

Versuch 2: Akustik

Frank Maslowski, Christoph Günther, Pierre Dombrowski

Gruppe B11

25. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Schallgeschwindigkeit	3
1.1	Theorie	3
1.2	Laufzeit gegen Laufstrecke	5
1.2.1	Versuchsaufbau	5
1.2.2	Versuchsdurchführung	6
1.2.3	Versuchsauswertung	6
1.3	Resonanzfrequenzen einer stehenden Welle	9
1.3.1	Versuchsaufbau	9
1.3.2	Versuchsdurchführung	9
1.3.3	Versuchsauswertung	10
2	Elastizitätsmodule	13
2.1	Theorie	13
2.2	Versuchsaufbau	14
2.3	Versuchsdurchführung	15
2.4	Versuchsauswertung	15
2.4.1	Rohdaten	15
2.4.2	Auswertung	18
3	Untersuchung einer klassischen Gitarre	21
3.1	Theorie	21
3.2	Beobachtung der Schwebung	21
3.2.1	Versuchsaufbau	22
3.2.2	Versuchsdurchführung	22
3.2.3	Auswertung	23
3.3	Untersuchung der Materialeigenschaften der Saite	26
3.3.1	Versuchsaufbau und -durchführung	26
3.3.2	Auswertung	26
3.4	Qualitative Untersuchung der Obertöne	29
3.4.1	Versuchsaufbau und -durchführung	29
3.4.2	Auswertung	29
4	Fazit	32

1 Schallgeschwindigkeit

In den ersten beiden Versuchen dieser Versuchsreihe wurde die Schallgeschwindigkeit in Luft gemessen.

1.1 Theorie

Schall lässt sich als adiabatischer Prozess beschreiben. Dazu drückt man das Schallfeld durch lokale Größen wie die Schallschnelle $u(x, t)$, die Geschwindigkeit der Moleküle, und den Schalldruck $p(x, t)$, die lokale Abweichung des Drucks vom Außendruck p_0 , aus. Diese hängen über die Eulergleichungen zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x, t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -\frac{1}{\kappa p_0} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t),$$

Wobei $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ der Adiabatenindex des Gases ist und ρ die Dichte des Gases. Aus diesen Gleichungen lässt sich die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p_0 \kappa}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

herleiten. Es werden Lösungen der Form $u(x, t) = u_0 \sin(\omega t \pm kx - \Phi)$ betrachtet, mit der Kreiswellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \frac{\omega}{k}$. Ohne Dispersion entspricht diese der zu messenden Ausbreitungsgeschwindigkeit. Sie hängt idealisiert nur von der Temperatur ab und lässt sich aus der oben genannten Wellengleichung ablesen und mit der idealen Gasgleichung $pV = nRT$ umformen zu:

$$v = \sqrt{\frac{p_0 \cdot \kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{R \cdot \kappa \cdot T}{M_{mol}}},$$

mit der allgemeinen Gaskonstanten R , dem Adiabatenindex κ , der Molmasse von Luft M_{mol} und der Temperatur in Kelvin T . Der einzige gemessene Wert war hier die Temperatur, welche mit dem Cassy-Thermometer bestimmt wurde, wobei der Fehler auf diese durch den Digitalisierungsfehler abgeschätzt wurde, also eine Gleichverteilung auf die letzte angezeigte Stelle. Die anderen Werte sind Literaturwerte:

R	$8.3145 J/(mol K)$
κ	1.4
M_{mol}	$28.984 kg/mol$
T	$295.650 \pm 0.029 K$

Tabelle 1.1: Werte für den Theoriewert

Aus diesen Werten lässt sich nun der theoretische Wert für die Schallgeschwindigkeit bestimmen:

$$v_{theo} = 344.581 \pm 0.017 \frac{m}{s}$$

Ein weiteres Phänomen das es für die folgenden Versuche zu betrachten gilt ist das der stehenden Wellen. Erzeugt man Schallwellen in einem geschlossenen Rohr, so werden diese an den geschlossenen Enden reflektiert und überlagern sich mit der einlaufenden Welle. Dadurch entstehen Wellen, deren Ort- und Zeitabhängigkeit entkoppelt sind, das heißt sie lassen sich in der Form $u_{stehend} = u_0 \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$ schreiben.

