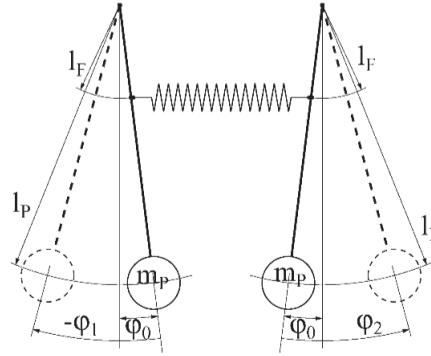


1 gekoppeltes Pendel

1.1 Versuchsbeschreibung



In diesem Versuch wird der Kopplungsgrad eines gekoppelten Pendels und die Federkonstante der Feder bestimmt, die für die Kopplung verantwortlich ist. Die Feder erzeugt ein Drehmoment von

$$M_{F,0} = -D_F \cdot x_0 \cdot l_F$$

welches durch das von der Schwerkraft erzeugte Drehmoment

$$M_{S,0} = m \cdot g \cdot l_s \cdot \phi_0$$

kompensiert wird. So ergibt sich für das gesamte Drehmoment, wenn ein Pendel um ϕ_2 ausgelenkt wird:

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \phi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot \phi_2$$

Daraus ergibt sich für die Bewegungsgleichungen der beiden Pendel:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 &= -\omega_s^2 \cdot \phi_1 + \Omega^2 \cdot (\phi_2 - \phi_1) \\ \ddot{\phi}_2 &= -\omega_s^2 \cdot \phi_2 - \Omega^2 \cdot (\phi_2 - \phi_1)\end{aligned}$$

Dabei sind:

$$\omega_s \text{ und } \omega_{sf} = \sqrt{\omega_s^2 + 2\Omega^2}$$

Lösungen dieses Systems aus gekoppelten Differenzialgleichungen. Der Kopplungsgrad wird definiert als:

$$\kappa = \frac{D_F l_F^2}{m g l_s + D_F l_F^2} = \frac{\omega_{sf}^2 - \omega_s^2}{\omega_{sf}^2 + \omega_s^2} \quad (1)$$

Um die Federkonstante zu bestimmen, wird $\frac{1}{\kappa}$ gegen $\frac{1}{l_F^2}$ aufgetragen:

$$\frac{1}{\kappa} = 1 + \frac{m l_s g}{D_F} \cdot \frac{1}{l_F^2} \quad (2)$$

$$(3)$$

Zur Überprüfung wird die Federkonstante auch durch

$$m \cdot g = -D_F \cdot x \quad (4)$$

bestimmt.

