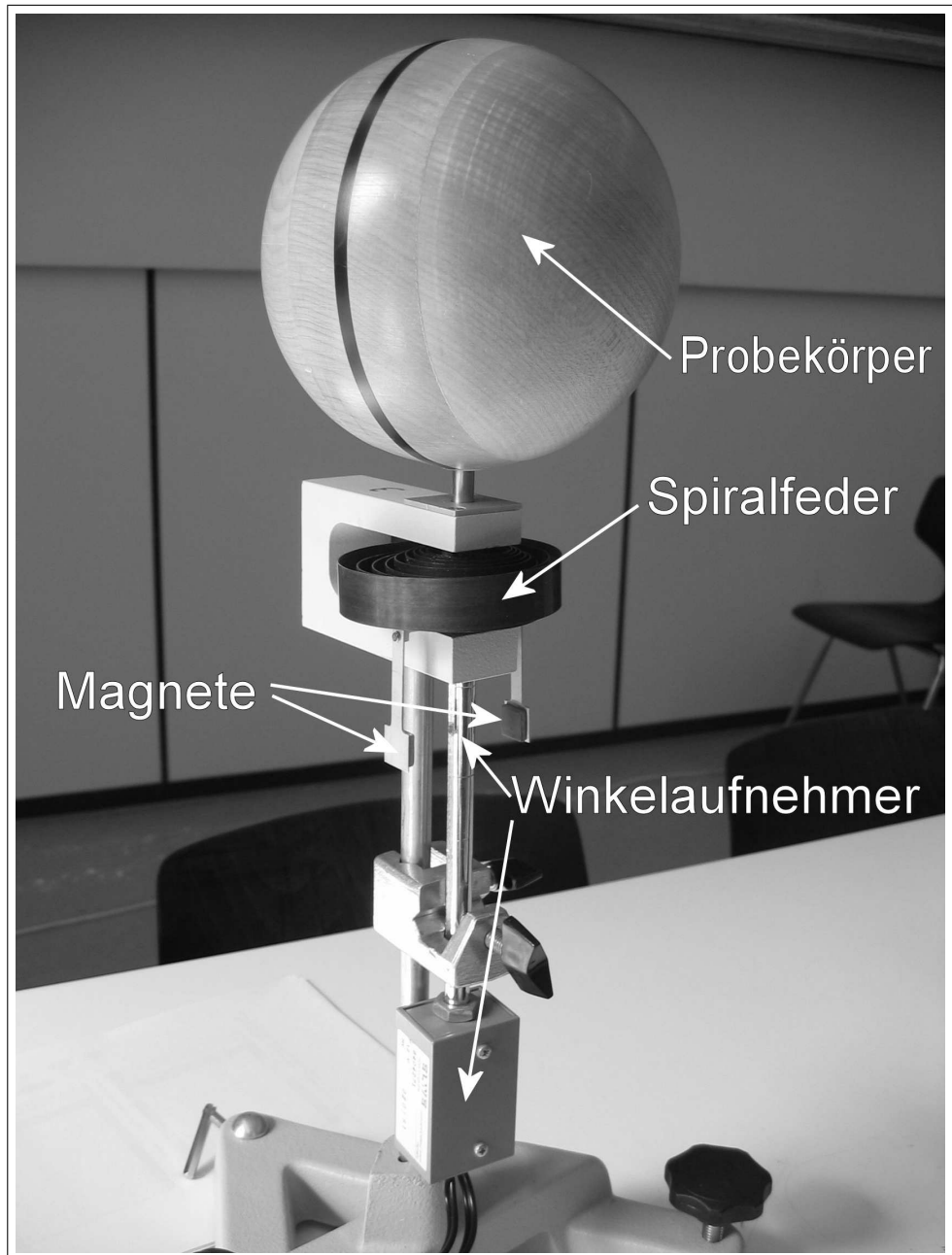
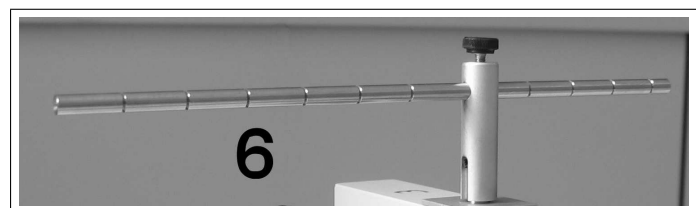
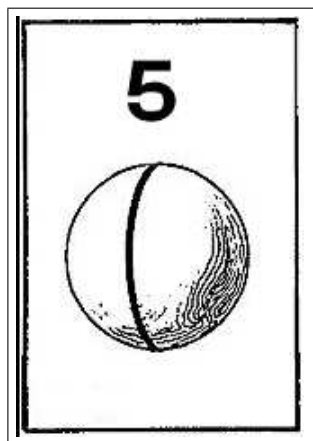
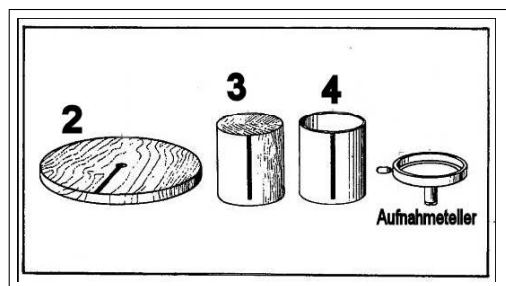
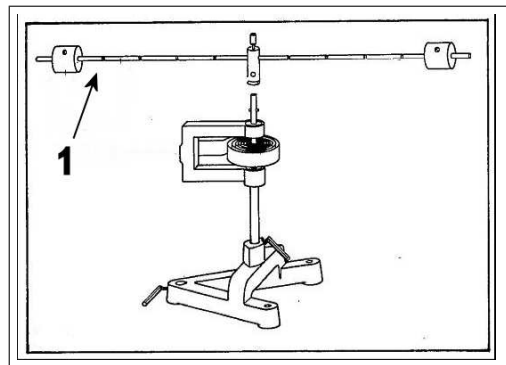


