

Versuch 4 - Elektrizitätslehre

Gruppe C1

Ann-Kathrin Müller, Elisabeth Gerhorst
Ludwig Hollstein, Ines Kluge

Durchführung: 28.03.2017, Abgabe: 30.03.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Charakterisierung der Ohmschen Widerstände	3
1.1	Versuchsbeschreibung	3
1.2	Versuchsaufbau und -durchführung	4
1.3	Versuchsauswertung	6
1.3.1	Rauschmessung für Spannung und Strom	6
1.3.2	Bestimmung des Widerstandes mittels Linearer Regression	9
1.3.3	Messung des Widerstandes mit einem Digitalvoltmeter und einer Messbrücke	9
1.3.4	Vergleich der verschiedenen Messmethoden	11
2	Auf- und Entladung eines Kondensators	12
2.1	Versuchsbeschreibung	12
2.2	Versuchsaufbau und -durchführung	13
2.3	Versuchsauswertung	15
2.3.1	Oszilloskop	15
2.3.2	CASSY	18
2.3.3	Diskussion der Ergebnisse	21
3	Gedämpfter LC-Schwingkreis	22
3.1	Versuchsbeschreibung	22
3.2	Versuchsaufbau und -durchführung	24
3.3	Versuchsauswertung	25
4	Gekoppelte LC-Schwingkreise	32
4.1	Versuchsbeschreibung	32
4.2	Versuchsaufbau und -durchführung	33
4.3	Versuchsauswertung	36

1 Charakterisierung der Ohmschen Widerstände

1.1 Versuchsbeschreibung

Ziel des ersten Vorversuches ist es den Betrag des Ohmschen Widerstandes R zu ermitteln. Dieser wird im zweiten Vorversuch, der Charakterisierung des Kondensators, benötigt. Der Widerstand R wird mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes $U = RI$ bestimmt, indem eine lineare Regression durchgeführt wird und die Steigung den Wert von R angibt. Außerdem wird R mit einem Digitalvoltmeter gemessen und die Ergebnisse mit den vorher erhaltenen verglichen. Des Weiteren sollen die systematischen und statistischen Fehler auf die Messungen von Strom und Spannung mit einer Rauschmessung bestimmt werden.

1.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Der zu messende Ohmsche Widerstand wird in Serie geschaltet. Als Spannungsquelle dient die Gleichspannungsquelle (0 V–16 V) des CASSYs. Dann wird der Strom mit einem Amperemeter (CASSY Eingang A) und der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand mit einem Voltmeter (CASSY Eingang B) gemessen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 und Abbildung 2 zu sehen. Für die Rauschmessung werden daraufhin Strom- und Spannungswerte aufgenommen mit einem Messintervall von $500\text{ }\mu\text{s}$ und einer Messzeit von 1 s. Es wird ein Messbereich von $\pm 10\text{ V}$ und $\pm 0,1\text{ A}$ gewählt. Die Spannung wird von 2 V–10 V manuell in Schritten von 1 V reguliert.

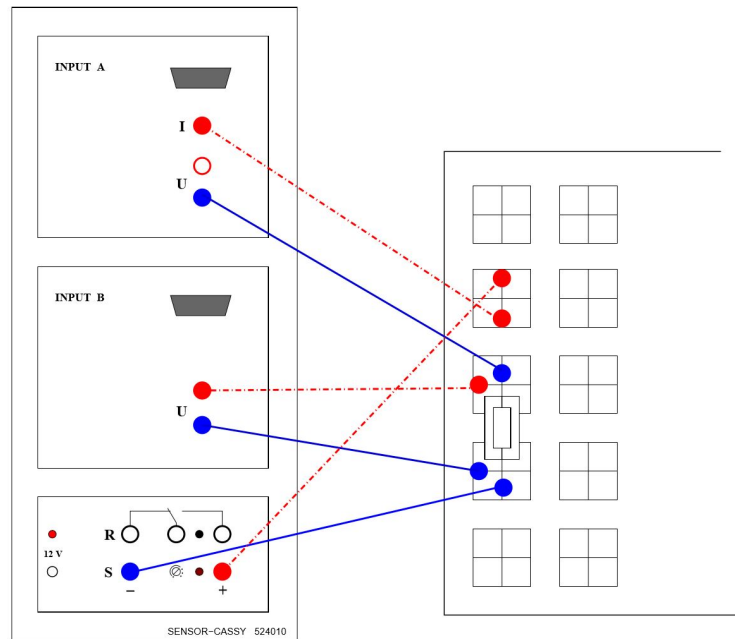


Abbildung 1: Schaltskizze zur Charakterisierung des Ohmschen Widerstandes.

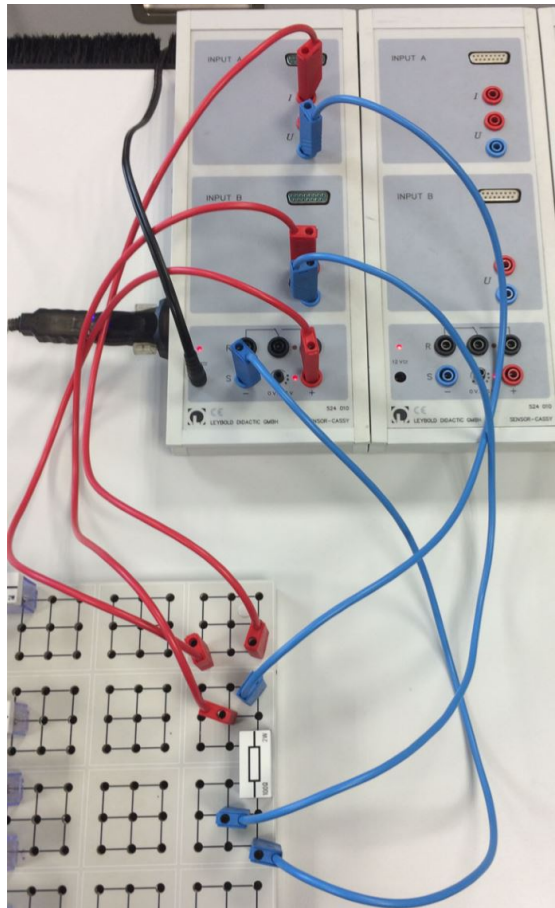


Abbildung 2: Versuchsaufbau zur Charakterisierung des Ohmschen Widerstandes.

1.3 Versuchsauswertung

1.3.1 Rauschmessung für Spannung und Strom

Es werden jeweils die Häufigkeitsverteilungen für die Messergebnisse von Strom und Spannung bestimmt. Diese sind exemplarisch für eine Messeinstellung der Spannung von 6 V in Abbildung 3 und Abbildung 4 ersichtlich. Des Weiteren sollen der Mittelwert, die Standardabweichung und der Fehler des Mittelwertes auf die Spannung und den Strom angegeben werden. Diese erhält man durch die Formeln

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

und sind in Tabelle 1 angegeben.

Durch Fehlerfortpflanzung erhält man aus dem Ohmschen Gesetz

$$R = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (4)$$

den statistischen Fehler auf R durch

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{U}}}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} \cdot \sigma_{\bar{I}}\right)^2} \quad (5)$$

Für die systematischen Fehler werden folgende Herstellerangaben

$$\sigma_{\bar{U},\text{sys}} = 0,01 \cdot \bar{U} + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}} \quad (6)$$

$$\sigma_{\bar{I},\text{sys}} = 0,02 \cdot \bar{I} + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}} \quad (7)$$

angegeben. Um den systematischen Fehler auf R zu erhalten, werden die Fehlerangaben des Herstellers mit Formel (5) fortgepflanzt. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse für R und die jeweiligen statistischen und systematischen Fehler. Aus den Mittelwerten erhält man schließlich $\bar{R} = (1052,3 \pm 1,2 \pm 32,4) \Omega$.

Tabelle 1: Rauschmessung für Spannung und Strom

Messung	\bar{U} [V]	σ_U [V]	$\sigma_{\bar{U}}$ [V]	\bar{I} [mA]	σ_I [mA]	$\sigma_{\bar{I}}$ [mA]
1	2,0068	0,0024	0,00005	1,60	0,22	0,005
2	3,0000	0,0019	0,00004	3,03	0,15	0,003
3	4,0026	0,0026	0,00006	3,55	0,17	0,004
4	5,0082	0,0024	0,00005	4,54	0,16	0,004
5	6,0010	0,0022	0,00005	6,06	0,19	0,004
6	7,0062	0,0023	0,00005	6,54	0,17	0,004
7	8,0240	0,0021	0,00005	7,57	0,20	0,005
8	9,0485	0,0024	0,00005	8,57	0,20	0,005
9	10,0074	0,0026	0,00006	9,59	0,21	0,005

Tabelle 2: Ohmscher Widerstand R mit Fehlern

Messung	R [Ω]	$\sigma_{R,\text{stat}}$ [Ω]	$\sigma_{R,\text{sys}}$ [Ω]
1	1253,5	3,8	52,5
2	989,2	1,1	34,0
3	1128,3	1,2	35,0
4	1102,4	0,9	32,0
5	990,2	0,7	27,5
6	1071,9	0,6	28,9
7	1059,6	0,6	27,8
8	1056,0	0,6	27,2
9	1043,6	0,5	26,5

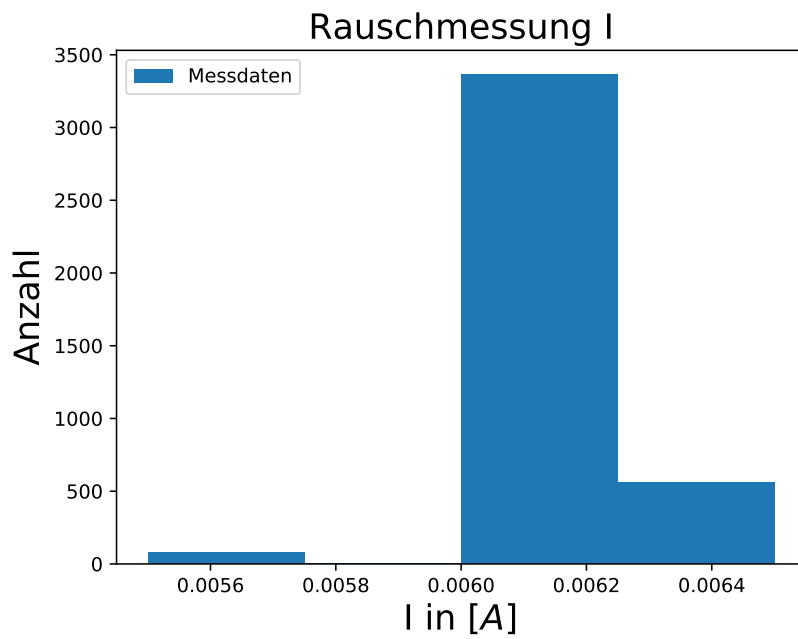


Abbildung 3: Häufigkeitsverteilung für den Strom für eine Spannung von 6 V.

