

Protokoll Elektrizitätslehre

Gruppe B02

Bastian Kargoll
Jonas Morgenweg
Carsten Robens
Rüdiger Matti Schmidt

8. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	LCR-Schwingkreis	3
2.2	Gekoppelte LC-Schwingkreise	6
3	Fehler auf Strom- und Spannungswerte (Vorversuch)	8
3.1	Versuchsaufbau	8
3.2	Versuchsbeschreibung und Auswertung	8
4	Charakterisierung der Widerstände (Vorversuch)	9
4.1	Versuchsbeschreibung	9
4.2	Auswertung	9
5	LC-Schwingkreis (Hauptversuch)	11
5.1	Versuchsbeschreibung	12
5.2	Auswertung	12
5.2.1	Bestimmung der Dämpfung	12
5.2.2	Bestimmung der Induktivität	13
5.2.3	Bestimmung des ohmschen Widerstandes des Aufbaus	15
5.2.4	Bestimmung der Kapazität	16
5.2.5	Schwingung im LCR-Schwingkreis	18
5.2.6	Phasenverschiebung	19
6	Gekoppelte LC-Schwingkreise (Hauptversuch)	20
6.1	Versuchsaufbau	20
6.2	Versuchsdurchführung	20
6.3	Auswertung	21
6.3.1	Bestimmung des Kopplungsgrades k	21
6.3.2	Dämpfung und Phasenbeziehungen	24

1 Ziel des Versuchs

Das vorliegende Protokoll beschreibt und dokumentiert die Durchführung und Auswertung einer Reihe von Versuchen zum Oberthema Elektrizitätslehre. Der Fokus liegt auf der Betrachtung von aus Spulen und Kondensatoren zusammengesetzten Schwingkreisen. Diese werden für unterschiedliche Bauteile und Schaltungen untersucht und charakterisiert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 LCR-Schwingkreis

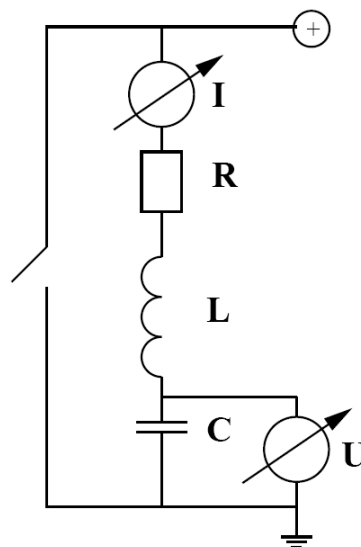


Abbildung 1: Schaltskizze eines LCR-Schwingkreises

Ein LCR-Schwingkreis wird aufgebaut aus einer Spule L , einem Kondensator C sowie einem Ohmschen Widerstand R , die in Reihe geschaltet werden (vgl. Abbildung 1). Wird der Kondensator in dieser Konstellation über eine Spannungsquelle aufgeladen und dann über die Spule entladen, so setzt eine Schwingung ein: Die Gesamtenergie schwingt zwischen elektrischer Energie im Kondensator und magnetischer Energie in der Spule. Dabei wird im (in der Praxis unvermeidlichen) ohmschen Widerstand kontinuierlich Energie $dE = I^2 \cdot R \cdot dt$ in Wärme umgewandelt und somit dem Kreis entzogen. Dies bewirkt eine Dämpfung der Schwingung. Ist diese Dämpfung groß, so kann keine Schwingung einsetzen (Kriechfall/apperiodischer Grenzfall).

Gemäß der Maschenregel ist die Summe aller Spannungsabfälle im geschlossenen Stromkreis gleich Null, es gilt hier demnach

$$U_0 = U_R + U_L + U_C = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad (1)$$

wobei im Falle der Entladung des Kondensators $U_0 = 0$ gilt. Durch Differenzieren und Umformen ergibt sich eine Differentialgleichung, die in ihrer Form anderen Differentialgleichungen freier, gedämpfter Schwingungen (z.B. in der Mechanik) gleicht. Man schreibt daher

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L} \quad (2)$$

mit

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (3)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4)$$

Mit der Dämpfungskonstante δ und der Kreisfrequenz ω_0 der freien, ungedämpften Schwingung definiert man den Dämpfungsgrad D und die Güte Q des Schwingkreises:

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5)$$

$$Q = \frac{1}{2D} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

Gleichung (1) ist für die Ladung des Kondensators (also $U_0 = 0$) eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit Hilfe der üblichen Lösungsstrategien für Gleichungen dieses Typs ergibt sich die allgemeine Lösung

$$Q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad (7)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega \quad (8)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (9)$$

A und B sind die Integrationskonstanten, die noch mit Hilfe von Randbedingungen bestimmt werden müssen. Die Randbedingungen lassen sich folgendermaßen angeben, wenn man das Entladen des Kondensators beschreibt:

$$Q(0) = CU_0, \quad \left[\frac{dQ}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad (10)$$

Man unterscheidet drei verschiedene Fälle, in denen der Schwingkreis unterschiedliche Verhaltensweisen zeigt:

Kriechfall

Der Kriechfall tritt für $\delta > \omega_0 \Leftrightarrow D > 1$ ein, also wenn die Dämpfung so stark ist, dass sich der Kondensator nur langsam asymptotisch entlädt und keine Schwingung auftritt. Entsprechend schwingt auch der Entladestrom nicht über, sondern verläuft asymptotisch gegen Null.

Aperiodischer Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall tritt für $\delta = \omega_0 \Leftrightarrow D = 1$ ein. Die Dämpfung ist so stark, dass eine Schwingung verhindert wird; der Kondensator in der kürzstmöglichen Zeit. Der Strom wird größer als im Kriechfall, da der Kondensator in kürzerer Zeit entladen wird. Für Strom- und Spannungsverlauf ergibt sich aus der Differentialgleichung für diesen Fall:

$$I(t) = -\delta^2 \cdot e^{-\delta t} C U_0 \cdot t \quad (11)$$

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta t) \quad (12)$$

Schwingfall

Für kleine Dämpfungen, also $\delta < \omega_0 \Leftrightarrow D < 1$, findet bei der Entladung des Kondensators ein Einschwingvorgang statt, bis der endgültige Wert erreicht ist. Die Wurzel im Term von λ wird imaginär (vgl. Gleichung (8)), die allgemeine Lösung der Differentialgleichung führt also unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen auf

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (13)$$

$$I(t) = -C U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \cdot \sin \omega t \quad (14)$$

Die Spannung verläuft (für kleine δ) annähernd wie ein Cosinus, der Strom folgt einem Sinusverlauf. Zwischen beiden herrscht also eine Phasenverschiebung von ungefähr $\frac{\pi}{2}$, der Strom eilt der Spannung voraus.

Soll die Aufladung des Kondensators betrachtet werden, so gilt $U_0 \neq 0$, die Differentialgleichung (1) ist also inhomogen. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch:

$$Q(0) = 0 \quad , \quad \left[\frac{dQ}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad (15)$$

Es lassen sich wiederum dieselben drei Fälle unterscheiden, wie oben geschildert. Auf eine genauere Betrachtung sowie auf die Darstellung der einzelnen theoretischen Strom- und Spannungsverläufe soll hier zu Gunsten der

Übersichtlichkeit verzichtet werden. Es ist zu beachten, dass im Schwingfall die Spannungsschwingung nicht um $U = 0V$, sondern um U_0 erfolgt. Wie im Entladungsprozess gilt auch hier näherungsweise für den LCR-Schwingkreis:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (16)$$

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t) \quad (17)$$

2.2 Gekoppelte LC-Schwingkreise

Zwei elektrische Schwingkreise können induktiv gekoppelt werden, wobei Resonanz auftritt, wenn $\omega_1 = \omega_2$ ist. Die Schwingungsenergie wird dann über das sich bildende Magnetfeld jeweils von einem zum anderen Schwingkreis übertragen. Auch dieses Phänomen findet eine Analogie in der Mechanik bei der Betrachtung von gekoppelten Pendeln.

