Normalverteilung

Die **Normal-** oder **Gauß-Verteilung** (nach Carl Friedrich Gauß) ist ein wichtiger Typ stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gaußsche Normalverteilung, Gaußsche Verteilungskurve, Gauß-Kurve, Gaußsche Glockenkurve, Gaußsche Glockenfunktion, Gauß-Glocke oder schlicht Glockenkurve genannt.

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz, dem zufolge Verteilungen, die durch Überlagerung einer großen Zahl von unabhängigen Einflüssen entstehen, unter schwachen Voraussetzungen annähernd normalverteilt sind.

Die Abweichungen der (Mess-)Werte vieler natur-, wirtschafts- und ingenieurswissenschaftlicher Vorgänge vom Mittelwert lassen sich durch die Normalverteilung (bei biologischen Prozessen oft logarithmische Normalverteilung) entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben (vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken).

Zufallsgrößen mit Normalverteilung benutzt man zur Beschreibung zufälliger Vorgänge wie:

- zufällige Messfehler,
- zufällige Abweichungen vom Sollmaß bei der Fertigung von Werkstücken,
- Beschreibung der brownschen Molekularbewegung.

In der Versicherungsmathematik ist die Normalverteilung geeignet zur Modellierung von Schadensdaten im Bereich mittlerer Schadenshöhen.

In der Messtechnik wird häufig eine Normalverteilung angesetzt, die die Streuung der Messfehler beschreibt. Hierbei ist von Bedeutung, wie viele Messpunkte innerhalb einer gewissen Streubreite liegen.

Die Standardabweichung σ beschreibt die Breite der Normalverteilung. Die Halbwertsbreite einer Normalverteilung ist das ungefähr 2,4-fache (genau $2\sqrt{2\ln 2}$) der Standardabweichung. Es gilt näherungsweise:

- Im Intervall der Abweichung $\pm\sigma$ vom Mittelwert sind 68,27 % aller Messwerte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung $\pm 2\sigma$ vom Mittelwert sind 95,45 % aller Messwerte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung $\pm 3\sigma$ vom Mittelwert sind 99,73 % aller Messwerte zu finden.

Und ebenso lassen sich umgekehrt für gegebene Wahrscheinlichkeiten die maximalen Abweichungen vom Mittelwert finden:

- 50 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens $0{,}675\sigma$ vom Mittelwert,
- 90 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens $1{,}645\sigma$ vom Mittelwert,
- 95 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens $1{,}960\sigma$ vom Mittelwert,
- 99 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens $2{,}576\sigma$ vom Mittelwert.

Somit kann neben dem Mittelwert auch der Standardabweichung eine einfache Bedeutung zugeordnet werden.

1 Geschichte

Gaußsche Glockenkurve auf einem Zehn-Mark-Schein

Im Jahre 1733 zeigte Abraham de Moivre in seiner Schrift *The Doctrine of Chances* im Zusammenhang mit seinen Arbeiten am Grenzwertsatz für Binomialverteilungen eine Abschätzung des Binomialkoeffizienten, die als Vorform der Normalverteilung gedeutet werden kann.[1] Die für die Normierung der Normalverteilungsdichte zur Wahrscheinlichkeitsdichte notwendige Berechnung des nichtelementaren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

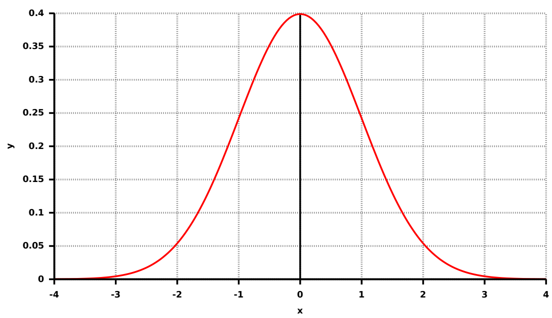
gelang Pierre-Simon Laplace im Jahr 1782 (nach anderen Quellen Poisson). Im Jahr 1809 publizierte Gauß sein Werk *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (dt.: *Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper*), das neben der Methode der kleinsten Quadrate und der Maximum-Likelihood-Schätzung die Normalverteilung definiert. Ebenfalls Laplace war es, der 1810 den Satz vom zentralen Grenzwert bewies, der die Grundlage der theoretischen Bedeutung der Normalverteilung darstellt und de Moivres Arbeit am Grenzwertsatz für Binomialverteilungen abschloss. Adolphe Quetelet erkannte schließlich bei Untersuchungen des Brustumfangs von mehreren tausend Soldaten im Jahr 1844 eine verblüffende Übereinstimmung mit der Normalverteilung und brachte die Normalverteilung in die angewandte Statistik. Er hat vermutlich die Bezeichnung „Normalverteilung“ geprägt.[2]

2 Definition

Eine stetige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch[3]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ -verteilt, normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, auch geschrieben als $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ oder $\left(\mu,\sigma^2\right)$ -normalverteilt. Für die Parameter gilt: μ ist der Erwartungswert und σ^2 ist die Varianz.



Dichtefunktion der Standardnormalverteilung $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ wird diese Verteilung **Standardnormalverteilung** genannt. Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Sie ist nebenstehend dargestellt.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist durch

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$$

gegeben. Mit der Substitution $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ folgt

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t.$$

Die mehrdimensionale Verallgemeinerung findet man im Artikel mehrdimensionale Normalverteilung.