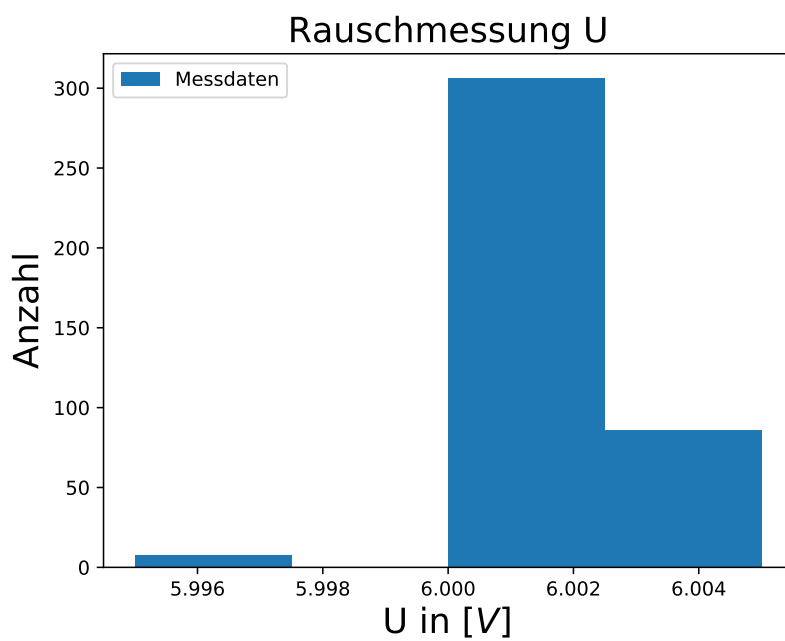


Abbildung 4: Häufigkeitsverteilung für eine Spannung von 6 V.

1.3.2 Bestimmung des Widerstandes mittels Linearer Regression

Um den Ohmschen Widerstand zu erhalten, führt man eine lineare Regression durch und erhält aus der Steigung dann R . Des Weiteren werden für die Fehler auf die Messwerte die Fehler auf die Einzelwerte benutzt, die im vorherigen Teil bei der Rauschmessung bestimmt wurden (siehe Tabelle 1). Die systematischen Fehler werden mit Hilfe der Verschiebemethode berücksichtigt. Wie bereits bekannt, gibt der Hersteller folgende systematischen Fehler an

$$\sigma_{\bar{U},\text{sys}} = 0,01 \cdot \bar{U} + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}} \quad (8)$$

$$\sigma_{\bar{I},\text{sys}} = 0,02 \cdot \bar{I} + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}} \quad (9)$$

Bei der Verschiebemethode werden nun die Messpunkte mit ihren statistischen Fehlern um die systematischen Fehler einmal nach oben und einmal nach unten verschoben.

$$\bar{U}_{i,\text{verschoben}} = \bar{U}_i + \sigma_{\bar{U},\text{sys}} \quad \bar{U}_{i,\text{verschoben}} = \bar{U}_i - \sigma_{\bar{U},\text{sys}} \quad (10)$$

$$\bar{I}_{i,\text{verschoben}} = \bar{I}_i + \sigma_{\bar{I},\text{sys}} \quad \bar{I}_{i,\text{verschoben}} = \bar{I}_i - \sigma_{\bar{I},\text{sys}} \quad (11)$$

Die lineare Regression wird jeweils wiederholt (siehe Abbildung 5). Hier wird nun exemplarisch der Beitrag zum systematischen Fehler $\sigma_{R,\text{sys}}$ durch die Strommessung dargestellt. Der Beitrag durch die Spannungsmessung erfolgt analog.

Man erhält aus der jeweiligen Regression zwei neue Werte für R . Diese sind $R_{\bar{I},+}$ und $R_{\bar{I},-}$. Der Beitrag zum systematischen Fehler ist der Mittelwert der Abweichungen. Es folgt

$$\sigma_{\bar{I},\text{sys}} = \frac{|R_{\bar{I},-} - R| + |R_{\bar{I},+} - R|}{2} \quad (12)$$

Für den systematischen Fehler $\sigma_{R,\text{sys}}$ ergibt sich durch quadratische Addition

$$\sigma_{R,\text{sys}}^2 = \sigma_{\bar{I},\text{sys}}^2 + \sigma_{\bar{U},\text{sys}}^2 \quad (13)$$

Für den Ohmschen Widerstand folgt insgesamt aus der linearen Regression und der Verschiebungsmethode

$$R = 1036,98 \pm 33,57 \pm 88,15 \Omega \quad .$$

1.3.3 Messung des Widerstandes mit einem Digitalvoltmeter und einer Messbrücke

Der Widerstand wird jeweils mit einem Digitalvoltmeter und einer Messbrücke gemessen. Der Hersteller gibt für das Digitalvoltmeter einen Fehler von 0,8% und für die Messbrücke einen Fehler von 0,25% an. Somit ergibt sich für die gemessenen Widerstände

$$R_{\text{Messbrücke}} = 992,8 \pm 2,5 \Omega$$

$$R_{\text{Digitalvoltmeter}} = 992 \pm 8 \Omega \quad .$$

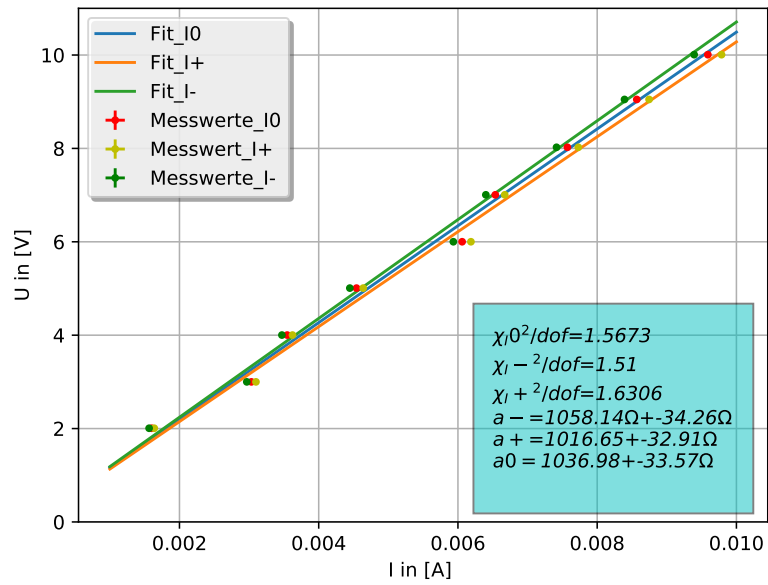


Abbildung 5: Beispiel für die angewandte Verschiebemethode.

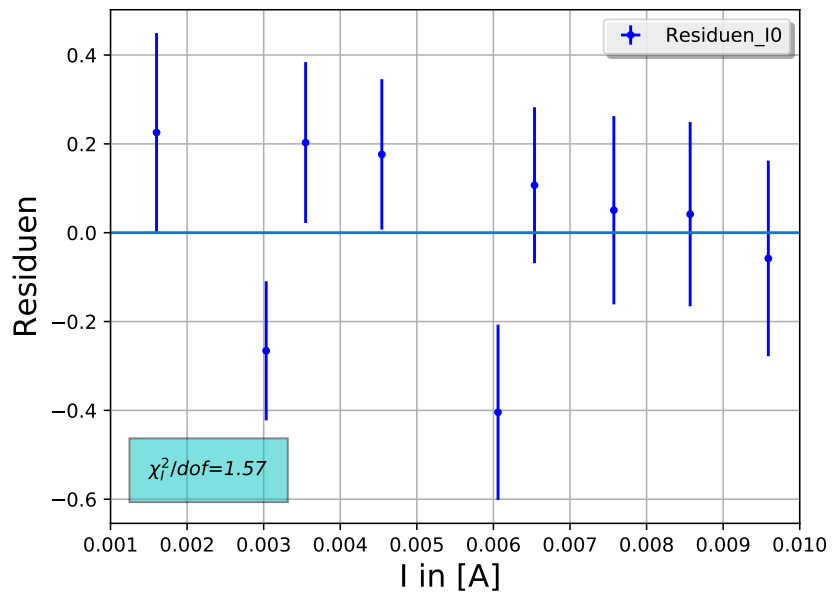


Abbildung 6: Residuenplot für die nicht verschobenen Werte.

1.3.4 Vergleich der verschiedenen Messmethoden

In Tabelle 3 werden die Ergebnisse der drei verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Ohmschen Widerstandes einander gegenübergestellt.

Tabelle 3: Vergleich der Messergebnisse für den Ohmschen Widerstand.

Methode	R [Ω]	$\sigma_{R,stat}$ [Ω]	$\sigma_{R,sys}$ [Ω]
1	1052,3	1,2	32,4
2	1036,98	33,57	88,15
3	992,7	-	5,3

Rauschmessung für Spannung und Strom

In Tabelle 2 fällt auf, dass der systematische Fehler kleiner wird, desto höher die Spannung wird. Der Fehler liegt somit für die letzten Messeinstellungen der Spannung im Toleranzbereich, der vom Hersteller angegeben wurde (5%). Der hohe systematische Fehler bei den ersten Messeinstellungen könnte sich dadurch erklären, dass der Widerstand zu groß war und die eingestellte Spannung zu klein. Der gemessene Strom war somit sehr gering und anfällig für Fehler.

Bestimmung des Widerstandes mittels linearer Regression

Der systematische Fehler ist nun noch größer, als bei der Rauschmessung. Dabei könnte wieder das selbe Argument zum Tragen kommen wie bei der Rauschmessung. Der statistische Fehler ist ebenfalls zu groß. Das könnte daran liegen, dass sich der Widerstand erwärmt und nicht mehr dem Ohmschen Gesetz folgt, wodurch sich die Fehler erhöhen.

Messung des Widerstandes mit einem Digitalvoltmeter und einer Messbrücke

Für diese Methode wird kein statistischer Fehler angegeben, weil sowohl mit dem Digitalvoltmeter, als auch mit der Messbrücke nur einmal gemessen wurde. Diese Messmethode ist mit der Messbrücke genauer als mit dem Digitalvoltmeter, da hier die vom Hersteller angegebenen Fehler kleiner sind.

2 Auf- und Entladung eines Kondensators

2.1 Versuchsbeschreibung

Ziel des zweiten Vorversuchs ist es, die Kapazität eines Kondensators zu bestimmen, der mit einem Widerstand in Reihe geschaltet ist. Dazu wird dieser Kondensator über den Widerstand auf- und entladen.

Ladevorgang: Bei Beginn des Vorgangs ist der Kondensator ungeladen ($U_C = 0$) und der Strom $I_0 = \frac{U_0}{R}$ ist maximal. Nun sammeln sich immer mehr Ladungen auf den Kondensatorplatten, solange bis die Kondensatorspannung, die als Gegenspannung wirkt, die Ladespannung ausgleicht ($U_C = U_0$). Nach der Kirchhoffschen Maschenregel ist die Summe aller Spannungen in einer Masche gleich Null, also

$$U_0 - U_R(t) - U_C(t) = 0 . \quad (14)$$

Mit $C \cdot U_C = Q$ und $I = \frac{dU_C}{dt}$ gilt

$$U_0 - U_C = R \cdot C \frac{dU_C}{dt} . \quad (15)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich für $U_C(t)$ lösen

$$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) . \quad (16)$$

Für den Ladestrom ergibt sich durch $C \cdot U_C = Q$ und $I = \frac{dU_C}{dt}$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (17)$$

mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$.

