
Elektrizitätslehre
Gedämpfter LC-Schwingkreis

Gruppe 7

Tim Tom Hesse 369738

Dennis Linde 354809

7. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	1
2	Versuchsbeschreibung	1
3	Theorie	2
4	Durchführung	4
5	Versuchsauswertung	4
5.1	Bestimmung der Frequenz	4
5.2	Bestimmung von der Dämpfungskonstante	6
5.3	Bestimmung der Induktivität und des Restwiderstandes	6
5.4	Bestimmung der Kapazität	7
5.5	Aperiodischer Grenzfall	8
6	Fazit	8

1 Versuchsziel

Im Versuch werden Strom und Spannung eines sich entladenden Kondensators im Schwingkreis betrachtet. Ziel des Versuch ist es, falls vorhanden, die Frequenz der Schwingung von Strom und Spannung, sowie die Dämpfungskonstante δ der e-Funktion, die die Schwingung einhüllt, zu bestimmen. Variiert man den Widerstand des Schwingkreises, lässt sich damit auf die Kapazität des Kondensators, die Induktivität der Spule, sowie den Gesamtwiderstand des Versuches schließen.

2 Versuchsbeschreibung

Der Aufbau des Schwingkreises besteht aus in Reihe geschalteten Kondensator, Spule, Ohm'schen Verbraucher und einem Amperemeter, sowie einem parallel zum Kondensator geschaltetem Voltmeter. Des weiteren sind diese Komponenten parallel zu einem Schalter geschaltet, über den der Kondensator frei schwingen kann.

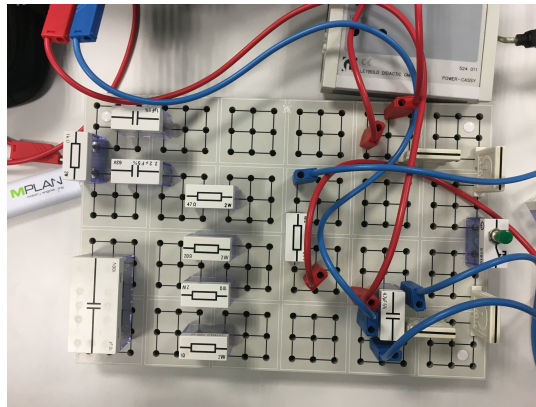


Abbildung 1: Versuchsaufbau

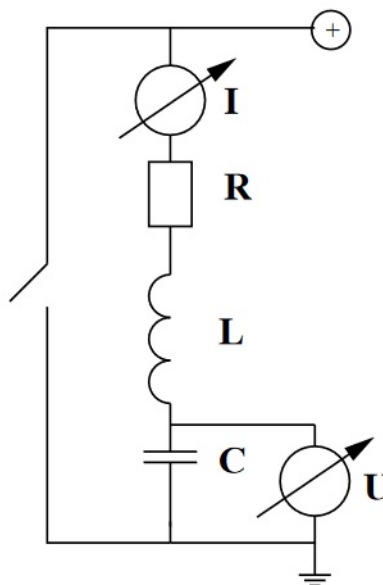


Abbildung 2: Schaltbild

Zum Aufladen des Kondensators wird eine Spannung, hier ca. 5 V, angelegt. Nach Umlegen des Schalters entlädt sich der Kondensator in entgegengesetzte Richtung zur angelegten Spannung. Aufgrund der induktiven Eigenschaften der Spule kommt es bei angemessen kleinem Widerstand zu einer gedämpften Schwingung der Spannung bzw. des Stromes.

Das Umlegen des Schalters fungiert als Triggersignal für den Beginn der Messung. Gemessen werden Spannung und Strom über den Zeitraum von 20 ms mit einem Messintervall von 10 μ s, also besteht unsere Messreihe aus 2000 Einzelmessungen.