Stellt man Differentialgleichungen für beide Schwingkreise (ohne Dämpfung) auf, so ergibt sich jeweils auf Grund der Maschenregel:

$$\ddot{I}_1 + k \cdot \ddot{I}_2 + \frac{I_1}{LC} = 0 \quad (18)$$

$$\ddot{I}_2 + k \cdot \ddot{I}_1 + \frac{I_2}{LC} = 0 \quad (19)$$

Hierbei ist k der Grad der Kopplung. Es ergeben sich zwei Fundamentalschwingungen mit Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1 + k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}} \quad (20)$$

$$\omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1 - k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}. \quad (21)$$

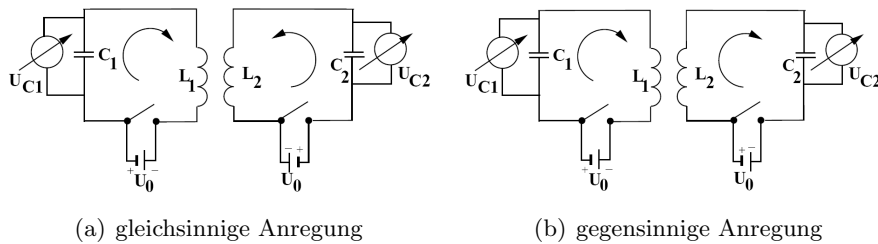


Abbildung 2: Schaltskizzen gekoppelter Schwingkreise bei unterschiedlichen Anregungen

Die Fundamentalschwingung ω_+ kann alleine angeregt werden, in dem die Kondensatoren der beiden Schwingkreise so aufgeladen werden, dass durch beide Spulen stets parallele Ströme fließen (gleichsinnige Anregung

gemäß Abbildung 2(a)). Werden die Kondensatoren entgegengesetzt geladen, fließen die Ströme also antiparallel durch die Spulen, so ist nur w_- angeregt (gegensinnige Anregung, Abbildung 2(b)). Die Schwingung erfolgt schneller, da die Kopplung einen schnelleren Energieaustausch bewirkt. Sind die Frequenzen dieser beiden Grundschrwingungen bekannt, so lässt sich der Kopplungsgrad k errechnen:

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} \quad (22)$$

Werden die Kondensatoren unterschiedlich stark aufgeladen, so tritt Schwebung auf. Dabei findet der Energieaustausch zwischen den Schwingkreisen derart statt, dass jeder Kreis zu einigen Zeitpunkten die gesamte und zu anderen gar keine Schwingungsenergie trägt. Wie in der Mechanik ergibt sich auch hier als Frequenz der gekoppelten Schwingung

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \approx f_0, \quad (23)$$

die Differenz der Fundamentalschwingungen ergibt die Frequenz der Schwebung:

$$f_s = \frac{f_- - f_+}{2} \quad (24)$$

Die für jeden realen Schwingkreis unvermeidliche Dämpfung wird beschrieben, indem (sich aus angepassten Differentialgleichungen ergebene) Dämpfungen β_{\pm} und Eigenfrequenzen $\omega_{\pm 0}$ der Fundamentalschwingungen folgendermaßen definiert werden:

$$\beta_{\pm} = \frac{R}{2L(1 \pm k)} \quad (25)$$

$$\omega_{\pm 0}^2 = \frac{1}{LC(1 \pm k)} \quad (26)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen sowie den üblichen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen lassen sich die Verläufe von Strom und Spannung in gedämpften, gekoppelten Schwingkreisen berechnen. Die Einhüllenden der Schwebungsvorgänge $U_{1,s}$ und $U_{2,s}$ werden dargestellt durch

$$U_{1,s} = U_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega_s t) \quad (27)$$

$$U_{2,s} = -U_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_s t), \quad (28)$$

mit der Dämpfung β und der Schwebungskreisfrequenz ω_s :

$$\beta = \frac{\beta_- + \beta_+}{2} \quad (29)$$

$$\omega_s = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \quad (30)$$

3 FEHLER AUF STROM- UND SPANNUNGSWERTE (VORVERSUCH)8

Berechnet man aus diesen Gleichungen die Nulldurchgänge sowie die Maxima der beiden Einhüllenden, so stellt man fest, dass ihre Phasenverschiebung nicht, wie im ungedämpften Fall, $\frac{\pi}{2}$ beträgt, sondern durch die Dämpfung verringert wird. Der Abstand Δt zwischen den Nullstellen von $U_{1,s}$ und den Extrema von $U_{2,s}$ lässt sich berechnen und ergibt sich für kleine Kopplungen ($k < 0,2$) zu:

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_s} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right] \quad (31)$$

3 Fehler auf Strom- und Spannungswerte (Vorversuch)

3.1 Versuchsaufbau

Der Versuch wurde, wie in Abbildung 3 gezeigt, aufgebaut.

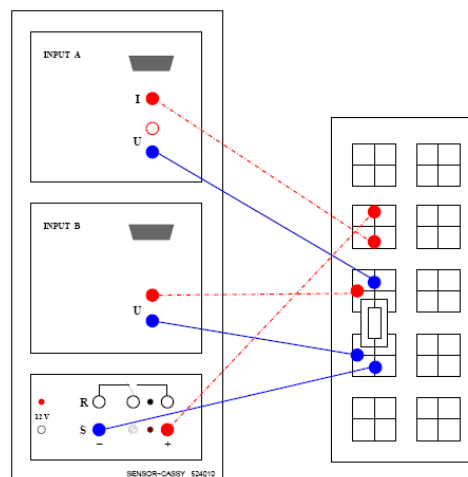


Abbildung 3: Versuchsaufbau der Widerstandsmessung

3.2 Versuchsbeschreibung und Auswertung

Um die Fehler auf die Strom- und Spannungsmessung abschätzen zu können, wird in diesem Versuch exemplarisch das Grundrauschen auf diese Werte mit Hilfe einer einfachen Schaltung ermittelt (siehe Schaltskizze 3).

Hierbei wurde in beiden Gruppen eine Spannung auf ca. $9V$ eingestellt, die Messdauer auf $10ms$ und eine automatische Aufnahme der Messwerte. So werden exemplarisch für jeweils einen Widerstand (Gruppe A: 20Ω , Gruppe B: 10Ω) 1000 Messwerte aufgezeichnet, aus denen dann der Mittelwert, der Fehler auf die Einzelwerte und der Fehler auf den Mittelwert bestimmt wird.

Die dafür verwendeten Formeln lauten:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i \quad (32)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (33)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (34)$$

Die so berechneten Werte σ_U und σ_I werden in den folgenden Versuchen als Abschätzung für den statistischen Fehler auf die von CASSY gemessenen Strom- und Spannungswerte verwendet.

Es wurden folgende Werte ermittelt:

Gruppe	A	B
$\bar{I}[mA]$	103,22	102,59
$\sigma_{\bar{I}}[mA]$	0,00	0,00
$\sigma_I[mA]$	0,08	0,08
$\bar{U}[V]$	2,0550	1,0374
$\sigma_{\bar{U}}[V]$	0,0000	0,0000
$\sigma_U[V]$	0,0006	0,0011

4 Charakterisierung der Widerstände (Vorversuch)

4.1 Versuchsbeschreibung

Die Widerstände werden einzeln nacheinander in einen Schaltkreis gebaut (siehe Abbildung 3). Es wird der im Schaltkreis fließende Strom, sowie die über dem Widerstand abfallende Spannung gemessen. Für jeden Widerstand werden manuell einige Spannungen eingestellt. Die gemessenen Werte werden in ein U-I-Diagramm eingezeichnet und eine Geradenanpassung (ROOT) durchgeführt.

4.2 Auswertung

Die statistischen Fehler stammen aus der linearen Regression, wobei als Fehler für die Spannungs- und Stromwerte die Ergebnisse aus dem vorherigen Vorversuch genommen wurden.

Für die Abschätzung des systematischen Fehlers wurden alle Strom- und Spannungswerte auf folgende Weise systematisch verschoben:

$$U_{i,verschoben} = U_i \pm (0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{Bereichsendwert}) \quad (35)$$

$$I_{i,verschoben} = I_i \mp (0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{Bereichsendwert}) \quad (36)$$

4 CHARAKTERISIERUNG DER WIDERSTÄNDE (VORVERSUCH)¹⁰

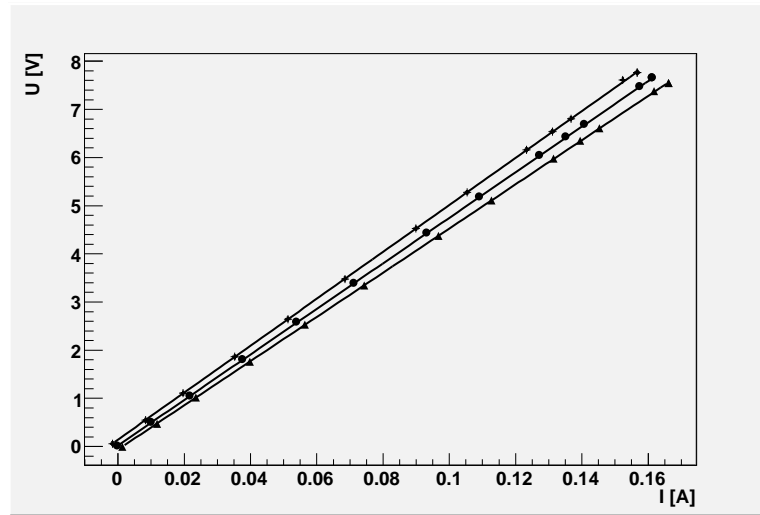


Abbildung 4: Veranschaulichung der Abschätzung des systematischen Fehlers auf die Geradensteigung

An die so verschobenen Punkte wird wieder eine Gerade angepasst und mit deren Steigungen, m_+ und m_- , der systematische Fehler auf die Steigung m der ursprünglichen Gerade folgendermaßen abgeschätzt (eine Veranschaulichung dieser Methode ist in Abbildung 4 zu sehen) :

$$\sigma_{sys,+} = |m_+ - m| \quad (37)$$

$$\sigma_{sys,-} = |m_- - m| \quad (38)$$

$$\Rightarrow \sigma_{m,sys} = \frac{\sigma_{sys,+} + \sigma_{sys,-}}{2} \quad (39)$$

