

# 1 Gedämpfter LC Schwingkreis Oszilloskop, Teilversuch 4.4.1

## 1.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch soll die Frequenz  $f$  und der Dämpfungskoeffizient  $\delta$  eines LRC-Schwingkreises mit Hilfe eines Oszilloskops bestimmt werden.

Dazu wird die Spannung über dem Kondensator mit dem Oszilloskop aufgezeichnet, um die Frequenz und den Abklingkoeffizienten folgendermaßen zu bestimmen:

$$f = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\delta_n = \frac{\ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right)}{t_{n+1} - t_n}. \quad (2)$$

## 1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

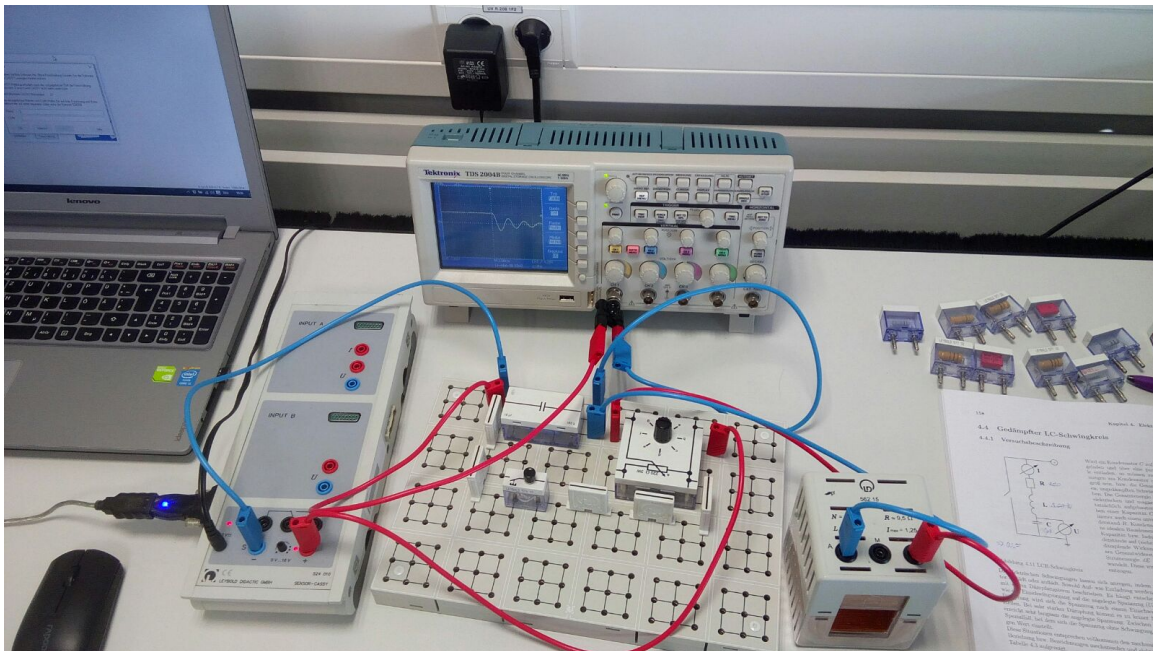


Abbildung 1: Versuchsaufbau

- Bei dem oben gezeigten LRC Schwingkreis wurde der Drehwiderstand komplett herunter geregelt ( $R = 0.02\Omega$ ). Dieser wird erst später in Versuch 4.4.2 gebraucht.
- Alle Versuche wurden bei einer Eingangsspannung von  $U_0 = 5.6V$  durchgeführt, dabei wurde das Oszilloskop auf „Single Sequence“ eingestellt und aus dem resultierenden Standbild die Spannungsmaxima mit entsprechenden Zeitwerten abgelesen. Dazu wurden die Messbereiche auf  $U_B = 16V$  (Spannung) &  $T_B = 50 \cdot 10^{-3}s$  (Zeit) eingestellt.
- Es lag ein Offset von  $off = 50 \cdot 10^{-3}V$  vor, der im Folgenden ausgeglichen wurde.
- Die Ablesefehler wurden zu  $\sigma_U = \frac{0.08}{\sqrt{12}}V$  &  $\sigma_T = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{12}}s$  bestimmt. Diese Messung wurde 4 mal wiederholt wobei die Ergebnisse des 2. Versuchs aufgrund eines Stromausfalls verloren gingen.

## 1.3 Versuchsauswertung

### 1.3.1 Rohdaten

Spule (Herstellerangaben):

Induktivität	$L = 36 * 10^{-3} H$
Windungen	$N = 1000$
Widerstand	$R = 9.5 \Omega$

Kondensator (Herstellerangabe):

Kapazität	$C = 10 * 10^{-6} F$
-----------	----------------------

Messdaten:

Tabelle 1: 1. Messung	
$U_1 = 3.12V$	$t_1 = 0.5ms$
$U_2 = 1.76V$	$t_2 = 4.4ms$
$U_3 = 1.04V$	$t_3 = 8.2ms$
$U_4 = 0.56V$	$t_4 = 12.0ms$

2. Messung fehlt wegen Stromausfall.

Tabelle 2: 3. Messung	
$U_1 = 3.2V$	$t_1 = 0.5ms$
$U_2 = 1.76V$	$t_2 = 4.4ms$
$U_3 = 1.04V$	$t_3 = 8.2ms$
$U_4 = 0.64V$	$t_4 = 12.0ms$
$U_5 = 0.4V$	$t_4 = 15.9ms$

Tabelle 3: 4. Messung	
$U_1 = 3.12V$	$t_1 = 0.5ms$
$U_2 = 1.76V$	$t_2 = 4.4ms$
$U_3 = 1.12V$	$t_3 = 8.2ms$
$U_4 = 0.8V$	$t_4 = 12.1ms$
$U_5 = 0.4V$	$t_4 = 15.9ms$

$U_4$  und  $T_4$  wurden bei Messung4 wegen falschem Ablesen verworfen.