3 Theorie

Aus der Maschenregel und den Spannungen der einzelnen Komponenten ergibt sich eine Differentialgleichung abhängig von der Ladung des Kondensators der folgenden Art:

$$U_0 = U_R + U_L + U_C = R \cdot \frac{dI}{dt} + L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}$$

$$U_0 = L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{U_0}{L}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dQ}{dt} + \omega^2 = \frac{U_0}{L} \quad \left(\delta := \frac{R}{2L} \quad \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

Als Lösung dieser ergeben sich die zwei komplexe e-Funktionen

$$Q_1(t) = A \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$Q_2(t) = B \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Nach dem physikalischen Prinzip der Superposition ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$Q(t) = A \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$Q(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}t} + B \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}t})$$

Da die Spannung $U(t)$ über dem Kondensator proportional zu $Q(t)$ ist, ergibt sich für die Spannung:

$$U(t) = \frac{1}{C} \cdot e^{-\delta t} \cdot (A \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}t} + B \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}t})$$

Je nach dem Wert für δ , welcher wesentlich vom Widerstand des Ohm'schen Verbrauchers (zumindest in unserem Versuch) abhängt, kann es zu drei verschiedenen Szenarien kommen: Schwingfall ($\delta < \omega_0$):

$$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\delta t} \cdot (\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t))$$

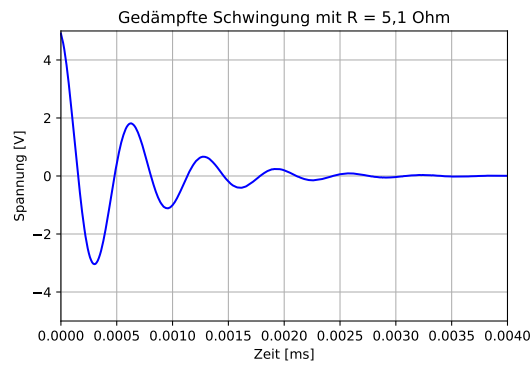


Abbildung 3:

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$):

$$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta t))$$

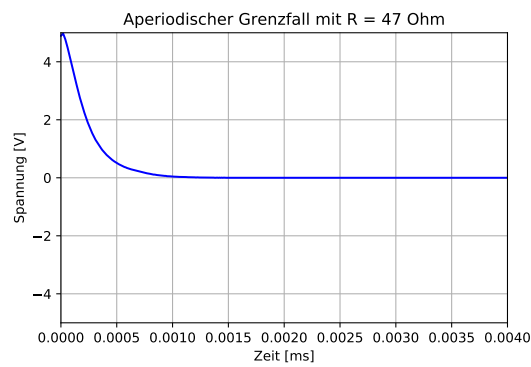


Abbildung 4:

Kriechfall ($\delta > \omega_0$):

$$U_C(t) = U_0 + A \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

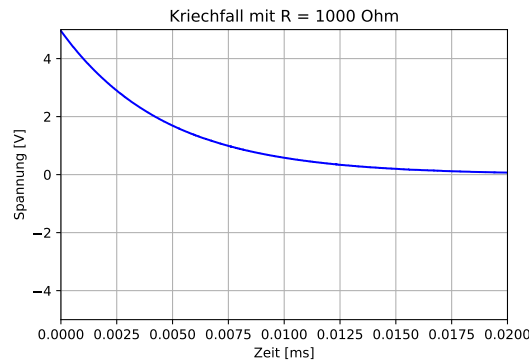


Abbildung 5:

4 Durchführung

Zunächst wird eine Rauschmessung ohne anliegende Spannung durchgeführt, um die Offsets auf die zu messenden Werte bestimmen zu können.

Danach wird, wie oben beschrieben, eine Spannung angelegt und daraufhin der Schalter geschlossen, um den Entladevorgang sowie die Messung zu starten.

Dies wird mehrmals für folgende Komponenten wiederholt:

Versuch	Kapazität C	Induktivität L	Widerstand R
1	$4.7 \mu F$	$2.2 mH$	5.1 Ohm
2	$4.7 \mu F$	$2.2 mH$	10 Ohm
3	$4.7 \mu F$	$2.2 mH$	20 Ohm
4	$4.7 \mu F$	$2.2 mH$	47 Ohm
5	$4.7 \mu F$	$2.2 mH$	1000 Ohm

5 Versuchsauswertung

Zu Beginn haben wir unsere Daten durchs Abziehen des Offsets ($U=0,025V$) bereinigt. Dabei wurde der Wert durch das Mitteln der Rauschmessung bestimmt.

5.1 Bestimmung der Frequenz

Die Frequenz haben wir auf zwei unterschiedliche Arten bestimmt. Zum einen über die Differenz der Extremstellen und zum anderen über das Frequenzspektrum einer Fast Fourier Transformation (FFT).