3 Eigenschaften

3.1 Symmetrie

Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Gaußsche Glockenkurve, deren Höhe und Breite von σ abhängt. Sie ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$. Der Graph der Verteilungsfunktion F ist punktsymmetrisch zum Punkt $(\mu; 0{,}5)$. Für $\mu = 0$ gilt insbesondere $\varphi(-x) = \varphi(x)$ und $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Maximalwert und Wendepunkte der Dichtefunktion

Mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung lassen sich der Maximalwert und die Wendepunkte bestimmen. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

Das Maximum der Dichtefunktion der Normalverteilung liegt demnach bei $x_{\max} = \mu$ und beträgt dort $f_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Die zweite Ableitung lautet

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 - 1\right) f(x).$$

Somit liegen die Wendestellen der Dichtefunktion bei $x = \mu \pm \sigma$. Die Dichtefunktion hat an den Wendestellen den Wert $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

3.3 Normierung

Wichtig ist, dass die gesamte Fläche unter der Kurve gleich 1, also gleich der Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses, ist. Somit folgt, dass, wenn zwei Gaußsche Glockenkurven dasselbe μ, aber unterschiedliches σ haben, die Kurve mit dem größeren σ breiter und niedriger ist (da ja beide zugehörigen Flächen jeweils den Wert 1 haben und nur die Standardabweichung (oder „Streuung“) größer ist). Zwei Glockenkurven mit gleichem σ, aber unterschiedlichem μ haben kongruente Graphen, die um die Differenz der μ -Werte parallel zur x -Achse gegeneinander verschoben sind.

Jede Normalverteilung ist tatsächlich normiert, denn mit Hilfe der linearen Substitution $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z = 1.$$

Für die Normiertheit des letzteren Integrals siehe den Artikel Fehlerintegral.

3.4 Berechnung

Da sich $\Phi(z)$ nicht auf eine elementare Stammfunktion zurückführen lässt, wurde für die Berechnung früher meist auf Tabellen zurückgegriffen (siehe Tabelle der Standardnormalverteilung). Heutzutage sind in üblichen Tabellenkalkulationsprogrammen Zellenfunktionen verfügbar, die auch die Transformation auf beliebige μ und σ beherrschen. Die dahinter liegenden Näherungen sind transformierte Polynome.[4]

3.5 Erwartungswert

Der Erwartungswert der Standardnormalverteilung ist 0. Es sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, so gilt

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 0,$$

da der Integrand integrierbar und punktsymmetrisch ist.

Ist nun $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, so gilt $X = (Y-\mu)/\sigma$ ist standardnormalverteilt, und somit

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \underbrace{\mathrm{E}(X)}_{=0} + \mu = \mu.$$

3.6 Varianz und weitere Streumaße

Die Varianz der (μ,σ^2) -normalverteilten Zufallsgröße ist σ^2 , ein elementarer Beweis wird Poisson zugeschrieben.

Die mittlere absolute Abweichung ist $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0{,}80\sigma$ und der Interquartilsabstand $\approx 1{,}349\sigma$.

3.7 Variationskoeffizient

Aus Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ -Verteilung erhält man unmittelbar den Variationskoeffizienten

$$\mathrm{VarK} = \frac{\sigma}{\mu}.$$

3.8 Schiefe

Die Schiefe besitzt unabhängig von den Parametern μ und σ immer den Wert 0.

3.9 Wölbung

Die Wölbung ist ebenfalls von μ und σ unabhängig und ist gleich 3. Um die Wölbungen anderer Verteilungen besser einschätzen zu können, werden sie oft mit der Wölbung der Normalverteilung verglichen. Dabei wird die Wölbung der Normalverteilung auf 0 normiert (Subtraktion von 3); diese Größe wird als Exzess bezeichnet.

3.10 Kumulanten

Die kumulantenerzeugende Funktion ist

$$g_X(t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

Damit ist die erste Kumulante $\kappa_1 = \mu$, die zweite ist $\kappa_2 = \sigma^2$ und alle weiteren Kumulanten verschwinden.

3.11 Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}\varphi_Z(s) &= \mathrm{E}(e^{isZ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isz} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-is)^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= e^{-\frac{1}{2}s^2}.\end{aligned}$$

Für eine Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ erhält man nun

$$\begin{aligned}\varphi_X(s) &= \mathrm{E}(e^{is(\sigma Z+\mu)}) \\ &= \mathrm{E}(e^{is\sigma Z} e^{is\mu}) \\ &= e^{is\mu}\, \mathrm{E}(e^{is\sigma Z}) \\ &= e^{is\mu} \varphi_Z(\sigma s) \\ &= \exp\left(is\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 s^2\right).\end{aligned}$$

3.12 Momenterzeugende Funktion

Die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung ist

$$m_X(s) = \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right).$$

3.13 Momente

Die Zufallsvariable X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann sind ihre ersten Momente wie folgt:

Alle zentralen Momente μ_n lassen sich durch die Standardabweichung σ darstellen:

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn} n \text{ungerade} \\ (n-1)!! \cdot \sigma^n & \text{wenn} n \text{gerade} \end{cases}$$

dabei wurde die Doppelfakultät verwendet:

$$(n-1)!! = (n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \qquad \text{für} n \text{gerade}.$$

3.14 Invarianz gegenüber Faltung

Die Normalverteilung ist invariant gegenüber der Faltung, d. h., die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen ist wieder normalverteilt. Eine veranschaulichende Formulierung dieses Sachverhaltes lautet: Die Faltung einer Gaußkurve der Halbwertsbreite Γ_a mit einer Gaußkurve der Halbwertsbreite Γ_b ergibt wieder eine Gaußkurve mit der Halbwertsbreite

$$\Gamma_c = \sqrt{\Gamma_a^2 + \Gamma_b^2}.$$

Sind also X, Y zwei unabhängige Zufallsvariable mit

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$

so ist deren Summe ebenfalls normalverteilt:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

Das kann beispielsweise mit Hilfe von charakteristischen Funktionen gezeigt werden, indem man verwendet, dass die charakteristische Funktion der Summe das Produkt der charakteristischen Funktionen der Summanden ist (vgl. Faltungssatz der Fouriertransformation).