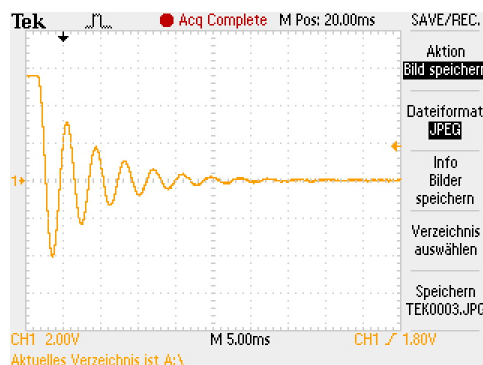


Abbildung 2: Beispiel: Messung 1

### 1.3.2 Transformation der Rohdaten

Die Frequenzen wurden aus den Differenzen der Zeitabstände  $T_i$  bestimmt. Bestimmung von Delta siehe Gleichung (??).

Beispiel:

Tabelle 4: Messung 1

Frequenz in Hz	$\sigma_f$ in Hz	Abklingkoeffizient in $\frac{1}{s}$	$\sigma_\delta$ in $\frac{1}{s}$
$f = 256.410$	$\sigma_f = 1.898$	$\delta = 150.047$	$\sigma_\delta = 4.264$
$f = 263.158$	$\sigma_f = 1.999$	$\delta = 143.827$	$\sigma_\delta = 7.260$
$f = 263.158$	$\sigma_f = 1.999$	$\delta = 174.551$	$\sigma_\delta = 13.535$

Hier wurden die Fehler aus den folgenden Gleichungen ermittelt:

$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2} \quad (3)$$

$$\sigma_{\delta_n} = \frac{1}{T_n} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{U_n}}{U_n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_{n+1}}}{U_{n+1}}\right)^2 + (\delta_n \cdot \sigma_{T_n})^2} \quad (4)$$

Der Abklingkoeffizient  $\delta$  wird bestimmt aus:

$$U_{n+1} = U_n \cdot e^{-\delta \cdot (t_{n+1} - t_n)}$$

$$\Rightarrow \delta_n = \frac{\ln \frac{U_n}{U_{n+1}}}{t_{n+1} - t_n} \quad (5)$$

Aus den Einzelmessungen haben wir für die Frequenz und den Abklingkoeffizient den gewichteten Mittelwert mit seinem Fehler bestimmt:

Tabelle 5: Ergebnis

$\bar{f}$ in Hz	$\sigma_{\bar{f}}$ in Hz	$f_{Theo}$	$\bar{\delta}$ in $\frac{1}{s}$	$\sigma_{\bar{\delta}}$ in $\frac{1}{s}$	$\delta_{Theo}$
259.960	0.617	264.426	148.025	1.994	131.944

Abbildung 3: Frequenz

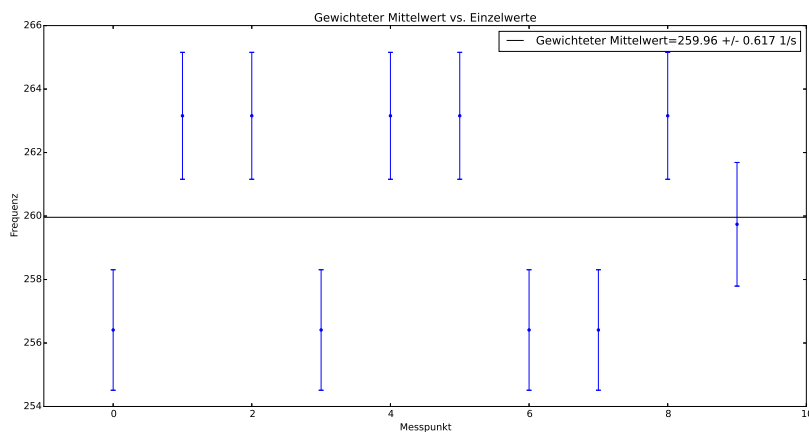
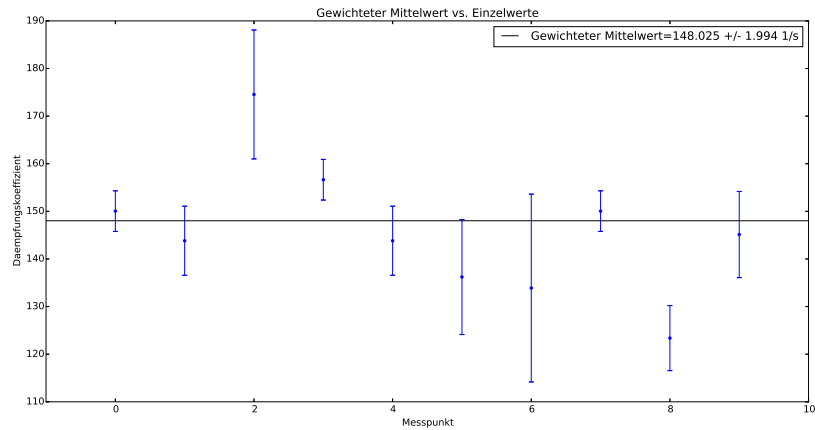


