

Protokoll Akustik

Gruppe B02

Bastian Kargoll
Jonas Morgenweg
Carsten Robens
Rüdiger Matti Schmidt

26. September 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Laufzeit gegen Laufstrecke	3
1.1	Ziel	3
1.2	Theoretische Grundlagen	3
1.3	Versuchsaufbau	4
1.4	Kalibrierung	5
1.4.1	Durchführung der Kalibrierung	5
1.4.2	Auswertung der Kalibrierung	6
1.5	Versuchsaufbau (Änderung)	7
1.6	Versuchsdurchführung	8
1.7	Auswertung	8
2	Resonzlänge einer stehenden Welle	10
2.1	Ziel	10
2.2	Theorie - Resonanzlängen	10
2.3	Versuchsaufbau	11
2.4	Versuchsdurchführung	12
2.5	Auswertung	12
3	Elastizitätsmodul	15
3.1	Ziel des Versuchs	15
3.2	Versuchsaufbau	15
3.3	Versuchsdurchführung und Auswertung	15
3.3.1	Vermessung der Stäbe	15
3.3.2	Frequenzbestimmung	19
3.3.3	Das Elastizitätsmodul	22
3.3.4	Schallgeschwindigkeit in Festkörpern	24

1 Laufzeit gegen Laufstrecke

1.1 Ziel

In diesem Versuch wird die Schallgeschwindigkeit direkt anhand einer Laufzeitmessung bestimmt.

1.2 Theoretische Grundlagen

Aus den Eulergleichungen für adiabatische Vorgänge lässt sich folgende Wellengleichung für den Schalldruck herleiten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) = \frac{\varrho}{\kappa p_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t) \quad (1)$$

Daraus ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\varrho}} \quad (2)$$

Daraus folgt mit der allgemeinen Gasgleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad \text{mit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{R \cdot \kappa}{M_{\text{Mol}}}} T_0 \quad (3)$$

Allgemeine Gaskonstante	R	$=$	$8,3145 \left[\frac{\text{J}}{\text{Mol} \cdot \text{K}} \right]$
Adiabatexponent	κ	$=$	$\frac{7}{5}$ für ein zweiatomiges Gas
Molmasse von Luft	M_{Mol}	$=$	$28,984 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{kg}}{\text{Mol}} \right]$
	T_0	$=$	$273,15 [\text{K}]$

Unter diesen Bedingungen ist $v_0 = 331,21 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Wenn man Gleichung (3) mit Hilfe der Taylorentwicklung um $\Delta T = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ entwickelt, so folgt:

$$\begin{aligned} v &= v_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} \\ &\Rightarrow v \approx v_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{2T_0} \right) \end{aligned}$$

Mit den Werten von oben ergibt sich folgende praktische Näherungsformel für die Schallgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur ΔT in $^\circ\text{C}$:

$$v = 331,21 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,61 \cdot \Delta T \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot ^\circ\text{C}} \quad (4)$$

Durch Abschätzen des Restglieds der Taylorentwicklung ergibt sich auf einem Temperaturintervall von 0°C bis 100°C ein Fehler von unter $0,002 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

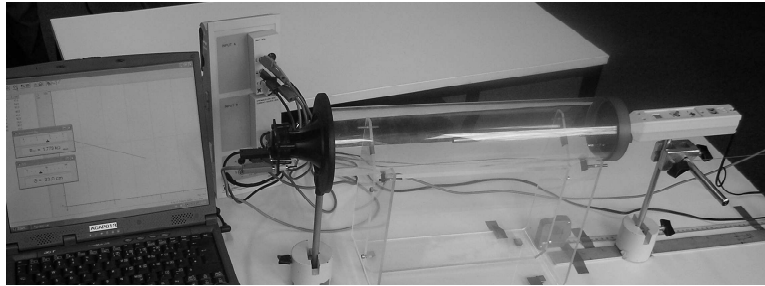


Abbildung 1: Versuchsaufbau Laufzeit gegen Laufstrecke

1.3 Versuchsaufbau

An einem Tische wird mit Hilfe einer Klemme eine 50 cm lange Aluminium-Schiene auf dem Tisch fixiert. Die Klemme dient zugleich als Halterung für den Wegaufnehmer, über dessen Schwungrad eine Schnur mit einem Gewicht gehängt wird. Das andere Ende der Schnur wird am Stativ des Mikrofons befestigt, wobei darauf geachtet wird, dass die Schnur vom Aufnehmer zum Mikrofonfuß parallel zum Tisch verläuft. Neben der Aluschiene wird mit Klebeband das Maßband fixiert. Am anderen Ende der Schiene schließt die Rohrhalterung an. Auf diese wird das ca. 42cm lange Plexiglasrohr gelegt und fixiert. Die dem Mikrofon zugewandte Seite wird mit einem schallharten Abschluss verschlossen, in dem sich mittig eine Öffnung für das Mikrofon befindet. Das andere Ende der Röhre wird mit einem Piezo-Höchtöner abgeschlossen. Die Alu-Schiene dient nun als Führung für das Mikrofonstativ, welches im Versuch in das Schallrohr hineingeschoben wird. Wie aus Abbildung 2 ersichtlich ist, wird an Kanal A des CASSY-Interfaces eine Timer-Box angeschlossen. Diese benötigt ein Start- (Eingang E) und ein Stoppsignal (Eingang F) zur Laufzeitmessung. An Eingang E wird der Piezo-Hochtöner angeschlossen sowie parallel dazu das rechte Relais-Schalterpaar. Wenn das Relais geschlossen wird, so entlädt sich das Piezoelement und eine Stoßwelle wird ausgesandt, während am Eingang E die intern anliegende Spannung auf 0V abfällt: die Startzeit der Messung ist somit die negative Flanke von E. Wenn die Schallwelle das Mikrofon (im Triggermodus) erreicht, sendet dieses ein Stoppsignal über Eingang F. Der Wegaufnehmer, ein Mehrgangpotentionmeter, wird an Kanal B angeschlossen und so eingestellt, dass mit der später in CASSY gewählten Einstellung der gesamte Verschiebebereich des Mikrofons erfasst werden kann.

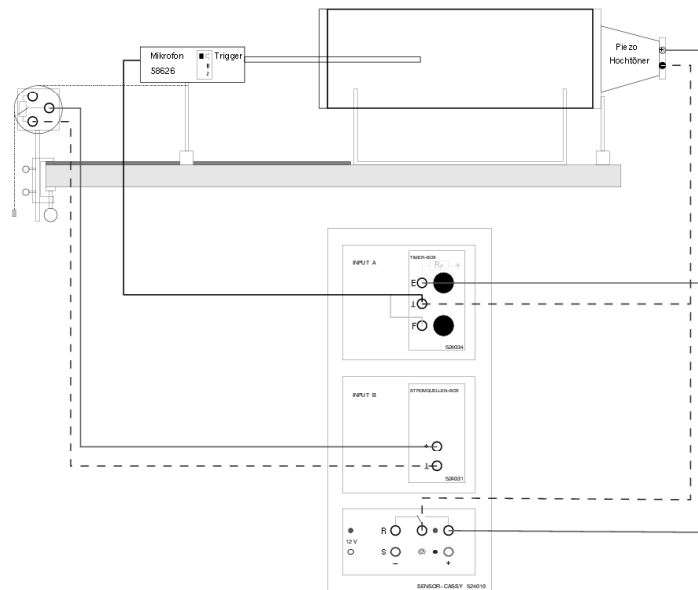


Abbildung 2: Skizze zum Versuch Laufzeit gegen Laufstrecke

1.4 Kalibrierung

Bevor der eigentliche Versuch, Laufzeit gegen Laufstrecke, gemessen werden kann, muss das Potentiometer kalibriert werden, da es produktionsabhängige Unterschiede in der Größe des Widerstandes von einigen Prozent geben kann.