Gegeben seien allgemeiner n unabhängige und normalverteilte Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Dann ist deren Summe wieder normalverteilt

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

und das arithmetische Mittel ebenfalls

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i, \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Nach dem Satz von Cramér gilt sogar die Umkehrung: Ist eine normalverteilte Zufallsgröße die Summe von unabhängigen Zufallsgrößen, dann sind die Summanden ebenfalls normalverteilt.

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist ein Fixpunkt der Fourier-Transformation, d. h., die Fourier-Transformierte einer Gaußkurve ist wieder eine Gaußkurve. Das Produkt der Standardabweichungen dieser korrespondierenden Gaußkurven ist konstant; es gilt die Heisenbergsche Unschärferelation.

3.15 Entropie

Die Normalverteilung hat die Entropie: $\log\left(\sigma\sqrt{2\,\pi\,e}\right)$.

Da sie für gegebenen Mittelwert und gegebene Varianz die größte Entropie unter allen Verteilungen hat, wird sie in der Maximum-Entropie-Methode oft als A-priori-Wahrscheinlichkeit verwendet.

4 Beziehungen zu anderen Verteilungsfunktionen

4.1 Transformation zur Standardnormalverteilung

Eine Normalverteilung mit beliebigen μ und σ und der Verteilungsfunktion F hat, wie oben erwähnt, die nachfolgende Beziehung zur $\mathcal{N}(0,1)$ -Verteilung:

$$F(x) = \Phi\left(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Darin ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann führt die Transformation

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

zu einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z, denn

$$P(Z \leq z) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq z) = P(X \leq \sigma z+\mu) = F(\sigma z+\mu) = \Phi(z).$$

Geometrisch betrachtet entspricht die durchgeführte Substitution einer flächentreuen Transformation der Glockenkurve von $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ zur Glockenkurve von $\mathcal{N}(0;1)$.

4.2 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

→ *Hauptartikel: Normal-Approximation*

Die Normalverteilung kann zur Approximation der Binomialverteilung verwendet werden, wenn der Stichprobenumfang n hinreichend groß und in der Grundgesamtheit der Anteil p der gesuchten Eigenschaft weder zu groß noch zu klein ist. Als Faustregel dafür gilt $np(1-p) \geq 9$, was für die Standardabweichung $\sigma \geq 3$ bedeutet.

Falls diese Bedingung nicht erfüllt sein sollte, ist die Näherung immer noch vertretbar genau, wenn gilt: $np \geq 4$ und zugleich $n(1-p) \geq 4$.

Ist ein Bernoulli-Versuch mit n voneinander unabhängigen Stufen (bzw. Zufallsversuchen) mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit p gegeben, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge allgemein durch $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ berechnen (Binomialverteilung).

Für große Werte von n kann diese Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden (Satz von Moivre-Laplace, zentraler Grenzwertsatz). Dabei ist

- der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und
- die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Ist nun $\sigma > 3$, dann ist folgende Näherung brauchbar:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \underbrace{\sum_{k=x_1}^{x_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{BV}}$$
$$\approx \underbrace{\Phi\left(\frac{x_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)}_{\text{NV}}.$$

Bei der Normalverteilung wird die untere Grenze um 0,5 verkleinert und die obere Grenze um 0,5 vergrößert, um eine bessere Approximation gewährleisten zu können. Dies nennt man auch *Stetigkeitskorrektur*. Nur wenn σ einen sehr hohen Wert besitzt, kann auf sie verzichtet werden.

Da die Binomialverteilung diskret ist, muss auf einige Punkte geachtet werden:

- $<$ oder $\leq$ (und auch *größer* und *größer gleich*) müssen beachtet werden (was ja bei der Normalverteilung nicht der Fall ist). Deshalb muss bei $P(X_{BV} < x)$ die nächstkleinere natürliche Zahl gewählt werden, d. h.

  $P(X_{BV} < x) = P(X_{BV} \leq x-1)$ bzw. $P(X_{BV} > x) = P(X_{BV} \geq x+1)$,

  damit mit der Normalverteilung weitergerechnet werden kann.

  Zum Beispiel: $P(X_{BV} < 70) = P(X_{BV} \leq 69)$
- Außerdem ist

  $P(X_{BV} \leq x) = P(0 \leq X_{BV} \leq x)$

  $P(X_{BV} \geq x) = P(x \leq X_{BV} \leq n)$

  $P(X_{BV} = x) = P(x \leq X_{BV} \leq x)$

  und lässt sich somit durch die oben angegebene Formel berechnen.

Der große Vorteil der Approximation liegt darin, dass sehr viele Stufen einer Binomialverteilung sehr schnell und einfach bestimmt werden können.

4.3 Beziehung zur Cauchy-Verteilung

Der Quotient von zwei unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$ -standardnormalverteilten Zufallsvariablen ist Cauchy-verteilt.