Abbildung 4: Abklingkoeffizient



### 1.3.3 Analyse und Fazit

Auffällig ist, dass die gemessene Frequenz kleiner ist, als die theoretische Frequenz. Da die theoretische Frequenz allerdings allein aus den Herstellerangaben berechnet wurde ist ein ähnlicher Wert kaum zu erwarten.

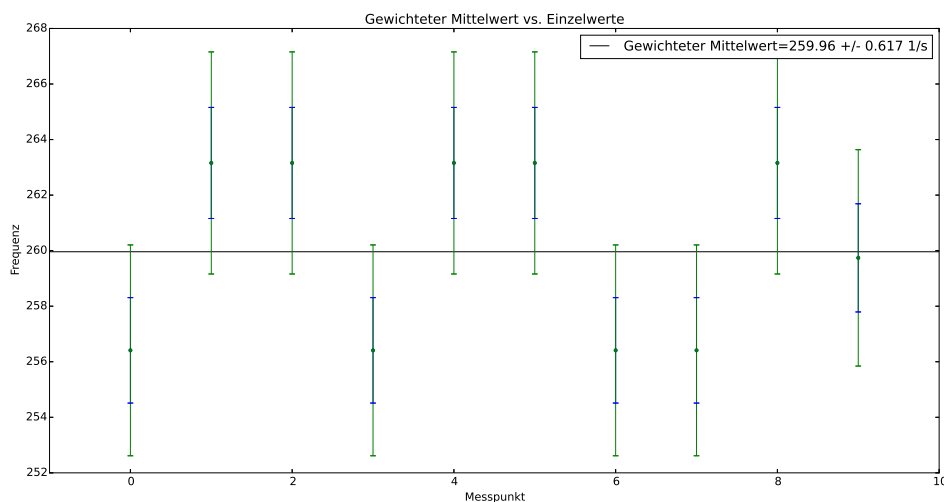
Weiterhin fällt auf, dass  $\delta$  größer ist als  $\delta_{theo}$ . Der Grund dafür ist, dass  $\delta \sim R$  und wir bei R mit Sicherheit einen höheren Wert erwarten müssten, da zum Beispiel alle Bauteile einen Innenwiderstand aufweisen.

Die jeweiligen Fehler auf die Mittelwerte liegen in einem realistischen Rahmen.

Abbildung ?? zeigt einen zugegebenermaßen seltsamen Verlauf. Vier der Werte liegen auf extrem gleicher Höhe unter dem Graphen, fünf Werte auf ebenso gleicher Höhe über dem Graphen. Nur ein Fehlerbalken schneidet den Mittelwert. Wir erklären uns dies dadurch, dass die gemessenen Zeitpunkte und deren Differenzen im Rahmen der Auflösung am Oszilloskop immer gleich waren (siehe Zeitmessung in Rohdaten).

Erweitert man den Fehler auf  $2 \cdot \sigma$  ergibt sich, dass alle Fehler den Mittelwert schneiden.

Abbildung 5: Frequenz  $2\sigma$



Der Plot zum Abklingkoeffizient sieht sehr vernünftig aus. Zwar schneiden nur 7 von 10 Fehlerbalken den Mittelwert, dies ist aber zu erwarten, da theoretisch nur  $\approx 68\%$  der Werte den Mittelwert schneiden sollten.

## 2 Gedämpfter LC Schwingkreis Cassy, Teilversuch 4.4.2

### 2.1 Versuchsbeschreibung

Beim Teilversuch 4.4.2 sollte zunächst die Messung der Frequenz  $f$  und die Messung des Dämpfungskoeffizienten  $\delta$  wie in Teilversuch 4.4.1 wiederholt werden, nur dieses Mal sollte die Messung über das Sensor-Cassy statt über das Oszilloskop erfolgen. Die Frequenz und der Dämpfungskoeffizient berechnen sich dabei nach den gleichen Formeln wie zuvor. Die Schaltung sollte durch einen variierbaren Widerstand erweitert werden und mindestens ein Kriechfall ( $D = \frac{\delta}{\omega} > 1$ ), ein Schwingfall ( $D < 1$ ) und ein aperiodischer Grenzfall ( $D = 1$ ) aufgenommen werden.

Nachdem die Dämpfungskonstante  $\delta$  bestimmt wurde, konnte daraus die Induktivität der Spule über:

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2\delta} \cdot R \quad (6)$$

bestimmt werden.

Für den aperiodischen Grenzfall gilt:

$$R_{ap} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

Dieser Grenzfall sollte mit Hilfe des Drehwiderstandes eingestellt und mit der Vorhersage verglichen werden.

### 2.2 Versuchsaufbau

Der Versuch wurde wie in der folgenden Skizze aufgebaut.