Abbildung 4: Aufbau zur Messung von Schwingungsvorgängen bei Probekörpern



Für die unterschiedlichen Versuchsziele werden die Maße von verschiedenen Körpern genau bestimmt und diese dann auf das Messgerüst aufgesetzt. Folgende Körper werden untersucht:

1. Eingekerbter langer Metallstab zum Aufsetzen auf die Drillachse mit dazugehörigen Massen, die entlang des Stabes verschoben werden können und als Modell von Massenpunkten dienen. Die Massen greifen mit Kugelrasten in die Kerben des Stabes, so dass sie in definierten Abständen von der Stabmitte gehalten werden können.
2. Holzscheibe (Vollzylinder) mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse
3. Vollzylinder aus Holz
4. Hohlzylinder aus Metall
5. Holzkugel mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse
6. kurzer Metallstab mit Kerben im Abstand von 1cm, 2cm, ..., 11cm von der Stabmitte, der mit dem Kupplungsstück an jeder der Kerben an der Drillachse befestigt werden kann

Die beiden Zylinder (3 und 4) werden mit Hilfe eines Metalltellers auf das Messgerüst aufgesetzt, da sie keine Aufsteckbuchsen haben. Das Trägheitsmoment dieses Tellers wird im Verlauf des Versuchs experimentell bestimmt, um die dadurch entstandene Änderung der Messwerte korrigieren zu können.

Folgende Werte wurden für die Körper ermittelt:

Die spezifischen Daten der Materialien von Gruppe A:

Gegenstand	Masse [g]	Höhe/Länge [cm]	Durchmesser [cm]
Lange Stange	$130,6 \pm 0,1$	$61,0 \pm 0,1$	$0,600 \pm 0,005$
Masse 1	$238,5 \pm 0,1$	-	-
Masse 2	$237,9 \pm 0,1$	-	-
Scheibe	$391,9 \pm 0,1$	-	$22,510 \pm 0,005$
Vollzylinder	$334,5 \pm 0,1$	-	$8,985 \pm 0,005$
Hohlzylinder	$346,7 \pm 0,1$	-	$8,990 \pm 0,005$
Kugel	$938,1 \pm 0,1$	-	$7,084 \pm 0,075$
Kurze Stange	$52,3 \pm 0,1$	$24,00 \pm 0,005$	$0,600 \pm 0,005$

Die spezifischen Daten der Materialien von Gruppe B:

Gegenstand	Masse [g]	Höhe/Länge [cm]	Durchmesser [cm]
Lange Stange	$130,6 \pm 0,1$	$61,0 \pm 0,1$	$0,610 \pm 0,005$
Masse 1	$238,4 \pm 0,1$	-	-
Masse 2	$238,3 \pm 0,1$	-	-
Scheibe	$400,9 \pm 0,1$	-	$22,415 \pm 0,005$
Vollzylinder	$335,2 \pm 0,1$	-	$8,855 \pm 0,005$
Hohlzylinder	$348,8 \pm 0,1$	-	$9,020 \pm 0,005$
Kugel	$941,3 \pm 0,1$	-	$7,092 \pm 0,075$
Kurze Stange	$52,1 \pm 0,1$	$24,00 \pm 0,005$	$0,600 \pm 0,005$

Bei der Angabe der Durchmesser der Kugeln ist zu beachten, dass dieser nur sehr ungenau mit den üblichen Messmethoden wie Maßband oder Schieblehre zu bestimmen ist. Um einen genaueren Messwert zu erhalten, wird der Durchmesser aus der Masse der Kugel berechnet. Dazu wird die aus der Praktikumsdokumentation bekannte Dichte $\varrho_K = (0,63 \pm 0,02) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ genutzt, um über die Beziehung zwischen Masse und Dichte den Radius zu bestimmen:

$$m_K = V_K \cdot \varrho_K = \frac{4}{3}\pi R_K^3 \varrho_K$$

$$\Rightarrow R_K = \left(\frac{m_K}{\frac{4}{3}\pi \varrho_K} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Bei der Abschätzung der Fehler auf die gemessenen Werte wurde die Gleichverteilung um den auf der Skala abgelesenen Wert berücksichtigt. Dies fließt mit der Formel

$$\sigma = \frac{G}{\sqrt{12}}$$

in die Varianz ein, wobei G die kleinste Unterteilung der abgelesenen Skala angibt. Auf Grund anderer statistischer Fehlerquellen kann der Fehler jedoch größer ausfallen, so dass dieser in obiger Tabelle etwas größer mit dem geschätzten Fehler G angegeben wurde.