4.4 Beziehung zur Chi-Quadrat-Verteilung

- Die Summe $X_n = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ von n unabhängigen quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)(i = 1, \ldots, n)$ genügt einer Chi-Quadrat-Verteilung $X_n \sim \chi_n^2$ mit n Freiheitsgraden.
- Die Summe $X_{n-1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2$ mit $\overline{Z} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ und n unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen $Z_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)(i = 1, \ldots, n)$ genügt einer Chi-Quadrat-Verteilung $X_{n-1} \sim \chi_{n-1}^2$ mit $n - 1$ Freiheitsgraden.
- Mit steigender Zahl an Freiheitsgraden ($df \gg 100$) nähert sich die Chi-Quadrat-Verteilung der Normalverteilung an.
- Die Chi-Quadrat-Verteilung wird zur Konfidenzschätzung für die Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit verwendet.

4.5 Beziehung zur Rayleigh-Verteilung

Der Betrag $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ zweier normalverteilter Zufallsvariablen X, Y ist Rayleigh-verteilt.

4.6 Beziehung zur logarithmischen Normalverteilung

Ist die Zufallsvariable X normalverteilt mit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist die Zufallsvariable $Y = e^X$ logarithmisch-normalverteilt mit $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Die Entstehung einer logarithmischen Normalverteilung ist auf multiplikatives, die einer Normalverteilung auf additives Zusammenwirken vieler Zufallsgrößen zurückführen.

4.7 Beziehung zur F-Verteilung

Wenn die identischen normalverteilten Zufallsvariablen $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)}$ und $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)}$ die Parameter

$$\mathrm{E}(X_i^{(1)}) = \mu_1, \sqrt{\mathrm{Var}(X_i^{(1)})} = \sigma_1$$

$$\mathrm{E}(X_i^{(2)}) = \mu_2, \sqrt{\mathrm{Var}(X_i^{(2)})} = \sigma_2$$

mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ besitzen, dann unterliegt die Zufallsvariable

$$Y_{n_1-1,n_2-1} := \frac{(n_2 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2}{(n_1 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} (X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2}$$

einer F-Verteilung mit $((n_1 - 1, n_2 - 1))$ Freiheitsgraden. Dabei sind

$$\bar{X}^{(1)} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^{(1)}, \quad \bar{X}^{(2)} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_i^{(2)}.$$

4.8 Beziehung zur studentschen t-Verteilung

Wenn die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch normalverteilt sind mit den Parameter μ und σ , dann unterliegt die stetige Zufallsgröße

$$Y_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} \sqrt{n}$$

einer studentschen t-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden.

Für eine steigende Anzahl an Freiheitsgraden nähert sich die Student-t-Verteilung der Normalverteilung immer näher an. Als Faustregel gilt, dass man ab ca. $df > 30$ die Student-t-Verteilung bei Bedarf durch die Normalverteilung approximieren kann.

Die Student-t-Verteilung wird zur Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable bei unbekannter Varianz verwendet.

5 Rechnen mit der Standardnormalverteilung

Bei Aufgabenstellungen, bei denen die Wahrscheinlichkeit für $\mu - \sigma^2$ -normalverteilte Zufallsvariablen durch die Standardnormalverteilung ermittelt werden soll, ist es nicht nötig, die oben angegebene Transformation jedes Mal durchzurechnen. Stattdessen wird einfach die Transformation

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

verwendet, um eine $\mathcal{N}(0; 1)$ -Verteilte Zufallsvariable Z zu erzeugen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass z. B. X im Intervall $[x, y]$ liegt, ist durch folgende Umrechnung gleich einer Wahrscheinlichkeit der Standardnormalverteilung:

$$\begin{aligned} P(x \leq X \leq y) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

5.1 Grundlegende Fragestellungen

Allgemein gibt die Verteilungsfunktion die Fläche unter der Glockenkurve bis zum Wert x an, d. h., es wird das bestimmte Integral von $-\infty$ bis x berechnet.

Dies entspricht in Aufgabenstellungen einer gesuchten Wahrscheinlichkeit, bei der die Zufallsvariable X *kleiner* oder *nicht größer* als eine bestimmte Zahl x ist. Wegen der Stetigkeit der Normalverteilung macht es keinen Unterschied, ob nun $<$ oder $\leq$ verlangt ist,

> weil z. B. $P(X = 3) = \int_3^3 f(x)\mathrm{d}x = 0$ und somit $P(X < 3) = P(X \leq 3)$.

Analoges gilt für *größer* und *nicht kleiner*.

Dadurch, dass X nur kleiner oder größer als eine Grenze sein (oder innerhalb oder außerhalb zweier Grenzen liegen) kann, ergeben sich für Aufgaben bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen zu Normalverteilungen zwei grundlegende Fragestellungen:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsversuch die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z *höchstens* den Wert z annimmt?

  $P(Z \leq z) = \Phi(z)$

  In der Schulmathematik wird für diese Aussage gelegentlich auch die Bezeichnung *linker Spitz* verwendet, da die Fläche unter der Gaußkurve von links bis zur Grenze verläuft. Für z sind auch negative Werte erlaubt. Allerdings haben viele Tabellen der Standardnormalverteilung nur positive Einträge – wegen der Symmetrie der Kurve und der Negativitätsregel

  $\Phi(-z) \;=\; 1 - \Phi(z)$

  des „linken Spitzes“ stellt dies aber keine Einschränkung dar.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsversuch die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z *mindestens* den Wert z annimmt?

  $P(Z \geq z) = 1 - \Phi(z)$

  Hier wird gelegentlich die Bezeichnung *rechter Spitz* verwendet, mit

  $$P(Z \geq -z) = 1 - \Phi(-z) = 1 - (1 - \Phi(z)) = \Phi(z)$$

  gibt es auch hier eine Negativitätsregel.

Da jede Zufallsvariable X mit der allgemeinen Normalverteilung sich in die Zufallsgröße $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mit der Standardnormalverteilung umwandeln lässt, gelten die Fragestellungen für beide Größen gleichbedeutend.