Entladevorgang: Beim Entladevorgang liegt keine Spannung am Schaltkreis an. Die Maschenregel liefert hier

$$U_R + U_C = 0 . \quad (18)$$

Mit $C \cdot U_C = Q$ und $I = \frac{dU_C}{dt}$ folgt erneut die homogene Differentialgleichung

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0 . \quad (19)$$

mit Lösung für U_C

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (20)$$

und einem Entladestrom von

$$I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (21)$$

2.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Der Kondensator und der Widerstand werden wie in Abbildung 7 auf der Steckplatte aufgebaut. Die Spannung wird mit dem Sensor-CASSY erzeugt. Gemessen wird einmal mit dem CASSY und einmal mit dem Oszilloskop. Beim CASSY dient das Amperemeter des Eingangs A zur Strommessung und das Voltmeter am Eingang B zur Spannungsmessung. Am Oszilloskop wird die Spannung über den Kondensator an Kanal 1 gemessen und der Strom als Spannung über dem Ohmschen Widerstand an Kanal 2. GND muss hierbei zwischen Widerstand und Kondensator gelegt werden (siehe Abbildung 8). Es werden nun die Entlade- und Aufladevorgänge am Kondensator gemessen. Für die Schnellauswertung zunächst mit dem Oszilloskop, und anschließend eine vollständige Messung mit dem CASSY.

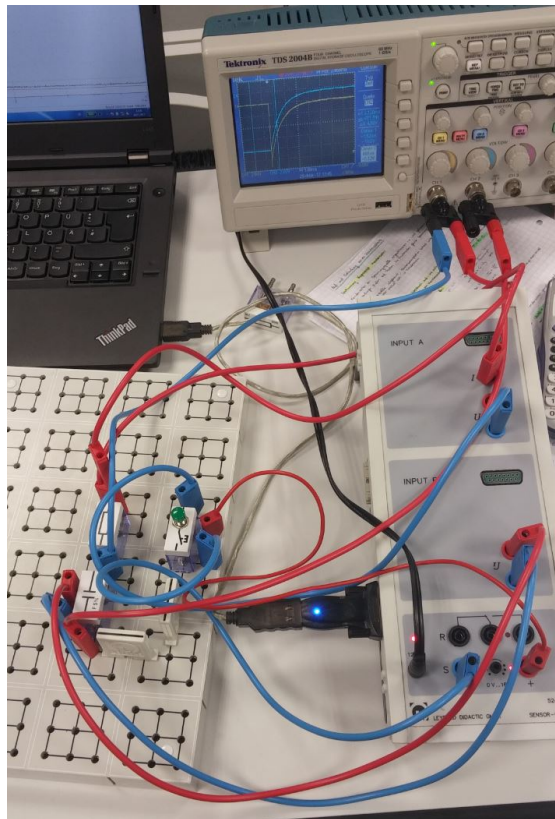


Abbildung 7: Versuchsaufbau Auf- und Entladung eines Kondensators.

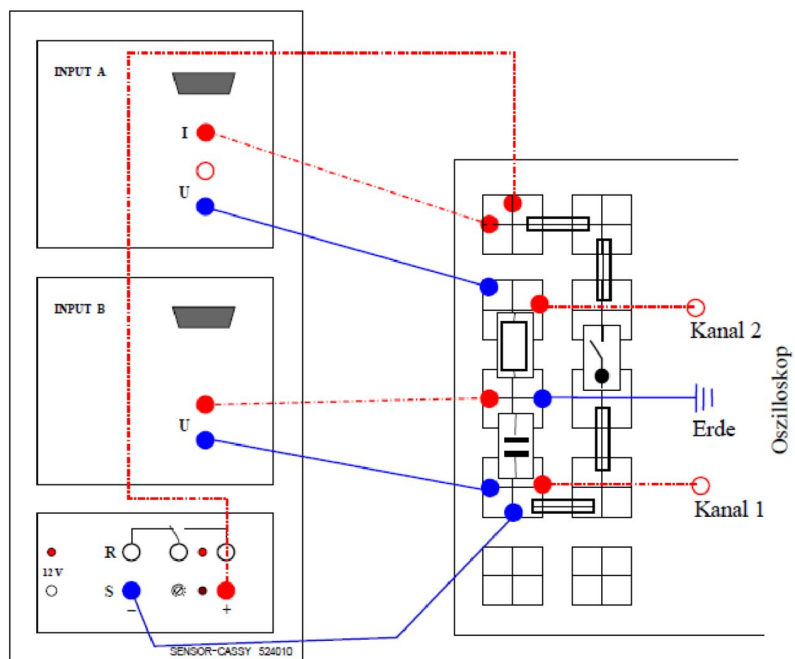


Abbildung 8: Versuchsaufbau Auf- und Entladung eines Kondensators.

2.3 Versuchsauswertung

Für die experimentelle Verifizierung der Kapazität wird ein Kondensator mit der angegebenen Kapazität C von $1\mu\text{F}$ über einen Widerstand $R = 1\text{k}\Omega$ aufgeladen und entladen und über die Auf- und Entladekurve die Kapazität überprüft. Die Fehler des Widerstandes, genauso wie die statistischen Fehler der Einzelwerte aus Strom- und Spannungsmessungen wurden im Versuch zur Bestimmung des Ohmschen Widerstandes ermittelt. Die aufgenommenen Werte für U und I werden jeweils logarithmisch aufgetragen, um C zu bestimmen. Dazu werden auch die Fehler in die logarithmische Darstellung umgewandelt. Dies geschieht mit

$$S = \ln(x) \implies \sigma_S = \frac{dS}{dx} \cdot \sigma_x = \frac{\sigma_x}{x} . \quad (22)$$

2.3.1 Oszilloskop

Die Entladekurve wird dreimal aufgezeichnet und es werden, nach einstellen eines geeigneten Triggers auf eine abfallende Flanke, je vier Wertepaare aus U und t mit dem Cursor bestimmt. Die sich ergebenden Wertepaare sind in den Tabellen 4, 5 und 6 zu sehen. Dort wurde τ jeweils mit den zwei Werten darüber berechnet. Der Offset beläuft sich in allen Messungen auf etwa 80mV , welcher mit Hilfe des Cursors bestimmt wird. Mit Hilfe von

$$\tau = \frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)} \quad (23)$$

kann so τ berechnet werden. Das wird gemittelt, um mit diesem Mittelwert über

$$\tau = R \cdot C \quad (24)$$

C bestimmen zu können. Dabei wird für R der Wert $1052,3 \pm 1,2 \pm 32,4$ aus der Rauschmessung verwendet.

Zeit [ms]	Spannung U in V
0,12	8,32
2,16	0,96
τ in $10^{-4}\Omega\text{F}$	$6,55 \pm 0,05$
3,6	0,24
4,32	0,08
τ in $10^{-4}\Omega\text{F}$	$9,5 \pm 0,22$

Tabelle 4: Entladungskurve Messung 1 mit bereinigtem Offset.

Für den Mittelwert von τ erhält man so als gewichteten Mittelwert $9,4243 \pm 0,000210^{-4}\text{s}$.

Zeit [ms]	Spannung U [V]
0,32	6,80
0,72	4,48
τ in 10^{-4} [Ω F]	$9,59 \pm 0,012$
0,92	3,60
1,12	2,96
τ in $10^{-4} \Omega$ F	$10,2 \pm 0,7$

Tabelle 5: Entladungskurve Messung 2 mit bereinigtem Offset.

Zeit [ms]	Spannung U in V
0,20	7,68
0,72	5,76
τ in $10^{-4} \Omega$ F	$18,1 \pm 0,5$
0,84	3,92
1,12	2,96
τ in $10^{-4} \Omega$ F	$10,0 \pm 0,5$

Tabelle 6: Entladungskurve Messung 3 mit bereinigtem Offset.

Dadurch ergibt sich ein Wert für C mit Fehlern aus Fehlerfortpflanzung von $0,942433 \pm 0,001 \pm 0,03\mu$ F, was dem erwarteten Wert entspricht. Der Fehler auf τ ergibt sich aus Fehlerfortpflanzung zu

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{U_1}}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_2}}{U_2}\right)^2} \quad (25)$$

mit

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{s} \text{ und } \sigma_{U_i} = 0,001 \text{V}, \quad (26)$$

was aus Ablesefehlern abgeschätzt wird. Für den Fehler auf C gilt

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\tau_{MW}}{R^2} \cdot \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\tau}{R}\right)^2} \quad (27)$$

Analog wird bei der Aufladung vorgegangen.

2.3.2 CASSY

Parallel zur Messung mit dem Oszilloskop werden die Werte mit CASSY erfasst und aufgezeichnet. Die Messparameter werden auf 10V Messintervall und 1000 Messwerte eingestellt, was einer Messzeit von 10 ms entspricht. Dann wird die Messung mit eines Triggers auf 0,1 V aufsteigender Flanke gestartet. Wie in Abbildung 9 zu sehen, passen die ersten Werte nicht zur Erwartung und die letzten Werte sind schon sehr nah an U_0 , weshalb diese Werte bei der Auswertung nicht berücksichtigt werden. Um C berechnen

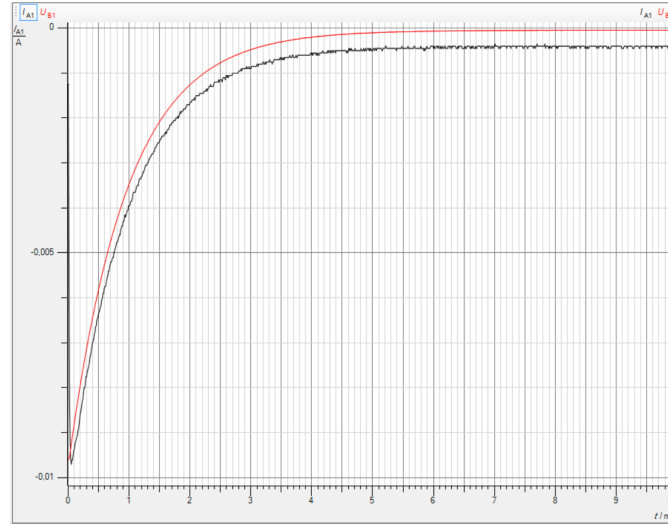


Abbildung 9: Aufladekurve CASSY.

zu können, trägt man U und I logarithmisch gegen die Zeit auf. Auf das wird eine Lineare Regression angewandt. Für die Fehlerfortpflanzung ergibt sich dadurch

$$\sigma_{\log(x)} = \frac{\sigma_x}{x} . \quad (28)$$

Die Steigung der Regression beläuft sich auf $a = \frac{1}{\tau}$. Mit $\tau = RC$ erhält man

$$C = \frac{1}{aR} \quad (29)$$

und für den statistischen Fehler

$$\frac{\sigma_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2} . \quad (30)$$

Der systematische Fehler auf C hängt nur von dem systematischen Fehler auf R ab. Dieser wurde ebenfalls bereits bestimmt und wird hierfür fortgepflanzt mit

$$\sigma_{C,\text{syst}} = \frac{1}{aR^2} \cdot \sigma_{R,\text{syst}} . \quad (31)$$

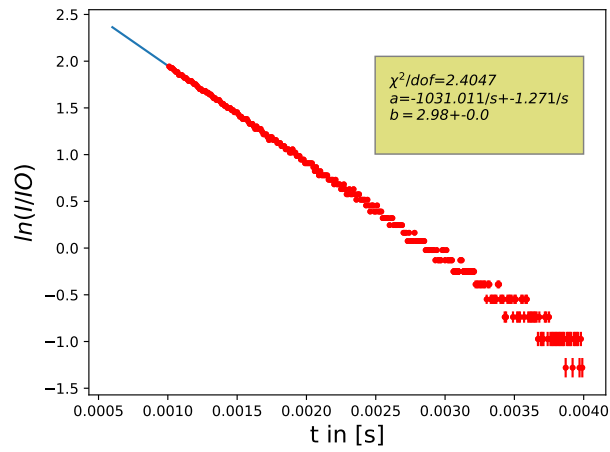


Abbildung 10: Lineare Regression Aufladung Kondensator.