Es ergaben sich folgende Werte, wobei $R_{A/B}$ die von der jeweiligen Gruppe (A oder B) bestimmten Widerstände bezeichnet:

Nominell	$R_A[\Omega]$	$\sigma_{R_A}(stat)[\Omega]$	$\sigma_{R_A}(sys)[\Omega]$	Messbereich
1 $[\Omega]$	1,02	0,01	0,03	$\pm 1V, \pm 0,3A$
1 $[\Omega]$	0,99	0,01	0,03	$\pm 1V, \pm 0,3A$
5,1 $[\Omega]$	5,22	0,01	0,16	$\pm 1V, \pm 0,3A$
10 $[\Omega]$	10,16	0,01	0,31	$\pm 3V, \pm 0,3A$
20 $[\Omega]$	19,95	0,01	0,60	$\pm 3V, \pm 0,3A$
47 $[\Omega]$	47,28	0,02	1,42	$\pm 10V, \pm 0,3A$
100 $[\Omega]$	100,05	0,08	3,00	$\pm 30V, \pm 0,3A$

Nominell	$R_B[\Omega]$	$\sigma_{R_B}(stat)[\Omega]$	$\sigma_{R_B}(sys)[\Omega]$	
1 $[\Omega]$	1,01	0,01	0,03	$\pm 1V, \pm 0,3A$
1 $[\Omega]$	1,02	0,02	0,03	$\pm 1V, \pm 0,3A$
5,1 $[\Omega]$	5,11	0,01	0,15	$\pm 1V, \pm 0,3A$
10 $[\Omega]$	10,10	0,01	0,30	$\pm 3V, \pm 0,3A$
20 $[\Omega]$	19,67	0,02	0,59	$\pm 3V, \pm 0,3A$
47 $[\Omega]$	46,16	0,02	1,39	$\pm 10V, \pm 0,3A$
100 $[\Omega]$	98,43	0,04	2,95	$\pm 30V, \pm 0,3A$

Wie aus der Tabelle zu erkennen ist, liegen alle experimentell ermittelten Werte innerhalb der vom Hersteller angegebenen Toleranzgrenze von 5%. Deshalb wird den Messungen vertraut und die angegebenen Fehler bei den weiteren Experimenten für die Fehlerfortpflanzung auf den Endwert verwendet. Die Sprünge in den systematischen Fehlern erklären sich sowohl durch die ansteigenden Widerstände (1%), als auch durch die während der Messung angepassten Messbereiche (0,5%).

Genau genommen wurde in diesem Versuch nicht der Strom gemessen, der durch den Widerstand fließt, sondern der Strom, der durch Widerstand und Spannungsmessgerät fließt. Da der Widerstand des Voltmeters nach Herstellerangaben aber bei ca. $1M\Omega$ liegt, fließt selbst bei der Messung des größten gemessenen Widerstandes von 100Ω lediglich 0,01% des Stroms durch das Spannungsmessgerät; dieser Effekt kann somit vernachlässigt werden.

5 LC-Schwingkreis (Hauptversuch)

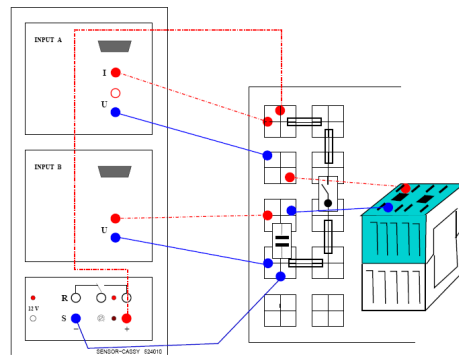


Abbildung 5: Versuchsaufbau des LC(R)-Schwingkreises

5.1 Versuchsbeschreibung

Im folgenden Versuch wird ein LCR-Schwingkreis gemäß Abbildung 5 aufgebaut. Während des Versuchs wird die Spannung sowie der Strom gemessen. Es werden verschiedene Spulen, Kondensatoren und Widerstände in den Schaltkreis eingesetzt, um verschiedene Schwingungsfälle zu konstruieren. Durch Erhöhen des ohmschen Widerstands mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Bauteile wird die Bestimmung der Induktivität L der Spule sowie der Kapazität C des Kondensators mit Hilfe der aus der Messung zugänglichen Werte der Frequenz f und der Dämpfung δ ermöglicht. Desweiteren wird der sogenannte Kriechfall ($\frac{\delta}{\omega_0} > 1$) herbeigeführt und versucht, den aperiodischen Grenzfall ($\frac{\delta}{\omega_0} = 1$) einzustellen.

Die Spulen, Kondensatoren (und Widerstände) werden gemäß Skizze 5 aufgebaut. Die Spannung wird auf ca. 6V eingestellt. Die Spannungsquelle wird beim Aufladevorgang auf automatische Umschaltung von aus (0) nach an (1) gestellt; beim Entladen ist sie dauerhaft eingeschaltet. Es werden 2000 Messpunkte in einer Messzeit von 20ms aufgenommen. Die Messungen werden mit geeigneten Triggereinstellungen gestartet.

5.2 Auswertung

5.2.1 Bestimmung der Dämpfung

Um die Dämpfung δ zu bestimmen, wird mit Hilfe von ROOT eine Einhüllende mit der Formel

$$f(t) = A \cdot e^{(-\delta t)} \quad (40)$$

an die Strommessung I angepasst.

Als statistischer Fehler $\sigma_{\delta,stat}$ wird der von ROOT ausgegebene Fehler auf den entsprechen Parameter der Anpassung übernommen. Hierbei werden ROOT zum Fitten die statistischen Fehler auf die Spannung (s. Vorversuch "Fehler auf Strom- und Spannungswerte", Kapitel 3) und der Gleichverteilungsfehler σ_t auf die Zeit auf Grund der Skalenbreite der Zeitmessung in CASSY übergeben.

$$\sigma_t = \frac{10}{\sqrt{12}} [\mu s] \quad (41)$$

Zur Ermittlung des systematischen Fehlers $\sigma_{\delta,sys}$ werden die Stromwerte um ihren systematischen Fehler (siehe Bestimmung der Fehler auf Strom- und Spannungsmessung) nach unten bzw. oben verschoben und jeweils neu mit der Umhüllenden gefittet. Anhand der Differenzen der so erhaltenen Werte für die Dämpfung δ lässt sich der systematische Fehler $\sigma_{\delta,sys}$ analog zu oberiger Rechnung (Gleichung 35-39) bestimmen.

Die in den Tabellen angegebenen Werte für Widerstände beziehen sich immer auf die im Vorversuch (Charakterisierung der Widerstände) ermittelten Daten. Ist ein Widerstand von $R = 0$ angegeben, so bedeutet dies, dass in diesem Aufbau kein zusätzlicher ohmscher Widerstand eingebaut ist.

Es ergeben sich folgende Werte für die Dämpfung δ :

Gruppe A:

Widerstand	δ	$\sigma_{\delta,stat}$	$\sigma_{\delta,sys}$
0 Ω	145,1	0,3	0,0
1 Ω	211,0	8,7	0,0
5,1 Ω	426,1	5,9	0,0
10 Ω	675,7	62,7	0,0

Gruppe B:

Widerstand	δ	$\sigma_{\delta,stat}$	$\sigma_{\delta,sys}$
0 Ω	252,8	0,2	0,0
1 Ω	474,8	0,9	0,0
5,1 Ω	1347,8	18,1	0,0

Da der systematische Fehler vernachlässigbar klein ist (vier Größenordnungen gegenüber dem statistischen Fehler) wird dieser in der Berechnung der Kapazitäten (siehe Gleichung (52)) nicht berücksichtigt werden.

5.2.2 Bestimmung der Induktivität

Aus den ermittelten Werten der Dämpfung δ und den bereits aus dem Vorversuch bekannten ohmschen Widerständen kann nun mit Hilfe einer linearen Regression die Induktivität der verwendeten Spule, sowie anhand des Y-Achsenabschnitts der Widerstand des Versuchsaufbaus (Kabel R_K + Ampèremeter R_i + Ohmscher Widerstand der Spule R_L) bestimmt werden:

$$\delta = \frac{1}{2L} \cdot R \quad (42)$$

Die statistischen Fehler auf die Steigung a stammen aus den Bestimmungen von δ und der Widerstände und werden bei der Geradenanpassung direkt bestimmt.

Der systematische Fehler wird analog zur Bestimmung der Widerstände durch Verschieben der Werte um ihre jeweiligen systematischen Fehler ($\sigma_{\delta,sys}$ aus obiger Tabelle bzw. $\sigma_{R,sys}$) und erneuter Regression bestimmt (siehe Gleichungen 35-39). Hierbei ist zu bemerken, dass, obwohl der systematische Fehler $\sigma_{\delta,sys}$ berücksichtigt wird, dieser nahezu keinen Einfluss auf die systematischen Schwankungen der Geradensteigung a hat, da der systematische Fehler $\sigma_{R,sys}$ um einige Größenordnungen größer ist.