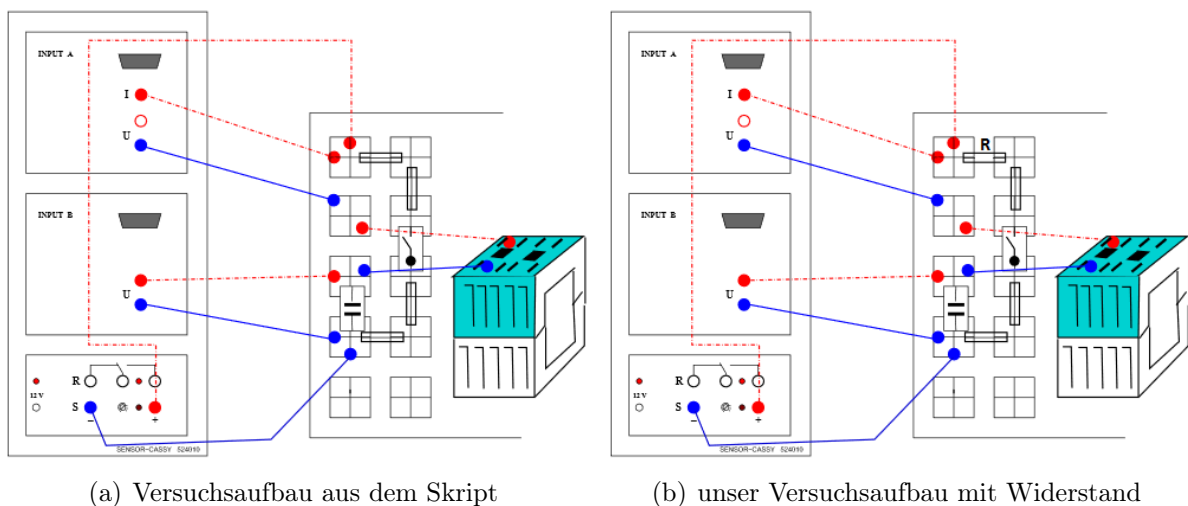


Abbildung 6: Versuchsaufbau

Dabei wurde die Schaltung aus Teilversuch 4.4.1 fast gänzlich übernommen. Lediglich wurde das Oszilloskop durch ein Sensor Cassy ersetzt. Die Werte für die Spule, den Kondensator und die Eingangsspannung entsprechen daher denen aus Teilversuch 4.4.1. Der skizzierte Dreh-Widerstand wurde auch im Aufbau zuvor benutzt allerdings auf null ( $\approx 0.02 \Omega$ ) gedreht.

Die Messbereiche wurden folgendermaßen eingestellt:

$$U_B = \pm 10V \quad T_B = 40ms. \quad (8)$$

Da wir die Schwingung eines sich entladenden gedämpften LRC-Schwingkreises bei einer Eingangsspannung von etwa  $5.62V$  gemessen haben, haben wir den Trigger der Spannungsmessung auf ab  $5.5V$  fallend eingestellt.

## 2.3 Durchführung

Insgesamt haben wir 34 Einzelmessungen durchgeführt. Dabei haben wir für die Messung der Induktivität unterschiedliche Widerstände über den Drehwiderstand eingestellt und gemessen. Für die Messung der Frequenz und des Dämpfungskoeffizienten haben wir mehrere Schwingungen für den selben Widerstand gemessen. Bei weiteren Messungen haben wir die Messzeit extrem verlängert, um einen eventuellen Offset besser abzuschätzen.

Für die Aufzeichnung eines Kriechfalls haben wir den Drehwiderstand durch einen  $1k\Omega$  Widerstand ersetzt. Damit konnte sichergestellt werden, dass  $D \gg 1$  und somit ein Kriechfall vorliegt.

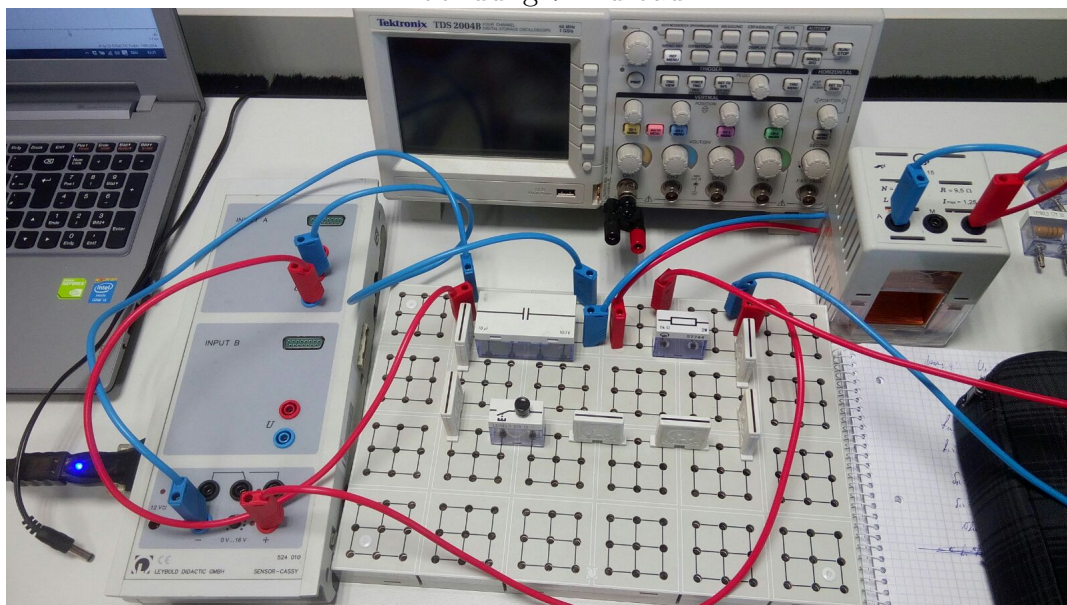
Für die Aufzeichnung des aperiodischen Grenzfalls haben wir zunächst den nötigen Widerstand über Gleichung ?? abgeschätzt. Bei den gegebenen Werten für  $R$  und  $L$  gilt dann:

$$R_{ap} \approx 120\Omega. \quad (9)$$

Der Drehwiderstand musste also in diesen Bereich eingestellt und beobachtet werden ob bei der Schwingung die entsprechende Charakteristik vorliegt.

Für die Messung von  $f$ ,  $\delta$  und  $L$  wurden Schwingfälle benötigt. Daher wurden hier Widerstände eingestellt, die deutlich unter  $R = 120\Omega$  liegen.

Abbildung 7: Aufbau



## 2.4 Versuchsauswertung

### 2.4.1 Rohdaten

Bei der Vermessung mit dem Cassy wurde dieselbe Spule, derselbe Kondensator und dieselbe Eingangsspannung wie in Teilversuch 4.4.1 verwendet.

Aus der Auflösung des Cassy folgen Ablesefehler von:

$$\sigma_U = \frac{0.01V}{\sqrt{12}} \quad \sigma_T = \frac{0.03ms}{\sqrt{12}} \quad (10)$$

Im Folgenden sind Beispielmessungen abgebildet.

Abbildung 8: Schwingfall bei  $R \approx 0.02\Omega$  mit Bestimmung des Offsets

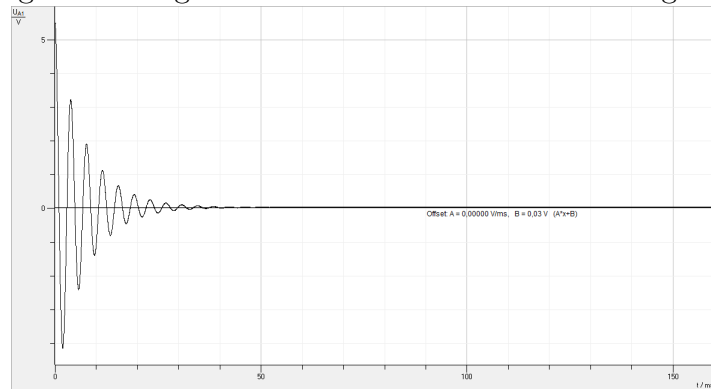


Abbildung 9: Schwingfall bei  $2.4\Omega$

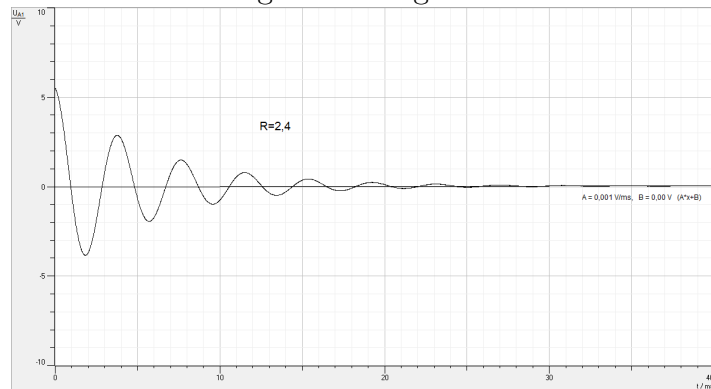
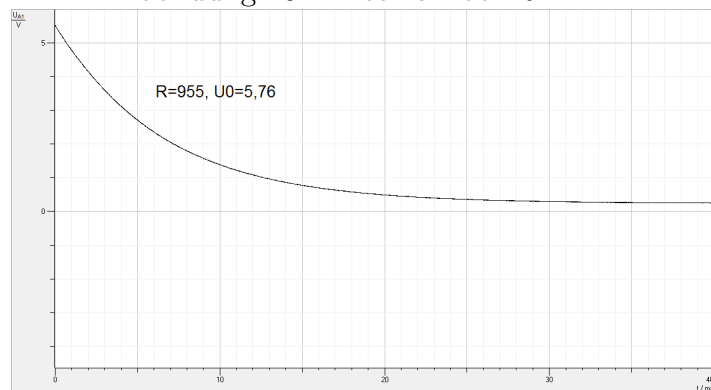