5.2 Streubereich und Antistreubereich

Häufig ist die Wahrscheinlichkeit für einen *Streubereich* von Interesse, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z Werte zwischen z_1 und z_2 annimmt:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Beim Sonderfall des symmetrischen Streubereiches ($z_1 = -z_2$, mit $z_2 > 0$) gilt

$$\begin{aligned} P(-z \leq Z \leq z) &= P(|Z| \leq z) \\ &= \Phi(z) - \Phi(-z) \\ &= \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) \\ &= 2\Phi(z) - 1. \end{aligned}$$

Für den entsprechenden *Antistreubereich* ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z Werte außerhalb des Bereichs zwischen z_1 und z_2 annimmt, zu:

$$P(Z \leq z_1 \text{ oder } Z \geq z_2) = \Phi(z_1) + (1 - \Phi(z_2)).$$

Somit folgt bei einem symmetrischen Antistreubereich

$$\begin{aligned} P(Z \leq -z \text{ oder } Z \geq z) &= P(|Z| \geq z) \\ &= \Phi(-z) + 1 - \Phi(z) \\ &= 1 - \Phi(z) + 1 - \Phi(z) \\ &= 2 - 2\Phi(z). \end{aligned}$$

5.3 Streubereiche am Beispiel der Qualitätssicherung

Besondere Bedeutung haben beide Streubereiche z. B. bei der Qualitätssicherung von technischen oder wirtschaftlichen Produktionsprozessen. Hier gibt es einzuhaltende

Toleranzgrenzen x_1 und x_2 , wobei es meist einen größten noch akzeptablen Abstand ϵ vom Erwartungswert μ (= dem optimalen Sollwert) gibt. σ kann hingegen empirisch aus dem Produktionsprozess gewonnen werden.

Wurde $[x_1; x_2] = [\mu - \epsilon; \mu + \epsilon]$ als einzuhaltendes Toleranzintervall angegeben, so liegt (je nach Fragestellung) ein symmetrischer Streu- oder Antistreubereich vor.

Im Falle des Streubereiches gilt:

$$\begin{aligned} P(x_1 \le X \le x_2) &= P(|X - \mu| \le \epsilon) \\ &= P(\mu - \epsilon \le X \le \mu + \epsilon) \\ &= P\left(\frac{-\epsilon}{\sigma} \le Z \le \frac{\epsilon}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\epsilon}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - 1 \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Der Antistreubereich ergibt sich dann aus

$$P(|X - \mu| \ge \epsilon) = 1 - \gamma$$

oder wenn kein Streubereich berechnet wurde durch

$$P(|X - \mu| \ge \epsilon) = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)\right) = \alpha.$$

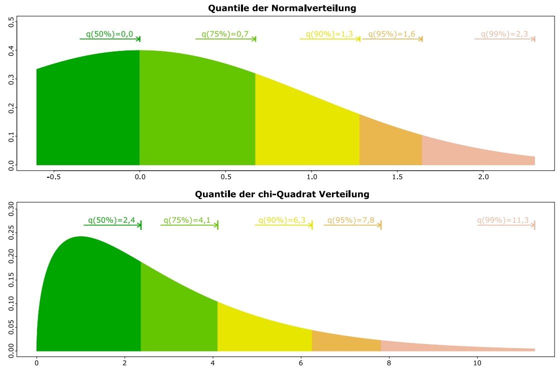
Das Ergebnis γ ist also die Wahrscheinlichkeit für verkaufbare Produkte, während α die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss bedeutet, wobei beides von den Vorgaben von μ , σ und ϵ abhängig ist.

Ist bekannt, dass die maximale Abweichung ϵ symmetrisch um den Erwartungswert liegt, so sind auch Fragestellungen möglich, bei denen die Wahrscheinlichkeit vorgegeben und eine der anderen Größen zu berechnen ist.

6 Testen auf Normalverteilung

Um zu überprüfen, ob vorliegende Daten normalverteilt sind, können folgende Methoden angewandt werden:

- Chi-Quadrat-Test
- Kolmogorow-Smirnow-Test
- Anderson-Darling-Test (Modifikation des Kolmogorow-Smirnow-Tests)
- Lilliefors-Test (Modifikation des Kolmogorow-Smirnow-Tests)
- Cramér-von-Mises-Test



Quantile einer Normalverteilung und einer Chi-Quadrat-Verteilung

- Shapiro-Wilk-Test
- Jarque-Bera-Test
- Q-Q-Plot (deskriptive Überprüfung)
- Maximum-Likelihood-Methode (deskriptive Überprüfung)

Die Tests haben unterschiedliche Eigenschaften hinsichtlich der Art der Abweichungen von der Normalverteilung, die sie erkennen. So erkennt der Kolmogorov-Smirnov-Test Abweichungen in der Mitte der Verteilung eher als Abweichungen an den Rändern, während der Jarque-Bera-Test ziemlich sensibel auf stark abweichende Einzelwerte an den Rändern („heavy tails“) reagiert.

Beim Lilliefors-Test muss im Gegensatz zum Kolmogorov-Smirnov-Test nicht standardisiert werden, d. h., μ und σ der angenommenen Normalverteilung dürfen unbekannt sein.

Mit Hilfe von Quantil-Quantil-Plots (auch Normal-Quantil-Plots oder kurz Q-Q-Plot) ist eine einfache grafische Überprüfung auf Normalverteilung möglich.
Mit der Maximum-Likelihood-Methode können die Parameter μ und σ der Normalverteilung geschätzt und die empirischen Daten mit der angepassten Normalverteilung grafisch verglichen werden.