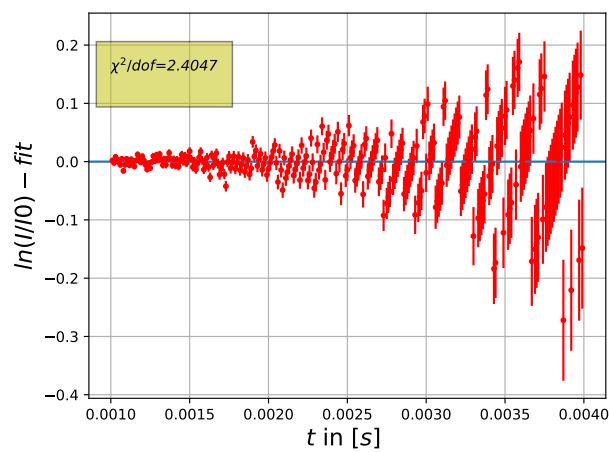


Abbildung 11: Residue Aufladung Kondensator.

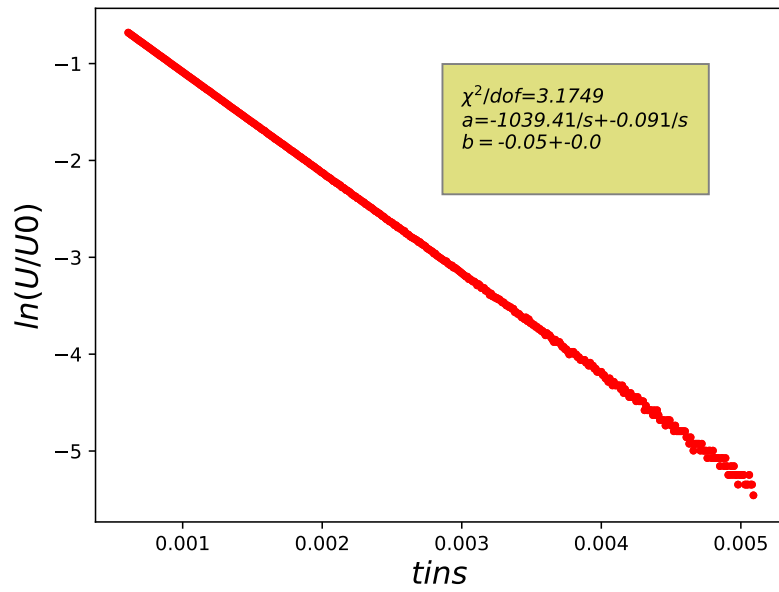


Abbildung 12: Lineare Regression Entladung Kondensator

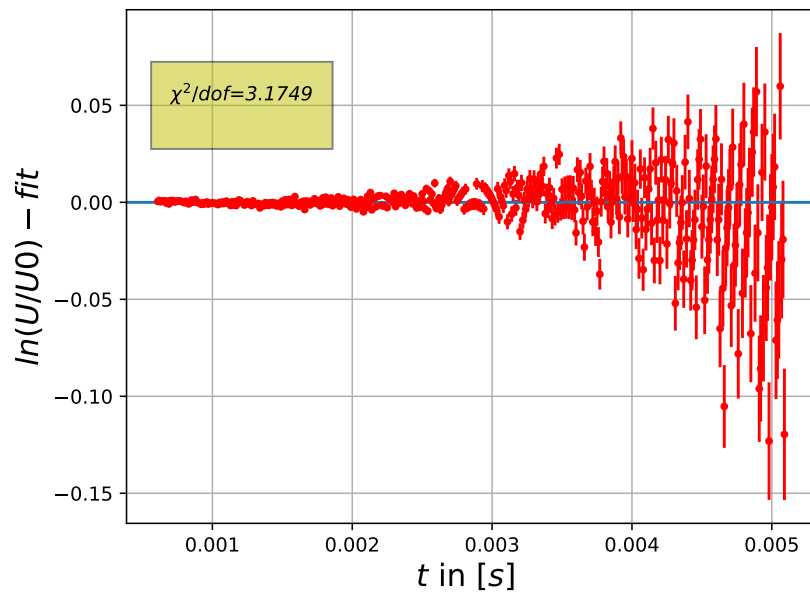


Abbildung 13: Residue Lineare Regression Entladung Kondensator.

In Abbildungen 10 bis 13 sind die Linearen Regressionen zu Auf- und Entladung zu sehen.

Man erkennt deutlich die Aufweitung der Messwerte mit der Zeit. Das passiert, da $\frac{\sigma_U}{U} = \sigma(\ln U)$. σ_U ist konstant, wohingegen U kleiner wird. Dadurch erhalten die Residuen die sich aufweitende Form.

2.3.3 Diskussion der Ergebnisse

Beim Oszilloskop wurde mit einem Wert von $0,942433 \pm 0,001 \pm 0,03 \mu\text{F}$ der vom Hersteller angegebene Wert recht gut erreicht. Bei der Bestimmung mit dem CASSY erhält man für C den Wert

$$C_{\text{ent}} = 0,9621 \pm 0,0006 \pm 0,02 \mu\text{F} \quad C_{\text{auf}} = 0,929 \pm 0,001 \pm 0,02 \mu\text{F} \quad (32)$$

aus den Linearen Regressionen über

$$C = \frac{-1}{a \cdot R}, \quad (33)$$

wobei a die Steigung aus der linearen Regression $f = ax + b$ ist. Auch mit dieser Methode zur Bestimmung von C kann die Herstellerangabe im Rahmen der Fehler ausreichend gut erreicht werden.

3 Gedämpfter LC-Schwingkreis

3.1 Versuchsbeschreibung

Ein gedämpfter LC-Schwingkreis bzw ein LCR-Schwingkreis, besteht aus einem Widerstand R , einer Spule L sowie einem Kondensator C (wie in Abbildung 14 dargestellt), die in Reihe geschaltet werden. Wird der Kondensator über eine parallel geschaltete Spannungsquelle auf die Spannung U_0 aufgeladen und anschließend über die Spule entladen, so setzt eine elektromagnetische Schwingung ein. Dabei "schwingt" die Energie des Systems zwischen der Energie des elektrischen und magnetischen Felds hin und her. Im Idealfall einer freien, ungedämpften Schwingung bliebe die Gesamtenergie konstant, allerdings wird über den (in der Praxis unvermeidlichen) Widerstand kontinuierlich die Stromenergie $dE = I^2 \cdot R \cdot dt$ in Wärme umgewandelt und dem Kreis entzogen. Dies bewirkt eine Dämpfung der Schwingung. Die Stärke der Dämpfung hat entscheidenden Einfluss auf das Schwingungsverhalten, so kommt es bei starker Dämpfung zu gar keiner Schwingung (Kriechfall/ aperiodischer Grenzfall).

Nach der Maschenregel ist die angelegte Spannung U_0 gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Bauteilen, also L , R und C .

$$U_0 = R + U_L + U_C = R \cdot I + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad (34)$$

wobei im Fall der Entladung des Kondensator die Randbedingung $U_0 = 0$ gilt. Durch Umformen ergibt sich eine DGL zweiter Ordnung, die in ihrer Form anderen DGLs für gedämpfte Schwingungen gleicht. Man schreibt

$$\frac{U_0}{L} = \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q, \quad (35)$$

mit

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (36)$$

mit der Dämpfungskonstanten δ und der Kreisfrequenz ω_0 . Damit lässt sich die sogenannte Güte Q der Schwingung bestimmen zu:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (37)$$

Gleichung (34) ist für den bereits aufgeladenen Kondensator (also $U_0 = 0$) eine homogene Differentialgleichung und besitzt damit nach den üblichen Lösungsschemata eine allgemeine Lösung der Form

$$Q_h(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad (38)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega \quad (39)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (40)$$

A und B sind die Integrationskonstanten, die sich noch mithilfe der Randbedingungen bestimmen lassen, im Falle der Kondensatorentladung $Q_h(0) = CU_0$ und $\left(\frac{dQ_h}{dt}\right)_{t=0} = 0$.

Die allgemeine Lösung der DGL hängt davon ab, ob δ größer, gleich oder kleiner als ω_0 ist. Davon ausgehend lassen sich drei verschiedene Fälle unterscheiden:

Kriechfall ($\delta > \omega_0$):

Der Kriechfall tritt auf, wenn die Dämpfung so stark ist, dass der Kondensator nur extrem langsam entladen wird und nur asymptotisch seine Spannung verliert. Es findet keine Schwingung statt. Somit schwingt auch der Entladestrom nicht über, sondern sinkt asymptotisch gegen null.

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$):

Beim aperiodischen Grenzfall ist die Dämpfung einerseits so gering, dass der Kondensator in der kürzesten Zeit entladen wird, aber immer noch groß genug, dass keine Schwingung auftreten kann. Somit zeigt der Entladestrom ebenfalls keine Schwingungen, ist aber aufgrund der kürzeren Entladungszeit deutlich größer als beim Kriechfall. Für Strom- und Spannungsverlauf ergibt sich für diesen Fall

$$I(t) = -\delta^2 e^{-\delta t} CU_0 \cdot t \quad (41)$$

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} CU_0 \cdot (1 + \delta t) . \quad (42)$$

Schwingfall ($\delta < \omega_0$):

Wird die Dämpfung noch kleiner, findet erst ein Einschwingvorgang am Kondensator statt, bevor sich die endgültige Spannung einstellt. Die Wurzel aus Gleichung (39) wird nun komplett imaginär, also nimmt die homogene Lösung die Form

$$Q_h(t) = e^{-\delta t} \cdot (A' e^{i\omega t} + B' e^{-i\omega t}) \quad (43)$$

an, woraus sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen schreiben lässt:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (44)$$

$$I(t) = -CU_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \cdot \sin \omega t \quad (45)$$

3.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Der Versuch wird wie in Abb. 14 gezeigt, aufgebaut. Kondensator, Spule und Widerstand

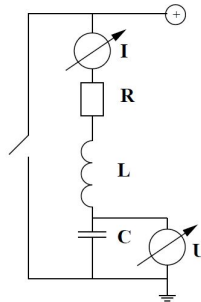


Abbildung 14: Aufbau Gedämpfte Schwingung.

werden in Reihe geschaltet. Parallel dazu befindet sich ein Schalter, mit dem der Kondensator geladen wird und die Schwingung startet. Die verwendeten Bauteile in dieser Messreihe werden charakterisiert zu $C = 4,7 \mu\text{F}(5\%)$, $L = (9.039 \pm 0.023)\text{mH}$ (durch Brückenbestimmung) mit 500 Windungen und einem Innenwiderstand von $R \approx 2.353 \pm 0.006\Omega$. Um den Widerstand genauer zu variieren, werden nicht die Steck-Widerstände benutzt, sondern ein Potentiometer angeschlossen, mit dem die Widerstandswerte lückenlos eingestellt werden können. Die Messung wird zunächst für die Schnellauswertung mit dem Oszilloskop durchgeführt und anschließend mit dem CASSY-Interface für den vollen Datensatz. Beim CASSY werden die Einstellungen siehe Tabelle 7 verwendet.