4 Auswertung

4.1 Bemerkungen

Im Folgenden werden die genauen Ergebnisse der Untersuchungen betrachtet. Es soll darauf hingewiesen werden, dass nicht sämtliche Rechnungen, die zur Auswertung der Experimente durchgeführt werden, in diesem Protokoll aufzufinden sind. Viele Zwischenschritte werden zu Gunsten der Übersicht weggelassen und nur die Ergebnisse angegeben. Dies gilt insbesondere für die Fehlerrechnung, da sich hier oft die gleichen Rechenschritte wiederholen.

Die mit dem CASSY-System aufgenommenen Daten wurden mit Hilfe selbstgeschriebener C++ Makros durch die Datenverarbeitungssoftware ROOT eingelesen und ausgewertet. Die Entscheidung, die Datenauswertung mit ROOT durchzuführen, erwies sich als sinnvoll. Viele der Arbeitsschritte, die zur Kontrolle parallel in MAPLE bearbeitet wurden, sind umständlicher und erheblich langsamer bearbeitet worden, ohne eine höhere Genauigkeit zu erzielen. Auf diese Weise konnten sämtliche Datensätze mit ROOT genau analysiert werden, so dass jeder Wert mit seinem spezifischem Fehler angegeben werden konnte. Das MAPLE-Programmpaket wurde zur allgemeinen Berechnung verwendet, also insbesondere für Rechenoperationen, die nicht in direktem Zusammenhang mit den Rohdaten standen.

Die ROOT-Makros finden sich auf der beiliegenden CD-ROM.

4.2 Bestimmung des Direktionsmomentes und des Trägheitsmomentes der Spiralfeder

Zur Durchführung der Messreihe wird die lange Stange auf das Messgerüst gesteckt und die Schwingungsdauer gemessen. Anschließend wird die Messung mit den Gewichten in verschiedenen Abständen von der Drehachse wiederholt. Es ergaben sich folgende Messwerte (gewichtete Mittelwerte aus jeweils 5 Messungen):

R [cm]	f_A [Hz]	f_B [Hz]
0	$0,3528 \pm 3,4 \cdot 10^{-3}$	$0,369975 \pm 4,105 \cdot 10^{-3}$
5	$0,3083 \pm 4,2 \cdot 10^{-3}$	$0,324802 \pm 4,477 \cdot 10^{-3}$
10	$0,2391 \pm 3,9 \cdot 10^{-3}$	$0,251321 \pm 2,361 \cdot 10^{-3}$
15	$0,1856 \pm 3,6 \cdot 10^{-3}$	$0,194628 \pm 2,110 \cdot 10^{-3}$
20	$0,1482 \pm 2,0 \cdot 10^{-3}$	$0,155936 \pm 2,204 \cdot 10^{-3}$
25	$0,1230 \pm 1,6 \cdot 10^{-3}$	$0,128970 \pm 1,891 \cdot 10^{-3}$

Für das Trägheitsmoment I_{MP} der „Massenpunkte“ im Abstand R von der Drehachse gilt:

$$I_{MP} = (m_{MP1} + m_{MP2})R^2 = m_{MP}R^2$$

Daraus kann man folgenden Zusammenhang ableiten, wobei I_{Stab} nach Gleichung (11) hergeleitet wird:

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \frac{I_{MP} + I_{Stab}}{D} \\ &= \frac{4\pi^2}{D} m_{MP} R^2 + \frac{4\pi^2}{D} I_{Stab} \end{aligned} \quad (18)$$

Weil die Massen als Massenpunkte genähert werden, entspricht die Messung für den Stab alleine dem Messwert für $R = 0$. Da es offensichtlich einen

linearen Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Schwingungsdauer T^2 und dem Quadrat des Abstands R^2 gibt, kann man eine lineare Regression durchführen:

$$T^2 = kR^2 + a \quad (19)$$

Die von ROOT ausgegebenen Werte sind in Abb. 5 aufgeführt. Der relativ

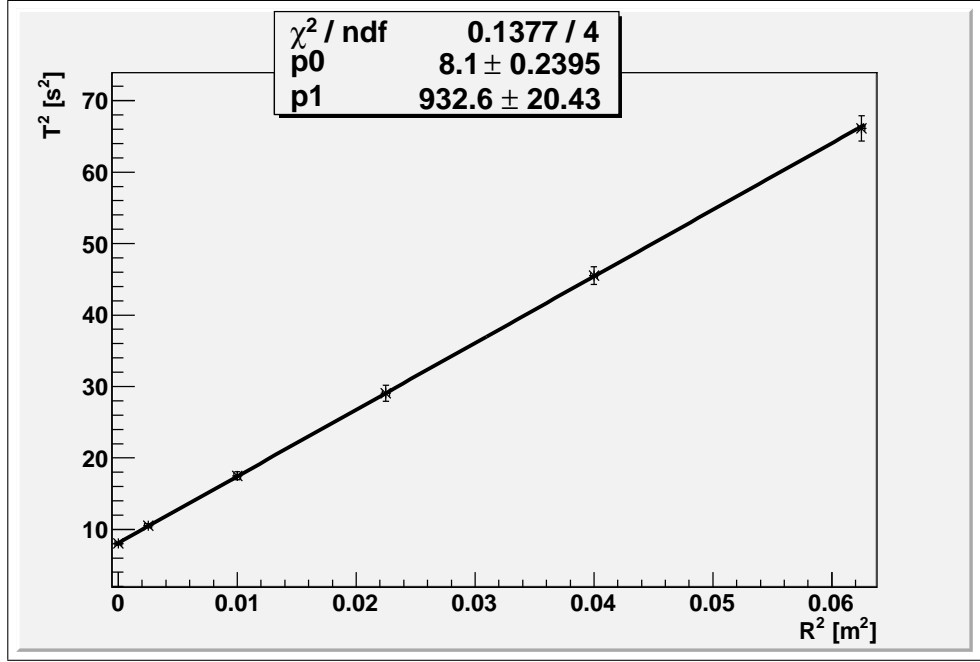


Abbildung 5: Bestimmung der Werte von k und a

kleine Wert für χ^2/ndf lässt vermuten, dass der Fehler, den das Peak-Finder-Programm ausgibt, zu hoch ist.