Bei der ersten Methode wird die Differenz der Extremstellen verdoppelt. Dies ergibt die Periodendauer, deren reziproker Wert der Frequenz entspricht.

Die Fehler auf die einzelnen Frequenzen ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung:

$$f_i = \frac{1}{T_i}$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_t}{T_i^2}$$

Der Fehler auf die Periodendauer kommt durch den Ablesefehler auf die Zeit zustande:

$$\sigma_T = \frac{10^{-5} s}{\sqrt{12}}$$

Anschließend werden die Frequenzen gewichtet gemittelt und die Standardabweichung der Frequenz auf die Messreihe bestimmt. Durch mehrere Messreihen des selben Versuchs wird die Standardabweichung nochmals verringert und somit der Wert genauer.

$$\mu_{\text{gewichtet}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}$$

Bei der zweiten Methode wird eine Fast Fourier Transformation auf die Daten angewandt, welche ein Frequenzspektrum mit zugehörigen Amplituden liefert. Die Hauptfrequenz ist diejenige mit der höchsten Amplitude.

Frequenzspektrum FFT:

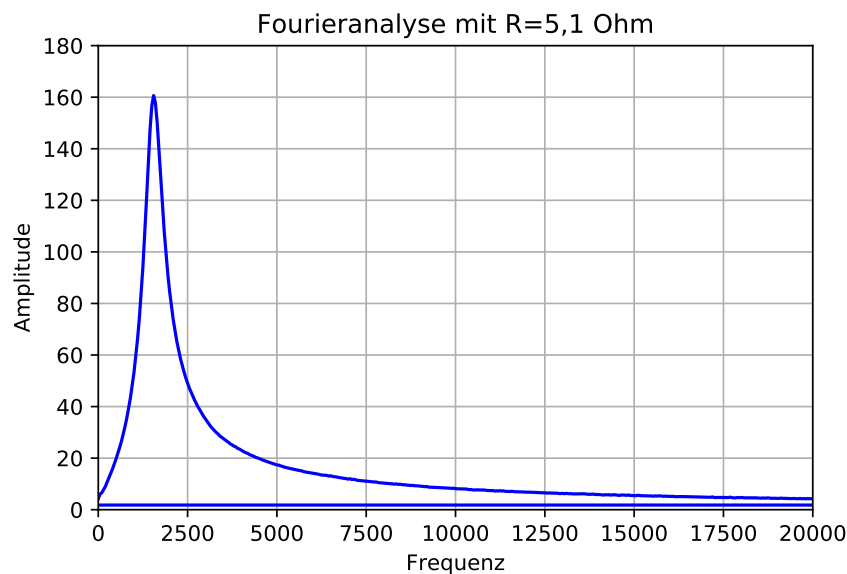


Abbildung 6: Fourieranalyse unserer Spannung

R	f_{peak}	σ_{peak}	f_{FFT}	f_{theo}
5.1 Ohm	1581.46 s^{-1}	3.63 s^{-1}	1500 s^{-1}	1551.53 s^{-1}
10 Ohm	1511.45 s^{-1}	3.29 s^{-1}	1500 s^{-1}	1522.78 s^{-1}
20 Ohm	1407.89 s^{-1}	3.30 s^{-1}	1375 s^{-1}	1387.94 s^{-1}

Die erste Methode liefert Frequenzen im zu erwartenden Bereich mit kleinen Fehlern. Bei der

zweiten Methode hingegen sind die errechneten Frequenzen zu grob und zudem ist die Fehlerrechnung auf FFT undurchsichtig, die Fehler- Abschätzung durch FFT ist also nicht sinnvoll.

5.2 Bestimmung von der Dämpfungskonstante

Zum einen lässt sich δ über das Verhältnis der Amplituden bestimmen. Wichtig ist hierbei, dass die Werte vom Offset bereinigt sind.