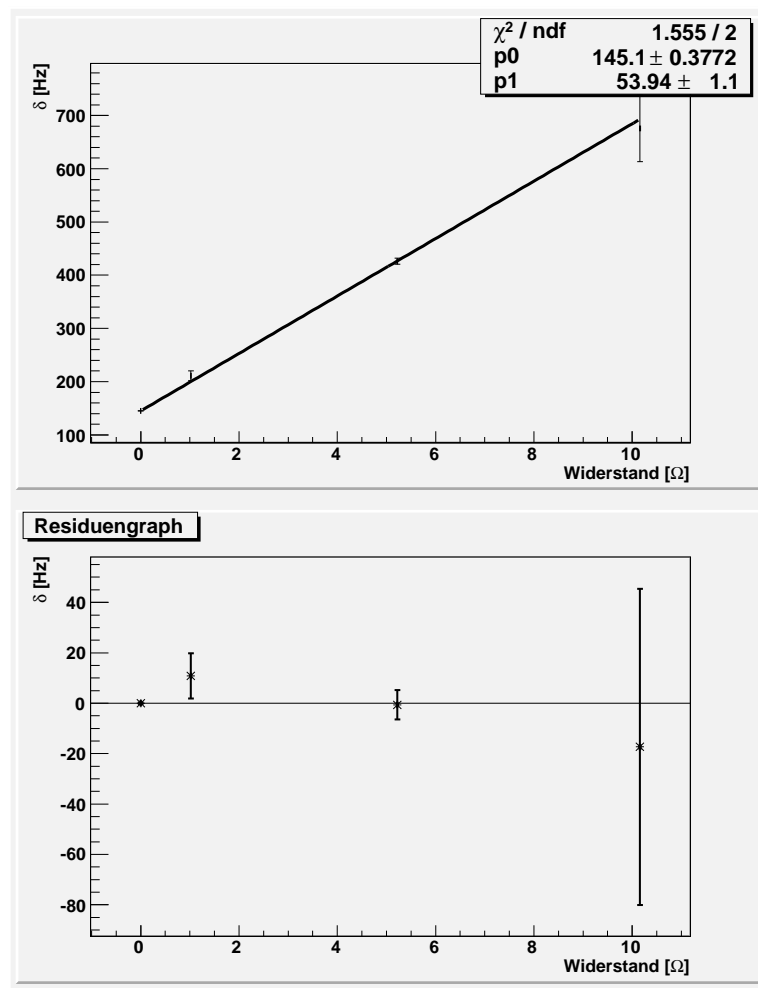


Abbildung 6: Regression Gruppe A

In Abbildung 6 ist exemplarisch die lineare Regression von Gruppe A gezeigt, sowie der Residuengraph der Anpassung. Auffallend ist der große Unterschied zwischen dem Fehler des ersten Wertes im Gegensatz zum Fehler auf den letzten Wert. Die Fehler stammen aus der Anpassung der exponentiellen Einhüllenden auf die Strommessung. Bei dem ersten Wert war kein zusätzlicher ohmscher Widerstand im Schaltkreis verbaut, deswegen wurde an ROOT nur ein sehr kleiner statistischer Fehler übergeben. Die Ursache für die Größe des Fehlers auf den vierten Wert vermuten wir in der schlechten Anpassbarkeit der Umhüllenden an die entsprechende Strommessung, da in diesem Falle bereits eine sehr starke Dämpfung zu verzeichnen war. Auch wenn so die Anpassung der Geraden durch den ersten Wert am stärksten beeinflusst wird, wird die Steigung dennoch durch den zweiten und dritten Wert bestimmt. Der vierte Wert, für die Regression nicht von

großer Bedeutung, liegt aber dennoch, wie man am Residuengraph sehen kann, einigermaßen auf der Geraden und verstärkt so deren Aussagekraft. Zusammen mit dem $\frac{\chi^2}{ndf} \approx 0,78$ kann dem Ergebnis der Regression durchaus Vertrauen geschenkt werden und der Wert für die Steigung a (p1), sowie der von ROOT ausgegebene Fehler auf diesen Wert, kann für die Berechnung der Induktivität verwendet werden. Die Bedeutung des Y-Achsenabschnittes (p0) wird nach der Berechnung der Induktivität weiter untersucht werden.

$$a_A = (53,94 \pm 1,10(stat) \pm 1.60(sys)) \left[\frac{Hz}{\Omega} \right] \quad (43)$$

$$a_B = (216.41 \pm 2.74(stat) \pm 3.68(sys)) \left[\frac{Hz}{\Omega} \right] \quad (44)$$

Aus der Steigung a der angepassten Geraden lässt sich die Induktivität der Spule über die Beziehung

$$L_A = \frac{1}{2a} \quad (45)$$

ermitteln. In diesem Fall werden die Fehler (systematischer und statistischer separat) mittels Fehlerfortpflanzung errechnet, es ergibt sich:

$$\sigma_{L,stat/sys} = \frac{1}{2a^2} \cdot \sigma_{a,stat/sys} \quad (46)$$

$$(47)$$

Für die verwendeten Spulen ergeben sich damit folgende Werte:

Gruppe	Nominell	L[mH]	L_{stat} [mH]	L_{sys} [mH]
A	9 [mH]	9,27	0,19	0,27
B	2,2 [mH]	2,31	0,03	0,07

5.2.3 Bestimmung des ohmschen Widerstandes des Aufbaus

Mit Hilfe des Y-Achsenabschnittes wird der ohmsche Widerstand des Versuchsaufbaus R_X (in erster Linie der Innenwiderstand des Ampèremeters R_i und der ohmsche Widerstand der Spule R_L , sowie weitere Komponenten wie der ohmsche Widerstand der Kabelkonstruktion, der Steckplatte etc.) abgeschätzt:

$$R_X = \delta_{R=0} \cdot 2L \quad (48)$$

$$\sigma_{R_X,stat} = R_X \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\delta,stat}}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{L,stat}}{L} \right)^2} \quad (49)$$

$$\sigma_{R_X,sys} = R_X \cdot \frac{\sigma_{L,sys}}{L} \quad (50)$$

Das ergibt folgende Werte für die Versuchsaufbauten beider Gruppen:

Gruppe	$R_X[\Omega]$	$\sigma_{R,stat}[\Omega]$	$\sigma_{R,sys}[\Omega]$
A	2,69	0,05	0,08
B	1,17	0,02	0,04

Laut Herstellerangaben hat die Spule der Gruppe A einen Widerstand von $R_{L,A} = 2,5\Omega$, der Rest von $0,2\Omega$ ist ein realistischer Wert für den Innenwiderstand des Amperemeters, der mit $< 0,5\Omega$ angegeben ist. Der Widerstand $R_{X,B} = 0,78\Omega$ von Gruppe B liegt ebenfalls innerhalb der Erwartungen, da der Spulenwiderstand hier mit $0,6\Omega$ angegeben war.

5.2.4 Bestimmung der Kapazität

Unter Zuhilfenahme der Frequenz, die mittels Fourieranalyse aus der aufgezeichneten Schwingungen bestimmt werden kann, wird nun zusammen mit der Dämpfung und der Induktivität die Kapazität des Kondensators bestimmt.

Gruppe A:

Widerstand	Frequenz[Hz]	$\sigma_{stat}[\text{Hz}]$
0 Ω	524,8	0,2
1 Ω	524,5	0,1
5,1 Ω	514,3	10,0
10 Ω	498,8	14,8

Gruppe B:

Widerstand	Frequenz[Hz]	$\sigma_{stat}[\text{Hz}]$
0 Ω	1547,9	0,3
1 Ω	1543,8	7,6
5,1 Ω	1499,5	20,8

Hierbei wird, wie angedeutet, der statistische Fehler $\sigma_{C,stat}$ und der systematische Fehler $\sigma_{C,sys}$ getrennt voneinander fortgepflanzt.

Die statistischen und systematischen Fehler auf den Widerstand bzw. die Induktivität ($\sigma_{R,sys/stat}$, bzw. $\sigma_{L,sys/stat}$) stammen aus obigen Rechnungen bzw. den Vorversuchen.