$$k = 932.64093 \pm 20.43027 \left[\frac{s^2}{m^2} \right] \quad (20)$$

$$a = 8.10040 \pm 0.23947[s^2] \quad (21)$$

Um die in Abbildung 5 nur schwer ablesbaren Fehler anschaulicher zu präsentieren, wurden von den einzelnen Messwerten jeweils die Werte der Ausgleichsgerade an der entsprechenden Stelle subtrahiert. Das Ergebnis ist ein horizontaler Graph (siehe Abbildung 6), aus dem Streuung und Fehler der Messwerte deutlich werden.

Aus der Steigung k der Geraden lässt sich das Direktionsmoment D berechnen:

$$D = \frac{4\pi^2}{k} m_{MP}$$

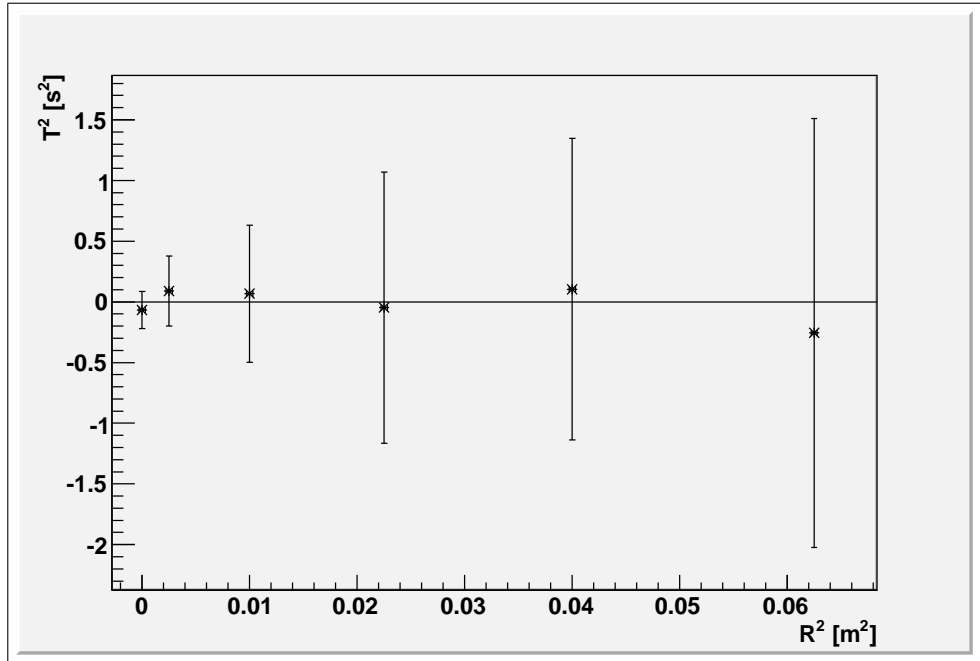


Abbildung 6: Verdeutlichung der Fehler

Durch Fehlerfortpflanzung ergibt sich folgender Fehler auf das Direktionsmoment D :

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)^2 \sigma_{MP}^2 + \left(\frac{4\pi^2}{k^2} m_{MP}\right)^2 \sigma_k^2}$$

Nach Einsetzen aller Werte ergibt sich für Gruppe A:

$$D_A = 0,020166 \pm 4,41791 \cdot 10^{-4} [Nm]$$

Auf analoge Weise wurde das Direktionsmoment für Gruppe B ermittelt:

$$D_B = 0,0222257 \pm 4,67728 \cdot 10^{-4} [Nm]$$

Das Direktionsmoment wird in den kommenden Messreihen zur Berechnung der Trägheitsmomente immer wieder herangezogen und ist deshalb mit großer Genauigkeit angegeben.

Der experimentelle Wert für I_{Stab} kann dann mit folgender Formel aus dem y-Achsenabschnitt a berechnet werden:

$$I_{Stab}^{exp} = \frac{aD}{4\pi^2}$$

Mit dem Fehler:

$$\sigma_{I_{Stab}^{exp}} = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a}{4\pi^2}\right)^2 \sigma_D^2}$$

Nach dem Einsetzen der Werte ergeben sich folgende Trägheitsmomente:

$$I_{StabA}^{exp} = 4,1145 \cdot 10^{-3} \pm 1,2262 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2]$$

$$I_{StabB}^{exp} = 4,1315 \cdot 10^{-3} \pm 1,4969 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2]$$

Die entsprechenden theoretisch ermittelten Werte nach Formel (11) inklusive entsprechender Fehlerfortpflanzung ergeben sich zu

$$I_{Stab_{theo}A} = 0.0040499822 \pm 0.00001363499245 [kg \cdot m^2]$$

$$I_{Stab_{theo}B} = 0.0040499921 \pm 0.00001363499420 [kg \cdot m^2],$$

welche nahe des erwarteten Wertes liegen.