1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

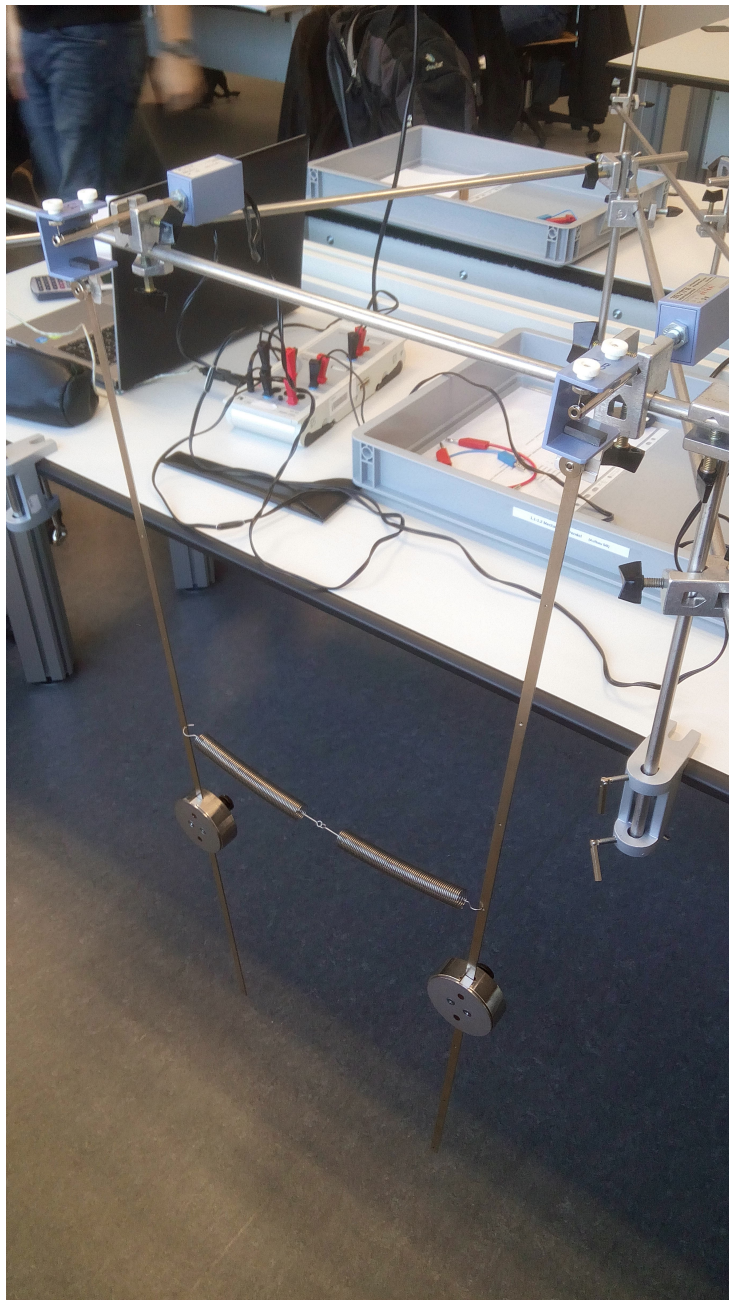


Abbildung 1: gekoppeltes Pendel

Der Versuchsaufbau des gekoppelten Pendel ist der gleiche wie beim Einzelpendel, bei dem ein zusätzliches, möglichst identisches Pendel verwendet wird. Dieses Pendel wird auf gleicher Höhe im Abstand von ca. 50cm befestigt und mit einer Feder an das andere Pendel gekoppelt. Die Befestigungshöhe der Feder wird dabei variiert, um die Kopplung zu verändern (siehe: 2). Mittels Linearer Regression lässt sich dann ein Wert für die Federkonstante D bestimmen.

Des Weiteren wurde die Federkonstante aus dem Hook'schen Gesetz (siehe: 4) bestimmt. Dazu haben wir mit verschiedenen Gewichten die Feder belastet und die Auslenkung gegenüber der Ruhelage gemessen.