Für die Ermittlung des statistischen Fehlers auf die Frequenz $\sigma_{\omega,stat}$ wird der Peakfinder eingesetzt, der im Frequenzspektrum der Fouriertransformation den höchsten Peak fünf Mal mit unterschiedlichen Schwellen ermittelt. Eine Schwelle von 0,4 z.B. bedeutet, dass unterhalb von 0,4 · (Höhe des Peaks) alle Werte weggeschnitten werden und nur die überhalb dieser Schwelle liegenden Punkte zur Peakfindung verwendet werden. Aus diesen fünf Werten wird der Mittelwert und dessen Standardabweichung nach den Formeln (32) und (33) berechnet. Diese Methode liefert einen guten Schätzwert für den statistischen Fehler auf die Frequenzmessung $\sigma_{f,stat}$. Die unterschiedlich großen

Fehler erklären sich durch die verschiedene Dämpfung auf Grund der unterschiedlich großen Widerstände, die in der Schaltung verbaut worden sind. Aus einem großen ohmschen Widerstand folgt eine große Dämpfung und somit ein breiter Peak im Fourierspektrum. Der systematische Fehler auf die Frequenz ist nicht zu ermitteln und wird deshalb nicht weiter berücksichtigt.

$$C = \frac{1}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot L} \quad (51)$$

$$\sigma_{C,stat} = \sqrt{\left(\frac{1}{(\omega^2 + \delta^2)L^2}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{2\omega}{(\omega^2 + \delta^2)^2 L}\right)^2 \sigma_\omega^2 + \left(\frac{2\delta}{(\omega^2 + \delta^2)L}\right)^2 \sigma_\delta^2}$$

$$\sigma_{C,sys} = \frac{\sigma_L}{(\omega^2 + \delta^2)L^2} \quad (52)$$

Gruppe A:

$(\omega \pm \sigma_{\omega,stat})[Hz]$	$(\delta \pm \sigma_{\delta,stat})[Hz]$	C [μF]	$\sigma_{C,stat}[\mu F]$	$\sigma_{C,sys}[\mu F]$
3297,3 \pm 1,2	145,1 \pm 0,3	9,90	0,20	0,29
3295,3 \pm 0,7	211,0 \pm 8,7	9,89	0,20	0,29
3231,7 \pm 62,8	426,1 \pm 5,9	10,15	0,44	0,30
1134,1 \pm 92,9	675,7 \pm 62,7	10,45	0,64	0,31

Gruppe B:

$(\omega \pm \sigma_{\omega,stat})[Hz]$	$(\delta \pm \sigma_{\delta,stat})[Hz]$	C [μF]	$\sigma_{C,stat}[\mu F]$	$\sigma_{C,sys}[\mu F]$
9726,0 \pm 1,8	252,8 \pm 0,2	4,57	0,06	0,01
9700,2 \pm 47,5	474,8 \pm 0,8	4,59	0,08	0,01
9421,7 \pm 130,5	1347,8 \pm 18,1	4,78	0,14	0,15

Der systematische Fehler auf die Kapazität errechnet sich ausschließlich aus dem systematischen Fehler der Induktivität. Aus den soeben ermittelten Daten wird mittels gewichtetem Mittelwert ein Durchschnittswert bestimmt.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (53)$$

$$\bar{\sigma}_{x,stat} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (54)$$

Der systematische Fehler auf den Endwert wird abgeschätzt durch den Mittelwert der systematischen Fehler der Einzelwerte. Somit ergeben sich für die Kondensatoren folgende Werte:

Gruppe	Nominell	C [μF]	$\sigma_{C,stat}[\mu F]$	$\sigma_{C,sys}[\mu F]$
A	10 μF	9,95	0,13	0,30
B	4,7 μF	4,60	0,04	0,06

Die experimentell ermittelten Werte für die Induktivitäten sowie die Kapazitäten liegen innerhalb der vom Hersteller angegebenen Toleranz von 5%.

5.2.5 Schwingung im LCR-Schwingkreis

Mit Hilfe der ermittelten Werte für die Kapazität des Kondensators C und die Induktivität der Spule L lassen sich Vorhersagen treffen, bei welchen ohmschen Widerständen die drei im Theorieteil beschriebenen Fälle (Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall) zu erwarten sind.

$$R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (55)$$

$$\sigma_{R,stat/sys} = R \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{L,stat/sys}}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C,stat/sys}}{2C}\right)^2} \quad (56)$$

Mit diesen Formeln ergeben sich folgende Werte für den ohmschen Widerstand R_{ap} beim aperiodischen Grenzfall:

Gruppe	$R_{ap}[\Omega]$	$\sigma_{R_{ap},stat}[\Omega]$	$\sigma_{R_{ap},sys}[\Omega]$
A	61,05	0,74	1,27
B	44,81	0,41	0,73

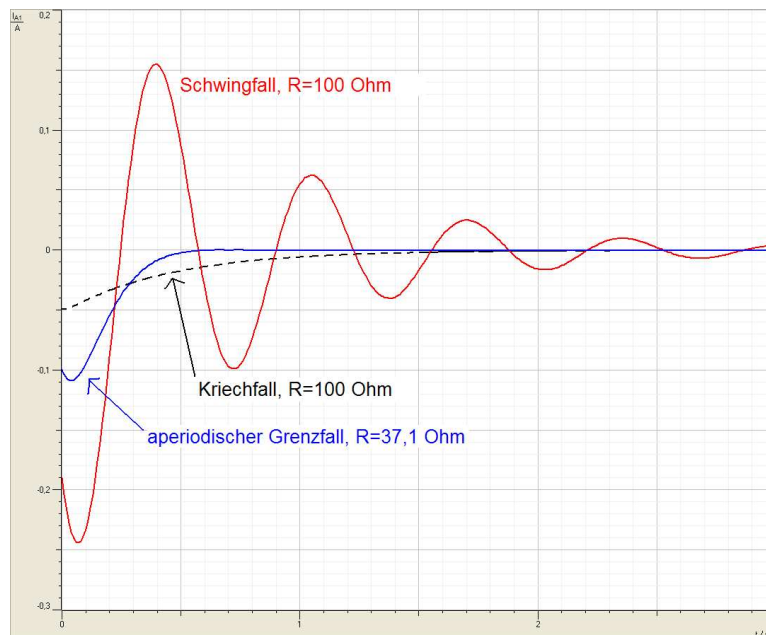


Abbildung 7: Schwingungsvorgänge

Für $R < R_{ap}$ sollte sich der Schwingungsfall einstellen, für $R > R_{ap}$ der Kriechfall. In Abbildung 7 sind diese drei Fälle anhand einer exemplarischen Strommessung (Gruppe B) präsentiert. Es wurde versucht, durch langsames Erhöhen des ohmschen Widerstandes (Kombination der vorhandenen Widerstände) möglichst genau den aperiodischen Grenzfall zu erreichen.



Abbildung 8: aperiodischer Grenzfall der Gruppe A

Gruppe A erreichte den Grenzfall mit einem Gesamtwiderstand (inkl. R_X) von $(55 \pm 1(stat) \pm 1,62(sys))\Omega$. Der statistische Fehler $\sigma_{R,stat}$ ergibt sich aus der Tatsache, dass sich die Graphen zwischen den Werten von $54,0\Omega$ und $55,0\Omega$ nicht sichtbar veränderten (die anderen statistischen Fehler wurden gegenüber diesem Fehler vernachlässigt). Der systematische Fehler stammt aus der Addition der systematischen Fehler der Einzelkomponenten. Gruppe B benötigte einen Widerstand von $(38,9 \pm 1(stat) \pm 1,14(sys))\Omega$ (analoge Fehlerrechnung). Man stellt fest, dass die experimentell ermittelten Werte auch innerhalb ihrer Fehlerintervalle deutlich unter den theoretisch vorausgesagten Werten liegen, dies kann noch nicht einmal mit der Luftfeuchtigkeit erklärt werden. Auch wiederholtes Ausführen des Versuchs und Verifizierung der Korrektheit des Aufbaus der Apparaturen fundierte den experimentellen Befund.

5.2.6 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung von Strom und Spannung in einem LCR-Schwingkreis wird in Abbildung 9 dargestellt. Wie auch anhand des Messdatentabellenauszugs an der linken Seite der Abbildung zu sehen ist, liegt das lokale Maximum der Spannung zeitgleich mit dem Nulldurchgang des Stroms, es ergibt sich somit eine Phasenverschiebung von 90° . Die Dämpfung, die in der Abbildung zu sehen ist, resultiert lediglich aus dem Widerstand $R_X \approx 2,7\Omega$, da in dieser Messung kein zusätzlicher ohmscher Widerstand in den Schalt-

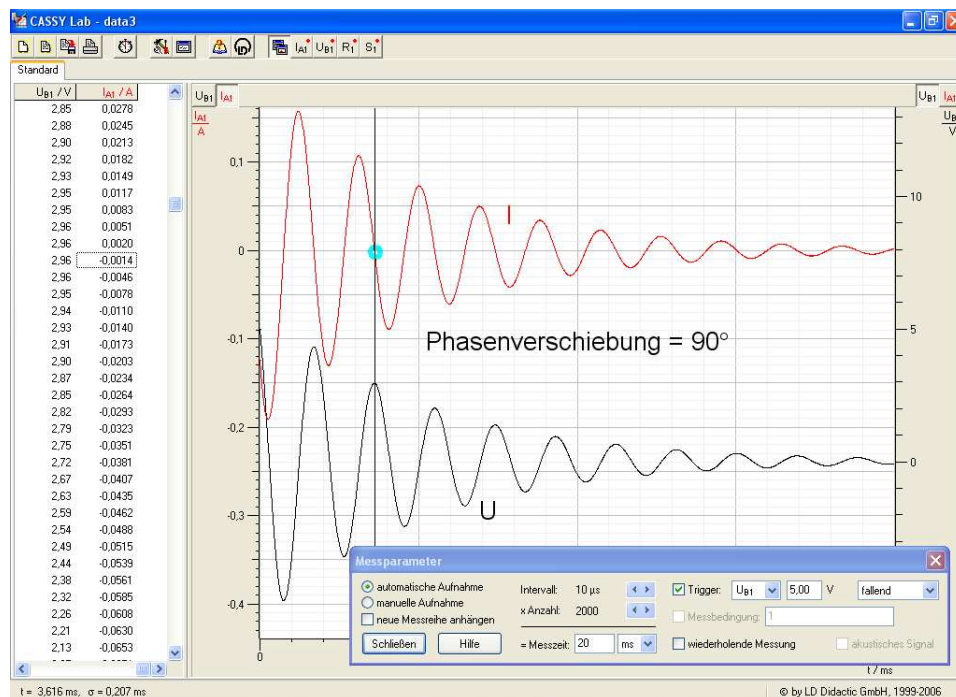


Abbildung 9: Verdeutlichung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

kreis eingebaut wurde. Es zeigt sich, dass beim Einbau von zusätzlichen ohmschen Widerständen die Phasenverschiebung nicht verändert wird.