Tabelle 7: Messeinstellungen CASSY

Messeinstellungen	
Messintervall	$10 \mu\text{s}$
Anzahl	2000
Messzeit	20 ms
Trigger	9,4 V steigend

3.3 Versuchsauswertung

Schwingfall - Frequenzbestimmung: Der Widerstand vom Potentiometer wurde so eingestellt, dass eine gedämpfte Schwingung noch gut zu beobachten ist (also $\omega_0 > \delta$). Da die Induktivität der Spule relativ hoch war und die Kapazität ziemlich klein, wird für den Widerstand ein Wert von $R = 87,5 \Omega$ berechnet, ab dem der aperiodische Grenzfall einsetzen müsste. Für den Schwingfall muss also ein deutlich niedrigerer Widerstand eingestellt werden. Hier wurden vier Widerstandswerte von $R = (3.0, 10.7, 15.0, 20.0) \Omega \pm 0.1 \Omega$ gewählt, bei denen die Schwingungen noch deutlich zu sehen waren. Die Periodendauer wird einmal aus der Position der Nulldurchgänge bestimmt und mit den Werten aus der Fourier-Transformation verglichen. Exemplarisch sind beide Frequenzen im Fourierspektrum abgebildet (Abb. 15).

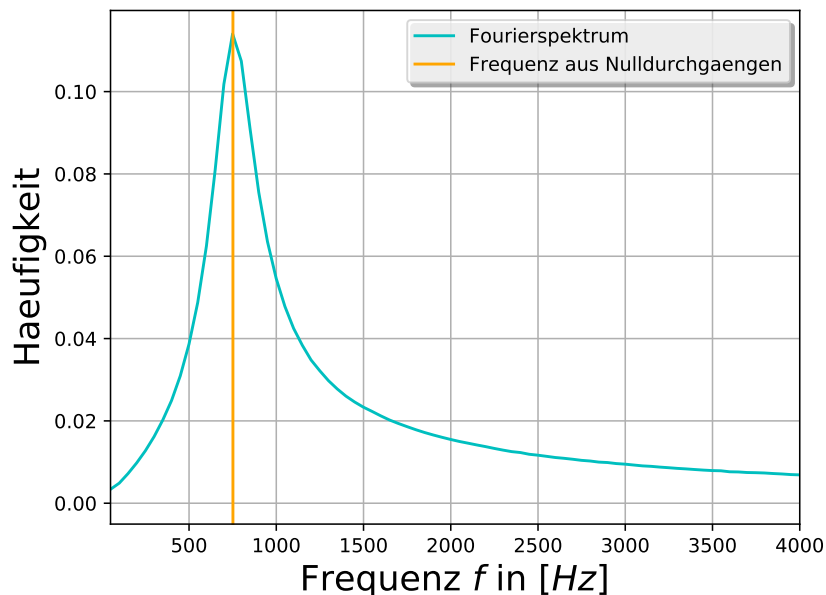


Abbildung 15: Frequenz aus Nulldurchgängen im Fourierspektrum.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 zu sehen.

Der erwartete Wert berechnet sich für alle Widerstände zu $f \approx 4851,7 \text{ Hz}$. Es fällt auf, dass einige Frequenzen aus der Bestimmung durch die Nulldurchgänge stärker abweichen. Das liegt daran, dass beim Nulldurchgang die stärkste Änderung in y-Richtung stattfindet, das heißt wenn etwa der Offset, der zwar von den Werten abgezogen wurde, selber Schwankungen unterlag, dann würden diese den Zeitpunkt des Nulldurchgangs verschieben.

Schwingfall - Bestimmung der Dämpfungskonstanten δ : Um die Dämpfungskon-

Tabelle 8: Schwingungsfrequenzen aus Nulldurchgang (ND) und Fourier-Transformation

Widerstand [Ω]	3.0	10.7	15.0	20.0
$f[Hz]$ aus ND	754.8 ± 4.1	751.6 ± 4.7	775.0 ± 7.1	731.0 ± 16.9
$\omega[Hz]$	4742.5 ± 25.76	4722.4 ± 29.53	4869.5 ± 44.6	4593.0 ± 106.2
$f[Hz]$ aus Fourier	745.7 ± 15.9	741.3 ± 24.3	738.1 ± 26.1	738.1 ± 26.1
ω	4685.4 ± 99.9	4657.7 ± 152.7	4637.6 ± 164.0	4637.6 ± 164.0

stante zu bestimmen werden die Maxima der Schwingung und ihre Zeiten mithilfe eines Peakfinders bestimmt. Mit der Formel

$$\delta_n = \frac{\ln \frac{A_n}{A_{n+1}}}{T_n} \quad (46)$$

und dem dazugehörigen Fehler

$$\sigma_{\delta_n} = \frac{1}{T_n} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{A_n}}{A_n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{A_{n+1}}}{A_{n+1}}\right)^2 + (\delta_n \cdot \sigma_{T_n})^2} \quad (47)$$

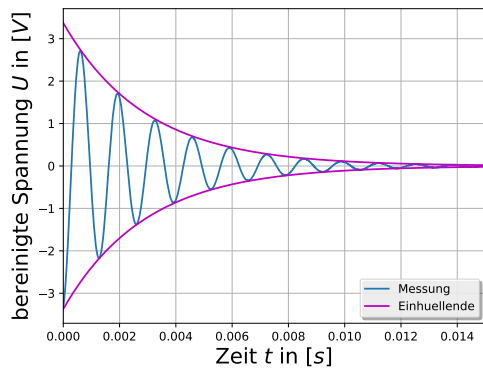
lässt sich dann die Dämpfung δ für jeden Widerstand berechnen. Bei einem zweiten Verfahren kann die Dämpfung δ bestimmt werden, indem eine Einhüllende der Form $f(x) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ an die Maxima der Schwingung angepasst wird. Für die vier ausgewählten Messungen wird dies in Abb. 16 gezeigt.

Die zur Verfügung gestellte Praktikumsroutine liefert dann direkt den Wert für die Dämpfung δ und ihren Fehler σ_δ . Tabelle 9 zeigt die Resultate aus beiden Methoden.

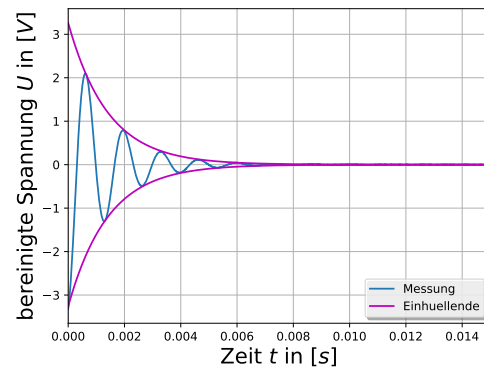
Tabelle 9: Schwingungsfrequenzen aus Nulldurchgang (ND) und Fourier-Transformation

Widerstand [Ω]	3.0	10.7	15.0	20.0
$\delta_{\text{Amplitude}}[1/s]$	341 ± 26	695 ± 53	882 ± 69	1015 ± 81
$\delta_{\text{Einhüllende}}[1/s]$	342.0 ± 0.7	709.5 ± 2.0	928.4 ± 3.2	1180.6 ± 4.0
$\delta_{\text{erwartet}}[1/s]$	304.3	730.2	968.0	1244.6

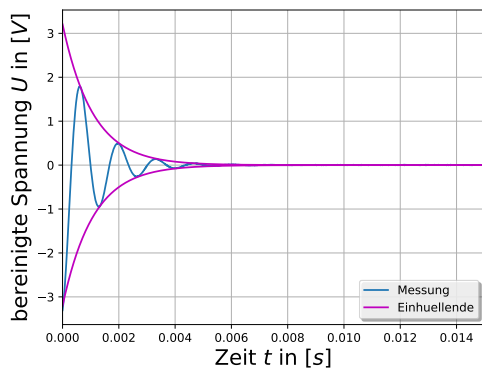
Es ist zu erkennen, dass beide Methoden Werte in der gleichen Größenordnung liefern, welche jedoch nicht ganz mit den Literaturwerten übereinstimmen. Ein Grund hierfür ist, dass nur die Widerstände vom Potentiometer und der Spule berücksichtigt wurden, der Gesamtwiderstand jedoch deutlich größer ist. Außerdem ist in den Abbildungen erkennbar, dass die Dämpfung bei den Messungen schnell stark zunahm, sodass bei der vierten Messung mit $R = 20 \Omega$ nur noch 2 ganze Schwingungen auszumachen sind. Dadurch vergrößern sich die Fehler auf die Zeit und die Amplituden. Insgesamt liefert die Anpassung einer Einhüllenden geringere Fehler und einen besseren Wert für die Induktivität der Spule. Diese kann aus $\delta = \frac{R}{2L}$ bestimmt werden, wenn δ gegen R aufgetragen wird und ein linearer Fit der Form $f(x) = a \cdot x + b$ angepasst wird (Abb.



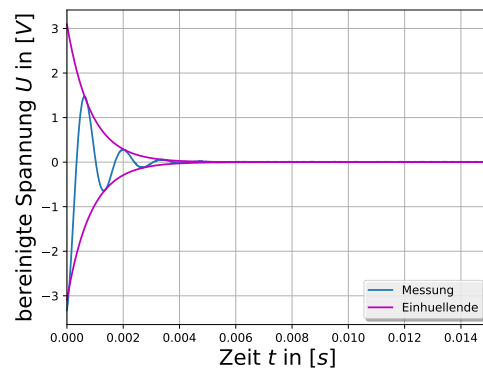
(a) $R = 3.0\Omega$



(b) $R = 10.7\Omega$



(c) $R = 15.0\Omega$



(d) $R = 20.0\Omega$

Abbildung 16: Einhüllende der Schwingungen bei jeweiligen Widerstandswerten

17). R setzt sich hier zusammen aus dem eingestellten Widerstand des Potentiometers R_{Poti} und dem Innenwiderstand der Spule R_L . So ergibt sich die Geradengleichung

$$\delta = \frac{R_{\text{Poti}}}{2L} + \frac{R_L}{2L} \quad (48)$$

mit Steigung $a = \frac{1}{2L}$ und Achsenabschnitt $b = \frac{R_L}{2L}$.