1.4.1 Durchführung der Kalibrierung

In äquidistanten Abständen von jeweils 3cm wird mittels Sensor CASSY der Wert des Widerstands ermittelt. Hierzu wird am Stativfuß des Mikrofons eine Markierung angebracht, die mit den Millimetereinteilungen auf dem in unmittelbarer Nähe fixierten Maßband abgeglichen werden kann. Die genaue Position des Mikrofons ist bei dieser Messung irrelevant, da lediglich der Proportionalitätsfaktor zwischen ΔR und ΔS ermittelt werden soll. Um die Messdaten aufzunehmen, wurde CASSY Lab folgendermaßen konfiguriert:

CASSY	/ Kanal B / Strombox Widerstand RB1, 0-3kOhm, gemittelt 1000 ms
Messparameter	/ manuell
Formel	/ neue Größe $S = 60-3 \cdot n$
Darstellung	/ X-Achse RB1 / Y-Achse S

R[Ω]	σ_R	S[cm]	σ_S
1770,0	0,029	57,0	0,03
1582,5		54,0	
1390,5		51,0	
1203,0		48,0	
1015,5		45,0	
829,5		42,0	
642,0		39,0	
456,0		36,0	
268,5		33,0	

Tabelle 1: Messwerte (Kalibrierung)

1.4.2 Auswertung der Kalibrierung

Die aus dem Versuch mit Hilfe von Sensor CASSY ermittelten Messdaten werden durch

$$S_0 + \Delta S = K \cdot (R_0 + \Delta R) \quad (5)$$

parametrisiert. Die Messgrößen S_0 und R_0 sind für diese Messung nicht weiter interessant, da nur der Kalibrierungsfaktor K interessiert. Als Fehler auf die Widerstandswerte ist lediglich ein Gleichverteilungsfehler auf Grund der kleinsten Skalenbreite von $\sigma_R = \frac{0,1}{\sqrt{12}}\Omega$ zu erwarten. Da der Messbereich durch vorheriges Justieren etwa in der Mitte zwischen R_{min} und R_{max} des Drehpotentiometers lag, kann die Beziehung $R = U/I$ als linear angenommen werden. Für die Fehler auf die Messung der äquidistanten Streckenintervalle wird ein statistischer Ablesefehler von $\sigma_S = 0,03cm$ angenommen, da mit Hilfe des fixierten Maßbandes eine sehr genaue Distanzmessung möglich ist. Die Messwerte mit Fehler sind in Tabelle 1 dargestellt.

Die lineare Regression (ROOT) (Abb. 3, oben) liefert folgenden Wert für den Kalibrierungsfaktor (p1 im Plot):

$$K = (15,99 \pm 0,021) \left[\frac{cm}{k\Omega} \right] \quad (6)$$

Der Wert p0 bezeichnet den nicht weiter verwendeten Y-Achsenabschnitt der Regressionsgerade. Das $\chi^2/ndf = 1,07$ schafft Vertrauen in das Ergebnis und lässt den Fehler auf K sinnvoll erscheinen. Dieser Fehler wird bei der folgenden Messung als zusätzlicher statistischer Fehler bei der Bestimmung von $S = K \cdot R$ eingerechnet werden.

Um zu überprüfen, ob die Abweichung der Messpunkte zur Regressionsgeraden einer Systematik folgen, wird zusätzlich (Abb. 3, unten) der Residuengraph von ROOT plotten lassen. Auffällig ist hier zum einen, dass

jeweils zwei bis drei aufeinander folgende Messwerte nahezu die gleiche Abweichung aufweisen, sowie der “Sprung” vom 7. auf den 8. Messwert. Wir vermuten, dass diese “Gruppierungen” durch die begrenzte Auflösung der Widerstandsmessung zu Stande kommen.

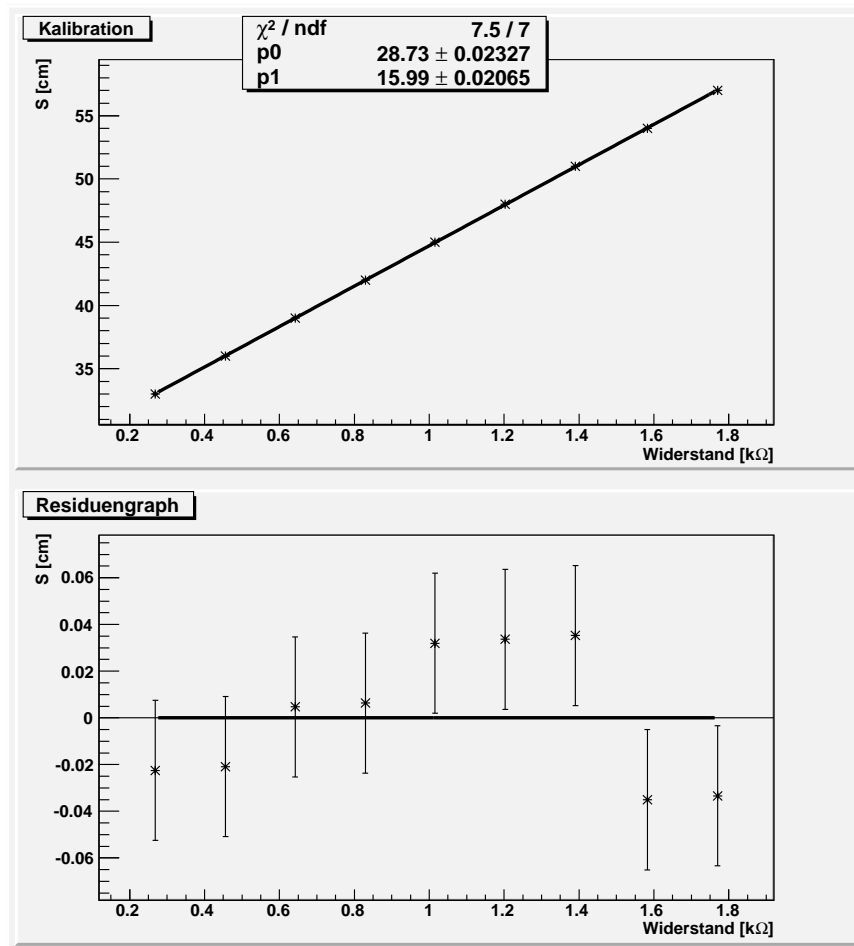


Abbildung 3: Kalibrierung

1.5 Versuchsaufbau (Änderung)

Nachdem der Wegaufnehmer kalibriert worden ist, wird der Versuch Laufzeit gegen Laufstrecke durchgeführt. Hierzu wird CASSY-Lab folgendermaßen konfiguriert:

```

CASSY          / Kanal A / Laufzeit Dta1 E-<F, 0.002s,
                  Flanken invertiert
                  Kanal B / Strombox Widerstand RB1, 0-3kOhm,
                  gemittelt
                  Relais / frac(t)<0.1 (periodisches Schalten)
Messparameter  / automatisch Intervall 1s
                  neue Messreihen anhängen
Formel          / neue Größe S = RB1 * 15.99
Darstellung    / X-Achse Dta1
                  / Y-Achse S

```

1.6 Versuchsdurchführung

An den gleichen Ortspunkten wie in der Kalibrierungsmessung ($\Delta S = 3\text{cm}$) wird die Laufzeit des Schalls gemessen. Dazu wird das Mikrofon an die entsprechende Position gefahren und mit Hilfe des periodisch schaltendem Relais werden jeweils 11 Werte aufgenommen. Am Anfang und am Ende des Versuches wird zudem die Temperatur gemessen.

