Prismenspektrometrie

Simon Klüttermann, Yuriy Popovych

31. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel des Versuches ist es verschiedene Eigenschaften eines Prismas zu untersuchen. Als erstes wird die Dispersionskurve bestimmt um daraus die Wellenlängen einer zweiten Gasentladungslampe bestimmen zu können.Danach wird das Auflösungsvermögen untersucht.

2 Theorie

Die Prismenspektroskopie basiert auf der Dispersion des Glases. Darunter versteht man eine Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindexes. Beschrieben kann diese werden durch folgende Grafik.

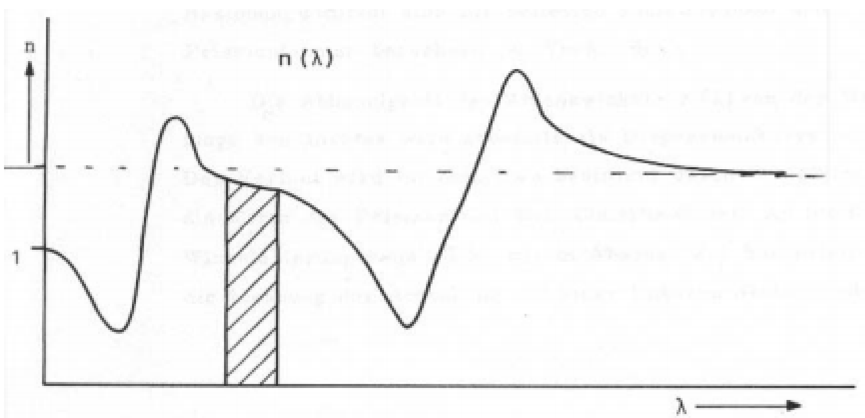

Abbildung 1: Dispersionskurve eines Prismas (Quelle: Praktikumsskript)

Im aktuellen Versuch wird nur der (im Bild markierte) Teil für sichtbares Licht betrachtet. Dieser lässt sich durch die folgende Funktion gut approximieren:

$$n(\lambda) = a(1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{b_2}{\lambda^4})$$

Betrachtet man monochromatisches Licht, ergibt sich gemäß dem snelliusschen Brechungsgesetz $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$ folgender Strahlengang durch das Prisma:

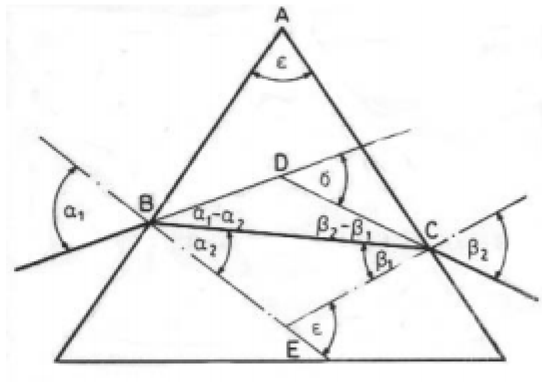

Abbildung 2: Strahlengang in einem Prisma (Quelle: Praktikumsskript)

Für den Brechungsindex $n = n_2$ mit $n_1 = 1$ gilt dabei:

$$n = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\sin(\beta_2)}{\sin(\beta_1)} = \frac{\sin(\frac{\delta_{min}+\epsilon}{2})}{\sin(\frac{\epsilon}{2})}$$

δ_{min} wird dabei als Winkel der Minimalablenkung bezeichnet.

Das Auflösungsvermögen, welches benötigt wird, um die Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ aufzulösen lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$A = \frac{dn}{d\lambda} 2a \frac{\sin(\frac{\epsilon}{2})}{\cos(\frac{\delta_{min}+\epsilon}{2})}$$

Dabei ist a die Länge der beleuchteten Fläche und $\frac{dn}{d\lambda}$ die Dispersion, die nur vom Prisma abhängt.