7 Parameterschätzung

Oft sind die Parameter einer Normalverteilung nicht bekannt und müssen geschätzt werden. Beispielsweise ist dies der Fall, wenn eine Reihe von Messwerten $x_1, \ldots, x_n$ vorliegt, bei welcher man Grund zur Annahme hat, dass sie unabhängige Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße mit unbekannten Parametern μ und σ^2 sind.

7.1 Erwartungstreue Schätzer

Der Erwartungswert μ kann durch das arithmetische Mittel

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

geschätzt werden (siehe Schätzwert für den Erwartungswert).

Die Varianz σ^2 kann über die korrigierte Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

geschätzt werden.

Beide Schätzer sind erwartungstreu.

7.2 Maximum-Likelihood-Schätzung der Verteilungsparameter

Siehe auch: Maximum-Likelihood-Schätzung

Um die Parameter einer Normalverteilung zu schätzen, kann man auch die Maximum-Likelihood-Schätzung verwenden. Schätzer $\hat{\mu}_{ML}$ für den Erwartungswert und $\hat{\sigma}^2_{ML}$ für die Varianz erhält man, indem die Log-Likelihood-Funktion für die Normalverteilung maximiert wird[5].

Als Maximum-Likelihood-Schätzer für μ ergibt damit ebenfalls $\hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$, also das arithmetische Mittel der Messwerte.

Für die Varianz erhält man dagegen die unkorrigierte Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{n-1}{n}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

und für die Standardabweichung

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{ML}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Diese Schätzer für Varianz bzw. Standardabweichung sind jedoch *nicht* bzw. nur asymptotisch erwartungstreu. Selbst wenn man einen erwartungstreuen Varianz-Schätzer verwendet, ist dessen Quadratwurzel – d. h. die Standardabweichung – im Allgemeinen nicht ebenfalls erwartungstreu.[6]

8 Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

8.1 Box-Muller-Methode

Nach der Box-Muller-Methode lassen sich zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen X und Y aus zwei unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen $U_1, U_2 \sim U(0,1)$, sogenannten Standardzufallszahlen, simulieren:

$$X = \cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2}$$

und

$$Y = \sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2}.$$

8.2 Polar-Methode

→ *Hauptartikel: Polar-Methode*

Die Polar-Methode von George Marsaglia ist auf einem Computer noch schneller, da sie keine Auswertungen von trigonometrischen Funktionen benötigt:

1. Erzeuge zwei voneinander unabhängige, im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen u_1 und u_2
2. Berechne $q = u_1^2 + u_2^2$. Falls $q = 0$ oder $q > 1$, gehe zurück zu Schritt 1.
3. Berechne $p = \sqrt{\frac{-2\cdot\ln q}{q}}$.
4. $x_i = u_i \cdot p$ für $i = 1, 2$ liefert zwei voneinander unabhängige, standardnormalverteilte Zufallszahlen x_1 und x_2 .

Durch lineare Transformation lassen sich hieraus beliebige normalverteilte Zufallszahlen erzeugen: Ist die Zufallsvariable $x \sim \mathcal{N}(0,1)$ -verteilt, so ist $a \cdot x + b$ schließlich $\mathcal{N}(b, a^2)$ -verteilt.

8.3 Zwölferregel

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass sich unter bestimmten Voraussetzungen die Verteilung der Summe unabhängiger, identisch verteilter Zufallszahlen einer Normalverteilung nähert.

Ein Spezialfall ist die Zwölferregel, die sich auf die Summe von zwölf Zufallszahlen aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall [0,1] beschränkt und bereits zu passablen Verteilungen führt.

Allerdings ist die geforderte Unabhängigkeit der zwölf Zufallsvariablen X_i bei den immer noch häufig verwendeten Linearen Kongruenzgeneratoren (LKG) nicht garantiert. Im Gegenteil wird vom Spektraltest für LKG meist nur die Unabhängigkeit von maximal vier bis sieben der X_i garantiert. Für numerische Simulationen ist die Zwölferregel daher sehr bedenklich und sollte, wenn überhaupt, dann ausschließlich mit aufwändigeren, aber besseren Pseudo-Zufallsgeneratoren wie z. B. dem Mersenne-Twister (Standard in Python, GNU R) oder WELL genutzt werden. Andere, sogar leichter zu programmierende Verfahren, sind daher i. d. R. der Zwölferregel vorzuziehen.

8.4 Verwerfungsmethode

Normalverteilungen lassen sich mit der Verwerfungsmethode (s. dort) simulieren.

8.5 Inversionsmethode

Die Normalverteilung lässt sich auch mit der Inversionsmethode berechnen. Da das Fehlerintegral leider nicht explizit mit elementaren Funktionen integrierbar ist, muss man auf Reihenentwicklungen der inversen Funktion für einen Startwert ($a_1 \dots a_{14}$ weiter unten) und anschließende Korrektur mit dem Newtonverfahren zurückgreifen. Dazu werden erf(x) und erfc(x) benötigt, die ihrerseits mit Reihenentwicklungen und Kettenbruchentwicklungen berechnet werden können – insgesamt ein relativ hoher Aufwand. Die notwendigen Entwicklungen sind in der Literatur zu finden.[7]

Entwicklung des inversen Fehlerintegrals (wegen des Pols nur als Startwert für das Newtonverfahren verwendbar):

$$\operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right) = x\Big(a_1 + x^2\big(a_2 + x^2(\dots)\big)\Big)$$

mit den Koeffizienten

$$a_i = 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{7}{30}, \tfrac{127}{630}, \tfrac{4369}{22680}, \tfrac{34807}{178200}, \tfrac{20036983}{97297200}, \tfrac{2280356863}{10216206000}, \tfrac{49020204823}{198486288000},$$

$$\tfrac{65967241200001}{237588086736000}, \tfrac{15773461423793767}{49893498214560000}, \tfrac{655889589032992201}{1803293578326240000},$$

$$\tfrac{94020690191035873697}{222759794969712000000}, \tfrac{655782249799531714375489}{1329207696584271504000000}, \dots$$

9 Anwendungen außerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Normalverteilung lässt sich auch zur Beschreibung nicht direkt stochastischer Sachverhalte verwenden, etwa in der Physik für das Amplitudenprofil der Gauß-Strahlen und andere Verteilungsprofile.