1.3 Versuchsauswertung

1.3.1 Rohdaten

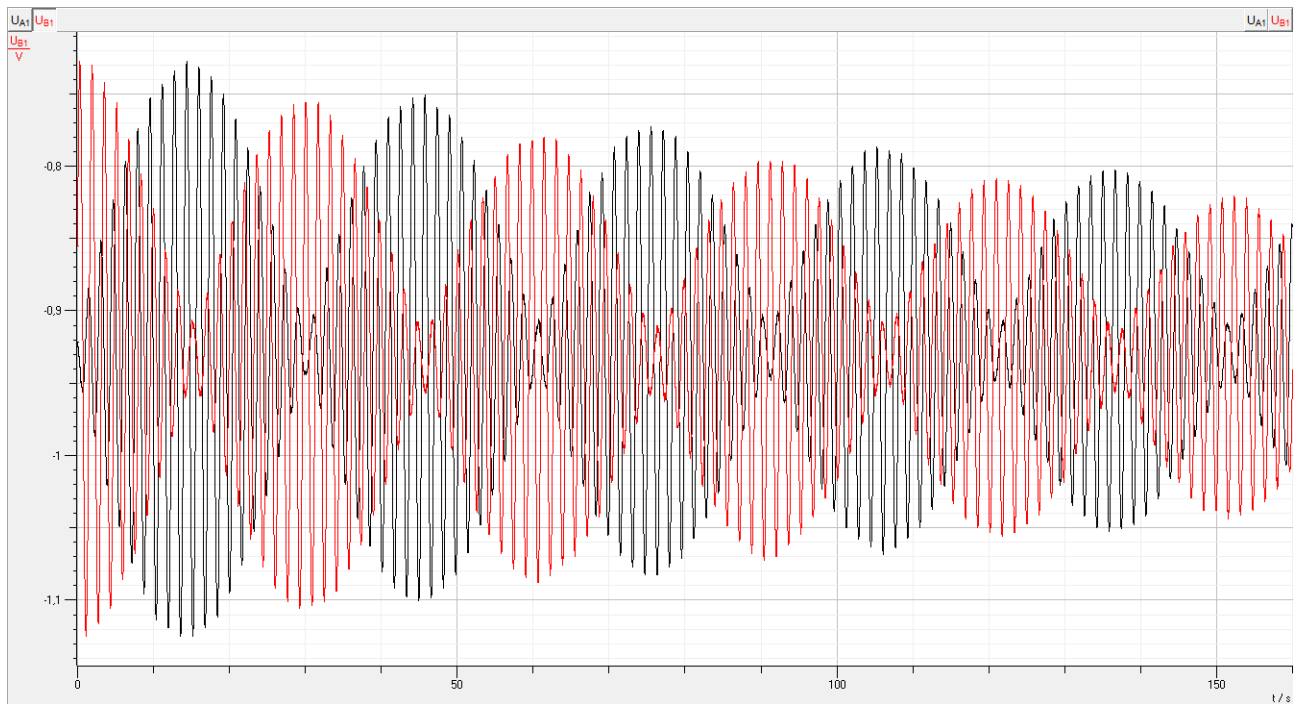


Abbildung 2: Schwebung Loch 2

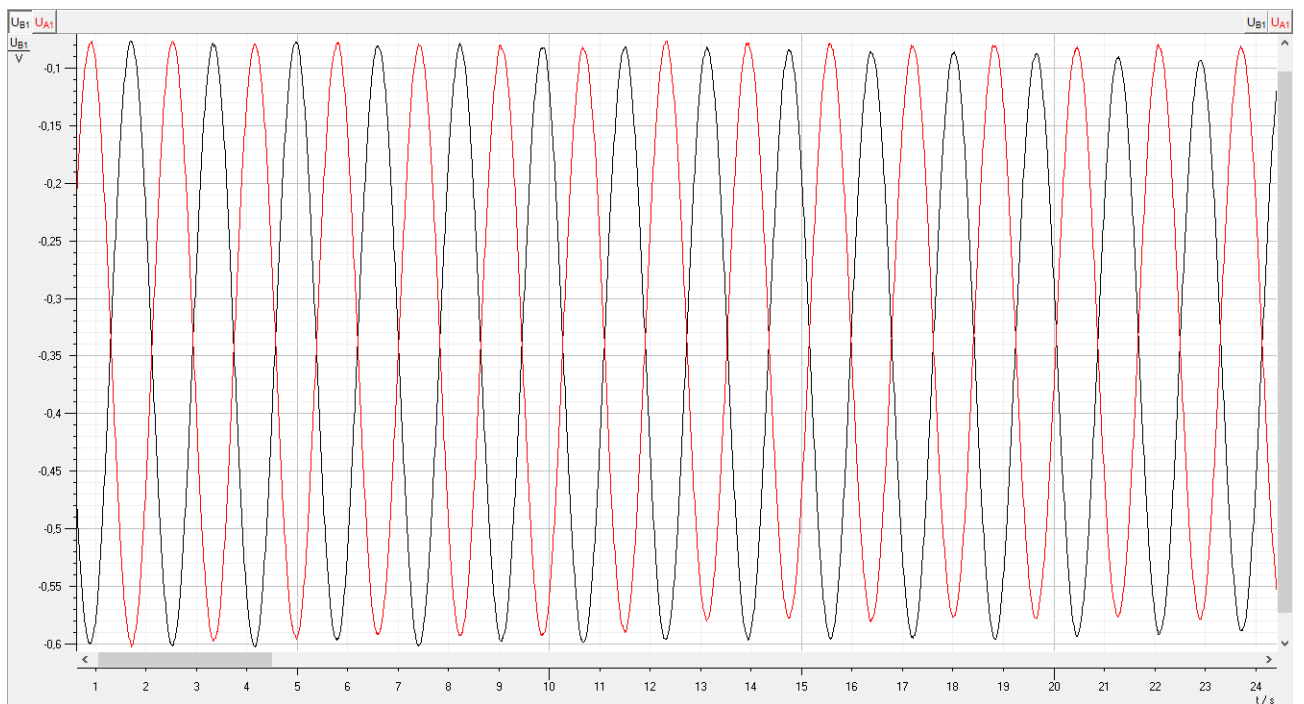


Abbildung 3: Gegensinnige Auslenkung

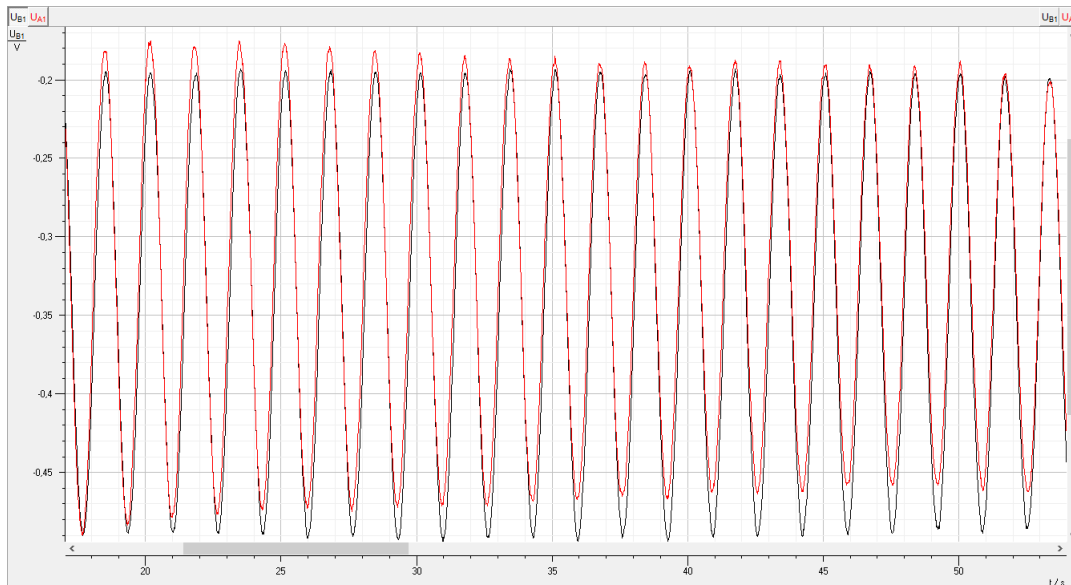


Abbildung 4: Gleichsinnige Auslenkung

Daten zur Berechnung von D aus Gleichung (4):

Die Ablesefehler wurden bei den Längenmessungen zu $\sigma_x = 0.1\text{cm}$ bestimmt.