3 Aufbau

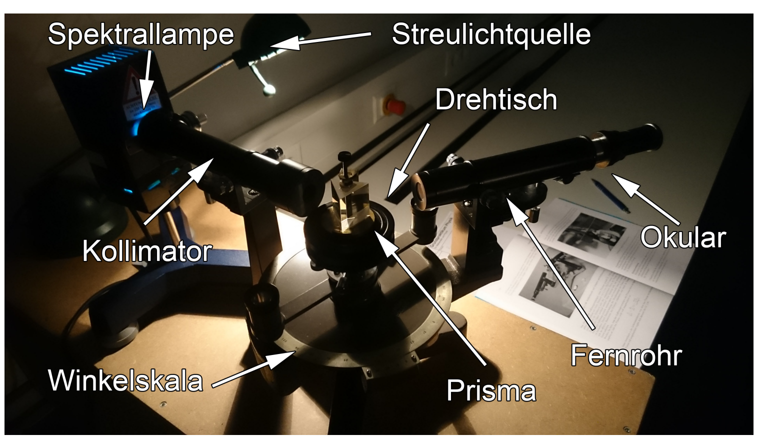

Abbildung 3: Aufbau des Prismenversuchs

Eine Gas(Metalldampf-)entladungslampe stellen wir vor ein Kollimatorrohr, welches parallele Lichtbündel erzeugt. Diese Lichtbündel fallen in einen Prisma, der sich drehbar gelagert in der Mitte des Versuchsaufbaus befindet. Dieser bricht, korrekt justiert, das Licht der Gasentladungslampe in ein ebenfalls drehbar gelagertes Fernrohr. Das Fernrohr selbst besitzt eine Winkelskala mit Nonius, sodass es uns möglich ist, den Winkel des Fernrohrs zum Nullwinkel auf eine Bogenminute genau zu bestimmen. Des Weiteren befindet sich im Gegenstandspunkt des Okulars ein Fadenkreuz, mit dem wir die von der Gasentladungslampe erzeugten Spektrallinien anpeilen können.

4 Bestimmung der Dispersionskurve

4.1 Durchführung

Das Prisma wird unter spitzem Winkel zu einer Seite im Lichtstrahl der HgCd-Lampe platziert. Mit Hilfe des Fernrohrs werden die einzelnen Spektrallinien gesucht. Nun wird das Prisma langsam gedreht, bis eine Umkehrung des Spektrums bemerkbar wird. Das Fernrohr wird dabei mitgedreht. An diesem Punkt wird mit dem Fadenkreuz auf die Linie der entsprechenden Farbe anvisiert und der Winkel abgelesen, dies wird mehrfach wiederholt. Das Gleiche wird auf der entgegengesetzten Seite des Prismas wiederholt, wobei das Fernrohr dabei mitgedreht wird. Aus den beiden abgelesenen Winkeln lässt sich δ_{min} für die jeweilige Farbe bestimmen.
Die grüne Linie wurde zur Bestimmung der Messunsicherheit 10 Mal auf der ersten Seite und 4 Mal auf der zweiten Seite abgelesen. Die restlichen Farben (rot, gelb, blau) jeweils auf beiden Seiten vier Mal.

4.2 Auswertung

Für die Rauschmessung der beiden Winkel von beiden Seiten bei der grünen Linie ergeben sich folgende Verteilungen:

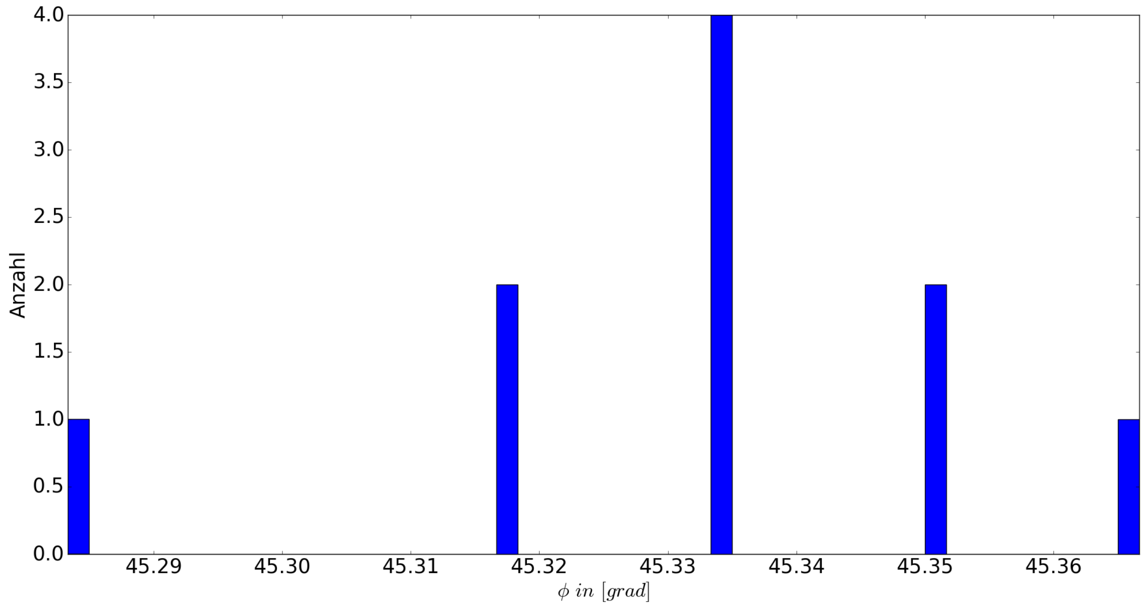

Abbildung 4: Häufigkeitsverteilung 1. Messung grüne Linie Mittelwert: $\phi = 45°$ 20.0' Standardabweichung: $\sigma_\phi = 1.4'$

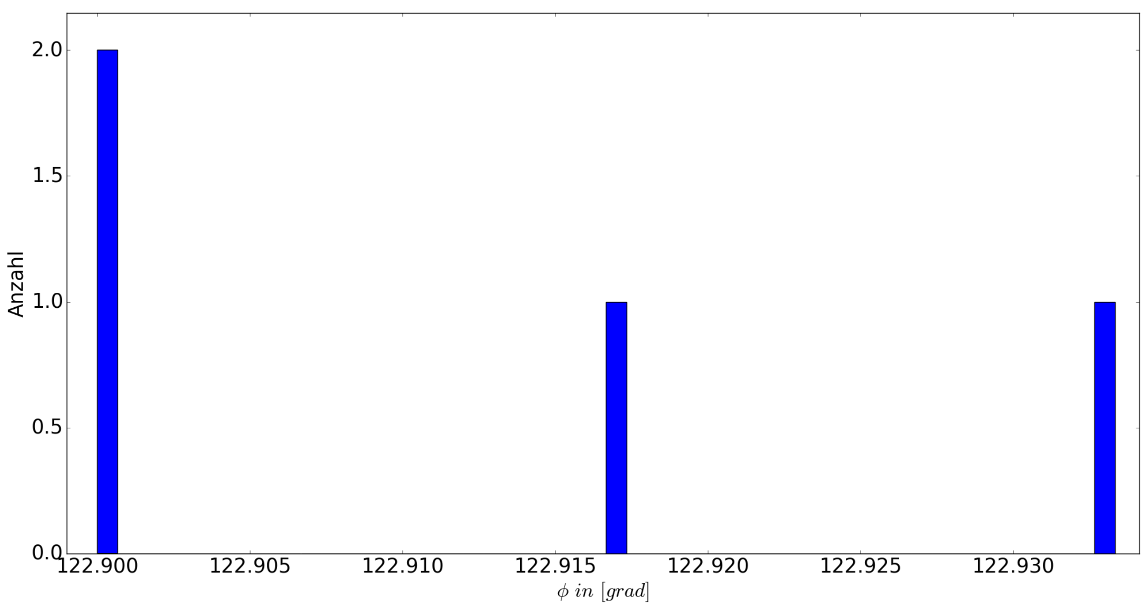

Abbildung 5: Häufigkeitsverteilung 2. Messung grüne Linie $\phi = 123°$ 1.8'

Für die gemessenen Winkel bei der grünen Linie wurde der Mittelwert, Standardabweichung und Fehler auf den Mittelwert entsprechend folgender Formeln ausgerechnet:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \qquad \sigma_\phi = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\phi_i - \bar{\phi})^2} \qquad \sigma_{\bar{\phi}} = \frac{\sigma_\phi}{\sqrt{N}}$$