1.7 Auswertung

Die mit CASSY-Lab ermittelten Daten sind in Tabelle 6 dargestellt.

Da der Widerstand lediglich um einen nicht messbaren (mit der eingestellten Genauigkeit von $0,1\Omega$) Wert schwankt, wird als Fehler, wie bei der Kalibrierung, ein Gleichverteilungsfehler von $\sigma_R = \frac{0,1\Omega}{\sqrt{12}}$ angenommen. Der Wert für die Laufzeit Δt stammt aus der besten Schätzung des wahren Mittelwerts der 11 aufgenommenen Zeiten pro Einzelmessung, der angegebene Fehler ist die Standardabweichung auf diesen Mittelwert. Ein Gleichverteilungsfehler auf Grund der kleinsten Skalenbreite bei der Zeitmessung kann vernachlässigt werden, da CASSY die Zeiten mit einer Genauigkeit von 10^{-8}s angibt und so der Fehler um einige Größenordnungen kleiner als der vorher genannte ist.

Mit den Daten aus Tabelle 6 wird mit Hilfe von ROOT eine lineare Regression durchgeführt (Abb.4, oben). Die ermittelte Geradensteigung (p1 im Plot) beträgt also:

$$M = (4,636 \pm 0,0023) \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{s}}{\text{k}\Omega} \right] \quad (7)$$

Das $\chi^2/ndf = 1,33$ schafft Vertrauen in das Ergebnis der Regression, die Abschätzung der Fehler ist also in einem angemessenen Maße erfolgt.

Der dazugehörige Residuengraph (Abb.4, unten) zeigt eine gleichmäßige Verteilung der Abweichungen der Messpunkte von der Ausgleichsgeraden und bestätigt eine korrekte Durchführung der Messung.

R[Ω]	$\sigma_R[\Omega]$	$\Delta t[10^{-3}s]$	$\sigma_{\Delta t}[10^{-3}s]$
330,0	0,029	0,73	0,00003
520,5		0,81	0,00241
706,5		0,90	0,00031
894,0		0,99	0,00211
1081,4		1,07	0,00018
1269,0		1,16	0,00364
1459,5		1,25	0,00223
1653,0		1,34	0,00300
1839,1		1,42	0,00363

Tabelle 2: Messwerte (Laufzeit gegen Laufstrecke)

Wenn man jetzt die inverse Steigung M der Geraden mit dem Kalibrationsfaktor K multipliziert, erhält man die Schallgeschwindigkeit v :

$$v = \frac{1}{K} \cdot M \quad (8)$$

mit dem Fehler

$$\sigma_v = v \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2} \quad (9)$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich:

$$v = (344,88 \pm 0,47) \left[\frac{m}{s} \right] \quad (10)$$

Der relative Fehler $\frac{\sigma_v}{v} = 1,38 \cdot 10^{-3}$ setzt sich aus den relativen Fehlern $\frac{\sigma_K}{K} = 1,29 \cdot 10^{-3}$ und $\frac{\sigma_M}{M} = 0,49 \cdot 10^{-3}$ zusammen. Der Fehler aus der Kalibrierung σ_K geht somit bei der Berechnung des Fehlers auf die Schallgeschwindigkeit ca. siebenmal so stark ein wie der Fehler σ_M aus der Laufzeit gegen Laufstrecke-Messung.

Für Vergleichszwecke wird der theoretisch zu erwartende Wert der Schallgeschwindigkeit nach der Näherungsformel (3) berechnet.

Die Messung der Raumtemperatur am Anfang und am Ende des Versuches ergab beide Male einen Wert von 24 °C. Der systematische Fehler auf den Temperaturfühler wird mit $\sigma_T = 1^\circ\text{C}$ abgeschätzt. Der Mittelwert und der Fehler auf die Geschwindigkeit ergibt sich dann zu:

$$\sigma_v = \frac{v_0}{2T_0} \sigma_T = 1^\circ\text{C} v_{theo} = 345,76 \pm 0,61 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (11)$$

Der experimentelle Wert liegt somit im Fehlerintervall der theoretischen Voraussage. Ein graphischer Vergleich wird, zusammen mit dem Ergebnis aus dem zweiten Versuch zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, in Abb. 8 präsentiert.

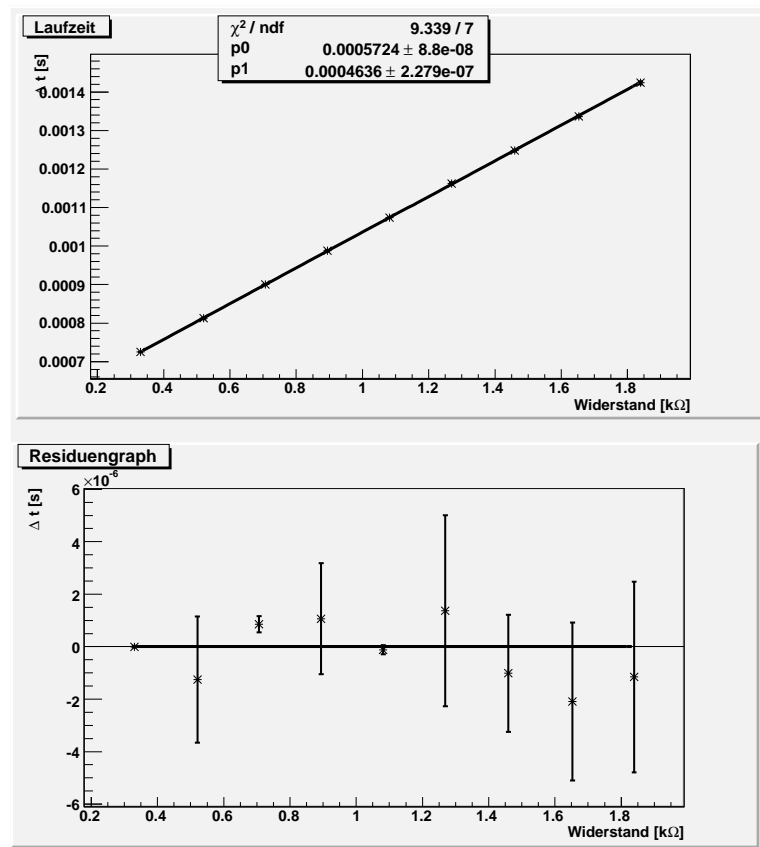


Abbildung 4: Laufzeit gegen Strecke

2 Resonzlänge einer stehenden Welle

2.1 Ziel

In diesem Versuch wird die Resonanzlänge einer stehenden Welle ausgemessen und so indirekt die Schallgeschwindigkeit bestimmt.