6 Gekoppelte LC-Schwingkreise (Hauptversuch)

6.1 Versuchsaufbau

Für diesen Versuch werden zwei Schwingkreise mit Spulen und Kondensatoren derart aufgebaut, dass sie über die nebeneinander platzierten Spulen induktiv miteinander gekoppelt sind (vgl. Abbildung 10).

6.2 Versuchsdurchführung

Die Kondensatoren werden über eine Stromquelle zunächst aufgeladen; durch Bestätigung eines Schalters kann sodann die Stromquelle kurzgeschlossen und somit die Kondensatoren entladen werden. Dabei werden die über den Kondensatoren der jeweiligen Schwingkreise abfallenden Spannungen gemessen.

Es werden Entladungsschwingungen sowohl bei gleichsinniger als auch bei gegensinniger Anregung sowie Schwebungserscheinungen durch Anregung

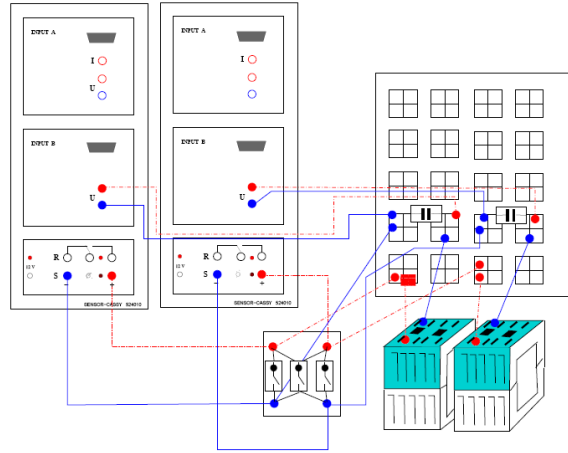


Abbildung 10: Aufbau des Versuchs gekoppelte Schwingkreise, hier exemplarisch für gleichsinnige Aufladung der Kondensatoren

nur eines Schwingkreises aufgezeichnet. Für die unterschiedlichen Anregungen muss die Polung an den Kondensatoren entsprechend angepasst werden. Bei Erzeugung einer Schwebung wird ein Schwingkreis kurzgeschlossen und nur der andere von der Spannungsquelle geladen. Die Spannungen an den Kondensatoren werden mit CASSY mit einem Messintervall von $10\mu s$ über eine Messzeit von $20ms$ ausgelesen. Die Messung wird durch einen Trigger ($U_{A1} = 5V$, fallend) gestartet, nachdem die Schwingkreise über einen Taster geschlossen wurden. Durch Variation des Abstandes der Spulen sowie durch das Einführen eines Eisenkerns in beide Spulen wird die Kopplungsstärke variiert und die Messung wiederholt.

6.3 Auswertung

6.3.1 Bestimmung des Kopplungsgrades k

Für die Charakterisierung gekoppelter Schwingkreise ist neben den Daten der einzelnen Schwingkreise vor allem der Kopplungsgrad k von entscheidender Bedeutung. Er gibt an, wie stark der Energieaustausch zwischen den Schwingkreisen ist. Der Kopplungsgrad lässt sich berechnen gemäß (vgl. Kapitel 2.2, Gleichung (22)):

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} \quad (57)$$

Die Grundfrequenz f_- entspricht der Schwingungsfrequenz der gekoppelten Schwingkreise bei gegensinniger Anregung, f_+ entsprechend bei gleichsinniger Anregung. Diese Daten können direkt aus den Fourierspektren der entsprechenden Messreihen gewonnen werden. Betrachtet man das Fourierspektrum einer Schwebung, so erhält man - bei entsprechender Auflösung

- zwei voneinander getrennte Peaks (siehe Abbildung 11). Wie in Kapitel 2.2 erläutert, entsprechen die beiden Peakschwerpunkte den Frequenzen bei gleich- bzw. gegensinniger Anregung. Die Analyse des Schwebungsverlaufs bietet also eine weitere Möglichkeit, die Grundfrequenzen des gekoppelten Schwingkreises zu ermitteln.

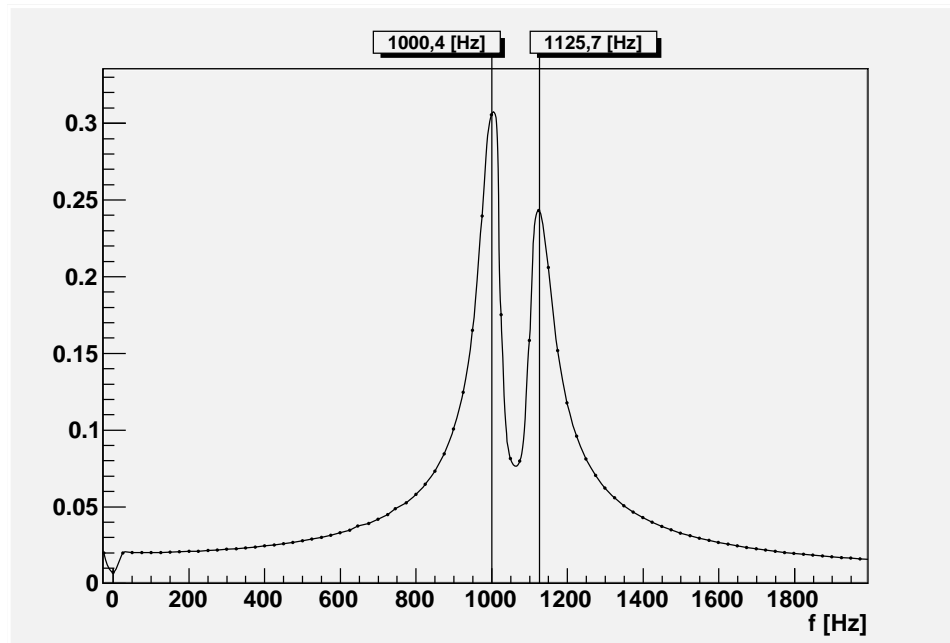


Abbildung 11: Doppelpeak des Fourierspektrums einer Schwebung (Daten: Gruppe B: Schwebung mit Eisenkern)

Anregung	Frequenz f_+ [Hz]	Frequenz f_- [Hz]
gleichsinnig	$492,8 \pm 1,7$	—
gegensinnig	—	$561,6 \pm 2,0$
Schwebung	$488,1 \pm 1,7$	$568,1 \pm 2,0$

Tabelle 1: Frequenzen der Schwingungsvorgänge in Messgruppe A

In den Tabellen 1 und 2 sind die Frequenzen der verschiedenen Schwingungsvorgänge aufgelistet. Zu ihrer Bestimmung wurde zunächst eine Fourier-Transformation in ROOT durchgeführt und der so entstehende Peak mittels der Peakschwerpunkt-Methode bestimmt. Die Fehler auf die einzelnen Frequenzen wurden abgeschätzt, indem der Peakfinder mit verschiedenen Schwellenwerten durchgeführt wurde (vgl. Kapitel 5.2.2). Die Analyse wurde nur exemplarisch an Hand einer Messreihe durchgeführt (Gruppe B: Schwebung mit Eisenkern; Werte siehe Tabelle 3). Da während des Versuches die Dämpfung durch ohmsche Widerstände nicht verändert wird, sind die Peak-

Kopplung	Anregung	Frequenz $f_+[Hz]$	Frequenz $f_-[Hz]$
mit Abstand (ca. 2cm)	gleichsinnig	$1023,711 \pm 3,566$	—
	gegensinnig	—	$1097,662 \pm 3,823$
	Schwebung	$1012,900 \pm 3,528$	$1088,646 \pm 3,792$
ohne Abstand	gleichsinnig	$999,453 \pm 3,481$	—
	gegensinnig	—	$1123,608 \pm 3,914$
	Schwebung	$1000,397 \pm 3,485$	$1124,701 \pm 3,918$
mit Eisenkern	gleichsinnig	$387,096 \pm 1,348$	—
	gegensinnig	—	$659,857 \pm 2,298$
	Schwebung	$384,738 \pm 1,340$	$662,490 \pm 2,308$

Tabelle 2: Frequenzen der Schwingungsvorgänge in Messgruppe B

breiten ungefähr gleich; der relative Fehler sollte also für alle Messungen angemessen sein. Als absoluter Fehler σ_f ergibt sich demnach für die einzelnen Messwerte (das c bezeichnet den relativen Fehler aus der exemplarischen Peakmessung):

$$\sigma_{f_{\pm}} = c \cdot f_{\pm} = 3,483 \cdot 10^{-3} \cdot f_{\pm} \quad (58)$$

Für die weiteren Bestimmungen der Peakschwerpunkte wird eine Schwelle von 0,7 gewählt.