Hieraus erkennt man, dass es Orte gibt, an denen zu jeder Zeit Schallschnelle oder Schalldruck verschwinden (Knoten). Ist das Rohr bei $x = 0$ geschlossen, nennt man dies einen schallharten Abschluss. Hier ist die Schallschnelle immer 0 und der Schalldruck extremal. Am Rohrende mit der Schallquelle gilt: $u(x = L, t) = u_L \cdot \sin(\omega t)$, da hier ein periodisches Signal erzeugt wird.

Im Folgenden werden Rohre einer festen Länge betrachtet. In diesem Fall kommt es zu Resonanz, falls beim schallharten Abschluss ein Schnelleknoten ist. Dies ist im einfachsten Fall erfüllt, wenn die Schallwellenlängen des erzeugten Tons genau zweimal so lang wie das Rohr sind (siehe Abb. 1.1). Die Bedingung wird jedoch auch für kleiner Wellenlängen erfüllt, sofern diese die Relation $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ erfüllen. Für die Resonanzfrequenzen gilt damit:

$$f_n = \frac{n \cdot v}{2L}$$

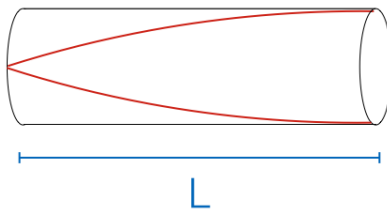


Abbildung 1.1: Resonanz Grundschwingung

1.2 Laufzeit gegen Laufstrecke

1.2.1 Versuchsaufbau

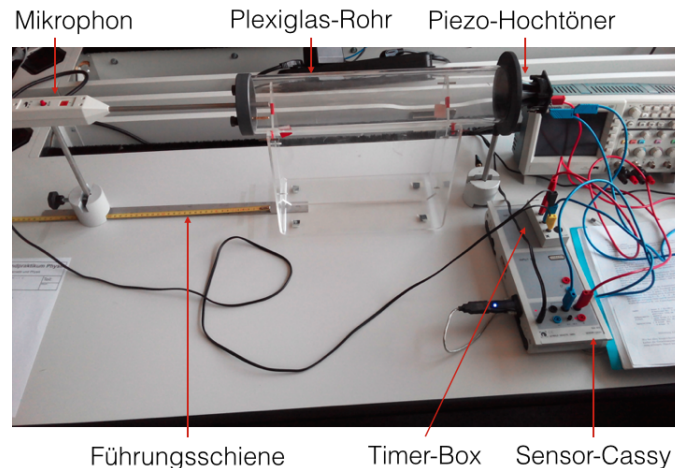


Abbildung 1.2: Versuchsaufbau Laufzeitmessung

Benötigte Geräte:

- Sensor Cassy
- Timer-Box
- Temperatursensor
- Plexiglasrohr mit Ständer und Endstücken
- Universalmikrophon
- Piezo Hochtöner
- Führungsschiene Alu
- Laborkabel
- Maßband

Bei diesem Versuch wird die Laufzeit eines Schallsignals für verschiedene Laufstrecken gemessen. Dazu wurde zunächst ein Schallrohr auf einer Halterung aufgebaut. Dies diente dazu, Störungen der Umgebung zu vermindern.

An die eine Seite des Rohres wurde der Piezo Hochtöner angesteckt und an die andere ein Rohrabschluss mit einer Durchführung. Durch diese wurde die Stange des Mikrophons geführt, so dass in verschiedenen Abständen zum Piezolautsprecher gemessen werden konnte. Um das Mikrophon zu verschieben stand dieses auf einem Sockel, der auf einer Führungsschiene parallel zum Rohr war. Diese wurde vorher mittels Klebestreifen auf dem Tisch befestigt. Auf der Führungsschiene wurde außerdem ein Maßband befestigt, um die Verschiebung zu messen.

Um die Laufzeit mit dem Cassy Sensor zu messen wurde eine Timer-Box an Kanal A

verwendet. Diese benötigte ein Start-Signal an Eingang E und ein Stop-Signal an Eingang F. Als Start-Signal wurde der '+'-Pol des Piezolausprechers verwendet. Parallel dazu wurde ein Relais geschaltet, sodass beim Schließen des Relais der Lautsprecher einen Ton erzeugte und der Timer gestartet wurde. Das Stop-Signal lieferte das Mikrophon im Triggermodus, welches sobald die Schallwelle dieses erreichte ein Signal an den Eingang F der Timerbox sendete, sodass diese die Zeit stoppte.