2.2 Theorie - Resonanzlängen

Der Effektivwert des Schalldrucks einer longitudinalen, stehenden Welle lässt sich mittels der Formel

$$\hat{p}(x) = \frac{\rho \cdot v \cdot u_L}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos(kx)}{\sin(kL)} \quad (12)$$

berechnen. Diese lässt sich aus den Eulergleichungen ableiten. Resonanz liegt somit vor, wenn der Nenner $\sin(kL)$ gegen Null geht, da in diesem Fall der Effektivwert des Schalldrucks gegen Unendlich geht. Dies ist der Fall, wenn

$$\sin(kL) = 0 \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow kL = n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot L = n \cdot \pi \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{n \cdot \lambda}{2} = \frac{n \cdot v}{2 \cdot f} \quad (16)$$

Physikalisch anschaulich lässt sich dieser Sachverhalt erklären, wenn man bedenkt, dass eine stehende Welle genau dann Resonanzverhalten zeigt, wenn sie an den beiden Enden der Röhre (schallharter Abschluss) derart reflektiert wird, dass sich die hin- und rücklaufenden Wellen gegenseitig verstärken. Dies ist offenbar gegeben, wenn am schallharten Abschluss ein Druckbauch vorliegt, also bei

$$L = \frac{n \cdot \lambda}{2}.$$

2.3 Versuchsaufbau

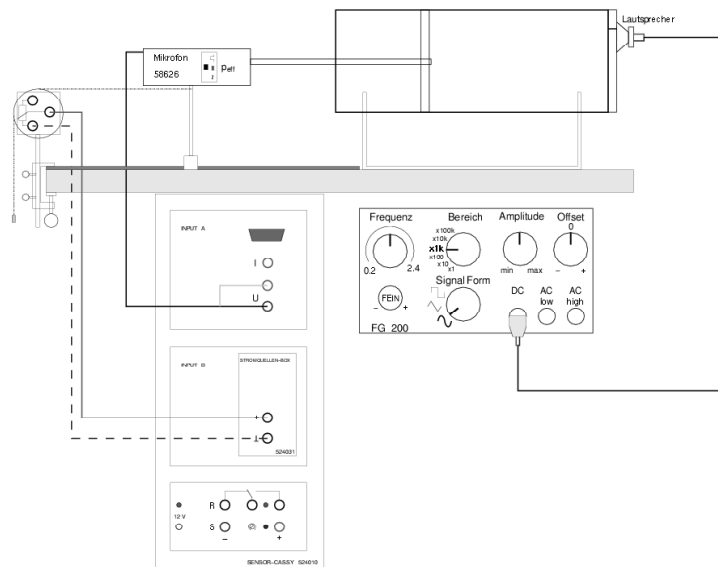


Abbildung 5: Skizze des Aufbaus zur Bestimmung der Resonanzlänge einer stehenden Welle

Der Versuchsaufbau des vorherigen Versuchs wird weitestgehend übernommen, nur einige Teile des Aufbaus werden modifiziert (vgl. Abbildung 5):

- Der Piezohochtöner wird entfernt und durch einen schallfesten Abschluss ersetzt.
- In die Abschlusswand wird ein kleiner Lautsprecher eingesetzt und an einen Frequenzgenerator angeschlossen.

- Die andere Abschlusswand wird entfernt. Auf die Mikrofonspitze wird eine Platte so aufgesetzt, dass sie in das Rohr hineingeführt werden kann und dieses an der jeweiligen Position abschließt.
- Das Mikrofon wird im Effektivwertmodus direkt an CASSY-Anschluss A angeschlossen, um die gemessenen Spannungen auszulesen.

Einstellungen der Software:

```

CASSY          / Kanal A / Spannung   Ua1 0-Umax Nullpunkt links,
                  gemittelt 1000ms
                  Kanal B / Widerstand Rb1 0-3k0hm
Meßparameter / manuell
Formel         / neue Größe S=Rb1*15,99 (Wegaufnehmer Kalibrierung)
Darstellung    / X-Achse S
                  Y-Achse Ua1

```

2.4 Versuchdurchführung

Zunächst wird die Frequenz des Frequenzgenerators auf ein Maximum eingestellt, um die Sensibilität des Mikrophons zu kalibrieren. Anschliessend wird diese ein wenig geringer ($f = 2505,79 \pm 0,2 \text{ Hz}$) eingestellt um mögliche Schwankungen zu verringern. Nun wird in kleinen Abständen das Mikrofon vorgeschoben und mit CASSY-Lab jeweils ein Meßwert pro Ort aufgenommen. Nach dem Auffinden von zwei Resonanzstellen lässt sich die Wahl der weiteren Positionen von Resonanzlängen abschätzen.

2.5 Auswertung

Zur Auswertung der Daten wird das selbstgeschriebene C++ Makro für ROOT verwendet (die Makros sowie die Messdaten befinden sich auf der beiliegenden CD-ROM), welches auf dem Peakfinder der Maple-Bibliothek basiert. Dieses Makro sucht in einem angegebenen Intervall das Maximum (y_{max}), sowie die x-Positionen der beiden Stellen $y_S = (y_{max} \cdot \text{Schwelle})$. Um einen Fehler auf die Peaks abzuschätzen wird exemplarisch bei einem Peak (siehe Abbildung 6, 4. Peak) die Schwelle verändert:

Schwelle	Peak [Ω]
0,3	2206,02
0,5	2206,60
0,7	2207,19
0,9	2205,57

Der Mittelwert für Peak 4 liegt somit bei einer Schwelle von 0.5, welche für die weitere Analyse verwendet wird, für den gesamten Fehler summiert

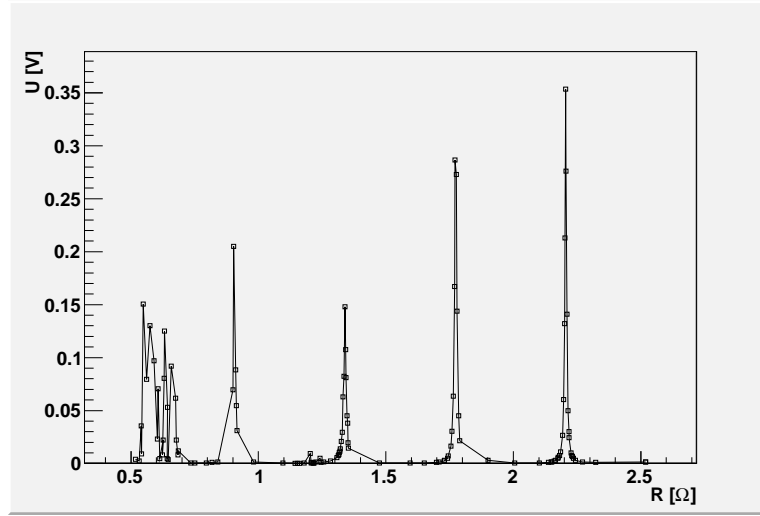


Abbildung 6: Messung der Schalldruckamplitude gegen Resonatorlänge

man den Fehler auf den Peak $\sigma_R = \pm 0,6\Omega$ (abgeschätzt aus der Differenz der Peaks bei unterschiedlicher Schwelle) und den statistischen Fehler auf die Widerstandsmessung $\frac{0,1}{\sqrt{12 \cdot n}}$, wobei n die Anzahl der Messpunkte ist, die in die Peakbestimmung eingeflossen sind. Für die weiteren Peaks ergab sich:

Peak [Ω]	σ [Ω]
910,50	2,02
1342,20	2,21
1775,40	2,21
2206,60	2,23

Nach Durchführung einer linearen Regression (siehe Abbildung 7) ergibt sich eine Steigung(im Plot als $p1$) von:

$$S = (432,16 \pm 0,28) \cdot 10^{-3} [k\Omega] \quad (17)$$

Das χ^2 ist mit 0,89 sehr nahe bei 1, was zeigt, dass die Fehler weder überschätzt noch unterschätzt wurden und es keine deutlichen Ausreißer gab. Die Schallgeschwindigkeit lässt sich nun mit Hilfe von Gleichung (16) berechnen:

$$v = 2f \cdot S \cdot K \quad (18)$$

mit dem Fehler:

$$\sigma_v = v \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2} \quad (19)$$