Zudem findet sie Verwendung in der Gabor-Transformation.

10 Siehe auch

- Mehrdimensionale Normalverteilung
- Additives weißes gaußsches Rauschen
- Wahrscheinlichkeitsnetz
- Statistik

11 Literatur

- Stephen M. Stigler: *The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900*. Belknap Series. Harvard University Press, 1986. ISBN 9780674403413.

12 Fußnoten und Einzelnachweise

[1] Wolfgang Götze,Christel Deutschmann & Heike Link: Statistik. Lehr- und Übungsbuch mit Beispielen aus der Tourismus- und Verkehrswirtschaft. Oldenburg, München 2002, ISBN 3-486-27233-0, S. 170 (eingeschränkte Vorschau in der Google-Buchsuche).

[2] Hans Wußing: *Von Gauß bis Poincaré: Mathematik und Industrielle Revolution.* S. 33.

[3] Bei e^x handelt es sich um die Exponentialfunktion mit der Basis e.

[4] Espen Gaarder Haug: *The complete guide to option pricing formulas, Band 1*, McGraw-Hill, 1998, ISBN 0-7863-1240-8, eingeschränkte Vorschau in der Google-Buchsuche.

[5] Wolfram MathWorld: Maximum Likelihood

[6] Wolfram MathWorld: Sample Variance

[7] William B. Jones, W. J. Thron; *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*; Addison Wesley, 1980.

13 Weblinks

Commons: Normalverteilung – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien

Wikibooks: Anschauliche Darstellung der Normalverteilung – Lern- und Lehrmaterialien

- Anschauliche Erklärung der Normalverteilung mit interaktivem Graphen
- Darstellung mit Programmcode in Visual Basic
- Online-Rechner Normalverteilung

Diskrete univariate Verteilungen

Diskrete univariate Verteilungen für endliche Mengen:
Benford | Bernoulli | beta-binomial | binomial | Dirac | diskret uniform | hypergeometrisch | kategorial | negativ hypergeometrisch | Rademacher | verallgemeinert binomial | Zipf | Zipf-Mandelbrot | Zweipunkt

Diskrete univariate Verteilungen für unendliche Mengen:
Boltzmann | Conway-Maxwell-Poisson | discrete-Phase-Type | erweitert negativ binomial | Gauss-Kuzmin | gemischt Poisson | geometrisch | logarithmisch | negativ binomial | parabolisch-fraktal | Poisson | Skellam | verallgemeinert Poisson | Yule-Simon | Zeta

Kontinuierliche univariate Verteilungen

Kontinuierliche univariate Verteilungen mit kompaktem Intervall:
Beta | Cantor | Kumaraswamy | raised Cosine | Dreieck | U-quadratisch | stetig uniform | Wigner-Halbkreis

Kontinuierliche univariate Verteilungen mit halboffenem Intervall:
Beta prime | Bose-Einstein | Burr | Chi-Quadrat | Coxian | Erlang | Exponential | F | Fermi-Dirac | Folded normal | Fréchet | Gamma | Gamma-Gamma | Extremwert | verallgemeinert invers Gauß | halblogistisch | halbnormal | Hotellings T-Quadrat | hyper-exponentiale | hypoexponential | invers Chi-Quadrat | scale-invers Chi-Quadrat | Invers Normal | Invers Gamma | Lévy | log-normal | log-logistisch | Maxwell-Boltzmann | Maxwell-Speed | Nakagami | nichtzentriert Chi-Quadrat | Pareto | Phase-Type | Rayleigh | relativistisch Breit-Wigner | Rice | Rosin-Rammler | shifted Gompertz | truncated normal | Type-2-Gumbel | Weibull | Wilks’ Lambda

Kontinuierliche univariate Verteilungen mit unbeschränktem Intervall:
Cauchy | Extremwert | exponential Power | Fishers z | Fisher-Tippett (Gumbel) | generalized hyperbolic | Hyperbolic-secant | Landau | Laplace | alpha-stabil | logistisch | normal (Gauß) | normal-invers Gauß’sch | Skew-normal | Studentsche t | Type-1-Gumbel | Variance-Gamma | Voigt

Multivariate Verteilungen

Diskrete multivariate Verteilungen:
Ewen | multinomial | multivariat hypergeometrisch | Dirichlet compound multinomial

Kontinuierliche multivariate Verteilungen:
Dirichlet | generalized Dirichlet | multivariat normal | multivariat Student | normalskaliert invers Gamma | Normal-Gamma