Abbildung 10: Kriechfall bei  $R=1k\Omega$



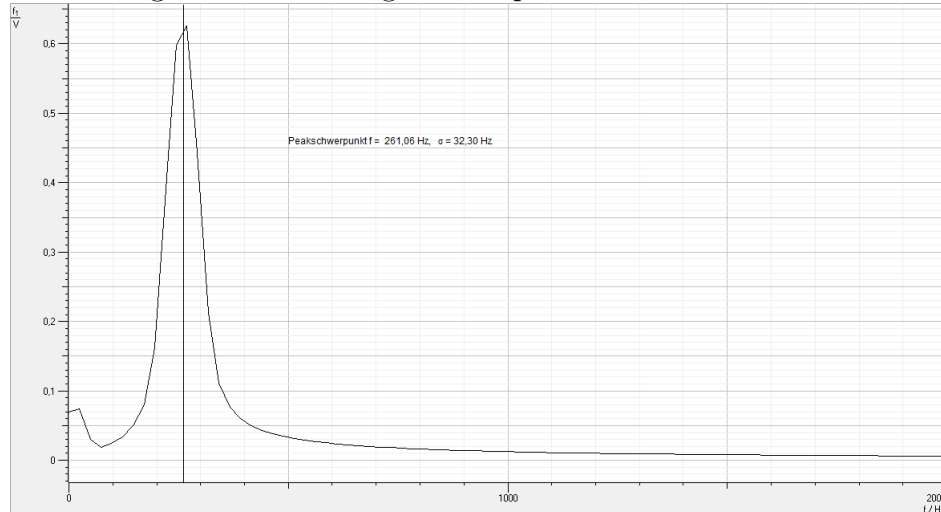


## 2.4.2 Transformation der Rohdaten

### Bestimmung der Frequenz durch FFT:

Mithilfe der in Cassy eingebauten Fast-Fourier-Transformation(FFT) lässt sich sehr schnell die Frequenz einer Schwingung bestimmen:

Abbildung 11: Bestimmung der Frequenz bei  $R = 2.4\Omega$  durch FFT



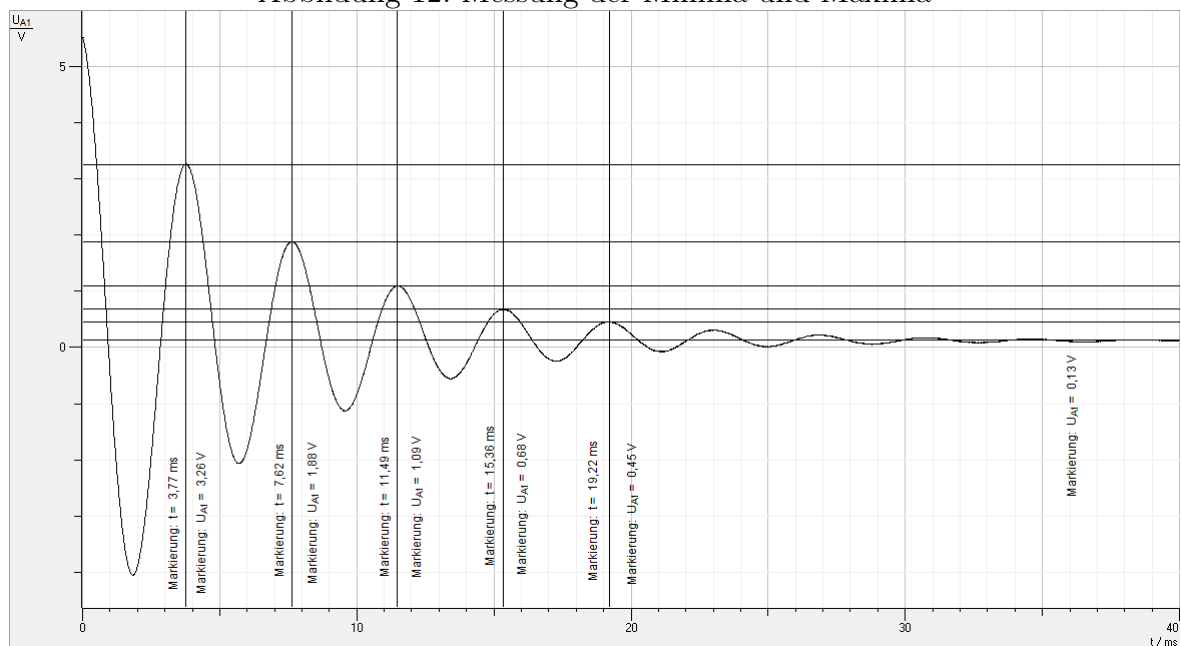
$$f = 261.06 Hz, \quad \sigma = 32.3 Hz. \quad (11)$$

Allerdings ist die Fehlerrechnung durch FFT fehlerhaft und undurchsichtig, die Fehlerabschätzung durch FFT ist also nicht sinnvoll. Im Folgenden haben wir die Frequenzen durch Ablesen bestimmt, um so auch den Fehler auf die Frequenz sinnvoll zu bestimmen.

### Bestimmung der Frequenz und des Dämpfungskoeffizienten durch Ablesen:

Wie bei Teilversuch 4.4.1 kann man die Frequenz und den Dämpfungskoeffizienten auch durch Ablesen der Maxima errechnen. Wichtig ist es auch hier den Offset vernünftig zu bestimmen und vor der Logarithmierung zu korrigieren.