Der Kalibrierungsfaktor K wird aus der Gleichung (6) übernommen. Während der Versuch durchgeführt wurde, registrierte die parallel arbeitende Gruppe einen deutlichen zusätzlichen Peak in dem von ihnen gerade erstellten

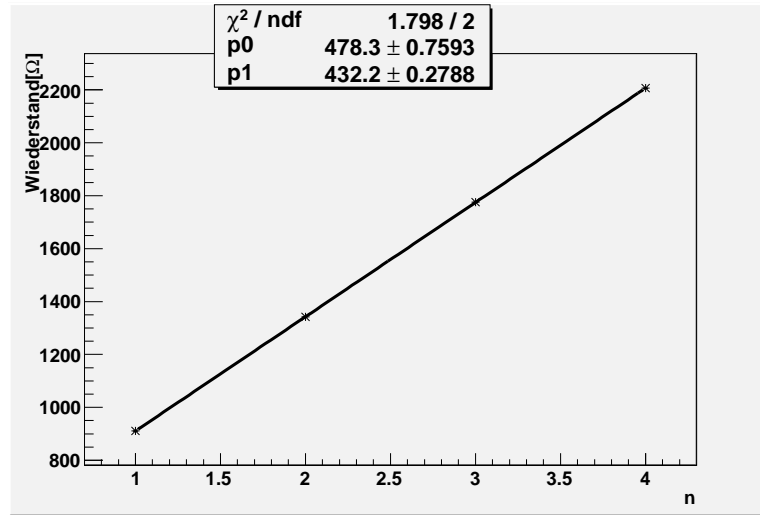


Abbildung 7: Bestimmung der Steigung

Frequenzspektrum. Da dieser Wert nicht von dem am Nachbartisch ausgeführten Versuch kommen konnte, war es eindeutig, dass er die in diesem Versuch erzeugten Frequenzen darstellte. Die Frequenz von $f = 2505,79 \text{ Hz}$ wurde mittels des CASSY-Peakfinders aus dem so aufgezeichneten Spektrum bestimmt. Dazu wurde eine angemessene Anzahl von Punkten des Frequenzspektrums berücksichtigt (also alle Punkte, die sich im Peak deutlich vom Grundrauschen abheben). Der Fehler wurde durch Variation dieser Anzahl von Punkten auf einen Wert von $\sigma_f = 0,2 \text{ Hz}$ abgeschätzt.

Nach Einsetzen der Werte erhält man:

$$v = (346,31 \pm 0,31) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (20)$$

In Abbildung 8 werden die beiden experimentell ermittelten Werte für die Schallgeschwindigkeit mit dem theoretisch berechneten Wert (siehe Gleichung (11)) verglichen.

Es ist ersichtlich, dass sich zumindest die Fehlerintervalle der beiden experimentell ermittelten Werte mit dem des Theoriewerts überschneiden. Mit Hilfe der folgenden Formeln soll nun die Kompatibilität der Messungen zum Theoriewert bestimmt werden:

$$\Delta = |v_{theo} - v_{exp}| \quad (21)$$

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_{theo}^2 + \sigma_{exp}^2} \quad (22)$$

Mit den gemessenen Werten ergibt sich:

$$\Delta_{theo-lauf} = (0,88 \pm 0,77) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (23)$$

$$\Delta_{theo-resonanz} = (0,34 \pm 0,68) \left[\frac{m}{s} \right] \quad (24)$$

Somit ist gezeigt, dass beide Messungen mit der Theorie vereinbar sind, da beide im 2σ Intervall liegen; die zweite Messung sogar im 1σ Intervall.

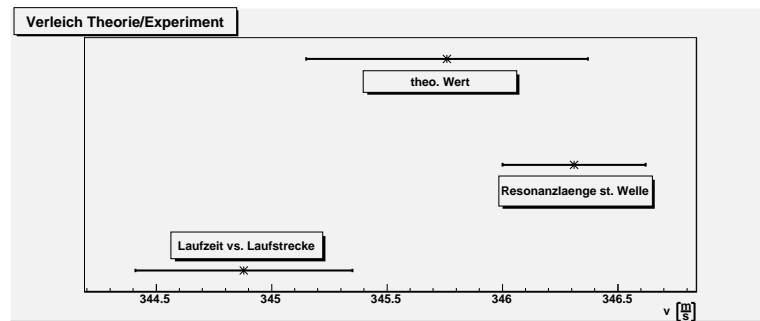


Abbildung 8: Vergleich der Messergebnisse mit der Theorie

3 Elastizitätsmodul

3.1 Ziel des Versuchs

Ziel ist es, mittels einer Resonanzfrequenzbestimmung von Metallstäben, die jeweiligen Elastizitätsmodule der Materialien zu ermitteln. Zudem werden aus den ermittelten Daten die Schallgeschwindigkeiten in den unterschiedlichen Metallen bestimmt.

3.2 Versuchsaufbau

Die zu untersuchenden Stäbe werden mit einer Kreuzmuffe an einer Platte befestigt. Dabei wird in der Kreuzmuffe ein kleiner Metallstift derart eingesetzt, dass die Stange nur an zwei Punkten gehalten wird und somit longitudinal frei schwingen kann. Vor einem Ende des Stabes wird ein Richtmikrofon im Amplitudenmodus im Abstand von ca. 5mm aufgestellt, angeschlossen an ein CASSY-Modul. Dieses wird von einem Computer während der Messung ausgelesen.

3.3 Versuchsdurchführung und Auswertung

3.3.1 Vermessung der Stäbe

Zunächst werden alle Stäbe zur späteren Auswertung vermessen. Es werden Masse, Länge und Durchmesser bestimmt. Die Materialien der Stäbe sind nicht bekannt, drei Stäbe zeigen aber eindeutige Charakteristika bestimmter Metalle und werden daher im Folgenden entsprechend bezeichnet. Die beiden

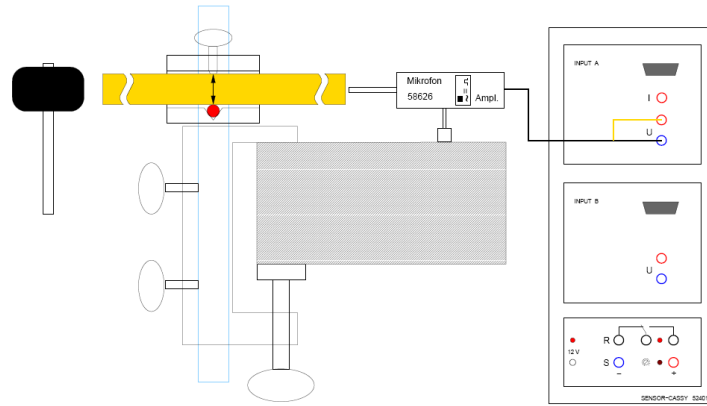


Abbildung 9: Skizze zum Aufbau des Versuchs zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Stäbe aus nicht eindeutig identifizierbaren Materialien werden zunächst als „kurzer Stab“ und „langer Stab“ bezeichnet.