1.2.2 Versuchsdurchführung

Um nun mit diesem Aufbau die Schallgeschwindigkeit zu messen, war es nötig, die Laufzeit für verschiedene Abstände des Mikrophons zu messen und diese gegeneinander aufzutragen. Dadurch war es nicht nötig den absoluten Abstand zwischen Mikrophon und Lautsprecher zu kennen.

Das Mikrophon wurde in Schritten von 2cm immer näher an die Schallquelle herangeschoben, wobei bei einem Abstand von ca. 34cm zur Rohhalterung angefangen und bei ca. 10cm aufgehört wurde. Pro Abstand wurden ca. 10 Messwerte mittels Cassy-Lab für die Laufzeiten aufgenommen.

1.2.3 Versuchsauswertung

Rohdaten

Die Rohdaten zeigen den erwarteten Verlauf, das heißt kürzere Laufzeiten für kürzere Abstände. Es fällt jedoch auf, dass es ab und zu zu Artefakten bei der Messwertaufnahme in Form von unerklärlich großen Abweichungen der Laufzeiten kam. Dies ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

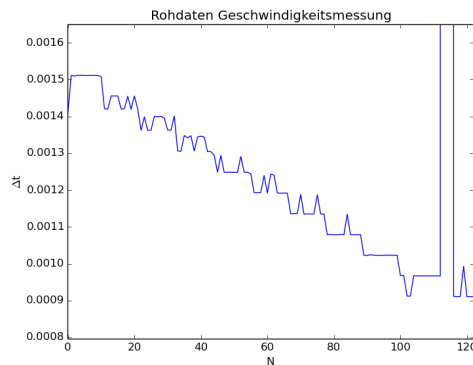


Abbildung 1.3: Rohdaten Laufzeitmessung

Auswertung der Daten

Zunächst wurde aus den zu einem Abstand l gehörigen Werten für die Laufzeit Δt der Mittelwert und der Fehler auf diesen berechnet, gemäß den Formeln:

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i, \quad \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta t_i - \overline{\Delta t})^2, \quad \sigma \overline{\Delta t} = \frac{\sigma_{\Delta t}}{\sqrt{N}}$$

Damit ergaben sich folgende Werte:

l [cm]	$\overline{\Delta t}$ [ms]	$\sigma_{\overline{\Delta t}}$ [ms]	l [cm]	$\overline{\Delta t}$ [ms]	$\sigma_{\overline{\Delta t}}$ [ms]
34	1.51085	0.00031	22	1.1450	0.0064
32	1.4363	0.0055	20	1.0840	0.0051
30	1.3826	0.0058	18	1.02318	0.00012
28	1.3245	0.0064	16	0.96727	0.00012
26	1.2560	0.0055	14	0.9183	0.0075
24	1.2057	0.0069	12	0.856114	0.000078
			10	0.801075	0.000065

Tabelle 1.2: Laufzeitmessung

Dabei wurden wie oben erwähnt einige Messwerte als eindeutige Ausreißer identifiziert und weggelassen. Es fiel zudem auf, dass es teilweise bei den Messwerten zu erheblichen Schwankungen kam, in der Form, dass sich die Werte zu einer Messreihe scheinbar in zwei Gruppen aufteilten, wobei der Großteil dem erwarteten Wert entsprach und ein Teil deutlich kleiner oder größer war. Die Werte beider Teile unter sich lagen jedoch sehr nah beieinander. Da nicht klar war, ob es sich hierbei um Ausreißer oder statistische Abweichungen handelt, sind in der Auswertung alle dieser Werte verwendet.

Der Fehler auf die Abstände l wurde abgeschätzt durch die Ablesegenauigkeit, also eine Gleichverteilung auf die kleinste Einheit des Maßbandes: $\sigma_l = \frac{0.1}{\sqrt{12}} \text{ cm}$.

Mit diesen Werten wurde nun eine lineare Regression durchgeführt, wobei Δt über l aufgetragen wurde, da auf die Δt ein größerer Fehler vorliegt. Die Schallgeschwindigkeit v und deren Fehler σ_v berechnete sich dann aus der Steigung a gemäß:

$$v = \frac{1}{a}, \quad \sigma_v = \frac{\sigma_a}{a^2}$$

Der Fehler auf die Steigung wurde der Kovarianzmatrix der linearen Regression entnommen.