Auslenkung: $x = x_{\text{gemessen}} - x_0$

Ruhelage der Feder Gruppe 1: $x_0 = 21.6\text{cm}$

Tabelle 1: Daten Hook Gruppe 1

Auslenkung in cm	Fehler in cm	angehängte Masse in g	Fehler der Waage in g
$x_1 = 11.3$	$\sigma_{x_1} = 0.1$	$m_1 = 60$	$\sigma_{m_1} = 0.1$
$x_2 = 18.7$	$\sigma_{x_2} = 0.1$	$m_2 = 100$	$\sigma_{m_2} = 0.1$
$x_3 = 14.9$	$\sigma_{x_3} = 0.1$	$m_3 = 80$	$\sigma_{m_3} = 0.1$

Ruhelage der Feder Gruppe 2: $x_0 = 22.8\text{cm}$

Tabelle 2: Daten Hook Gruppe 2

Auslenkung in cm	Fehler in cm	angehängte Masse in g	Fehler der Waage in g
$x_1 = 22.2$	$\sigma_{x_1} = 0.1$	$m_1 = 120.5$	$\sigma_{m_1} = 0.1$
$x_2 = 18.3$	$\sigma_{x_2} = 0.1$	$m_2 = 103$	$\sigma_{m_2} = 0.1$
$x_3 = 8.9$	$\sigma_{x_3} = 0.1$	$m_3 = 50.3$	$\sigma_{m_3} = 0.1$
$x_4 = 3.3$	$\sigma_{x_4} = 0.1$	$m_4 = 20$	$\sigma_{m_4} = 0.1$

Tabelle 3: Löcher mit ihren Abständen vom Aufhängepunkt

Löcher	Gruppe 1	Gruppe 2
1.	15.8cm	16.4cm
2.	27.8cm	28.5cm
3.	40.4cm	41cm
4.	52.9cm	53.5cm
6.	77.6cm	78.5cm
7.	89.6cm	90.5cm
8.	101.6cm	102.6cm

1.3.2 Transformation der Rohdaten/Analyse

Aus der Schwebung des Doppelpendels ergeben sich mit Fast-Fourier-Transformation ω_s und ω_{sf} durch $\omega = 2\pi f$:

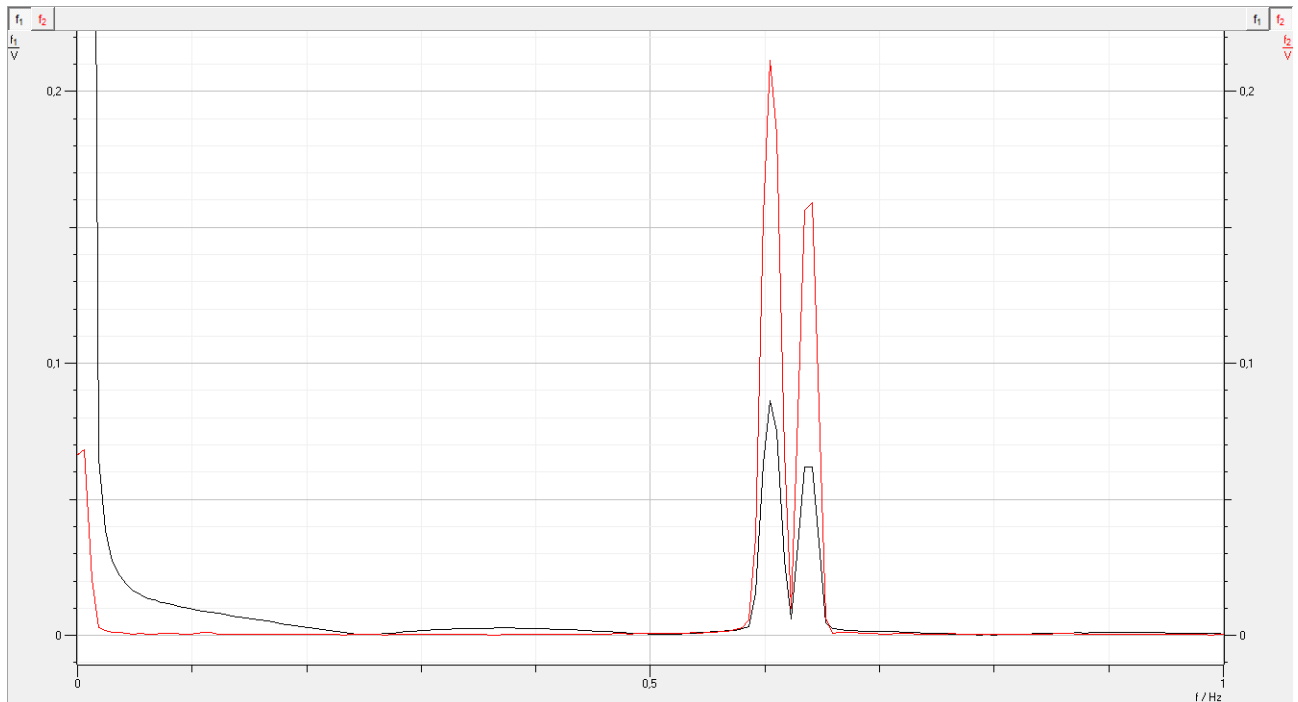


Abbildung 5: FFT-Schwebung

Die geringere Frequenz f_s sieht man bei der gleichsinnigen und die größere Frequenz f_{sf} bei der gegensinnigen Auslenkung.