Die Masse wird mittels einer Analysewaage gemessen, die auf $0,1g$ genau bestimmt. Hierzu wird die Waage mehrmals auf Null gesetzt und die zu vermessende Stange in verschiedenen Positionen gemessen. Die Differenzen zwischen den einzelnen Messungen einer Stange sind dabei sehr gering. Bis auf sehr wenige Ausnahmen wurde für eine Stange immer derselbe Wert ermittelt. Daher wird der statistische Fehler auf die Masse abgeschätzt durch den Fehler, der sich durch die Gleichverteilung ergibt. Ein eventuell vorhandener systematischer Fehler, bedingt durch die Bauart der Waage, wird als deutlich geringer als $0,1g$ eingeschätzt und somit vernachlässigt. Der abgeschätzte Gesamtfehler auf die Masse beträgt demnach für alle Stangen:

$$\sigma_m = \frac{0,1}{\sqrt{12}} g \quad (25)$$

Zur Vermessung der Länge wird ein Maßband genutzt, welches eine Skaleneinteilung von $1mm$ hat. Die Stäbe besitzen abgerundete Ecken, was eine genaue Längenmessung erschwert. Die Messung der Länge erfolgte daher von der Spitze bis zum Beginn der Rundung auf der gegenüberliegenden Seite, wodurch die Rundung sich einigermaßen aufheben sollte. Der Fehler durch die Gleichverteilung beläuft sich somit auf:

$$\sigma_l^{stat} = \frac{1}{\sqrt{12}} mm.$$

Durch die hinzukommende Ungenauigkeit, bedingt durch die Rundung, wird die Abschätzung des statistischen Fehlers auf

$$\sigma_l^{stat} = 0,5 mm$$

erhöht. Hinzu kommt hier ein systematischer Fehler des Maßbandes. Da dieses eventuell nicht so genau geeicht wurde wie eine Analysewaage, wird der systematische Fehler auf 1‰ der Länge abgeschätzt, also

$$\sigma_l^{sys} = 0,001 \cdot l.$$

Insgesamt ergibt sich als abgeschätzter Fehler auf die Länge:

$$\sigma_l = 0,5 \text{ mm} + 0,001 \cdot l \quad (26)$$

Während des Experiments wurde in regelmäßigen Abständen die Temperatur gemessen. Diese hat nach der Formel

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha_l(T - T_0))$$

Einfluss auf die Länge des Stabes, α_l bezeichnet dabei den spezifischen linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten. Dieser ist abhängig vom Material und hat eine ungefähre Größe von $\alpha_l \approx 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$. Die Temperaturänderung im Experimentiersaal betrug über die ganze Dauer des Versuchs weniger als 1°C, die dadurch verursachte Längenänderung liegt bei

$$\frac{L}{L_0} \approx 1 + 2 \cdot 10^{-5} = 1,00002$$

Der angenommene Fehler durch das Maßband ist etwa 50-mal größer, daher wird der durch die Temperaturänderung entstandene Fehler auf die Längenmessung im Folgenden nicht weiter berücksichtigt. Die Eigenfrequenz des Stabes, die über die Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot l$ mit der Länge verknüpft ist, wird durch die Temperaturänderung ebenfalls nur in vernachlässigbar geringem Maße beeinflusst.

Der Durchmesser der Stäbe wird mittels einer Mikrometerschraube bestimmt. Es wird jeweils an fünf verschiedenen Punkten über den Stab verteilt gemessen. An jedem Punkt werden zwei Messungen, zueinander orthogonal, durchgeführt. Die Messdaten eines jeden Stabes werden gemittelt, um einen mittleren Durchmesser zur späteren Volumenberechnung zu erhalten. Es soll in der weiteren Rechnung genähert werden, dass es sich bei den Stangen um gleichmäßige Zylinder handelt. Der Mittelwert des Durchmessers d berechnet sich aus den n einzelnen Messergebnissen d_i gemäß der Formel:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \quad (27)$$

Der Fehler auf jede Einzelmessung beträgt auf Grund der Gleichverteilung bei einer Skaleneinheit von $10^{-5}m$

$$\sigma_{d_i} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{12}} m.$$

Berechnet man nun den Fehler σ_d mit Hilfe der Formeln für den gewichteten Mittelwert, so ergibt sich, da alle Einzelfehler gleich sind:

$$\sigma_d^{stat} = \frac{\sigma_{d_i}}{\sqrt{n}} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{12 \cdot n}} m \quad (28)$$

Der systematische Fehler auf die Messung wird mit

$$\sigma_d^{sys} = 5 \cdot 10^{-6} m + 10^{-5} \cdot d \quad (29)$$

abgeschätzt. Dieser wurde aus der Vorlesung zum Praktikum von Prof. Raupach übernommen. Insgesamt ergibt sich als Fehler auf den Durchmesser der Stangen:

$$\sigma_d = \frac{10^{-5}}{\sqrt{12 \cdot n}} m + 5 \cdot 10^{-6} m + 10^{-5} \cdot d \quad (30)$$

Beispielhaft sei hier die Bestimmung des Mittelwerts und des Fehlers auf den Durchmesser der Aluminiumstange dargestellt. Folgende Werte wurden an den verschiedenen Stellen der Stange ermittelt, dabei ist die 2. Messung immer orthogonal zur ersten an der selben Stelle vorgenommen worden.

Position	1.Messung [mm]	2.Messung [mm]
links	11,94	11,95
halb links	11,94	11,95
mittig	11,94	11,94
halb rechts	11,94	11,94
rechts	11,94	11,93

Der Mittelwert für den Durchmesser der Aluminiumstange ergibt sich gemäß Gleichung (27) zu

$$d_{Alu} = 11,94 mm.$$

Der statistische Fehler auf diesen Wert berechnet sich nach Gleichung (28) zu

$$\sigma_{d_{Alu}}^{stat} = 9,13 \cdot 10^{-4} mm.$$

Der systematische Fehler beträgt entsprechend nach Gleichung (29)

$$\sigma_{d_{Alu}}^{sys} = 5 \cdot 10^{-3} mm + 0,119 \cdot 10^{-3} mm = 5,119 \cdot 10^{-3} mm$$

Insgesamt ergibt sich ein Fehler auf den Durchmesser des Aluminiumstabes von

$$\sigma_{d_{Alu}} = (0,913 + 5,119) \cdot 10^{-3} mm = 6,032 \cdot 10^{-3} mm$$

Dieser Fehler ist um einen Faktor 10^4 kleiner als der bestimmte Mittelwert, die Bestimmung des Durchmessers also relativ präzise.

Material	Masse m [kg]	Länge l [m]	Durchmesser d [mm]
Aluminium	$0,4009 \pm 0,00003$	$1,300 \pm 0,002$	$11,941 \pm 0,006$
Kupfer	$1,2961 \pm 0,00003$	$1,299 \pm 0,002$	$11,930 \pm 0,006$
Messing	$1,2386 \pm 0,00003$	$1,299 \pm 0,002$	$11,983 \pm 0,006$
„kurzer Stab“	$1,1584 \pm 0,00003$	$1,302 \pm 0,002$	$11,970 \pm 0,006$
„langer Stab“	$1,3286 \pm 0,00003$	$1,500 \pm 0,002$	$11,998 \pm 0,006$

Tabelle 3: Zusammenfassung der gemittelten Stabeigenschaften und dazugehörige Fehler

In Tabelle 3 sind die unterschiedlichen Stabeigenschaften aufgeführt. Die Werte sind dabei bei einer angemessenen Anzahl signifikanter Stellen gekürzt. So ergibt sich, dass die Fehler auf die unterschiedlichen Werte etwa des Durchmessers als gleich angegeben werden. Bei einer genaueren Betrachtung erkennt man, dass sie sich erst in einer Größenordnung von $10^{-5}mm$ voneinander unterscheiden. Diese marginalen Unterschiede werden bei der weiteren Berechnung nicht weiter berücksichtigt.