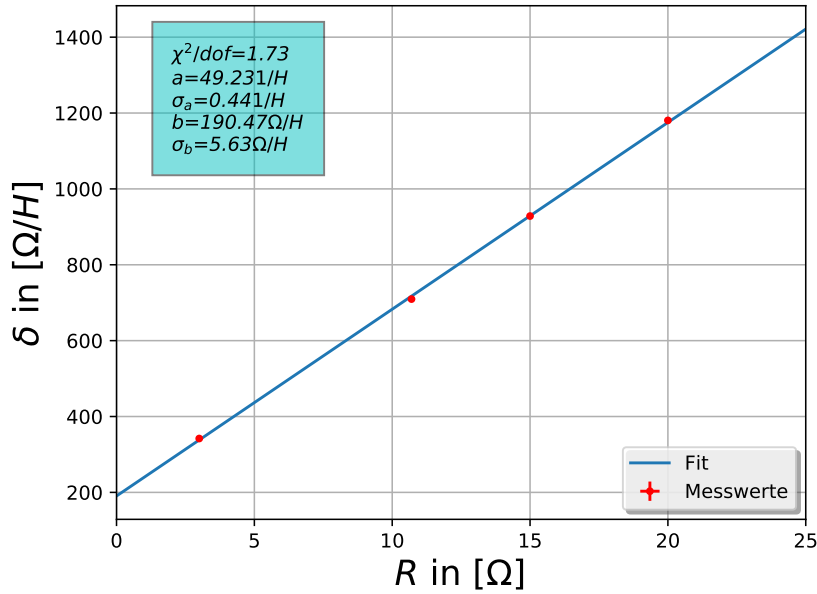


Abbildung 17: Lineare Regression zur Bestimmung der Spulenparameter.

Die Spulenparameter lassen sich dann bestimmen zu $L = (10.16 \pm 0.09)\text{mH}$ und $R_L = (3.87 \pm 0.12)\Omega$. Der Vergleich mit dem zu erwartenden Wert von $L = (9.039 \pm 0.023)\text{mH}$ zeigt, dass die Größenordnungen zwar stimmen, aber die Abweichung in Vielfachen von σ mit $n_\sigma = 12$ aufgrund der kleinen Fehler ziemlich groß ist. Auch der Kondensator kann durch eine lineare Regression charakterisiert werden. Es gilt die Gleichung

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (49)$$

Mit einer linearen Regression durch die Auftragung δ^2 gegen ω^2 mit Steigung -1 lässt sich dann die Kapazität des Kondensators aus dem y-Achsenabschnitt y bestimmen zu

$$C = \frac{1}{L \cdot y} \quad (50)$$

mit Fehler

$$\sigma_C = C \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}. \quad (51)$$

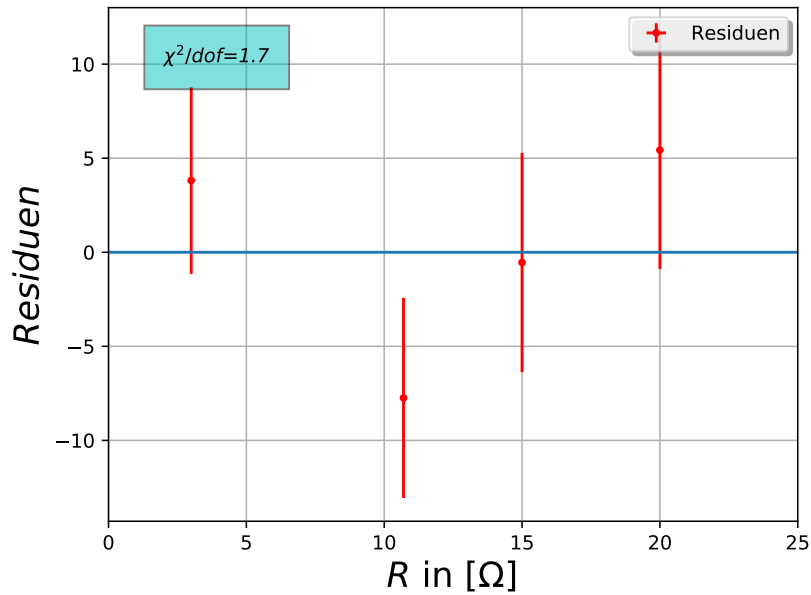


Abbildung 18: Residuenplot.

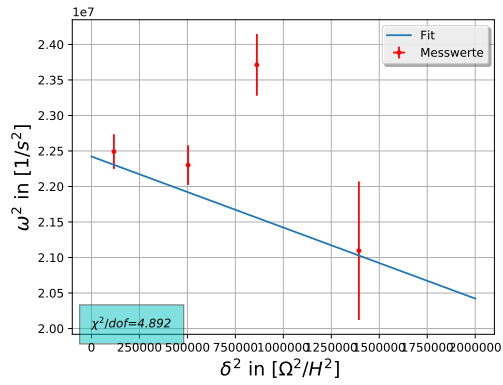
Da die Periodendauer und damit die Kreisfrequenz ω mit zwei verschiedenen Methoden bestimmt wurde und dementsprechend auch verschiedene Werte für ω berechnet wurden (sh. Tabelle 9), wird die lineare Regression für beide Wertepaare einmal durchgeführt und anschließend miteinander verglichen. Die Ergebnisse sind in Abb. 19 zu sehen. Wie zu sehen ist, ist die Anpassung der Geraden nicht an die Datenpunkte optimiert, da die Steigung der Geraden künstlich angepasst wurde um die Gleichung (49) zu erfüllen.

Die daraus bestimmten Eigenschaften des Kondensator werden in Tabelle 10 gezeigt. Beide Methoden liefern eine Kapazität, die im Rahmen der Fehler mit den Herstellerangaben übereinstimmen. Dort wird wie angegeben eine Toleranz von 5% berücksichtigt.

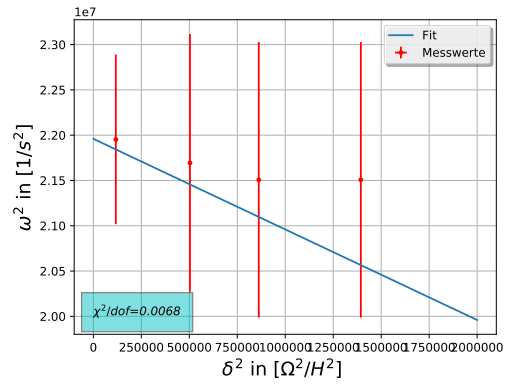
Tabelle 10: Vergleich der Kapazitäten

	C aus Nulldurchgang [μF]	C aus Fourier [μF]	$C_{\text{Erwartung}}$ [μF]
C	4.39 ± 0.12	4.48 ± 0.05	4.7 ± 0.2
Abweichung	1.33σ	1.07σ	-

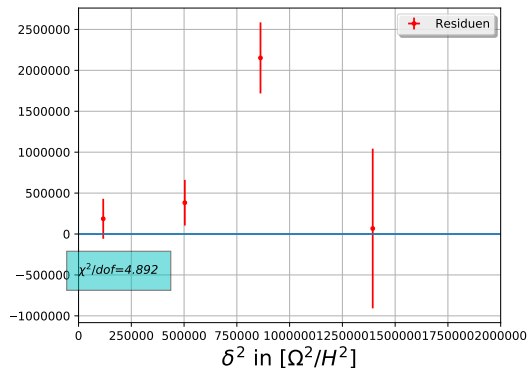
Aperiodischer Grenzfall - Bestimmung des Widerstands R_{ap} : Für $\omega_0 = \delta$ ist die Dämpfung genauso groß wie die ungedämpfte Schwingung und es stellt sich der aperiodische Grenzfall ein, bei dem der Spannungsabfall maximal ist. Berechnet man für die verwendeten Bauelemente den Erwartungswert für den Widerstand, bei dem dieser Fall



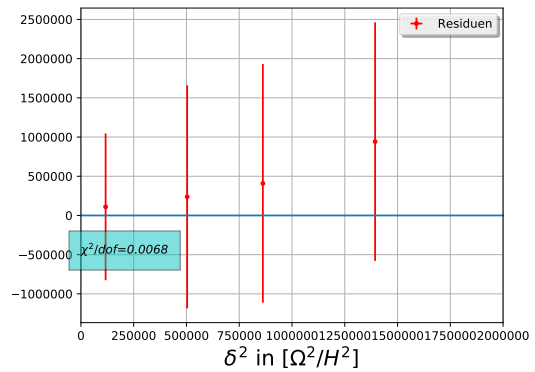
(a) Fit durch Ω aus Nulldurchgang



(b) Fit durch Ω aus Fourier-Transformation



(c) Residuen des Fits aus Nulldurchgang



(d) Residuen des Fits aus Fourier-Transformation

Abbildung 19: Vergleich der Methoden für Kapazitätsbestimmung

eintritt, erhält man $R_{ap} = \sqrt{2 \cdot \frac{L}{C}} = 87,7 \Omega$. Mit dem Potentiometer wird nun langsam der Widerstand erhöht und die Spannungskurve in dem Bereich um den vorhergesagten Wert mit CASSY gemessen. Da die Spannung wegen des (kleinen) Offsets die Nulllinie überschreitet, wird zum Vergleich der Geschwindigkeit des Spannungsabfalls, der Nulldurchgang bestimmt und verglichen (Tabelle 11).

Tabelle 11: Annäherung an den aperiodischen Grenzfall.

R in [Ω]	Nulldurchgang t in [ms]	Beobachtung
78.0	1.01	Schwingung
78.4	1.01	Schwingung
78.8	1.01	kaum Schwingung
80.0	1.02	Grenzfall
83.9	1.04	Kriechfall
87.0	1.16	Kriechfall

Wie an den Daten zu sehen ist, werden bei $R = 78,8 \Omega$ und $R = 80,0 \Omega$ gute Annäherungen an den aperiodischen Grenzfall gemessen. Die beste Näherung an den tatsächlichen Wert liegt folglich in diesem Intervall und kann mit $R_{\text{gem}} = (79.4 \pm 0.6) \Omega$ angegeben werden. Die Differenz von $R = 8,3 \Omega$ zwischen dem empirisch bestimmten Widerstand für den aperiodischen Grenzfall und dem Erwartungswert kann durch die Innenwiderstände von Schaltung und Spule erklärt werden. Es gilt

$$R_{\text{Poti}} + R_L + R_{\text{Rest}} = 87,7 \Omega . \quad (52)$$

Mit $R_{\text{Poti}} = 79,4 \Omega$ und dem mit der Brücke bestimmten Spuleninnenwiderstand $R_L = 2,4 \Omega$ erhält man einen Restwiderstand von $R_{\text{Rest}} = 5,9 \Omega$ der aus anderen Einflüssen resultiert.