Abbildung 12: Messung der Minima und Maxima





Auf eben diese Weise haben wir 4 Schwingungen bei unterschiedlichen Widerständen vermessen. Aus diesen Werten wurde jeweils die Frequenz und die Dämpfungskonstante mit Fehlern durch die Methode des gewichteten Mittelwerts bestimmt. Theoretisch können die Werte auch durch die Relationen:

$$f_{Theo} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (12)$$

$$\delta_{Theo} = \frac{R}{2L} \quad (13)$$

bestimmt werden.

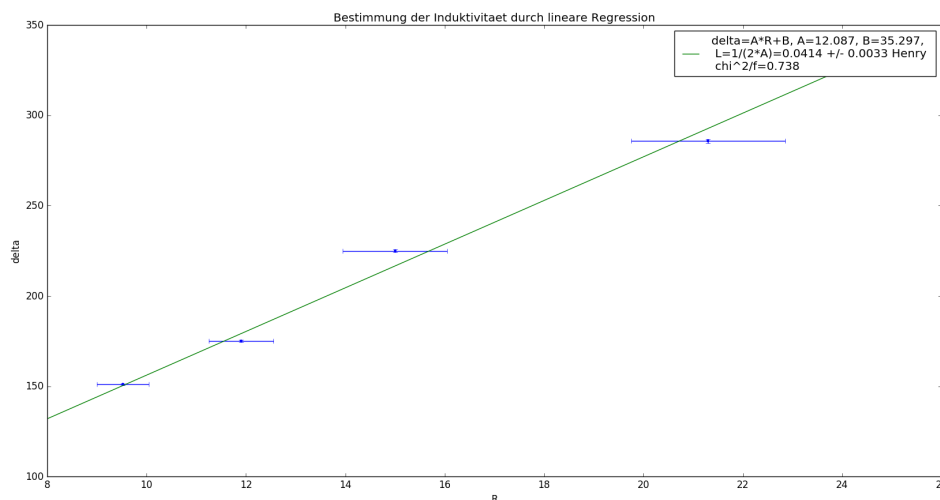
Ergebnisse:

R in $\Omega$	$\bar{f}$ in Hz	$\sigma_{\bar{f}}$ in Hz	$f_{Theo}$ in Hz	$\bar{\delta}$ in $\frac{1}{s}$	$\sigma_{\bar{\delta}}$ in $\frac{1}{s}$	$\delta_{Theo}$ in $\frac{1}{s}$
0.02	258.896	0.290	264.422	150.997	0.527	132.222
2.4	258.398	0.334	263.951	175.023	0.654	165.278
5.5	257.046	0.331	263.178	225.027	1.050	208.333
11.8	254.030	0.395	261.046	285.786	1.552	295.833

### Bestimmung der Induktivität:

Aus Relation (??) folgt, dass die Steigung  $a$  einer Geraden von  $\delta$  gegen  $R$ ,  $a = \frac{1}{2L}$  entspricht. Trägt man nun unsere Messwerte von  $\delta$  unter Betrachtung der Fehler (Lineare Regression) gegen  $R$  auf, ergibt sich der folgende Graph.

Abbildung 13: Bestimmung der Induktivität mittels Linearer Regression



Der Fehler auf die Induktivität pflanzt sich dabei folgendermaßen fort:

$$\sigma_L = \frac{\sigma_A}{4A^2} \quad (14)$$

Ergebnis:

$$\delta(R) = A * R + B$$

$$A = 12.087 \frac{1}{H} \quad B = 35.297 \frac{1}{s}$$

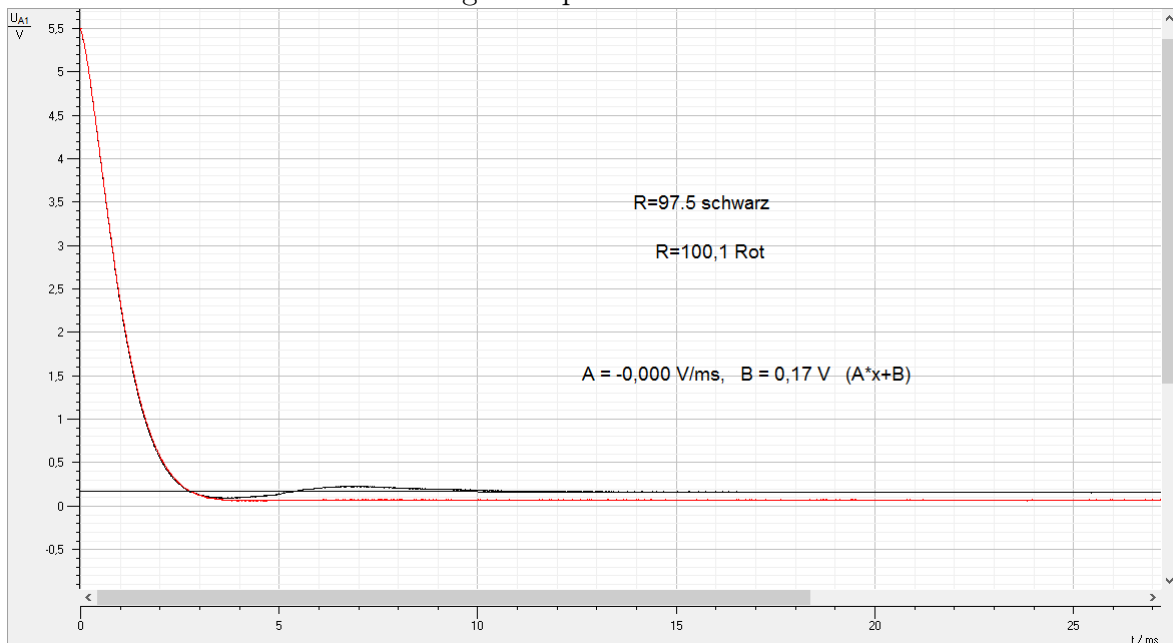
$$\Rightarrow L = \frac{1}{2A} = 0.0414 \pm 0.0033H, \quad L_{Hersteller} = 0.036H$$