Aus folgender Relation folgt der Ausdruck mit dem sich die mittlere Dämpfungskonstante bestimmen lässt:

$$\delta_i = \frac{\ln(\frac{A_i}{A_{i+1}})}{T_i}$$

Der Fehler ergibt sich aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_{\delta_n} = \sqrt{(\frac{\sigma_{U_n}}{U_n})^2 + (\frac{\sigma_{U_{n+1}}}{U_{n+1}})^2 + (\delta_n \cdot \sigma_{T_n})^2}$$

Eine weiter Methode die Dämpfungskonstante zu bestimmen ist das Anpassen einer e-Funktion an die abfallende Amplitude der Schwingung. Verwendet wurde hierfür die Funktion `exp_einhuellende()` aus den Praktikumsroutinen. Diese führt eine Lineare Regression auf die logarithmierten Amplituden der Hochpunkte durch. Dabei gibt sie den Exponenten der e-Funktion, welcher unserem δ entspricht, mit Fehler wieder.

R	δ_{peak}	σ_{peak}	δ_{einh}	σ_{einh}	δ_{theo}
5.1 Ohm	1598.68 s ⁻¹	37.125 s ⁻¹	1583.74 s ⁻¹	25.44 s ⁻¹	1285.45 s ⁻¹
10 Ohm	2583.10 s ⁻¹	59.53 s ⁻¹	2614.49 s ⁻¹	52.57 s ⁻¹	2272.73 s ⁻¹
20 Ohm	4873.23 s ⁻¹	519.15 s ⁻¹	/	/	4545.45 s ⁻¹

Wie man anhand der oberen Tabelle sehen kann, sind sowohl die Werte für δ , als auch deren Fehler bei beiden Methoden sehr ähnlich. Sie weichen jedoch von den zu erwartenden Werten ab. Dies lässt sich damit erklären, dass zu dem Widerstand des Ohm'schen Verbrauchers und dem Eigenwiderstand der Spule noch der Restwiderstand des Schwingkreises hinzu kommt.

Beide Methoden basieren auf den Amplituden der Extremstellen. Bei zu hoher Dämpfung fällt die Schwingung zu schnell ab und die meisten Amplituden sind zu gering um eindeutig erfasst zu werden. Somit verlieren beide Methoden bei hohen Dämpfungskonstanten ihre Effektivität bzw. lassen sich nicht mehr anwenden (siehe δ_{einh}).

5.3 Bestimmung der Induktivität und des Restwiderstandes

Die Dämpfungskonstante δ ist linear anhängig vom Gesamtwiderstand des Schwingkreises. Trägt man den Widerstand des Ohm'schen Verbrauchers gegen die Dämpfungskonstante δ auf, ergibt sich eine Gerade. Über die Steigung der Geraden lässt sich die Induktivität der Spule und über den Y-Achsenabschnitt der Restwiderstand bestimmen. Die Geradenparameter a und b erhält

man durch eine lineare Regression auf die verschiedenen Werte von δ und R .

$$\delta = \frac{1}{2L} \cdot R + \frac{R_{Rest}}{2L} (:= a \cdot R + b)$$

$$L = \frac{1}{2a}$$

$$\sigma_L = \frac{1}{2a^2} \cdot \sigma_a$$

$$R_{Rest} = b \cdot 2L$$

$$\sigma_{R_{Rest}} = \sqrt{(2L \cdot \sigma_b)^2 + (b \cdot \sigma_l)^2}$$

Aus der linearen Regression ergaben sich folgende Induktivität $L = 0.002410534H$ mit folgendem Fehler $\sigma_L = 0.0001294H$