Dabei wird der Fehler auf den Einzelwert der Rauschmessung als Fehler auf den Einzelwert eines jeden Winkel auf der entsprechenden Seite betrachtet. Der Fehler auf den Mittelwert ergibt sich dann durch teilen durch die Wurzel der Anzahl der Messungen. δ_{min} berechnet sich folgendermaßen aus den beiden gemessenen Winkeln $\phi_1 > \phi_2$, da beim Messen der Nullwinkel nicht überschritten wurde:

$$\delta_{min} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$$

Durch die Formel aus der Theorie berechnet sich der Brechnungsindex mit entsprechender Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{\delta_{min}+\epsilon}{2}) \cdot \sigma_{\delta_{min}}}{\sin(\frac{\epsilon}{2})}$$

Der Prismawinkel ϵ wird mit 60° als fehlerlos angenommen. Es ergeben sich folgende Brechungsindizes für die verschiedenen Farben:

Farbe	n	σ_n
rot	1.51503	0.00019
gelb	1.51741	0.00019
grün	1.51912	0.00016
blau (2. Linie)	1.52362	0.00019

Tabelle 1: n für die verschiedenen Farben

Die Brechungsindizes deuten auch ein Prisma aus Kronglas hin. Diese Werte werden nun über $\frac{1}{\lambda^2}$ aufgetragen. Da es sich hier nur um vier Datenpunkte handelt, wurde hier nur eine Gerade angepasst. Dies lässt sich durchführen wenn man den Parameter b_2 als sehr viel kleiner als b_1 annimmt.