4.3 Vergleich der experimentell ermittelten Werte mit den theoretischen Vorhersagen

Die experimentellen Trägheitsmomente und deren Fehler wurden im allgemeinen mit folgenden Formeln ermittelt:

$$I = \frac{1}{4\pi^2} \frac{D}{f^2} \quad (22)$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{1}{f^2 4\pi^2}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{D}{2\pi^2 f^3}\right)^2 \sigma_f^2} \quad (23)$$

Das oben berechnete Direktionsmoment D und die aus der Frequenzanalyse von jeweils 5 Messreihen gemittelte Periodendauer T wurde zur Bestimmung herangezogen. Bei der Versuchsdurchführung wurden die beiden Zylinder zusammen mit dem Aufnahmeteller gemessen, daher muss zur Bestimmung der Trägheitsmomente noch die Differenz gebildet werden:

$$I_{VZ} = I_{VZ+Teller} - I_{Teller}$$

$$I_{HZ} = I_{HZ+Teller} - I_{Teller}$$

Da sich die Gruppen teilweise auf unterschiedliche Aspekte konzentrierten, wurden nicht alle Messreihen von beiden Gruppen durchgeführt. Es folgt nun eine Übersicht über die von Gruppe B experimentell ermittelten Trägheitsmomente und die zugehörigen theoretischen Werte, sowie deren Abweichung voneinander.

Objekt	Frequenz [Hz]	$I_{exp} [kg \cdot m^2]$
A.-Teller	$1,7130 \pm 0,0109$	$1,9185 \cdot 10^{-4} \pm 4,63 \cdot 10^{-6}$
Vollzylinder + Teller	$1,0349 \pm 0,0067$	$5,2563 \cdot 10^{-4} \pm 1,301 \cdot 10^{-5}$
Hohlzylinder + Teller	$0,8016 \pm 0,0050$	$8,7596 \cdot 10^{-4} \pm 2,149 \cdot 10^{-5}$
Vollzylinder		$3,3378 \cdot 10^{-4} \pm 1,381 \cdot 10^{-5}$
Hohlzylinder		$6,8411 \cdot 10^{-4} \pm 2,188 \cdot 10^{-5}$
Kugel	$0,5197 \pm 0,0040$	$2,08470 \cdot 10^{-3} \pm 5,445 \cdot 10^{-5}$
Holzscheibe	$0,4690 \pm 0,0043$	$2,55963 \cdot 10^{-3} \pm 7,120 \cdot 10^{-5}$

Objekt	$I_{theo}[kg \cdot m^2]$	Abweichung[%]
Vollzylinder	$3,2854 \cdot 10^{-4} \pm 3,8 \cdot 10^{-7}$	+1,59
Hohlzylinder	$7,0946 \cdot 10^{-4} \pm 8,1 \cdot 10^{-7}$	-3,57
Kugel	$1,89374 \cdot 10^{-3} \pm 4,008 \cdot 10^{-5}$	+10,08
Holzscheibe	$2,51781 \cdot 10^{-3} \pm 1,29 \cdot 10^{-6}$	+1,66

Der Vergleich der Trägheitsmomente untereinander zeigt, dass die von der Praktikumsdokumentation angegebene Übereinstimmung einiger Eigenschaften der Versuchsobjekte experimentell nicht nachgewiesen werden konnte. Die experimentell ermittelten Werte für den Vollzylinder und die Holzscheibe sind erwartungsgemäß leicht höher als die theoretisch berechneten. Dies lässt sich erklären, da die Schwungfeder und die Kupplungsstücke zur Befestigung der Schwingkörper in der theoretischen Rechnung nicht berücksichtigt worden sind. Hieraus folgt allerdings auch, da die Messwerte im Rahmen der Erwartung liegen, dass die Übereinstimmung der Objekte von vornherein nicht gegeben war. Es liegt die Vermutung nahe, dass in der Vergangenheit Objekte vertauscht wurden und daher die Zusammengehörigen nicht mehr in der selben Kiste liegen. Die große Abweichung bei dem Trägheitsmoment der Kugel könnte in einer evtl. ungenauen Angabe der Dichte in der Versuchsanleitung begründet liegen. Zudem kann innerhalb der Holzkugel eine nicht-homogene Massenverteilung vorliegen. Wenn man bei der theoretischen Berechnung des Trägheitsmoments des Hohlzylinders nicht wie in der Versuchsbeschreibung vorgeschlagen die Näherung nach Gleichung (13) benutzt, sondern, unter Annahme einer Wanddicke des Zylinders von ca. 2mm, die Rechnung ungenähert nach Gleichung 12 durchführt, kommt man auf folgendes Ergebnis:

$$I_{HZ} = \frac{1}{2} M_{HZ} (R_a^2 + R_i^2)$$

mit $R_i = R_a - 2mm$

$$\Rightarrow I_{HZ} = 6,7870 \cdot 10^{-4} \pm 1,504 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2]$$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem experimentellen Wert vergleicht, stellt man fest, dass der Wert um +0,8% vom theoretischen abweicht und somit ebenfalls den Erwartungen entspricht.