Schwelle	Frequenz $f_+^{ex}[Hz]$	$\overline{f_+^{ex}}[Hz]$	$\sigma_{f_+^{ex}}[Hz]$	$c = \frac{\sigma_{f_+^{ex}}}{f_+^{ex}}$
0,5	385,131	386,399	1,346	$3,483 \cdot 10^{-3}$
0,6	387,273			
0,7	384,738			
0,8	387,427			
0,9	387,427			

Tabelle 3: Frequenzen des Peakschwerpunkts bei unterschiedlichen Schwellenwerten (Messreihe Gruppe B - mit Eisenkern)

Aus den so gewonnen Daten lässt sich mit Hilfe von Gleichung (58) der Kopplungsgrad k der beiden Schwingkreise berechnen. Der Fehler auf diesen Wert ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung zu:

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \left(\frac{dk}{df_-} \right)^2 \cdot \sigma_{f_-}^2 + \left(\frac{dk}{df_+} \right)^2 \cdot \sigma_{f_+}^2 \\ \Rightarrow \sigma_k &= \frac{4f_-f_+}{(f_-^2 + f_+^2)^2} \cdot \sqrt{f_+^2 \sigma_{f_-}^2 + f_-^2 \sigma_{f_+}^2} \end{aligned} \quad (59)$$

Die Werte und Fehler für k der verschiedenen gekoppelten Schwingkreise sind in Tabelle 4 dargestellt. Für jede Variation der Kopplung wurden die Frequenzen sowohl getrennt ($k_{getrennt}$ wird berechnet mit den Frequenzen

Gruppe	Kopplung	Messart	Kopplungsgrad k	Differenz $ \Delta k $
A	—	getrennt	$0,1298 \pm 0,0048$	$0,0209 \pm 0,0068$
		Schwebung	$0,1507 \pm 0,0048$	
B	mit Abstand	getrennt	$0,0696 \pm 0,0049$	$0,0024 \pm 0,0069$
		Schwebung	$0,0720 \pm 0,0049$	
	ohne Abstand	getrennt	$0,1166 \pm 0,0049$	$0,0000 \pm 0,0069$
		Schwebung	$0,1166 \pm 0,0049$	
	mit Eisenkern	getrennt	$0,4879 \pm 0,0038$	$0,0077 \pm 0,0053$
		Schwebung	$0,4956 \pm 0,0037$	

Tabelle 4: Kopplungsgrade der Schwingkreise

f_- und f_+ aus der gleichsinnig bzw. gegensinnig angeregten Schwingung), als auch direkt aus dem Fourierspektrum der Schwebung gemessen. Die Differenz Δk dieser beiden Werte sowie dessen Fehler

$$\sigma_{\Delta k} = \sqrt{\sigma_{k, \text{getrennt}}^2 + \sigma_{k, \text{Schwebung}}^2} \quad (60)$$

wird ebenfalls angegeben. An dieser Darstellungsweise lässt sich gut die Verträglichkeit der verschiedenen Messergebnisse beurteilen. Die bestimmten Kopplungsgrade der Gruppe A zeigen dabei eine auffällige Differenz, die Abweichung beträgt ungefähr $3\sigma_{\Delta k}$. Diese Abweichung liegt offenbar an einer leicht verschobenen Frequenzbestimmung im Schwebungsfall, da hier die Peaks nah beieinander liegen und eine exakte Bestimmung der beiden Grundfrequenzen dadurch erschwert wird. Die Messergebnisse der Gruppe B sind sehr gut miteinander verträglich. Im Fall der Kopplung ohne Abstand zwischen den beiden Spulen verschwindet die Differenz der Messwerte auf Grund der gewählten Darstellung mit vier signifikanten Stellen sogar völlig. Gut zu erkennen ist auch das Sinken des Kopplungsgrades mit Verringerung der Gegeninduktivität mit zunehmenden Abstand. Werden die Spulen mit einem Eisenkern verbunden, springt der Kopplungsgrad auf einen deutlich größeren Wert; eine Energieübertragung zwischen den Spulen wird durch den Eisenkern deutlich erleichtert.

6.3.2 Dämpfung und Phasenbeziehungen

Aus den in Abschnitt 6.3.1 bestimmten Kopplungsgraden k sowie den Daten der genutzten elektronischen Bauteile in den Schwingkreisen können weitere charakterisierende Größen der jeweiligen Schwingkreise bestimmt werden. In Abbildung 12 sind die Spannungsverläufe an den Kondensatoren während einer gekoppelten Schwingung dargestellt. Die eingezeichneten Einhüllenden wurden mit ROOT an die Kurve gefittet. Die so erhaltenen Daten aus der Funktionsanpassung sind in Tabelle 5 dargestellt und sollen im Folgenden mit den theoretisch zu erwartenden Werten verglichen werden. Es soll darauf

hingewiesen werden, dass die Kreisfrequenz ω für die Funktionsanpassung angegeben werden musste. Als Datensatz wurde die Schwebung der Gruppe B ohne Abstand der Spulen genutzt.

(a) zu Abbildung 12(a)

Formel	$A_1^{fit} + U_{0,1}^{fit} \cdot e^{-\beta_1^{fit} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_1^{fit})$	
Parameter	Wert	
A_1^{fit} [V]	$-0,028 \pm 0,389$	
$U_{0,1}^{fit}$ [V]	$6,834 \pm 1,432$	
β_1^{fit} [Hz]	$168,901 \pm 54,324$	
φ_1^{fit} [°]	$0,008 \pm 0,187$	

(b) zu Abbildung 12(b)

Formel	$A_2^{fit} + U_{0,2}^{fit} \cdot e^{-\beta_2^{fit} \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_2^{fit})$	
Parameter	Wert	
A_2^{fit} [V]	$0,089 \pm 0,497$	
$U_{0,2}^{fit}$ [V]	$6,538 \pm 3,158$	
β_2^{fit} [Hz]	$158,266 \pm 88,620$	
φ_2^{fit} [°]	$-0,028 \pm 0,134$	

Tabelle 5: Parameter der Funktionenanpassung mit ROOT

Mit Hilfe der Gleichungen (25) und (29) lässt sich die Dämpfung der Einhüllenden bestimmen durch:

$$\beta = \frac{R}{2L} \cdot \frac{1}{1 - k^2} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sqrt{\left(\frac{d\beta}{dR}\right)^2 \cdot \sigma_R^2 + \left(\frac{d\beta}{dL}\right)^2 \cdot \sigma_L^2 + \left(\frac{d\beta}{dk}\right)^2 \cdot \sigma_k^2} \\ &= \frac{1}{L(1 - k^2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \sigma_R^2 + \frac{R^2}{4L^2} \cdot \sigma_L^2 + \frac{R^2 k^2}{(1 - k^2)^2} \cdot \sigma_k^2} \end{aligned} \quad (62)$$

Mit den in Tabelle 6 angegebenen Daten der elektronischen Bauteile lässt

Bauteil	Größe	Nomineller Wert	Fehler (5%)
Kondensator	C [μF]	10	0,5
Spule	L [mH]	2,2	0,11
	R_L [Ω]	0,6	0,03
Kabel (Schätzwert)	R_K [Ω]	0,1	0,005

Tabelle 6: Nominelle Charakteristika der verwendeten elektronischen Bauteile

sich β und dessen Fehler berechnen. Es werden die nominellen Werte verwen-

det, da diese (für die folgenden Berechnungen) eine genügende Genauigkeit versprechen. Die Fehler wurden jeweils mit 5% abgeschätzt (Herstellerangabe). Es ergibt sich mit den Werten aus den Tabellen 6 und 4:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{R_L + R_K}{2L} \cdot \frac{1}{1 - k^2} \\ \Rightarrow \beta &= (161,3 \pm 10,6)[Hz]\end{aligned}\quad (63)$$

Vergleicht man diesen Wert mit den in Tabelle 5 dargestellten Werten aus der Funktionsanpassung, so stellt man fest, dass diese sehr gut verträglich sind. Selbst unter Vernachlässigung der sehr großen Fehler der Anpassung sind die Werte kompatibel, β_1^{fit} und β_2^{fit} liegen innerhalb eines 1- σ -Intervalls des hier berechneten Wertes β .