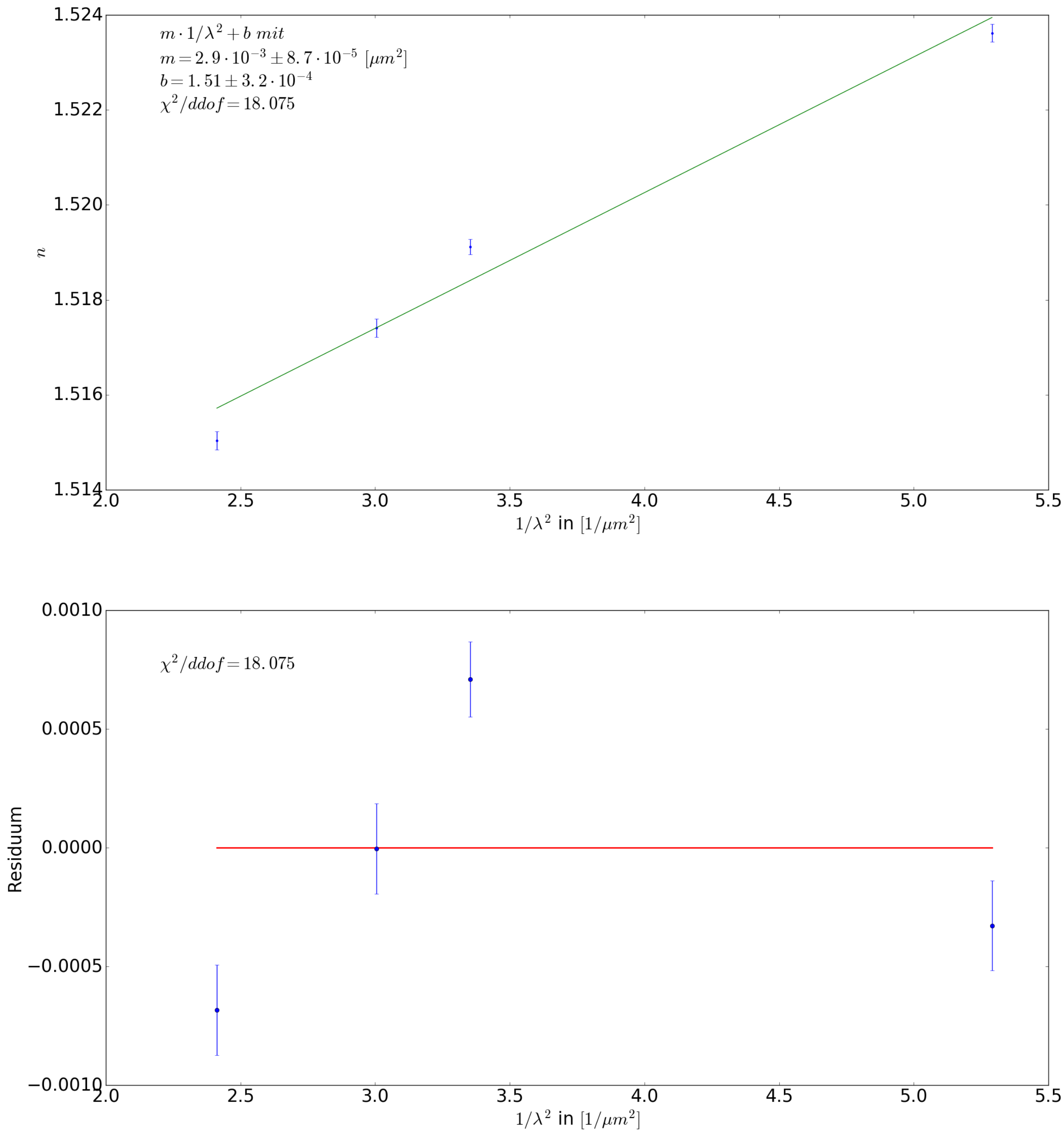

Abbildung 6: Lineare Anpassung der Dispersionskurve

Das nicht ganz optimale χ^2 ergibt sich möglicherweise durch Unterschätzung der Fehler, da eine Einstellung des Fernrohr zwei Mal abgelesen wurde.
Damit hat die Funktion der Dispersionskurve die Form $n(\lambda) = a \cdot (1 + \frac{b_1}{\lambda^2})$. Das $\frac{\chi^2}{ddof}$ ist etwas groß, was an der kleinen Streuung der Winkelablesung liegt, woraus ein sehr kleiner Fehler auf n resultiert. Jedoch ist dieser Wert bei nur vier Punkten nicht sehr aussagekräftig, wodurch sich dieser Wert akzeptieren lässt. Damit ergibt sich für die Dispersionskurve für

das entsprechende Prisma folgender Zusammenhang:

$$n(\lambda) = 1.51 \cdot \left(1 + \frac{4.38 \cdot 10^{-3} \mu m^2}{\lambda^2}\right)$$

5 Bestimmung der Wellenlänge

5.1 Durchführung

Es soll nun über die (nur prismaabhängige) Dispersionskurve die möglichen Wellenlängen einer anderen Lampe bestimmt werden. Dazu wird statt der HgCd-Lampe das Prisma mit der Na-Lampe bestrahlt. Die Durchführung läuft analog zur Bestimmung der Dispersionskurve. Da die Standardabweichung jedoch bereits im vorherigen Versuch bestimmt wurde, wurden hier nur vier Messungen pro Farbe durchgeführt. Es wurden die gelbrote und die gelbgrüne Linie vermessen. Da es nach Theorie jeweils zwei davon geben sollte, wurde davon ausgegangen, dass es sich um die jeweils hellere handelt.

5.2 Auswertung

Für die beiden Farben werden folgende Winkel von beiden Seiten abgelesen:

Farbe, Seite	1. Messung	2. Messung	3. Messung	4.Messung
gelbrot 1. Seite	45° 36’	45° 35’	45° 35’	45° 35’
gelbrot 2. Seite	122° 51’	122° 52’	122° 51’	122° 52’
blaugrün 1. Seite	45° 10’	45° 9’	45° 11’	45° 10’
blaugrün 2. Seite	123° 12’	123° 14’	123° 12’	123° 15’

Tabelle 2: Abgelesene Winkel

Zur Bestimmung von λ wird die Funktion der Dispersionskurve nach λ umgestellt.

$$\lambda(n) = \sqrt{\frac{a \cdot b_1}{n - a}} = \sqrt{\frac{4.32 \mu m^2}{n - 1.51}}$$