4.4 Vergleichende Messung der Holzkugeln mit beiden Versuchsaufbauten

Auf die gleiche Art und Weise wie oben bereits durchgeführt, wurden die Trägheitsmomentmomente der beiden Holzkugeln noch von der anderen Versuchsgruppe verifiziert. Dabei ergaben sich folgende Endergebnisse für die

Messungen:

	Gruppe A [10^{-3}]	Gruppe B [10^{-3}]	Abweichung [%]
Kugel A	$2,12089 \pm 0,06524$	$2,11005 \pm 0,05710$	0,51
Kugel B	$2,08681 \pm 0,06666$	$2,08470 \pm 0,05444$	0,10

Erfreulicherweise ließ sich feststellen, dass mit beiden Messaufbauten fast identische Ergebnisse erzielt wurden. Zudem deutet dies daraufhin, dass, wie bereits bei der Analyse der Trägheitsmomente vermutet wurde, die Dichte der Kugel vom Wert in der Praktikumsbeschreibung abweicht und so leider das Ergebnis verfälscht hat. Da das von Gruppe B zuerst gemessene Ergebnis von Gruppe A bestätigt wurde, liegt es nahe, dass die Abweichung vom Theoriewert nicht an der Durchführung des Versuches liegt.

4.5 Bestätigung des Steinerschen Satzes

Ziel dieses Teils des Versuchs ist es, den Steinerschen Satz

$$I_a = I_0 + m \cdot a^2 \quad (24)$$

experimentell zu bestätigen (vgl. auch Abschnitt 2.1). I_0 bedeutet hierbei das Trägheitsmoment bei Drehung um die Schwerpunktsachse und a der Abstand der Drehachse zur Schwerpunktsachse. Zur Quantifizierung dieses Satzes wird das Trägheitsmoment I_a in Abhängigkeit des Abstandes a der Rotations- und Schwerpunktsachse untersucht.

Der kurze Metallstab ist im Abstand a von 0,00m; 0,02m; 0,03m; 0,04m; ... ; 0,11m so eingekerbt, dass er mit Hilfe des Kupplungsstücks an diesen Punkten auf die Drillachse aufgesetzt werden kann. Der Stab wird nacheinander an allen Positionen eingespannt und zu Drehschwingungen angeregt, welche mittels des Winkelaufnehmers und CASSY ausgelesen werden. Jede dieser Messungen wird mehrfach wiederholt und die Periodendauer durch Mittelwertbildung der Ergebnisse der Fouriertransformationen bestimmt. Auf diese Weise wird auch die Varianz der Periodendauer bestimmt. Der Fehler auf die Abstände a wird abgeschätzt durch die Breite der Kerben, die etwa 1mm beträgt. Innerhalb dieser Kerben ist die Position der Aufhängung durch eine Gleichverteilung bestimmt, es ergibt sich für den Fehler σ_a auf die Abstände:

$$\sigma_a = \frac{0,001}{\sqrt{12}} m$$

Dieser wird später bei der linearen Regression berücksichtigt.

Mit Hilfe von Gleichung (9) sowie des zuvor bestimmten Direktionsmomentes der Feder kann das Trägheitsmoment I_a aus den Messergebnissen direkt bestimmt werden. Als Fehler σ_I auf das Trägheitsmoment ergibt sich

nach der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi^2}T^2\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{1}{2\pi^2}DT\right)^2 \sigma_T^2}$$

Diese Ergebnisse werden benötigt, um eine lineare Regression mit ROOT durchzuführen. Dabei wird das Trägheitsmoment I_a über das Quadrat des Abstandes a aufgetragen. Nach Gleichung (24) sollte die Steigung der Geraden der Masse des Stabes, der y-Achsenabschnitt dem Trägheitsmoment I_0 entsprechen.

Folgende Ergebnisse wurden bei der Messung erzielt:

a [m]	f [Hz]	I [$10^{-4}kgm^2$]
0,00	$1,329 \pm 0,0157$	$2,887 \pm 0,1344$
0,02	$1,307 \pm 0,01288$	$2,983 \pm 0,1171$
0,03	$1,249 \pm 0,0135$	$3,266 \pm 0,1283$
0,04	$1,189 \pm 0,0127$	$3,607 \pm 0,1312$
0,05	$1,114 \pm 0,0104$	$4,101 \pm 0,1261$
0,06	$1,046 \pm 0,0101$	$4,660 \pm 0,1360$
0,07	$0,976 \pm 0,0095$	$5,353 \pm 0,1467$
0,08	$0,913 \pm 0,0098$	$6,119 \pm 0,1652$
0,09	$0,848 \pm 0,0068$	$7,082 \pm 0,1646$
0,10	$0,799 \pm 0,0073$	$7,989 \pm 0,1860$
0,11	$0,747 \pm 0,0065$	$9,129 \pm 0,2044$