4 Gekoppelte LC-Schwingkreise

4.1 Versuchsbeschreibung

Bei diesem Versuchsteil werden zwei LC-Schwingkreise induktiv gekoppelt und die Fundamentalschwingungen sowie die Schwebung der gekoppelten Schwingkreise aufgezeichnet. Die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingkreise lauten

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1 + k \cdot \ddot{I}_2 + \frac{I_1}{L \cdot C} &= 0 \\ \ddot{I}_2 + k \cdot \ddot{I}_1 + \frac{I_2}{L \cdot C} &= 0\end{aligned}$$

wobei k der Kopplungsgrad ist. Hieraus folgt für die beiden Eigenfrequenzen ω_+ und ω_-

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} = \omega_+ < \omega_0 < \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (53)$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ist dabei die Kreisfrequenz der einzelnen Schwingkreise ohne Kopplung. Eine Fouriertransformation des Signals des gekoppelten Schwingkreises zeigt die Aufspaltung der Frequenz des ungekoppelten Signals in zwei symmetrisch darum liegende Peaks mit den Eigenfrequenzen ω_+ und ω_- . Mit den beiden Frequenzen lässt sich der Kopplungsgrad bestimmen zu

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}. \quad (54)$$

Die Frequenz der gekoppelten Schwingung lautet

$$f_k = \frac{f_-^2 + f_+^2}{2} \approx f_0 \quad (55)$$

und die der Schwebung

$$f_{\text{Schweb}} = \frac{f_-^2 - f_+^2}{2}. \quad (56)$$

Bei einem idealen Schwingkreis erfolgen die Nulldurchgänge des einen Schwingkreises zeitgleich zum Annehmen der Extremalstellen des anderen Schwingkreises. Da jedoch aufgrund der Dämpfung kein ideales Verhalten vorliegt, lässt sich eine Verschiebung zwischen den Nulldurchgängen und den Extrema feststellen, die sich für eine Kopplung $k < 0.2$ bestimmen lässt zu

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{\text{Schweb}}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right]. \quad (57)$$

4.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Zur Messung der Schwebung einer gekoppelten Schwingung werden zwei Schwingkreise mit Spulen und Kondensatoren derart aufgebaut, dass sie über die nebeneinander aufgebauten Spulen induktiv miteinander gekoppelt sind. Die Bauteile sind dabei wieder auf einem Steckbrett befestigt, wie in Abbildung 20 zu erkennen. Des weiteren ist der Schaltplan des Aufbaus in Abbildung 21 dargestellt. Zur Messung wird für alle folgenden Versuche das SensorCASSY verwendet, welches die Spannung am Kondensator abgreift. Dabei werden die in Tabelle 12 genannten Messparameter verwendet.

Tabelle 12: Messeinstellungen CASSY

Messeinstellungen	
Messintervall	10 μ s
Anzahl	16000
Messzeit	160 ms
Trigger	9,5 V fallend

Die Komponenten der einzelnen Schwingkreise besitzen identische Werte, welche aus den vorherigen Versuchen bzw mit der Messbrücke mitsamt Fehler bestimmt wurden. Diese sind in Tabelle 13 zu sehen.

Tabelle 13: Werte für die Kapazität und Induktivität der Bauteile

$C_{\text{theo}}[\mu\text{F}]$	$C_{\text{exp}}[\mu\text{F}]$	$L_{\text{Brücke}}[\text{mH}]$	$L_{\text{gem}}[\text{mH}]$
4,7	$4,48 \pm 0,05$	$9,039 \pm 0,023$	$10,16 \pm 0,09$

Nachdem der Kondensator vom CASSY auf $U_0 = 10 \text{ V}$ aufgeladen wurde, wird der Taster betätigt und somit sowohl der Schwingkreis geschlossen, sodass die Schwingung einsetzen kann, als auch der Trigger ausgelöst, sodass die Messung beginnt.

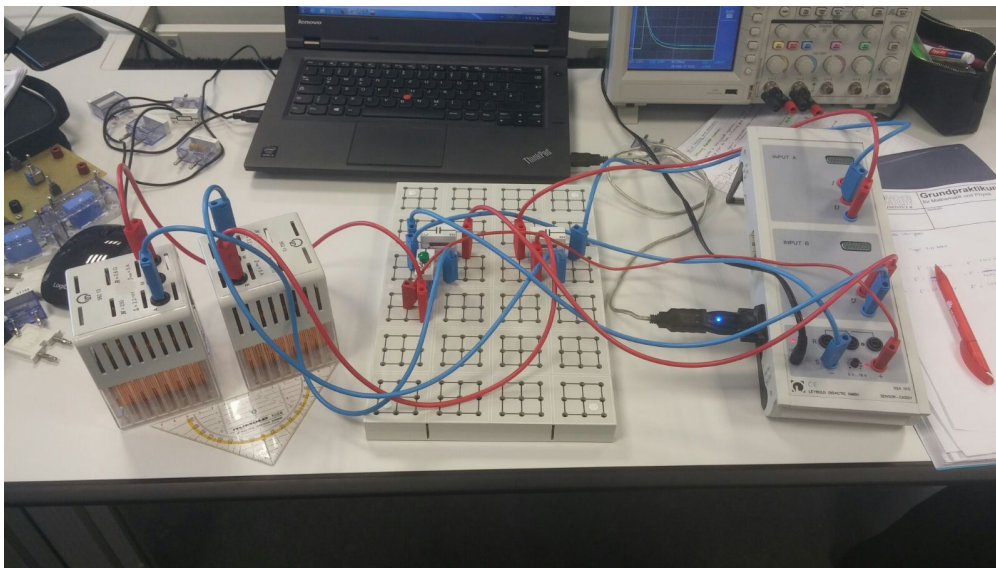


Abbildung 20: Aufbau gekoppelte Schwingung

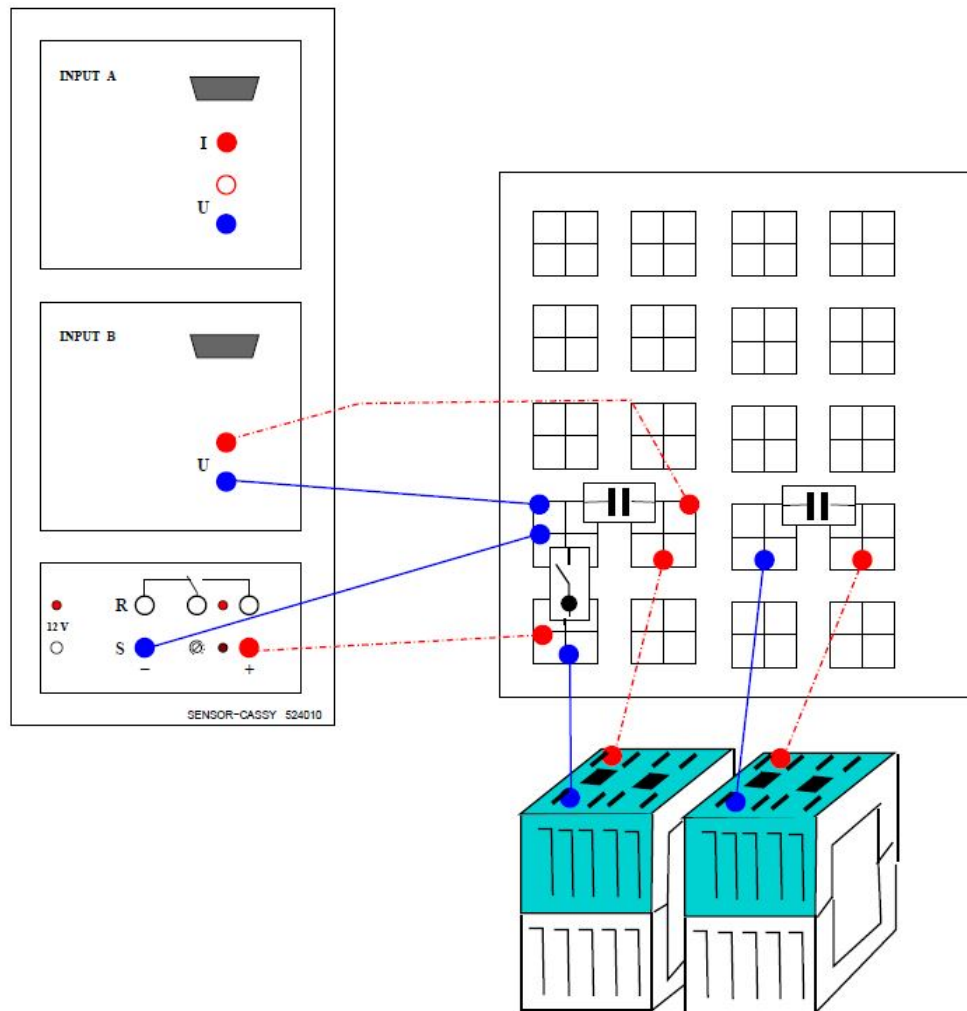
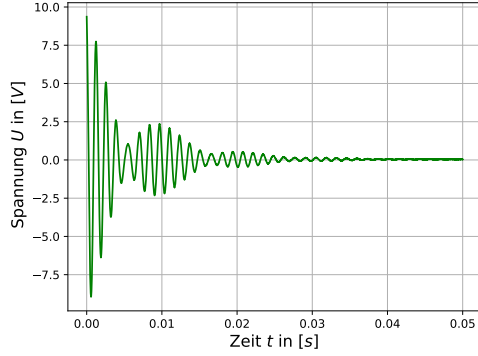


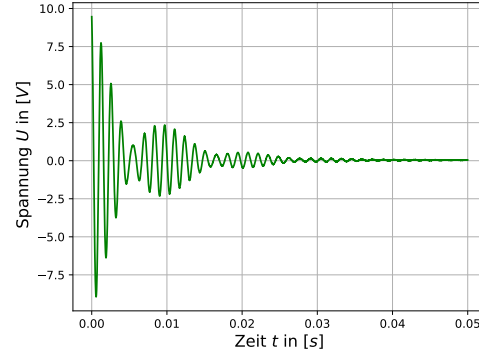
Abbildung 21: Schaltplan gekoppelte Schwingungen

4.3 Versuchsauswertung

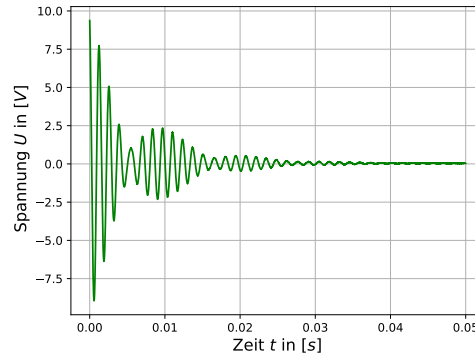
In Abbildung 22 ist deutlich die charakteristische Schwebung mit der neuen Frequenz f_k und der Einhüllenden mit der Schwebungsfrequenz f_{Schweb} zu sehen, die mit dem CASSY aufgezeichnet wurde. Diese wurde durch die gekoppelte Schwingung verursacht.



(a) Spannungsverlauf der Schwebung am Kondensator (Messung 1)



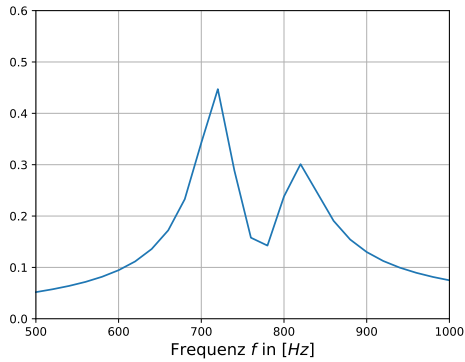
(b) Spannungsverlauf der Schwebung am Kondensator (Messung 2)



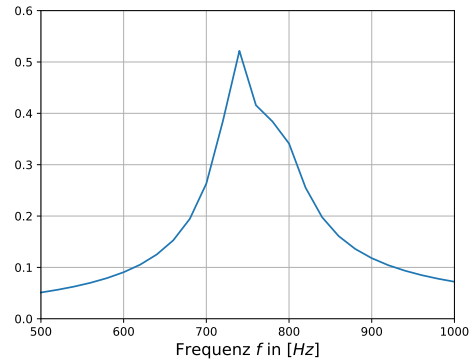
(c) Spannungsverlauf der Schwebung am Kondensator (Messung 3)

Abbildung 22: Spannungsmessung Schwebung.