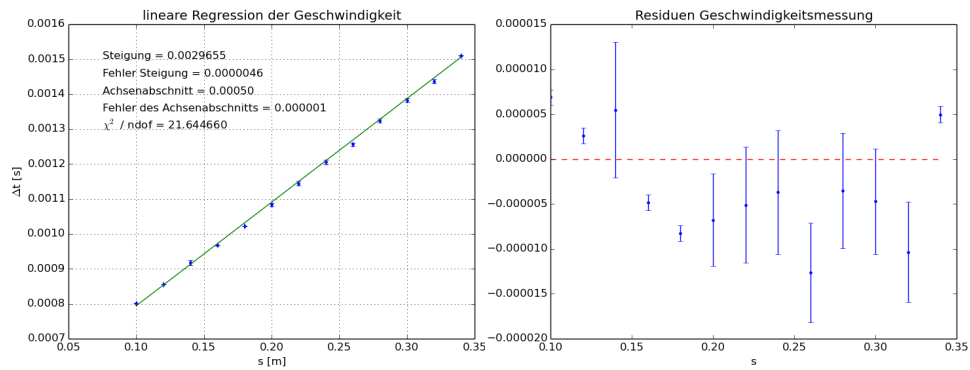


Abbildung 1.4: lineare Regression Schallgeschwindigkeit

Es fällt das hohe χ^2 pro Freiheitsgrad von 21.6 auf. Dieses lässt sich eventuell erklären durch die oben genannten Unregelmäßigkeiten in den Messwerten, wobei nicht genau klar ist wie diese entstehen und sie deshalb auch nicht weggelassen wurden. Mit der aus der linearen Regression gewonnenen Steigung ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit:

$$v_{exp} = 337.21 \pm 0.52 \frac{m}{s}$$

Diese scheint trotz des ungewöhnlichen χ^2 realistisch, da ein Wert von ca. $340 \frac{m}{s}$ zu erwarten war. Der theoretisch berechnete Wert ist jedoch deutlich höher als dieser mit

$$v_{theo} = 344.581 \pm 0.017 \frac{m}{s}$$

Auch im Rahmen ihrer Fehler sind diese Werte nicht miteinander kompatibel. Vermutlich liegt daher bei der Messung der Laufzeiten ein systematischer Fehler vor.

1.3 Resonanzfrequenzen einer stehenden Welle

1.3.1 Versuchsaufbau

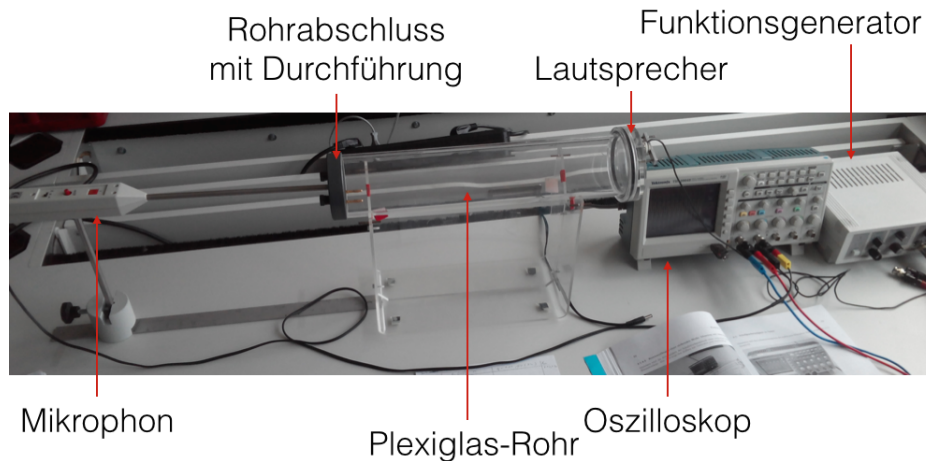


Abbildung 1.5: Versuchsaufbau Resonanzmessung

- Oszilloskop
- Plexiglas Rohr
- Universalmikrophon
- Lautsprecher
- Endstück mit Durchführung
- Standfuß für das Mikrophon
- Funktionsgenerator

An einem Ende des Plexiglas Rohrs wurde ein Lautsprecher befestigt, der ein Sinussignal aussendet, welches von einem Funktionsgenerator erzeugt wird. Über diesen Funktionsgenerator können Frequenzen im Bereich von 0-200 kHz erzeugt werden. Am anderen Ende wurde ein Mikrophon durch ein ansonsten abgeschlossenes Ende geführt, sodass die Schalldruckamplitude am schallharten Ende gemessen werden konnte. Das Signal des Funktionsgenerators wie auch das des Mikrophons wurden dabei mit dem Oszilloskop gemessen und aufgezeichnet.