Die Regressionsgerade, die mit dem Auswertungsprogramm ROOT unter Einbeziehung der Fehler erzeugt wurde, ist in Abbildung 7 aufgetragen. Die Steigung $p1$ der Geraden ist gut mit dem zuvor gemessenen Wert für die Masse der Kugel verträglich, die Abweichung liegt innerhalb der Varianz. Der y-Achsenabschnitt $p0$ der Gerade ist zwar gut mit dem Mittelwert der Messungen der Stange bei Drehung um ihre Schwerpunktsachse vereinbar, weicht aber deutlich von dem theoretisch vorhergesagten Wert ab. Dieser beträgt nach (der oben hergeleiteten) Gleichung (11)

$$I_0^{theo} = (2.50197 \cdot 10^{-4} \pm 0.491404 \cdot 10^{-6})[kg m^2]$$

und ist somit ca. 11% kleiner als der experimentell gefundene Wert. Diese Abweichung kann damit begründet werden, dass das Trägheitsmoment des Kupplungsstücks, mit dem der Stab an der Drillachse befestigt wird, nicht in die Berechnung des theoretischen Wertes mit eingeflossen ist, wodurch dieses zu gering angegeben wird. Auch die Kerben im Stab, die eine vom Zylinder abweichende Massenverteilung verursachen, werden nicht berücksichtigt, da sie mathematisch schwer zu erfassen sind. Der dadurch verursachte Fehler kann jedoch nicht diese große Abweichung erklären.

Der in Abbildung 7 angegebene Wert $\frac{\chi^2}{ndf} = 0,0355$ zeigt, dass der Fehler, der auf die einzelnen Messergebnisse bestimmt wurde, offenbar zu groß

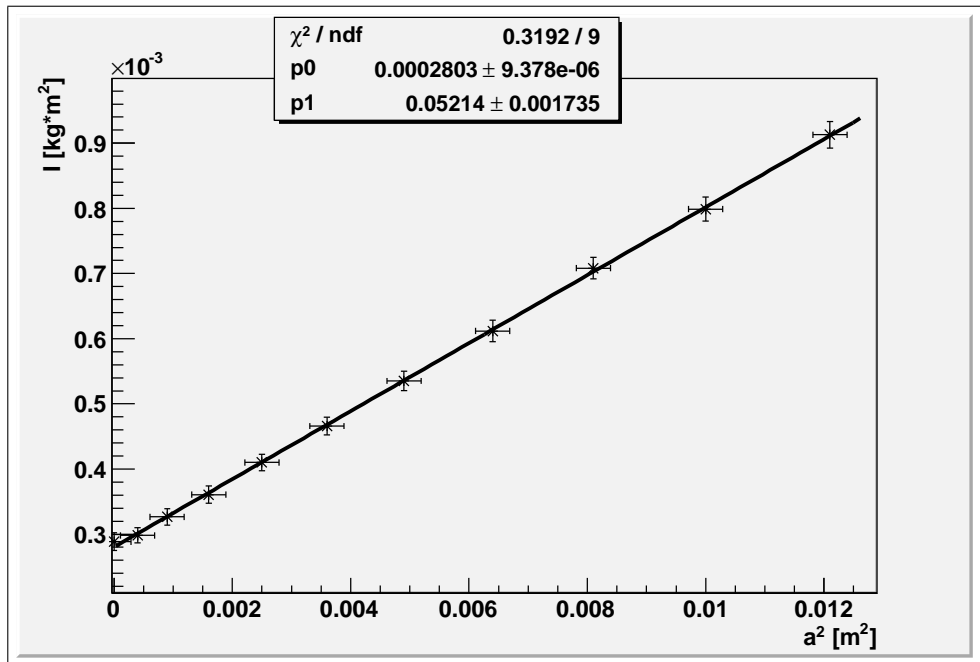


Abbildung 7: Regressionsgerade zur Bestätigung des Steinerschen Satzes

ist. Die Anpassung hätte einen deutlich geringeren Fehler erlaubt. Dies entspricht den Erkenntnissen, die bereits oben dargelegt wurden. Der größte Anteil des Fehlers kommt aus der Fouriertransformation und dem Peakfinder, der in der Analyse mit dem Computer genutzt wird. Offenbar ist der Fehler, der auf die Frequenz ausgegeben wird, zu hoch.

Trotz der Differenz zwischen theoretischem und experimentellem Wert von I_0 ist die lineare Abhängigkeit zwischen dem Trägheitsmoment I und dem Quadrat des Abstands der Drehachse zur Schwerpunktsachse a^2 mit sehr geringem Fehler verifiziert worden. Die Proportionalitätskonstante zwischen diesen beiden Größen stimmt gut mit der Masse des Stabes überein. Damit ist der Versuch eine Bestätigung des Steinerschen Satzes

$$I = I_0 + ma^2.$$

4.6 Oberschwingungen

Wie in Kapitel 2.5 beschrieben wurde, finden sich bei mechanischen Schwingungen Frequenzen, die einem ganzzahligen Vielfachen der Grundschiwingung entsprechen; die so genannten „Oberschwingungen“. Mit Hilfe der Fourieranalyse kann dieser Sachverhalt überprüft werden. Zu diesem Zweck wird eine Messreihe, in diesem Fall eine Schwingung von Massenpunkten, mit dem ROOT-Programmpaket möglichst genau ausgewertet. Mittels Fast-Fourier-Transformation kann das Frequenzspektrum bestimmt werden. In