$$\frac{\chi^2}{f} = 0.738$$

### 2.4.3 Analyse und Fazit

#### Aperiodischer Grenzfall

Abbildung 14: Aperiodischer Grenzfall



Wie bereits erwähnt sollte der aperiodischer Grenzfall bei einem Widerstand von etwa

$$R_{ap} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} - R_L \approx 120\Omega - 9.5\Omega = 110.5\Omega \quad (15)$$

auftreten. Mit  $R_L$  dem Spuleninnenwiderstand. Wie man in Abbildung ?? sehr gut sieht schwingt die Schaltung bei  $97.5\Omega$  noch, während sie bei  $100.1\Omega$  gerade nicht mehr schwingt. Wir bestimmen den nötigen Widerstand für den aperiodischen Grenzfall also zu:

$$R_{ap} = 100.1\Omega. \quad (16)$$

Dieser Wert ist kleiner als der erwartete Wert, was aber zu erwarten war, da die Schaltung wahrscheinlich noch weitere Innenwiderstände hat als nur den auch sehr ungenauen Spuleninnenwiderstand.

#### Analyse der Frequenz und des Dämpfungskoeffizienten durch Ablesen:

Betrachtet man die Frequenzen fällt auf, dass die berechneten kleiner sind als die theoretischen. Dies resultiert offenbar aus einem systematischen Fehler, denn die theoretischen Werte haben wir allein aus den Herstellerangaben für  $L$ ,  $C$  und  $R$  berechnet.

Der Fehler auf die Frequenz steigt mit steigendem  $R$ . Dies kann man dadurch erklären, dass bei steigendem  $R$  die Dämpfung größer ist und somit weniger Maxima bzw. Messpunkte zur Verfügung standen.

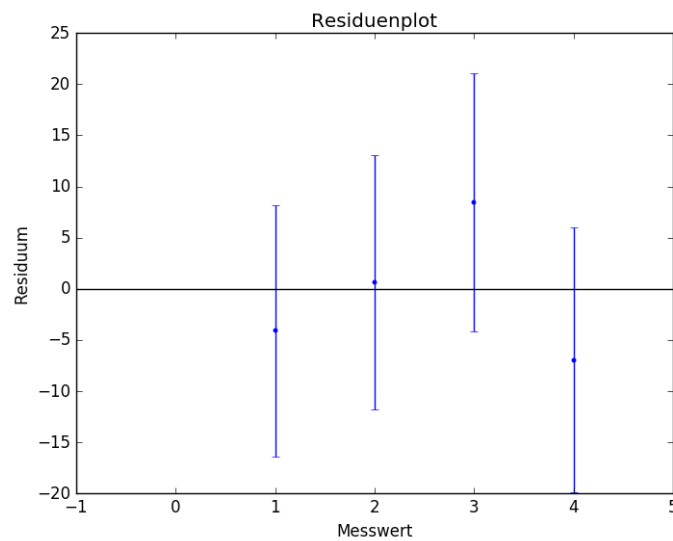
Die Dämpfungskonstante steigt natürlich mit steigendem  $R$ , weil  $\delta = \frac{R}{2L} \Rightarrow \delta \sim R$ .

Diese Proportionalität pflanzt sich auch auf den Fehler von  $\delta$  fort und erklärt somit auch das mit steigendem  $R$  steigende  $\sigma_\delta$ .

#### Analyse der Induktivität:

Bei der Linearen Regression kann man erkennen, dass die Gerade alle Fehlerkästen schneidet. Der Fehler auf  $R$  ist dominant, was zu erwarten war, da wir ihn nur grob mit dem Drehwiderstand eingestellt und mit dem Multimeter überprüft haben (Fehlerabschätzung  $\sigma_R = 5\%$ ).

Abbildung 15: Residuenplot für Induktivität



Der Residuenplot zeigt sowohl, dass keine Systematik vorliegt als auch, dass alle Werte mit ihren Fehlern passen. Auch das  $\frac{\chi^2}{f}$  von 0.738 ist passend.

Der gemessene Wert für  $L$  ist kleiner als der theoretische. Dies lässt sich dadurch erklären, dass  $L \sim R$  und wir wieder annehmen müssen, dass der Innenwiderstand des gesamten Stromkreises als größer anzunehmen ist.

**Fazit:**

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Versuch äußerst erfolgreich verlaufen ist. Zwar weichen die gemessenen Werte oft von den theoretischen ab, die theoretischen Werte wurden allerdings auch nur aus den Herstellerangaben berechnet. Daher gehen wir davon aus, dass die von uns gemessenen Werte besser sind als die theoretischen.