3.3.2 Frequenzbestimmung

Der Stab wird durch Anschlagen mit einem kleinen Gummihammer in longitudinale Schwingungen versetzt. Das Material wird dadurch, nach einer kurzen Einschwingphase, in Eigenschwingungen versetzt. Diese Schwingung erzeugt eine stehende Welle innerhalb des Stabes. An den äußeren Enden des Stabes ist die Schallschnelle demnach immer maximal, in der Mitte des Stabes befindet sich ein Wellenknoten. Somit ist die Wellenlänge

$$\lambda = 2 \cdot L.$$

Deshalb ist es von Bedeutung, den Stab nur an einem Punkt einzuspannen, damit die Schwingvorgänge nicht gestört werden.

Die Schwingung des Stabes wird an die Luftmoleküle übertragen und vom Mikrofon, welches direkt auf ein Ende der Stange gerichtet ist, in elektrische Signale umgewandelt. Diese werden über das CASSY-Modul an den Computer zur Aufzeichnung weitergeleitet. Dabei wurden folgende Einstellungen des CASSY-Lab verwendet:

```

CASSY          / Kanal A /   Spannung Ub1 +-0.3V Momentanwerte
Meßparameter   / automatisch Intervall 100 mu s x16000
Darstellung     / X-Achse t
                / Y-Achse Ua1
FFT             / Fast Fourier Transformation von Ub1

```

Der Messbereich wurde dabei in einigen Fällen auf $\pm 1V$ geändert, wenn eine größere Amplitude dies nötig machte. Durch die Wahl dieser Messparameter wurde eine Messdichte von ungefähr 7 Messpunkten pro Periodendauer der Schwingung erzielt. Dies ermöglicht sowohl eine genaue Darstellung des Schwingungsvorgangs, als auch eine genauere Untersuchung der Messdaten mittels Fast-Fourier-Analyse.

Bei der Messung ist zu beachten, dass der Anschlag mit dem Hammer so ausgeführt wird, dass eine möglichst gute Anregung des Schwingungsvorgangs erzielt wird. Dies kann sowohl am Höreindruck als auch mittels einer Probemessung erkannt werden, wenn die Grundschiwingung deutlich wahrnehmbar ist. Der Hammeranschlag wird in Vorversuchen in Intensität und Direktion so lange variiert, bis dieses Ziel erreicht ist. Erst dann wird mit den eigentlichen Messungen begonnen.

Zu jedem Stab werden 5 Messreihen vollzogen und die entsprechenden Daten abgespeichert. Messreihen, die offensichtlich fehlerhaft waren, zum Beispiel durch laute Nebengeräusche oder ungeeigneten Anschlag, wurden dabei direkt verworfen.

Zur Frequenzbestimmung wurde die CASSY-interne diskrete Fast-Fourier-Analyse verwendet. Für jede Messung wurde mit Hilfe des Peakfinders aus der Position des dort sichtbaren Peaks die Frequenz der jeweiligen Schwingung bestimmt (siehe Abbildung 10). Bei dieser Vorgehensweise ist es nicht eindeutig, welche Punkte des Frequenzspektrums angegeben werden sollten, um eine möglichst genaue Bestimmung der Position zu ermöglichen. Aus diesem Grunde wurde der Peakfinder exemplarisch an der Messung einer Schwingung des Aluminiumstabes mehrfach ausgeführt, und zwar jeweils unter Berücksichtigung einer verschiedenen Anzahl von Werten des Frequenzspektrums. Der Peakfinder ermittelte dabei folgende Werte:

Anzahl der Punkte	Schwerpunkt des Peaks [Hz]
3	1965,57
4	1965,26
5	1965,55
6 (links)	1965,41
6 (rechts)	1965,63
7	1965,49

Hier wurde als Messwert der Wert $f = 1965,49$ weiter verwendet, da er augenscheinlich die beste Anpassung ermöglicht. Auch bei den anderen Messreihen wurde die Anzahl der berücksichtigten Punkte danach bestimmt, welche Auswahl am günstigsten erschien. Der dadurch entstandene Fehler wird entsprechend der Größenordnung der Differenz der bestimmten Peaks abgeschätzt. Aus den obigen Daten ist ersichtlich, dass eine Abschätzung von

$$\sigma_f^{stat} = 0,3Hz$$

sicherstellt, dass 68% der Peak-Schwerpunkte in diesem Intervall um den genutzten Wert liegen sollten. Diese Abschätzung wurde am Aluminiumstab durchgeführt, da er die Schwingungen mit den größten Frequenzen zeigte. Zur Bestimmung des systematischen Fehlers wurden vergleichend Fourier-

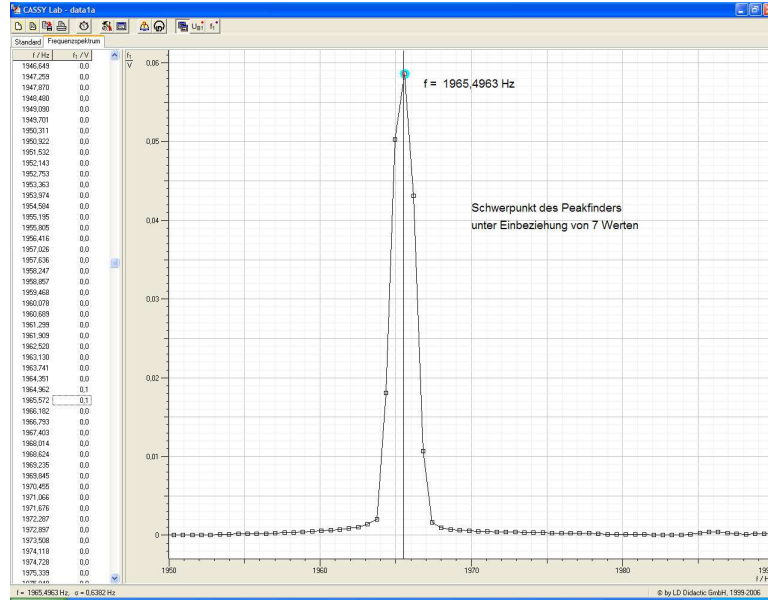


Abbildung 10: CASSY-Auswertung zur Frequenzbestimmung des Aluminiumstabes

transformationen mit Maple und ROOT durchgeführt, welche eine höhere Genauigkeit als die von CASSY zur Verfügung gestellte haben. Es wurden dabei Werte ermittelt, die höchstens um $3Hz$ von der in CASSY bestimmten Frequenz abweichen. Um eine eventuelle Ungenauigkeit des CASSY-Peakfinders zu berücksichtigen, wird der systematische Fehler auf die Frequenz der einzelnen Messreihen folgendermaßen abgeschätzt:

$$\sigma_f^{sys} = 3Hz$$

Als Gesamtfehler ergibt sich:

$$\sigma_f = (0,3(stat) + 3(sys))Hz = 3,3Hz \quad (31)$$

Die Mittelwerte der Frequenzen der einzelnen Stäbe werden nun wieder mit der Formel analog zu Gleichung (27) errechnet. Dazu soll wieder nur exemplarisch die Bildung des Mittelwerts der Frequenz des Aluminiumstabes angeführt werden, die anderen ergeben sich mit analoger Rechnung. Die einzelnen bestimmten Frequenzen der Schwingung des Aluminiumstabes sind:

Schwerpunkt des Peaks [Hz]
1965,50
1965,59
1965,61
1965,62
1965,63

Damit ergibt sich als mittlere Frequenz des Aluminiumstabes:

$$f_{Alu} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 f_i = 1965,59 Hz$$

Der statistische Fehler dieses Wertes beträgt wiederum analog zu Gleichung (28):

$$\sigma_{f_{Alu}}^{stat} = \sigma_f = \frac{0,3}{\sqrt{5}} Hz = 0,13 Hz$$

$$\sigma_{f_{Alu}} = 3,13 Hz \quad (32)$$

Material	Frequenz $f[Hz]$	$\sigma_f [Hz]$
Aluminium	1965,59	3,13
Kupfer	1458,34	
Messing	1326,34	
„kurzer Stab“	1882,52	
„langer Stab“	1725,85	

Tabelle 4: gemittelte Frequenzen der Stäbe

3.3.3 Das Elastizitätsmodul

Das Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante, welche die relative Längenausdehnung eines Materials im Verhältnis zu einer angreifenden Zugspannung angibt. Es berechnet sich nach der Formel:

$$E = \frac{F}{A} / \frac{\Delta l}{l}. \quad (33)$$

Die Größenordnung von $10^{11} \frac{N}{m^2}$ für Metalle macht eine direkte statische Bestimmung im Allgemeinen nur für sehr dünne Drähte möglich. Es ist aber möglich, dass Elastizitätsmodul E mit Hilfe von longitudinalen Schallwellen zu bestimmen. Hierzu wird die Formel

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (34)$$

benötigt. Bei einem mittig eingespannten Stab ist die Wellenlänge $\lambda = 2l$. Mit $v = f \cdot \lambda$ ergibt sich für das Elastizitätsmodul:

$$E = \varrho \cdot f^2 \cdot 4l^2 \quad (35)$$

Zur direkten Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den oben bestimmten Werten, bietet sich Umformung an:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (36)$$

$$\Rightarrow E = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{m \cdot f^2 \cdot l}{d^2} \quad (37)$$

Der Fehler auf diesen Wert wird mittels Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_E^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial f} \sigma_f\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial l} \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d} \sigma_d\right)^2 \quad (38)$$

$$= \frac{16^2}{\pi^2} \left(\frac{f^4 l^2}{d^4} \sigma_m^2 + 4 \frac{m^2 f^2 l^2}{d^4} \sigma_f^2 + \frac{m^2 f^4}{d^4} \sigma_l^2 + 4 \frac{m^2 f^4 l^2}{d^6} \sigma_d^2 \right) \quad (39)$$

Teilt man die linke Seite dieser Gleichung durch E^2 und die rechte durch den nach Gleichung (37) gleichbedeutenden Term $\left(\frac{16}{\pi} \frac{m f^2 l}{d^2}\right)^2$, so ergibt sich als relativer Fehler:

$$\frac{\sigma_E^2}{E^2} = \frac{\sigma_m^2}{m^2} + 4 \frac{\sigma_f^2}{f^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4 \frac{\sigma_d^2}{d^2} \quad (40)$$

$$\Rightarrow \sigma_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_d}{d}\right)^2} \quad (41)$$

Es soll nun wieder die Berechnung des Elastizitätsmoduls sowie der dazugehörigen Standardabweichung mit den oben hergeleiteten Formeln exemplarisch am Aluminiumstab dargestellt werden. Die Ergebnisse der anderen Rechnungen werden in Tabelle 5 dargestellt. Als Wert und Fehler des Elastizitätsmoduls E_{Alu} des Aluminiumstabes ergibt sich durch einsetzen der entsprechenden Werte aus den Tabellen 3 und 4 in Gleichung (37):

$$\begin{aligned} E_{Alu} &= 71.921 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \\ \frac{\sigma_E^2}{E^2} &= \frac{\sigma_m^2}{m^2} + 4 \frac{\sigma_f^2}{f^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4 \frac{\sigma_d^2}{d^2} \\ &= (0,0005 + 1,0170 + 0,2367 + 0,0252) \cdot 10^{-5} \\ \Rightarrow \sigma_{E_{Alu}} &= E_{Alu} \cdot 3,68 \cdot 10^{-3} = 0,265 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Endwert des Elastizitätsmoduls von Aluminium:

$$E_{Alu} = (71,92 \pm 0,25) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Material	E	$10^9 \frac{N}{m^2}$	$\frac{E}{\sigma_E} [\%]$	E Literaturwert	$10^9 \frac{N}{m^2}$
Aluminium	$71,92 \pm 0,26$		3,68	73	
Kupfer	$128,13 \pm 0,60$		4,68	120	
Messing	$100,39 \pm 0,51$		5,07	80 ... 103	
„kurzer Stab“	$189,99 \pm 0,70$		3,67	190 (Eisen, aus Tipler)	
„langer Stab“	$210,01 \pm 0,84$		4,00	200...220 (Stahl)	

Tabelle 5: Daten der ermittelten Elastizitätsmodule und dazugehörige Literaturwerte

[Quelle: M.Krötzsch: Physikalisches Praktikum, Teubner Verlag, 8. Auflage 1988]

Wie man aus Gleichung (42) erkennen kann, ist der Fehler auf die Frequenz dominant. Der Fehler auf die Masse fällt kaum ins Gewicht, da er vier Größenordnungen kleiner ist. Bei der Bestimmung der Frequenz waren die meisten möglichen Fehlerquellen (z.B. Nebengeräusche, etc.). Messungen wie die Bestimmung der Masse, konnten dagegen mit hoher Präzision durchgeführt werden.

Aus Tabelle 5 ist zwar ersichtlich, dass die gemessenen Werte nahe bei den Literaturangaben liegen. Es ist aber zu beachten, dass in verschiedenen Quellen deutlich unterschiedliche Angaben für die Elastizitätsmodule zu finden waren, die teilweise über 10% von einander abwichen. Es ist daher kaum festzustellen, ob die gemessenen Werte mit den realen verträglich sind. Die zunächst als „kurzer Stab“ und „langer Stab“ bezeichneten Messobjekte können auf Grund der vorgenommenen Messungen mit zufriedenstellender Sicherheit als Eisen und Stahl bezeichnet werden.

3.3.4 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

Die durchgeführten Messungen des Elastizitätsmoduls lassen sich über Gleichung (34) dazu nutzen, die Schallgeschwindigkeit innerhalb der untersuchten Materialien zu bestimmen. Formt man diese Gleichung jedoch um, so ergibt sich

$$v = \lambda \cdot f = 2l \cdot f \quad (42)$$

Die gemessenen Daten werden nun also direkt genutzt, um die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen. Der Fehler auf die Schallgeschwindigkeit ergibt sich durch die Fehlerfortpflanzung zu

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 2\sqrt{f^2\sigma_l^2 + l^2\sigma_f^2} \\ \Rightarrow \frac{\sigma_v}{v} &= \sqrt{\frac{\sigma_l^2}{l^2} + \frac{\sigma_f^2}{f^2}} \end{aligned} \quad (43)$$

In der folgenden Tabelle sind die ermittelten Werte sowie die Literaturwerte für die Schallgeschwindigkeiten in den unterschiedlichen Materialien angegeben:

Material	$v \left[\frac{m}{s} \right]$	relativer Fehler $\frac{\sigma_v}{v}$
Aluminium	$5110,5 \pm 11,3$	0,0022
Kupfer	$3788,7 \pm 10,0$	0,0026
Messing	$3445,8 \pm 9,7$	0,0028
Eisen	$4902,1 \pm 11,1$	0,0023
Stahl	$5177,5 \pm 11,7$	0,0023