Für die beiden (Doppel-)Linien ergeben sich analog zum ersten Teilversuch folgende Brechungsindizes:

$$n_{gelbrot} = 1.51667 \pm 0.00019 \qquad n_{blaugruen} = 1.52112 \pm 0.00019$$

Mit der entsprechenden Formel und Fehlerfortpflanzung erben sich folgende Wellenlängen. Dabei wurden die Fehler auf die Parameter der Dispersionskurve als systematische Fehler separat fortgepflanzt.

$$\lambda_{gelbrot} = (604 \pm 15 \pm 31) nm \qquad \lambda_{blaugruen} = (482 \pm 7 \pm 19) nm$$

Die Literaturwerte dieser beiden Wellenlängen betragen:

$$\lambda_{gelbrot} = 616.08 nm \qquad \lambda_{blaugruen} = 491.61 nm$$

Dabei war der Wert für die blaue Linie nicht für die Na-Lampe vorgesehen. Es wurde von einer Verschmutzung der Lampe ausgegangen und somit mit dem Literaturwert der HgCd-Lampe verglichen.
Es fällt auf, dass beide Werte innerhalb einer σ- Umgebung der Messwerte liegen, welche jedoch vergleichsweise ziemlich groß ausfällt. Dieß liegt daran, das sich n nur leicht von a unterscheidet und daher der relative Fehler auf $n - a$ und somit auch der relative Fehler auf λ recht groß wird.

6 Abschätzung des Auflösungsvermögens

6.1 Durchführung

Es wird die Zn-Lampe verwendet. Zur Variation der Größe der beleuchteten Fläche, wird vor dem Kolimatorrohr eine Blende mit verschieden großen Spalten angebracht. Diese Blende wird anfangs auf den größten Spalt eingestellt. Dieser Spalt wird auf den kleinst möglichen Spalt verkleinert, bei dem man die blaue Doppellinie (die beiden blauen Linien mit den kleineren Wellenlängen) noch auflösen kann, und entsprechend verrechnet.

6.2 Auswertung

Die blaue Doppellinie konnte beim vorletzten Spalt (vom Größen aus) immer noch aufgelöst werden, jedoch nicht beim Kleinsten. Dies entspricht einer Spaltbreite von $1mm$. Daher liegt das minimale Auflösungsvermögen bei einer Spaltbreite zwischen 1mm und 0.5 mm. Da es sich nur um eine Abschätzung handelt ignorieren wir Fehler. Damit folgt folgendes Auflösungsvermögen:

$$A = 185.47$$

Die Wellenlängen für die beiden zu trennenden Linien betragen:

$$\lambda_1 = 472.22nm \qquad \lambda_2 = 468.01nm \qquad \Delta\lambda = 4.21nm$$

Damit beträgt der theoretische Wert für das Auflösungsvermögen:

$$A_{theo} = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = 111.17$$

Um beim nächstkleineren Wert die Doppellinie doch auflösen zu können, müsste das Auflösungvermögen, halb so viel betragen also etwa 92.7 . Dies liegt jedoch bereits unter dem erwarteten Wert, wodurch sich verdeutlichst, dass die minimale Spaltbreite richtig bestimmt wurde.

7 Fazit

Der Versuch lässt sich im Ganzen als erfolgreich einstufen. Es konnte eine Dispersionskurve mit Brechungsindizes mit kleiner Streuung bestimmt werden. Weiterhin konnte über die berechneten Brechungsindizes das Material des Prismas eindeutig als Kronglas identifiziert

werden.
Bei der Wellenlängenbestimmung wurden Wellenlängen bestimmen, in deren σ-Intervallen die erwarteten Werte liegen. Das große Fehlerintervall lässt sich auf die Bestimmung der Dispersionskurve zurückführen. Dadurch dass die Differenz vom bestimmten Parameter a und dem Brechungsindex n sehr klein ist, ergibt sich auf diesen Wert ein vergleichsweise großer relativer Fehler, welcher sich entsprechend auf die Wellenlänge fortpflanzt.
Bei der Abschätzung des Auflösungsvermögens, wurde die minimale Spaltbreite nachweislich korrekt bestimmt. Durch die grobe Skalierung der Spaltbreiten war eine genauere Untersuchung jedoch nicht möglich.