1.3.2 Versuchsdurchführung

Zur Messung der Resonanzfrequenz wurde die Eingangsfrequenz von 0 Hz an langsam hoch geregelt, bis die Amplituden des vom Mikrophon gemessenen Schalldrucks maximal waren. Auf dem Oszilloskop konnten dann zwei Maxima bzw. Minima und die Anzahl der dazwischen liegenden Perioden abgelesen werden. Bei weiterem Erhöhen der Eingangsfrequenz sank die Amplitude zunächst auf ein Minimum ab um danach

bei der nächsten höheren Resonanzfrequenz wieder ein Maximum zu bilden. Für jede Resonanzfrequenz wurden so jeweils vier Messungen durchgeführt. Anschließend wurde die Länge des Plexiglas Rohrs auf $L = 42.4 \pm 0.029$ cm bemessen.

1.3.3 Versuchsauswertung

Rohdaten

In der Tabelle 1.3.3 sind die Zeitdifferenzen Δt der beiden abgelesenen Schwingungsmaxima und die Anzahl n der dazwischenliegenden Perioden für die jeweiligen Resonanzfrequenzen zu sehen. Die Unsicherheiten auf t wurden dabei aus der Bingröße zu $\sigma_t = 0.04 \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$ bestimmt somit ergibt sich als Unsicherheit für Δt : $\sigma_{\Delta t} = 0.04 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$.

	Δt [ms]	n		Δt [ms]	n
0. Resonanzfrequenz	7.24	3	4. Resonanzfrequenz	4.44	9
	7.28	3		4.44	9
	7.28	3		4.42	9
	7.24	3		4.44	9
1. Resonanzfrequenz	8.56	7	5. Resonanzfrequenz	4.52	11
	8.56	7		4.52	11
	8.56	7		4.52	11
	8.52	7		4.55	11
2. Resonanzfrequenz	8.96	11	6. Resonanzfrequenz	2.12	6
	9	11		2.11	6
	9	11		2.11	6
	4.1	5		2.11	6
3. Resonanzfrequenz	4.3	7	7. Resonanzfrequenz	2.16	7
	4.3	7		2.15	7
	4.3	7		2.16	7
	4.3	7		2.15	7

Tabelle 1.3: Frequenzmessungen

Auswertung

Aus Diesen Messungen wurde über $f = \frac{n}{\Delta t}$ dann die Frequenzen bestimmt und anschließend gemittelt. Die gesamte Unsicherheit auf die Frequenz wurde dann über

$$\sigma_{\text{ges}} = \sqrt{\sigma_{\bar{f}}^2 + \sigma_{\Delta}^2}$$

bestimmt. Wobei $\sigma_{\bar{f}}$ die Abweichung auf den Mittelwert und σ_{Δ} der nach Gauss fortgepflanzte Fehler auf die Ableseungenauigkeit ist.

Zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft wurden die verschiedenen Resonanzfrequenzen f_N über N aufgetragen. Somit kann aus

$$f_N = \frac{v}{2L}N + f_0$$

über die Steigung der Geraden die Schallgeschwindigkeit v bestimmt werden.