Für die verschiedenen Positionen der Feder wurde das 5. Loch vom Pendelkörper blockiert und die Kopplung des ersten Lochs war so gering, dass wir nur eine Frequenz ermitteln konnten, so dass wir diese Werte im Folgenden nicht mehr betrachten. Für die anderen Positionen wurde jeweils per FFT die Frequenzen mit ihren Ablesefehlern bestimmt. Der Ablesefehler wurde durch mehrfache Peakschwerpunktbestimmung ermittelt.

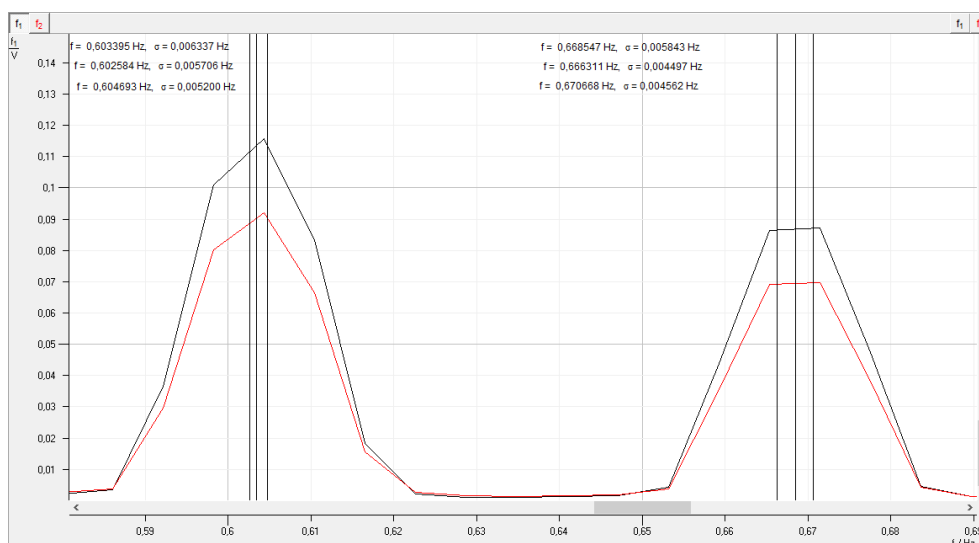


Abbildung 6: Peakschwerpunktbestimmung

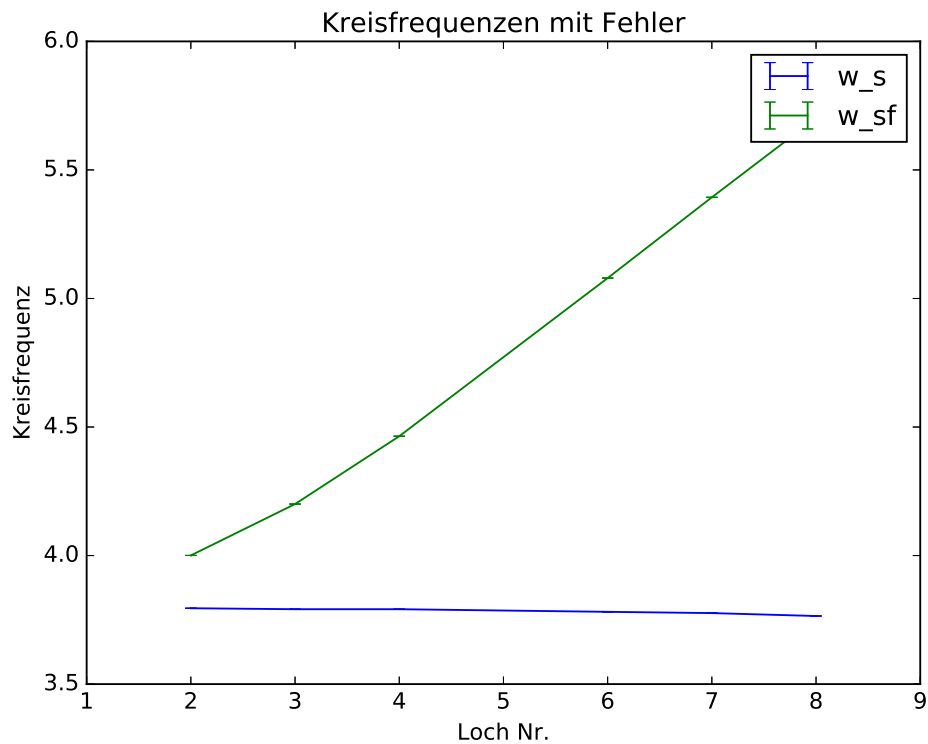
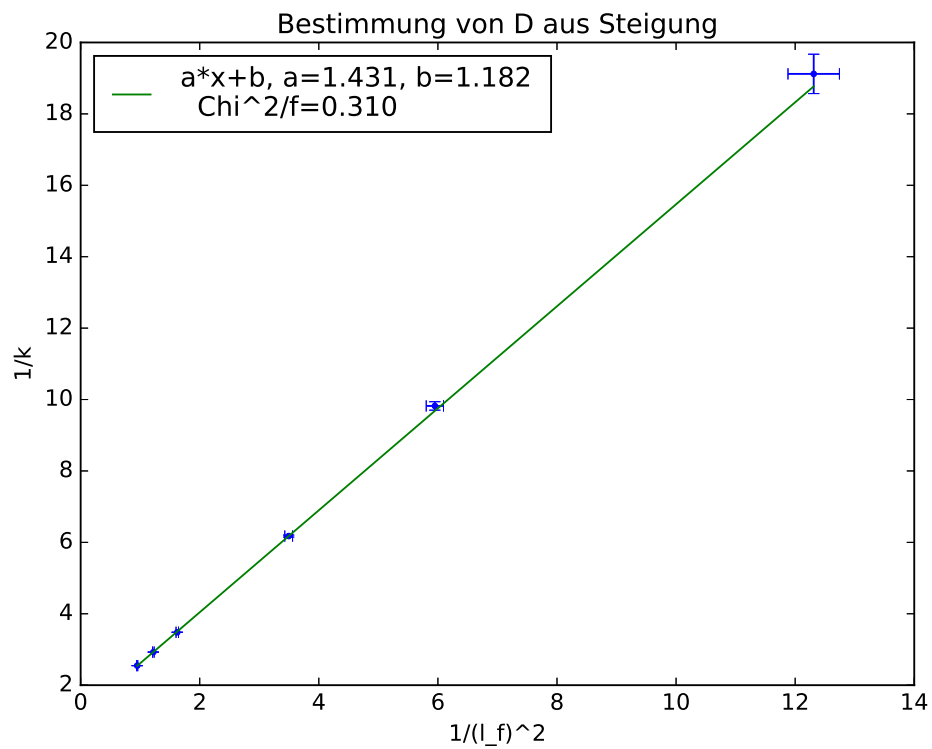


Abbildung 7: Loch/Frequenzen