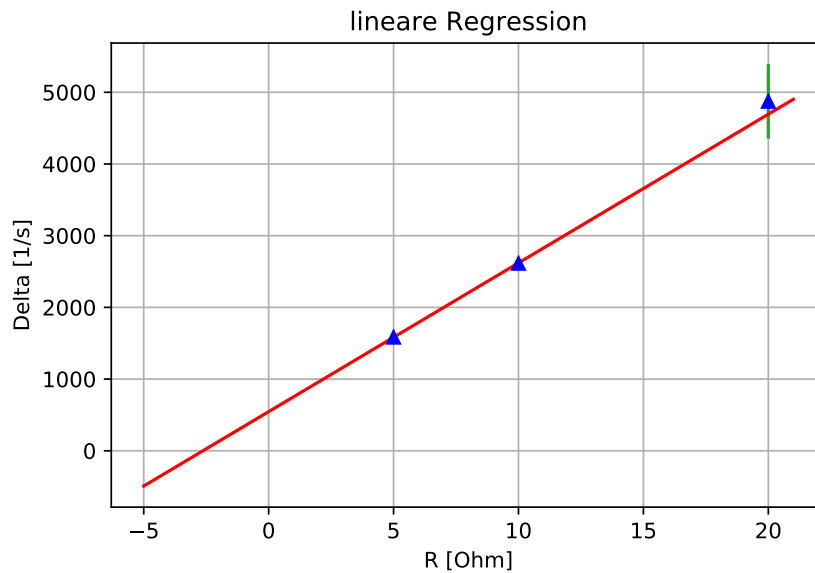


Abbildung 7: Lineare Regression von $\delta(R)$

5.4 Bestimmung der Kapazität

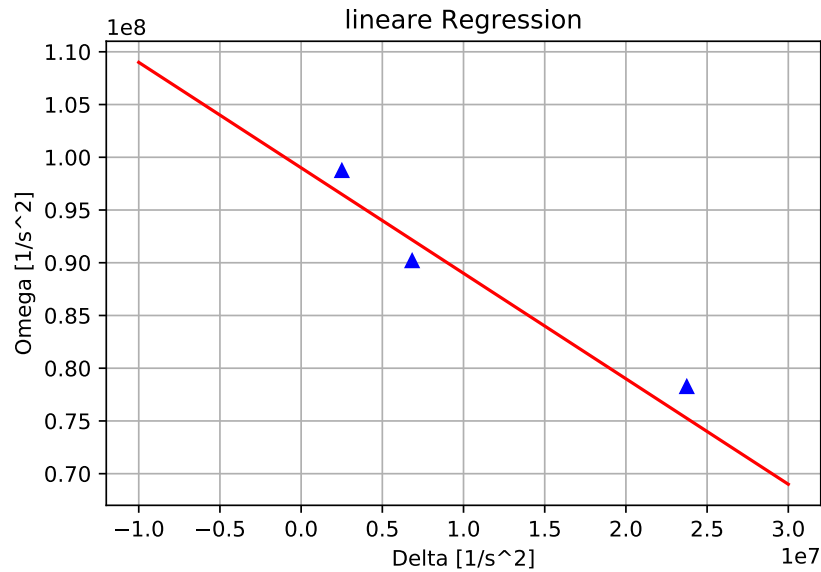
Aus den beiden Gleichungen von ω und δ ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \delta^2 \quad (:= a \cdot \delta^2 + b)$$

Trägt man nun die Quadrate von omega und δ gegeneinander auf ergibt sich eine Gerade, aus dessen y-Achsenabschnitt sich die Kapazität des Kondensators bestimmen lässt. Die Gerade wird auch hier wieder durch eine lineare Regression mithilfe der Least-Square-Methode (LSM) ermittelt, die Steigung wird dabei auf -1 festgesetzt.

$$C = \frac{1}{L \cdot b}$$

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{1}{L^2 \cdot b} \cdot \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{1}{L \cdot b^2} \cdot \sigma_b\right)^2}$$

Abbildung 8: Lineare Regression von $\omega^2(\delta^2)$

Wobei der Fehler auf b durch die LSM gegeben ist:

$$\sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right)^2 \cdot \sigma_x \sigma_y}$$

Dabei kamen wir auf folgende Werte:

$$C = 4.19 \mu F$$

$$\sigma_C = 0.23 \mu F$$

Diese sind zu den Herstellerangaben von $C = 4,7 \mu F$ sehr ähnlich.

5.5 Aperiodischer Grenzfall

Der Aperiodische Grenzfall tritt ein, wenn $\delta = \omega_0$. Dies ist gegeben wenn $R_{ap} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$. Also muss in unserem Versuch $R_{ap} = 43.27 \Omega$ sein. In unserem Versuch ist der aperiodische Grenzfall bei einem angesteckten Widerstand $R = 47 \Omega$ angenähert. In unseren Messreihen hatte unser Versuch bei diesem Widerstand die kürzeste Abklingzeit.

6 Fazit

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Versuch erfolgreich verlaufen ist. Zwar weichen die gemessenen Werte von den theoretischen ab, aber da die theoretischen Werte nur aus den Herstellerangaben berechnet wurden, gehen wir davon aus, dass die von uns gemessenen Werte genauer sind als die theoretischen.