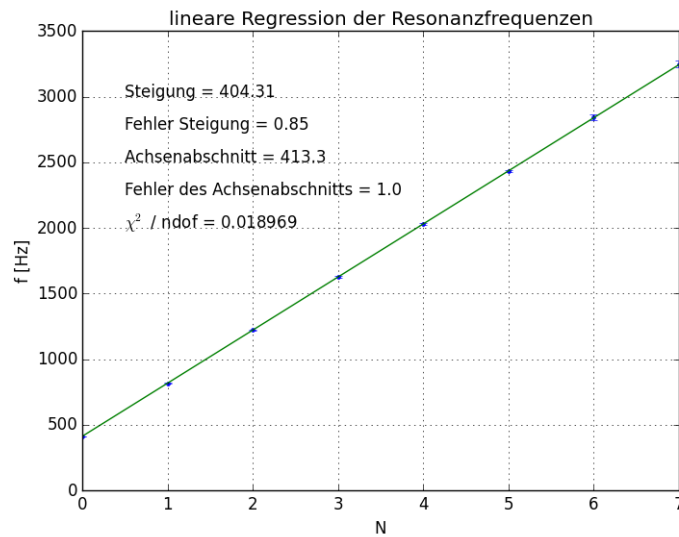


Abbildung 1.6: Regression der Resonanzfrequenzen über N

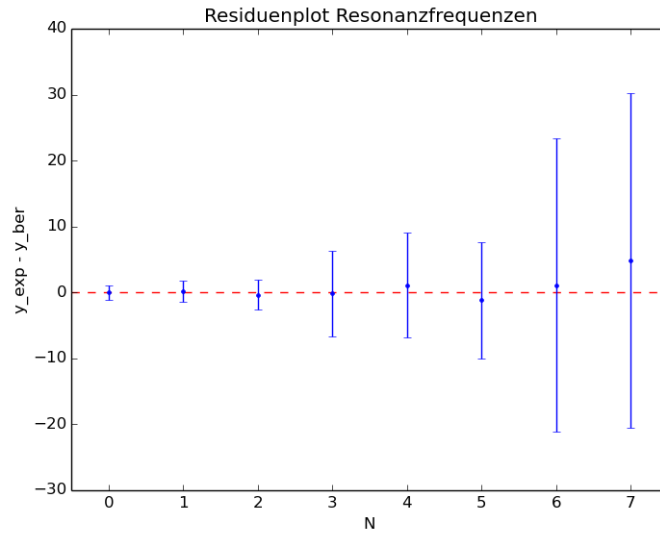


Abbildung 1.7: Residuen zu den Resonanzfrequenzen

Aus dieser Regression ergibt sich somit aus

$$v = 2aL \quad \sigma_v = \sqrt{(2L\sigma_a)^2 + (2a\sigma_L)^2}$$

ein Wert für die Schallgeschwindigkeit von

$$v = (341.24 \pm 0.72) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wobei a die Steigung der Regressionsgeraden und σ_a deren Ungenauigkeit ist.

Der kleine Wert für χ^2 erklärt sich durch die großen Ungenauigkeiten auf Δt , die von der Bingröße des Oszilloskops stammt. Die Residuen selbst sind allerdings statistisch um 0 verteilt und somit sind auch keine Systematischen Abweichungen festzustellen. Der Wert der Schallgeschwindigkeit ist allerdings trotzdem nicht innerhalb der Messungenauigkeit mit dem zuvor theoretisch bestimmten Wert von

$$v_{\text{theo}} = (344.58 \pm 0.017) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

vereinbar.

2 Elastizitätsmodule

2.1 Theorie

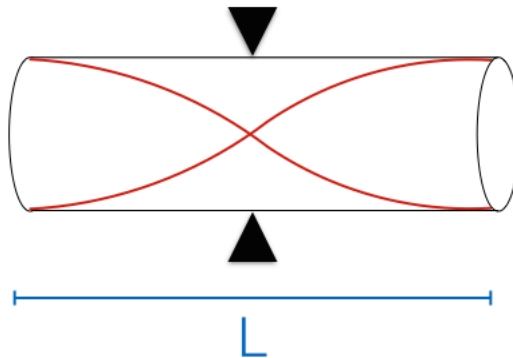


Abbildung 2.1: Skizze zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Der Elastizitätsmodul E ist eine materialabhängige Größe, welche definiert ist als

$$E = \frac{F}{A} \frac{L}{\Delta L},$$

wobei F die auf die Fläche A des betrachteten Körpers wirkende Kraft, L seine Länge in Richtung der Kraft und ΔL die Änderung dieser Länge aufgrund der Kraft sei. Über den Elastizitätsmodul und die Dichte ρ lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in einem Material ausdrücken:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Betrachtet man nun einen wie in Abbildung 2.1 dargestellten zylinderförmigen Stab der Länge L , welcher in seiner Mitte eingespannt ist und an einer der Kreisflächen angeschlagen wird, so wird dieser Stab zu einer Grundschwingung der Wellenlänge $\lambda = 2L$ angeregt. Ohne Dispersion gilt $v = \lambda f$, also