Aus diesen Frequenzen wurde anschließend κ durch Gleichung (2) bestimmt. Nun wurde $\frac{1}{\kappa}$ gegen $\frac{1}{l_F^2}$ aufgetragen um aus der Steigung die Federkonstante bestimmen zu können.

Abbildung 8:



Die gesuchte Federkonstante D ergibt sich dann aus:

$$D_F = m \cdot l_s \cdot \frac{g}{a} \quad (5)$$

$$\sigma_{D_F} = m \cdot \sqrt{\left(g \cdot \frac{\sigma_{l_s}}{a}\right)^2 + \left(g \cdot l_s \cdot \frac{\sigma_a}{a^2}\right)^2 + \left(l_s \cdot \frac{\sigma_g}{a}\right)^2} \quad (6)$$

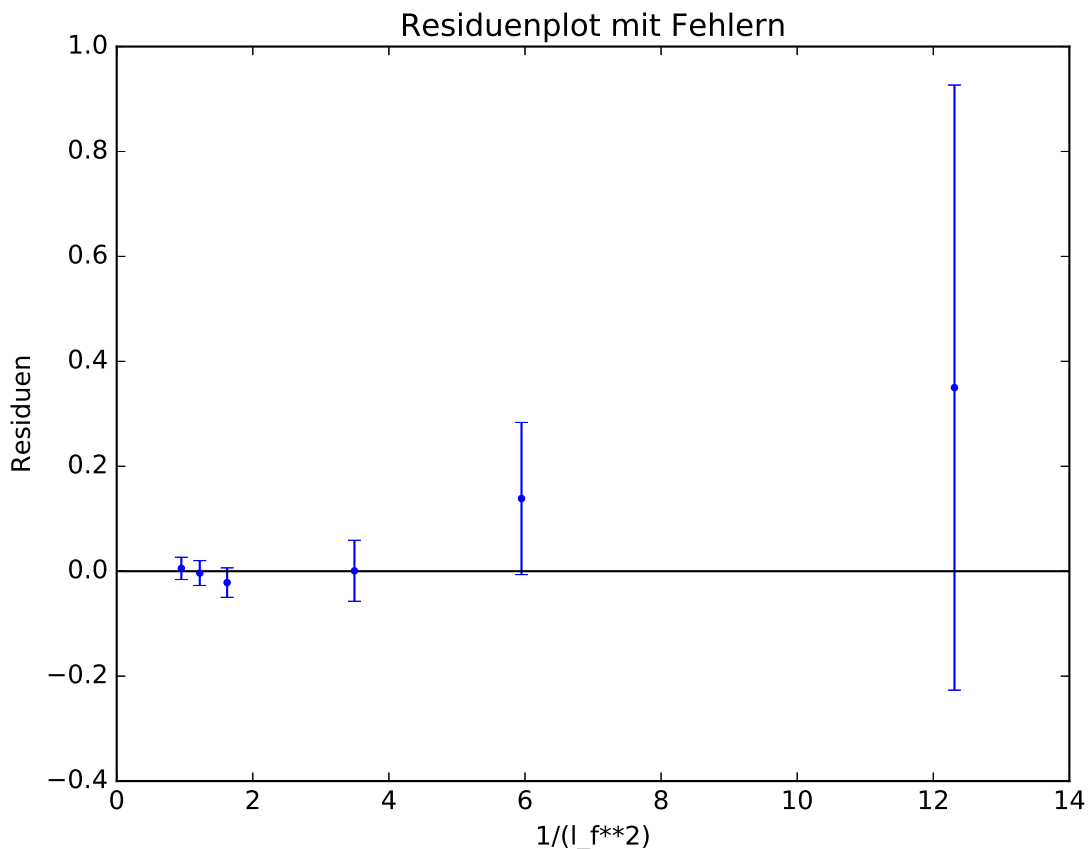
Wobei hier g mit entsprechenden Fehlern aus dem Einzelpendelversuch benutzt wurde.