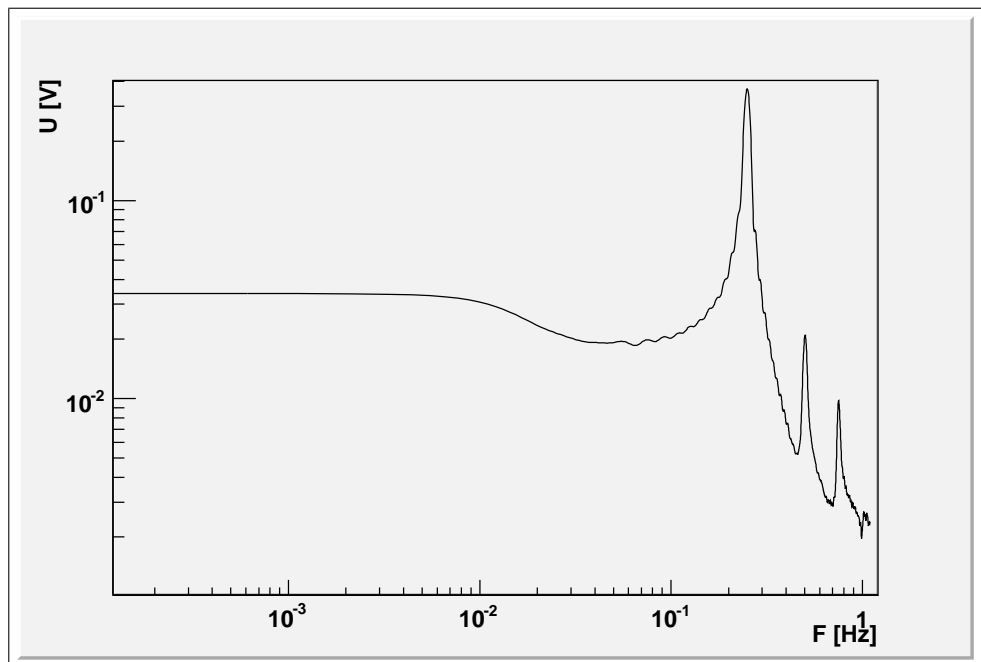


Abbildung 8: Frequenzspektrum einer mechanischen Schwingung, logarithmisch aufgetragen

Abbildung 8 ist dieses Spektrum logarithmisch aufgetragen. Man erkennt deutlich die Grundschiwingung sowie zwei Oberschwiwingungen, die bei dem doppelten sowie dem dreifachen Wert der Grundfrequenz liegen. Die gemessenen Frequenzen können in folgender Tabelle abgelesen werden.

$f \text{ [Hz]}$	$\sigma_f \text{ [Hz]}$
0,2511	0,0048
0,5026	0,0067
0,7536	0,0079

4.7 Fehler durch die Schraube am Aufnahmeteller

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, werden der Vollzylinder aus Holz sowie der Metall-Hohlzylinder während der Messung von einem Aufnahmeteller gehalten. Dieser Teller besitzt eine Schraube, mit der die Zylinder befestigt werden. Diese Schraube ist eine potentielle Fehlerquelle, da sie sich bei dem Versuch in verschiedenen Stellungen befinden kann. Um die Auswirkungen einer scheinbar unwichtigen Fehlerquelle wie dieser zu beurteilen, soll hier exemplarisch eine Rechnung durchgeführt und mit Messwerten verglichen werden, so dass die Relevanz der Fehlerquelle beurteilt werden kann.

Das Trägheitsmoment des Tellers sei I_T , das der Schraube im äußeren Rand der Scheibe I_S . Die Massen seien entsprechend mit m_T und m_S be-

zeichnet. Das Verhältnis der Trägheitsmomente des Tellers mit Schraube zum Trägheitsmoment des Tellers ohne Schraube kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\frac{I_T + I_S}{I_T} &= \frac{\frac{1}{2}m_T r^2 + m_S r^2}{\frac{1}{2}m_T r^2} \\ \Rightarrow 1 + \frac{I_S}{I_T} &= 1 + \frac{m_S r^2}{\frac{1}{2}m_T r^2} \\ \Rightarrow \frac{I_S}{I_T} &= \frac{2m_S}{m_T}\end{aligned}\tag{25}$$

Die Ergebnisse der Messungen des Trägheitsmoments des Tellers mit Schraube sowieso ohne Schraube lassen sich über die Beziehung

$$I_S = I_{T,mit} - I_{T,ohne}$$

in einen Wert für das Trägheitsmoment der Schraube umrechnen. Als Verhältnis zwischen den Trägheitsmomenten ergibt sich folgender experimenteller Wert:

$$\frac{I_S}{I_T} = 0.02544$$

Daraus lässt sich nach Gleichung (25) ableiten, dass das Verhältnis der Massen von Schraube und Aufnahmeteller 1,27% beträgt. Dies stimmt mit der Größenordnung, die zu erwarten war, überein.

Beachtet man, dass wie oben erwähnt die Schraube während des Versuchs höchstens leicht verstellt, jedoch nicht völlig entfernt wurde, so dürfte der reale Fehler noch einmal größenordnungsmäßig unterhalb des hier bestimmten Wertes von ca. 2,5% liegen. Daraus lässt sich erkennen, dass eine Betrachtung eines Fehlers auf Grund dieser Ursache nicht von Nöten war.

5 Fazit

Die theoretischen Vorhersagen, die während des Versuchs untersucht werden sollten, sind in den meisten Teilversuchen mit großer Genauigkeit bestätigt worden. Dabei wurde besonderer Wert auf die Abschätzung der während des Experiments auftretenden Fehler gelegt. Diese wurden mit Hilfe statistischer Methoden genutzt, um die Genauigkeit und somit die Relevanz der Untersuchungen zu überprüfen. Dabei waren die ermittelten Fehler im Allgemeinen gering, was auf eine recht präzise Durchführung schließen lässt.