Multivariate Matrixverteilungen:
Invers Wishart | Matrix-normal | Wishart

14 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

14.1 Text

- **Normalverteilung** *Quelle:* https://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung?oldid=144052457 *Autoren:* Kurt Jansson, KurtWatzka, Nerd, Kku, JakobVoss, Jed, Aka, Stefan Kühn, Stefan Birkner, Head, Hhoffmann, Mathias Schindler, LennyWikipedia, Tsor, Seewolf, Sigbert, Wzwz, SirJective, Hubi, Mdjango, Frog~dewiki, Bitteloeschen, Honina, Quo R, GDK, Zwobot, D, Weialawaga, JensG, Stern, Karl-Henner, Leo.Math, Elasto, Anton, Ciciban, Wiegels, Boehm, Zumbo, Nocturne, RokerHRO, Phrood, Hulle, Produnis~dewiki, Wimmerm, Mnh, P. Birken, Ahellwig, Gerhardvalentin, GrößterZwergDerWelt, Avatar, Philipendula, Frubi, PeeCee, Kurt seebauer, Johannes Hüsing, Ri st, Cepheiden, AndyThaller, Mgloede, Thüringer, Marc van Woerkom, Gluon, Mb1248, Lustiger seth, Bigbug21, FFrenzel, Botteler, Taxiarchos228, Traitor, LoKiLeCh, Ixitixel, MartinThoma, Thire, Fit, Benson.by, Pelz, René Schwarz, Diba, Zahnstein, Renekaemmerer, Kopoltra, FlaBot, Smeyen, NeoUrfahraner, Schlurcher, Taadma, MiBü, TekkenTec, Georg-Johann, Rasko, Overdose, Gunther, Jbb, Tom1200, UW, Millbart, Chemiker, Erzbischof, Cami de Son Duc, Ra-raisch, Atc, Alexander Brock, Ephraim33, JFKCom, RobotQuistnix, Bota47, Paddel, YurikBot, JonnyJD, Savin 2005, Wutzofant, Tillit23, StefanPohl, DerHexer, Eskimbot, Kaisersoft, A vulture, LKD, Oxymoron83, Morecore, Jü, JoBa2282, Kronf, DHN-bot~dewiki, Chrisqwq, Mediocrity, An-d, Knollebuur, Thgoiter, Nijdam, Accountalive, Vanellus, Maximilian Reininghaus, Brf, BesondereUmstaende, Eisber, Rufus46, Spuk968, Thijs!bot, Cuitala, Zickzack, Megatherium, Rainald62, Capt.Snowman, Arno Matthias, Chiccodoro, Treublatt, JAnDbot, YourEyesOnly, Meisterkoch, Yellowcard, Nolispanmo, Zipferlak, Franzl aus tirol, Numbo3, Methossant, Crus4d3r, Gemini1980, DodekBot, VolkovBot, Wrev, AlnoktaBOT, Hans Eo, Ireas, Moros, Regi51, Horo-wiki, Gärnter lehreraff, Juliabackhausen, Dr. E. Scherer, Psychologe, AlleborgoBot, YonaBot, SieBot, Klumpp, Crazy1880, Korrekturleser1st, OKBot, Trustable, Gymnasiallehrer, Hxhbot, Gökhan, Xario, Teefee, Jesi, Christian Stroppel, Alnilam, BigAndi, Pittimann, Christian1985, Plankton314, Tolentino, Zulu55, BrunosapiJens, Estirabot, Sewenz, FranzR, Inkowik, Sinuspi, Michael Hardy, Cäsium137, WuBot, Ben-k86, SilvonenBot, Mxms~dewiki, LaaknorBot, EivindBot, PM3, Optimike, Luckas-bot, UKoch, Jeremiah21, GrouchoBot, Feudiable, Cite kinsey, Empro2, Xqbot, ArthurBot, Mario1975~dewiki, Birgitlankes, Almabot, Wilske, Quartl, BKSlink, Dobias, Astrognom, Jivee Blau, Zauguin, Zeekay~dewiki, Schaltfehler, TobeBot, Saunas68, Whizkid~dewiki, TjBot, KurtSchwitters, EmausBot, Lweller, JackieBot, ArachanoxReal, GrandpaScott, Liuthar, SanFran Farmer, Krdbot, Hephaion, Robin von Stedow, KLBot2, Relie86, Lektorat Cogito, Tnemtsoni, HilberTraum, Wızkıd, Danile42, René Vápeník, DominiqueSch, Mittelhesse, .gs8, Dexbot, NikelsenH, Julia Abril, AzureDiamond, Asfdlol, Kleindörfler, JuethoBot, Flohtux und Anonyme: 256

14.2 Bilder

- **Datei:10_Deutsche_Mark_-_detail.png** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f8/10_Deutsche_Mark_-_detail.png *Lizenz:* Public domain *Autoren:* http://www2.physik.uni-greifswald.de/~{}pompe/SCRIPTS/galton-studentenfassung.pdf *Ursprünglicher Schöpfer:* Uni Greifswald
- **Datei:Commons-logo.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Ursprünglicher Schöpfer:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Datei:Gauss_dichtefunktion.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/Gauss_dichtefunktion.svg *Lizenz:* CC0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* StefanPohl
- **Datei:Merge-arrows.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Merge-arrows.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:Normal-distribution-cumulative-density-function-many.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Normal-distribution-cumulative-density-function-many.svg *Lizenz:* CC0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* MartinThoma
- **Datei:Normal_Distribution_PDF.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Normal_Distribution_PDF.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* self-made, Mathematica, Inkscape *Ursprünglicher Schöpfer:* Inductiveload
- **Datei:Quantile_graph.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Quantile_graph.svg *Lizenz:* CC BY-SA 3.0 *Autoren:* Eigenes Werk, SVG Version of File:Quantile graph.png with some corrections *Ursprünglicher Schöpfer:* René Schwarz
- **Datei:Wikibooks-logo.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Wikibooks-logo.svg *Lizenz:* CC BY-SA 3.0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* User:Bastique, User:Ramac et al.

14.3 Inhaltslizenz

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0