Tabelle 4: D_F aus Doppelpendel

Gruppe 1	Gruppe 2
$D_F = 4.9636 \frac{1}{m}$	$D_F = 4.8491 \frac{1}{m}$
$\sigma_{D_F} = 0.1622 \frac{1}{m}$	$\sigma_{D_F} = 0.0609 \frac{1}{m}$

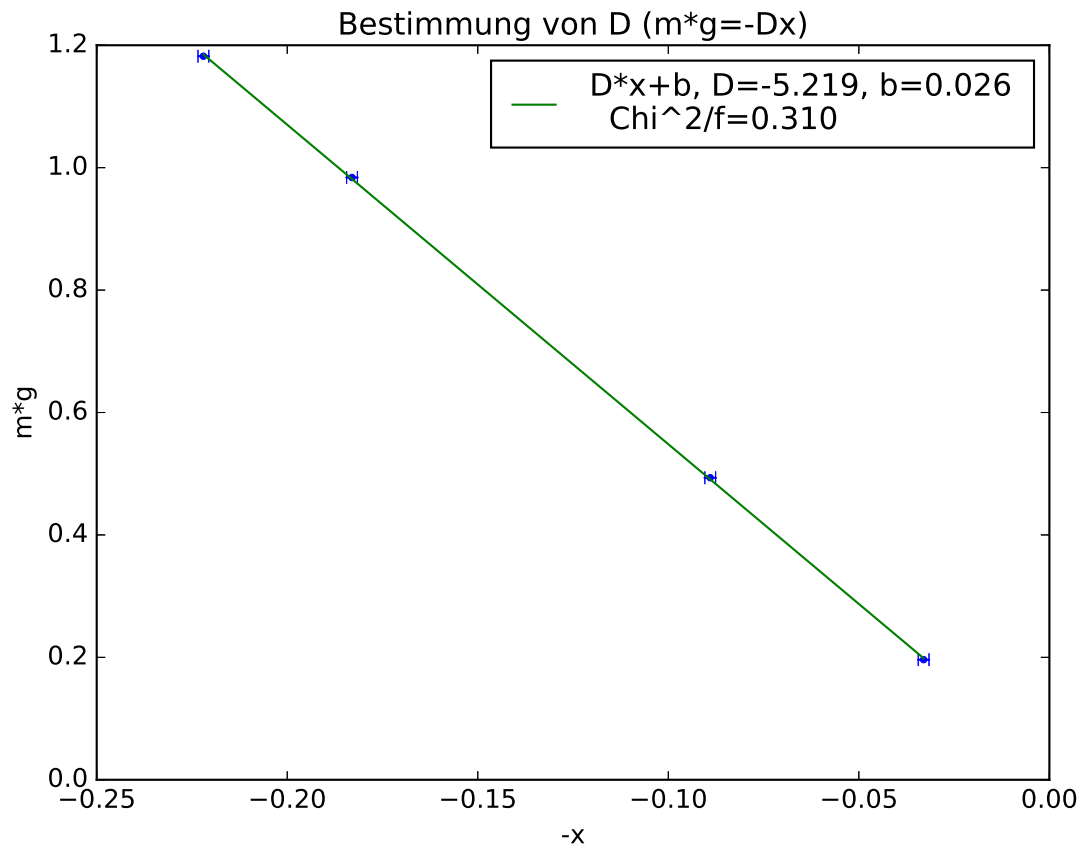
An der zugehörigen, um 0 streuenden Residuenverteilung sieht man, dass die Anpassung der Geraden uns unsere Werte sinnvoll war:

Abbildung 9:



Nun wurde zum Vergleich die Federkonstante noch einmal über das Hook'sche Gesetz (siehe: 4) bestimmt:

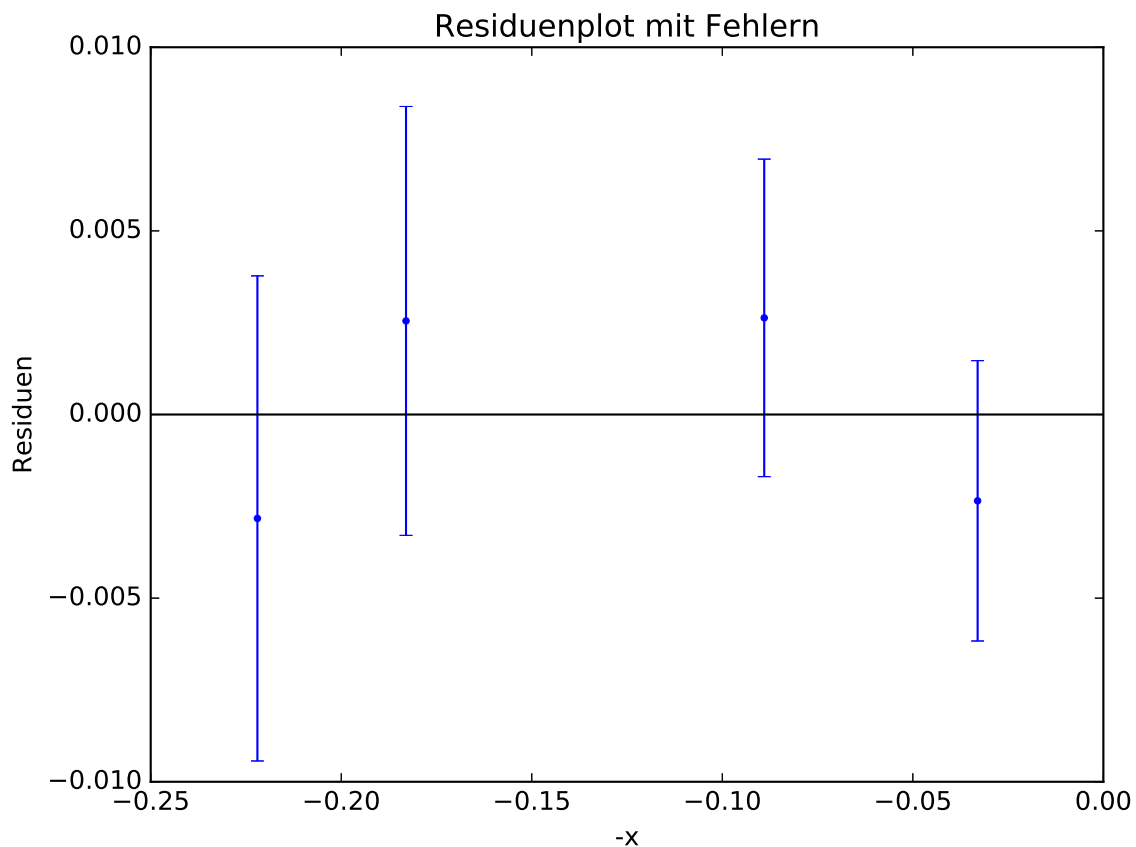
Abbildung 10:



$$D_F = -\frac{m \cdot g}{x_0}$$

Tabelle 5: D_F aus Hook	
Gruppe 1	Gruppe 2
$D_F = 5.2671 \frac{1}{m}$	$D_F = 5.219 \frac{1}{m}$
$\sigma_{D_F} = 0.102 \frac{1}{m}$	$\sigma_{D_F} = 0.0246 \frac{1}{m}$

Abbildung 11:



1.3.3 Fazit

Unsere Ergebnisse bei der Berechnung der Federkonstante stimmen mit ihren Fehlern nicht ganz überein. Bei Gruppe 2 gibt es sogar deutliche Abweichungen. Nach langer Diskussion erklären wir uns dies durch die Näherung unseres Pendels an einen homogenen zylindrischen Pendelkörper mit masseloser Pendelstange, die durch die angepasste Frequenz an die Pendelstange ohne Pendelkörper gegeben wird. Gruppe 2 hat hier eine Anpassung mit einem drei mal größeren Fehler auf die Frequenz (siehe: ??). Diese Ungenauigkeit in der Näherung zieht sich als systematischer Fehler durch die gesamte Rechnung. Dass wir nur statistische Fehler betrachtet haben, die Systematik aber einen nicht geringen Anteil am Fehler hat, erklärt unsere Abweichung der Ergebnisse aus dem Doppelpendel und der Hook'schen Federmessung.

Bei den Linearen Regressionen kann man erkennen, dass die Geraden alle Fehlerkästen schneiden. Auch die Residuenplots entsprechen unseren Erwartungen, es sind keine Systematiken erkennbar. Somit sind unsere statistischen Fehler im Rahmen unserer Erwartungen.