Zur Berechnung des Zeitunterschieds Δt zwischen Minima der ersten und Extrema der zweiten Einhüllenden (Gleichung (31) aus Kapitel 2.2) wird die Schwebungskreisfrequenz ω_s benötigt. Sie berechnet sich aus den bestimmten Frequenzen zu:

$$\omega_s = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} = \pi \cdot (f_- - f_+) = 390,513 [Hz] \quad (64)$$

$$\sigma_{\omega_s} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_-}}{f_-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_+}}{f_+}\right)^2} = 0,015 [Hz] \quad (65)$$

Die Näherungsgleichung für Δt darf verwendet werden, da eine geringe Kopplung mit $k < 0,2$ vorliegt. Setzt man die ermittelten Daten ein, so ergibt sich:

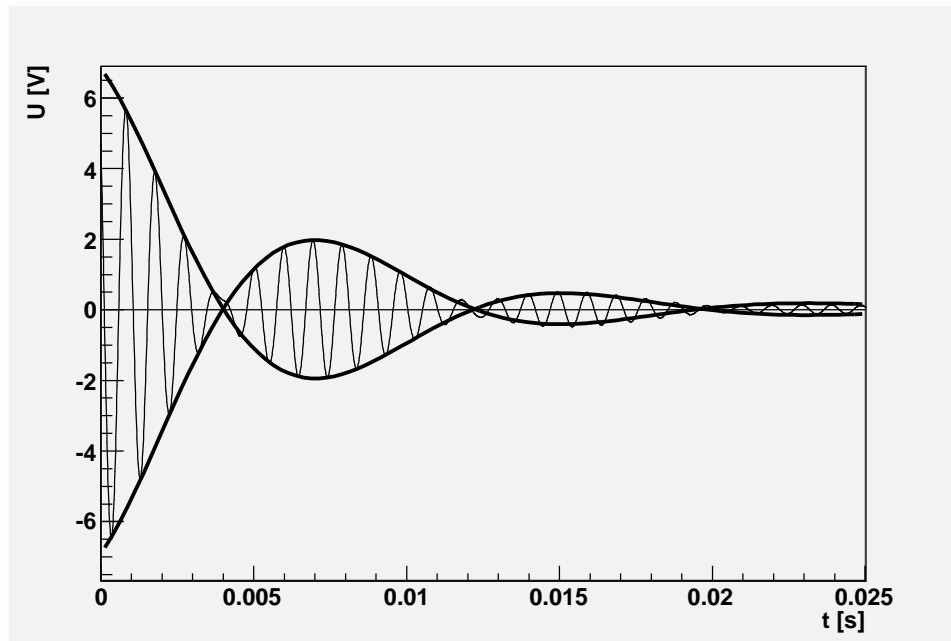
$$\begin{aligned}\Delta t &\approx \frac{1}{\omega_s} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right] \\ &= 0,985 [ms]\end{aligned}\quad (66)$$

Auf eine Bestimmung von $\sigma_{\Delta t}$ wird an dieser Stelle verzichtet, um die sehr komplizierte Fehlerfortpflanzung zu vermeiden. Es kann angenommen werden, dass der so bestimmte Fehler um mehrere Größenordnungen kleiner ist, als der Fehler auf die Phasenverschiebung der Regression φ^{fit} . Er fällt daher ohnehin nicht ins Gewicht. Es gilt:

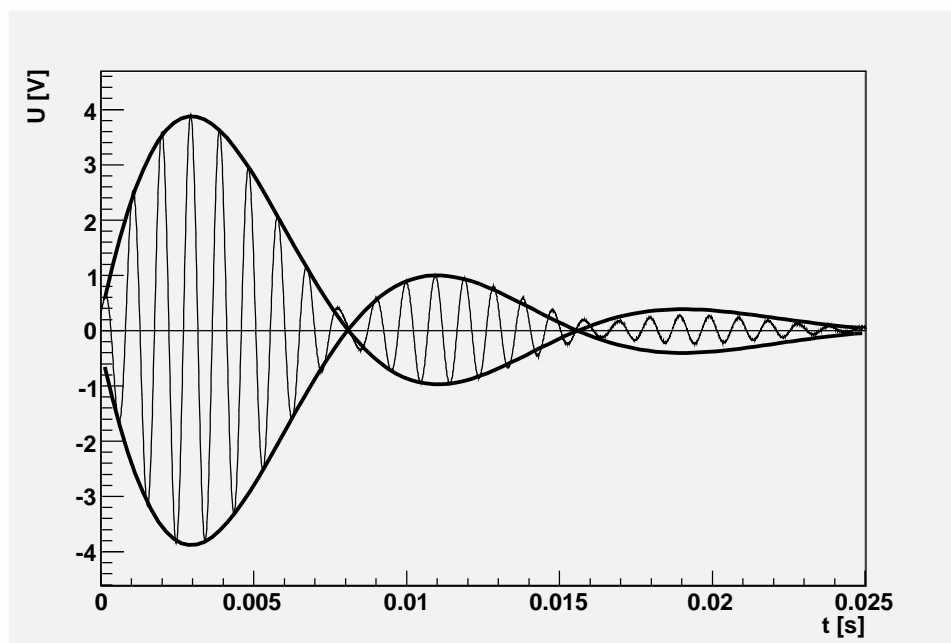
$$\begin{aligned}\varphi^{fit} &= \varphi_2^{fit} - \varphi_1^{fit} = -0,036 \\ \sigma_{\varphi^{fit}} &= \sqrt{\sigma_{\varphi_1^{fit}}^2 + \sigma_{\varphi_2^{fit}}^2} = 0,230 \\ \Delta t^{fit} &= \frac{|\varphi^{fit}|}{\omega_s} = 0,092 [ms] \\ \sigma_{\Delta t^{fit}} &= \Delta t^{fit} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi^{fit}}}{\varphi^{fit}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega_s}}{\omega_s}\right)^2} = 0,588 [ms]\end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass der Fehler $\sigma_{\Delta t^{fit}}$ einen geradezu unsinnigen Wert darstellt, da er ein Vielfaches des Wertes Δt^{fit} ist. Diese große Standardabweichung entsteht nahezu ausschließlich aus dem Fehler der ausgegebenen Phasenverschiebung der Regression. Ein Vergleich von Δt^{fit} mit dem berechneten Wert Δt aus Gleichung (66) zeigt eine Abweichung von einer Größenordnung. Es ist davon auszugehen, dass die Qualität der Rohdaten eine vernünftige Regression mit ROOT nicht zuließen und daher die Phasenverschiebung aus der Regression falsch ist.

Diese These wird bestätigt, vergleicht man den Wert aus Gleichung (66) mit den in CASSY per Augenmaß abgelesenen Werten der Nulldurchgänge und Extrema der Schwebungen (vgl. Abbildung 13). Der ermittelte Wert $\Delta t^{CASSY} = 0,87[ms]$ bestätigt die mit Gleichung (66) berechnete Zeitdifferenz, bedenkt man, dass die rein optische Bestimmung der Nulldurchläufe und Maxima einer Schwebung nur sehr ungenau erfolgen kann.



(a) Spannungsverlauf am erregten Kondensator



(b) Spannungsverlauf am Kondensator des gekoppelten Schwingkreises

Abbildung 12: Einhüllende auf die Schwebungsverläufe (gefittet mit ROOT)

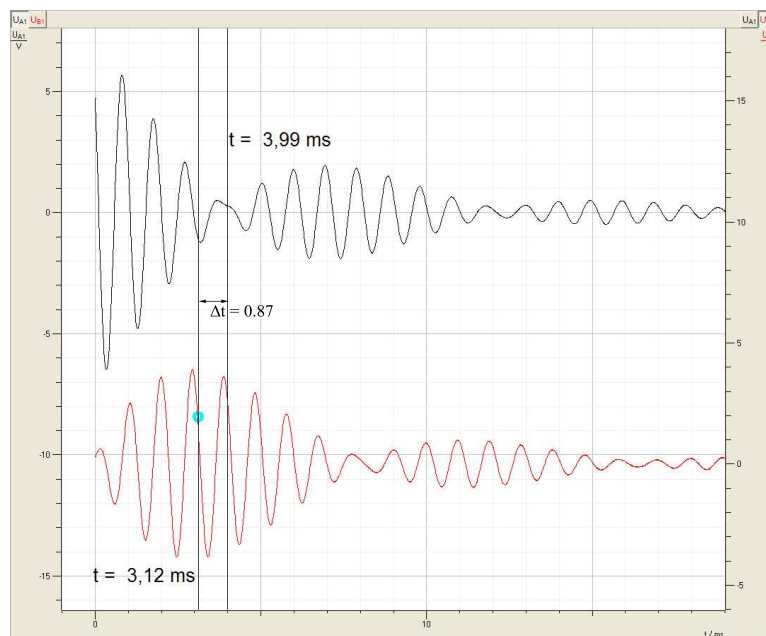


Abbildung 13: Bestimmung der Phasenverschiebung der Schwebungsverläufe in CASSY