Wie aus der Fouriertransformation (siehe Abbildung 23) zu erkennen ist, setzt sich f_k aus den zwei Fundamentalmoden f_+ und f_- zusammen, die im Frequenzspektrum symmetrisch um das Signal der ungekoppelten Schwingung verteilt sind. Aus den Peaks lassen sich die Frequenzen der Fundamentalschwingungen (f_+ und f_-) gewinnen. Diese werden über den Peakfinder von CASSY ermittelt, wobei mehrfach über verschiedene Intervalle um jeden Peak herum ein Peakschwerpunkt und aus diesen Werten ein gemittelter Wert für den Peak sowie ein Fehler auf diesen ermittelt wird. Mithilfe dessen lassen sich auch die neue Frequenz f_k , die Schwebungsfrequenz f_{Schweb} und mit Gleichung (54) der Kopplungsgrad k bestimmen.



(a) Fourierspektrum bei $b = 0$ cm



(b) Fourierspektrum bei $b = 3$ cm

Abbildung 23: Fourierspektren der Schwebung.

In der Abbildung wird die Beziehung der Fundamentalmoden bei unterschiedlich starker Kopplung deutlich; je stärker die Kopplung, desto weiter sind die Peaks von f_- und f_+ voneinander entfernt, wird die Kopplung schwächer, bewegen sich die Peaks aufeinander zu, bis bei vollkommener Entkopplung nur noch die eine Frequenz des Schwingkreises existiert, wie in der rechten Abbildung bereits vorherzusehen ist.

Die Messung wird mehrfach in verschiedenen Konstellationen wiederholt, um jeweils Werte für k ermitteln zu können. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 14 eingetragen.

Tabelle 14: Gemessene Daten Schwebung

Messung	f_+ [Hz]	f_- [Hz]	f_k [Hz]	f_{Schweb} [Hz]	k
1 (Abstand 0 cm)	$719,19 \pm 2,9$	$817,41 \pm 1,5$	768,30	49,11	0,13
2 (Abstand 0 cm)	$719,51 \pm 1,9$	$817,40 \pm 1,5$	768,46	48,95	0,13
3 (Abstand 0 cm)	$720,32 \pm 1,4$	$818,50 \pm 2,6$	769,41	49,09	0,13
4 (Abstand 3 cm)	$739,34 \pm 1,4$	$787,49 \pm 1,6$	763,42	24,07	0,06
5 (Abstand 3 cm)	$740,98 \pm 2,2$	$787,49 \pm 2,2$	764,24	23,26	0,06
6 (Eisenkern)	$281,85 \pm 0,9$	$482,96 \pm 1,6$	382,41	100,55	0,49
7 (Eisenkern)	$280,96 \pm 1,6$	$483,05 \pm 1,6$	382,00	101,05	0,49

Wie in 14 zu sehen, wird die Messung sowohl für verschiedene Abstände b der Spulen zueinander sowie mit einem (ferromagnetischen) Eisenkern, der durch die Spulen geschoben wurde, wiederholt, was zu einer Änderung von k führt. So nimmt die Kopplung mit steigendem Abstand der Spulen ab und wird durch den Eisenkern erhöht. Des weiteren werden Messwerte für einen Abstand von $b = 5$ cm aufgenommen, hier allerdings ist die Kopplung bereits so schwach, dass die Frequenzen der beiden Fundamentalschwingungen (Fundamentalmoden f_+ und f_-) so nah beieinander liegen, dass sie nicht mehr zu unterscheiden sind, sondern einen einzigen Peak ausbilden. Der Kopplungsgrad beträgt in diesem Fall also $k = 0$.

Die Fehler auf f_k, f_{Schweb} sowie k lassen sich mithilfe von Fehlerfortpflanzung aus den oben ermittelten Fehlern auf die Fundamentalmoden bestimmen, somit gilt:

$$\sigma_{f_k} = \sigma_{f_{\text{Schweb}}} = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_{f_-}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{f_+}^2} \quad (58)$$

$$\sigma_k = \frac{4f_-f_+}{(f_-^2 + f_+^2)^2} \cdot \sqrt{f_+^2\sigma_{f_-}^2 + f_-^2\sigma_{f_+}^2}. \quad (59)$$

Damit können auch die Fehler auf f_k, f_{Schweb} und k berechnet werden, diese sind in Tabelle 15 exemplarisch für die nicht verschobenen Spulen eingetragen.

Tabelle 15: Fehler auf die Schwebungsfrequenzen und Kopplungsgrade

Messung	f_k [Hz]	f_{Schweb} [Hz]	$\sigma_{f_k} = \sigma_{f_{\text{Schweb}}}$ [Hz]	k
1	768,3	49,1	0,8	$0,12732 \pm 0,00002$
2	768,5	49,0	0,6	$0,12687 \pm 0,00001$
3	769,4	49,1	0,8	$0,12709 \pm 0,00002$

Phasenbeziehung der Schwingungen Bei idealen gekoppelten Schwingungen, die derart aufgebaut sind, dass ein Kondensator aufgeladen wird und der andere ungeladen bleibt, erwartet man eine Phasenverschiebung der beiden Schwingungen um $\frac{\pi}{2}$, d.h. an einem Extremum des einen Schwingkreises besitzt der andere einen Nulldurchgang. Aufgrund der Dämpfung der beiden Schwingkreise allerdings sind diese verschoben, sodass ein Δt zwischen dem Zeitpunkt des Extremums eines Schwingkreises und dem des Nulldurchgangs des anderen existiert, welches für die Bedingung $k < 0.2$ mit

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{\text{Schweb}}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right]. \quad (60)$$

approximiert werden kann. Somit erhält man für die gemessenen Fälle, bei denen die Bedingung erfüllt ist:

Tabelle 16: Phasenverschiebungen Δt

Messung	Abstand $b = 0$ cm	Abstand $b = 3$ cm
Δt [ms]	1,27	4,9

Gleich- und Gegenphasige Schwingung

Im letzten Versuchsabschnitt werden beide Schwingkreise an eine Spannungsquelle angeschlossen, sodass beide Kondensatoren C_1 und C_2 aufgeladen werden. Bei Betätigung des Tasters werden somit beide Schwingungen gleichzeitig ausgelöst. Dabei gibt es zwei mögliche Konstellationen des Stromflusses in den beiden Kreisen, entweder sind die Stromflüssen gleichsinnig oder gegensinnig zueinander. Dies hat -analog zum gekoppelten mechanischen Pendel- Auswirkungen auf die resultierende Frequenz; bei gegensinnigem

Stromfluss, ist die Schwingungsfrequenz größer als bei gleichsinniger. Die Messwerte für gleich- und gegensinnige Anregung aus CASSY sind in Abbildung ?? graphisch dargestellt, außerdem in Abbildung 16 die entsprechenden Fourierspektren, bei denen deutlich die Peaks bei der jeweiligen Frequenz der Schwingung zu sehen sind.

Abbildung 24: Daten Schwingungsverläufe

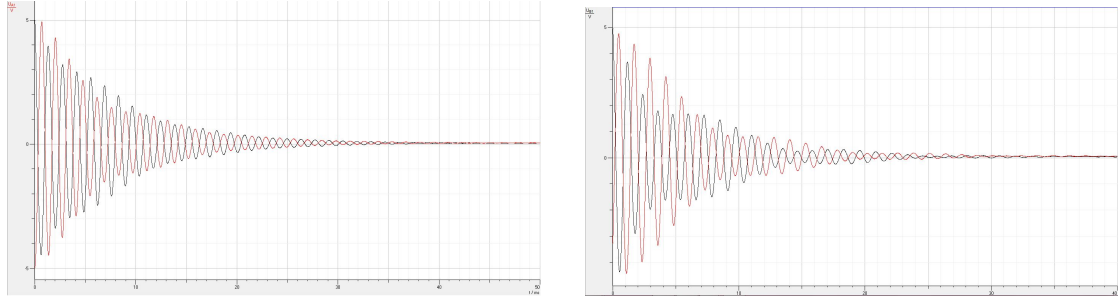
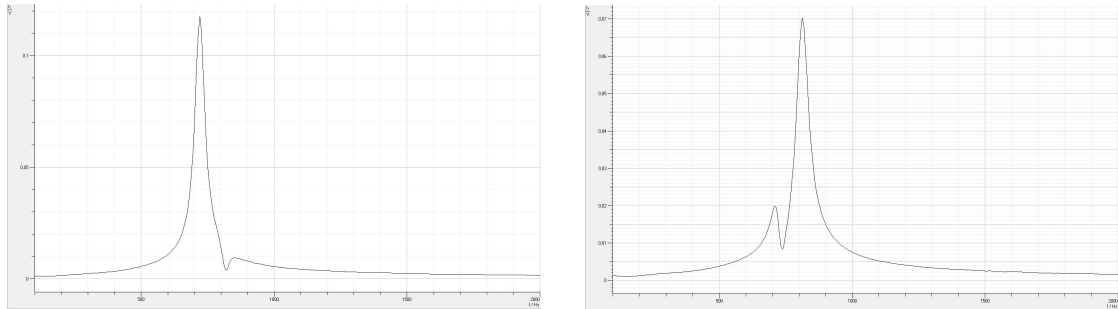


Abbildung 26: Daten Schwingungsverläufe



Mit der bewährten Methode zur Peakbestimmung über die von CASSY aufgenommenen Daten (mithilfe der Bestimmung des Peakschwerpunktes über mehrere Intervalle um den Peak herum und Bestimmung des Mittelwerts samt Fehler) ergeben sich für die beiden Messreihen die in Tabelle 17 eingetragenen Frequenzwerte. Also ist $f_{s,1}$ kleiner

Tabelle 17: Frequenzen gleich- und gegensinniger Schwingkreis

	$f_s [\text{Hz}]$
1	$720,3 \pm 1,4$
2	$813,6 \pm 2,1$

als $f_{s,2}$, womit sich der Versuchsaufbau der zweiten Messung als der der gegensinnigen Ausrichtung identifizieren lässt. Hierbei fließen die Ströme in den beiden Schaltungen in unterschiedliche Richtungen, da die Kondensatoren entgegengesetzt gepolt aufgeladen wurden. Somit verstärken sich die Ströme gegenseitig und sorgen für eine höhere Frequenz der Schwingung. Die Auswertung mit mehreren Messreihen für die jeweilige

Ausrichtung war aufgrund äußerer Einflüsse nicht möglich, da für das korrekte Einsetzen der Schwingung ein zeitgleiches Auslösen der Taster beider Schwingkreise notwendig ist. Im Versuchsaufbau werden diese jedoch von einem gemeinsamen Schalter betätigt, der die beiden Taster instantan auslösen soll, was jedoch in der Realität aufgrund minimaler Verzögerungen nur selten der Fall ist. Aufgründdessen und aufgrund der knappen Zeit war es nur möglich, pro Einstellung eine Messreihe aufzunehmen.