$$v = 2Lf$$

und somit

$$E = \rho 4L^2 f^2.$$

Für die Dichte ρ des Stabes gilt

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4}{\pi} \frac{m}{d^2 L},$$

wenn m seine Masse und $V = \frac{\pi}{4} d^2 L$ sein Volumen ist.
Damit ergibt sich schließlich

$$E = \frac{16}{\pi} \frac{m}{d^2} L f^2 \quad (2.1)$$

und die Bestimmung des Elastizitätsmoduls ist mithilfe einer Schwingung auf die Bestimmung einer Masse, eines Durchmessers, einer Länge und einer Frequenz zurückgeführt.

2.2 Versuchsaufbau



Abbildung 2.2: Foto des Aufbaus

Verwendete Geräte:

- 3 Metallstangen (Messing, Cu, Al)
- Mikrophon
- Stativ mit Klemme für die Stange
- Standfuß für das Mikrophon

- Digital-Oszilloskop
- Gummi-Hammer
- Waage
- Mikrometer-Schraube
- Maßband

Eine der drei Stangen wurde mittig im Stativ eingeklemmt, sodass die Klemme möglichst wenig Kontakt zur Stange hat. Dazu wurde ein kleiner Metall-Stab in die Klemme gelegt, sodass die Stange nur auf diesem Stab aufliegt. Das Mikrophon wurde gemäß Abbildung 2.2 so angebracht, dass der Sensor nah an einem Ende der Stange lag. Das vom Mikrophon aufgenommene Signal wurde mithilfe des Oszilloskops dargestellt.

2.3 Versuchsdurchführung

Um den Stab zur Schwingung anzuregen, wurde mit dem Gummi-Hammer auf das dem Mikrophon gegenüberliegende Ende des Stabes geschlagen, wobei darauf geachtet wurde, dass der Stab nicht in seiner Halterung verschoben wird und möglichst nur longitudinal schwingt. Das Oszilloskop war dabei eingeschaltet.

Wurde nun an der Darstellung des Oszilloskops sichtbar, dass der Einschwingvorgang der Stange abgeklungen ist, die Kurve also glatter und sinusförmig wurde, wurde die Messung gestoppt und ein Bild der Schwingung aufgezeichnet.

Für jeden der drei Stäbe wurden jeweils vier solcher Messungen aufgezeichnet. Anschließend wurde jeder Stab mithilfe der Waage einmal gewogen, die Stablänge wurde jeweils einmal mit dem Maßband bestimmt und der Stabdurchmesser wurde mit der Mikrometer-Schraube jeweils fünfmal an verschiedenen Stellen bestimmt.

2.4 Versuchsauswertung

2.4.1 Rohdaten

Die Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 zeigen die Messwerte für den mithilfe der Mikrometer-Schraube bestimmten Durchmesser der jeweiligen Stangen. Die Unsicherheit auf alle Messwerte für den Durchmesser ist die statistische Unsicherheit auf das Ablesen der Länge, welche sich aus der Annahme einer Gleichverteilung innerhalb der kleinsten ablesbaren Längeneinheit ergibt, welche hier $\Delta d_{min} = 0.0005\text{cm}$ war, also

$$\sigma_d = \frac{0.0005\text{cm}}{\sqrt{12}} = 0.000083\text{cm}.$$

Messung Nr.	d [cm]
1	1.1960
2	1.1970
3	1.1970
4	1.2040
5	1.1970

Tabelle 2.1: Durchmesser Messing-Stange

Messung Nr.	d [cm]
1	1.1970
2	1.1965
3	1.1965
4	1.1960
5	1.1970

Tabelle 2.2: Durchmesser Kupfer-Stange

Messung Nr.	d [cm]
1	1.1940
2	1.1945
3	1.1940
4	1.1940
5	1.1945

Tabelle 2.3: Durchmesser Aluminium-Stange

Die Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6 zeigen die aus den pro Stange jeweils vier Messreihen abgelesenen Zeitpunkte der Maxima, wobei n die Anzahl der Perioden zwischen diesen Maxima angibt. Ein Beispiel, wie diese Zeiten abgelesen wurden, zeigt Abbildung 2.3. Zur Bestimmung der Zeiten wurden im Oszilloskop zwei Achsen auf die betrachteten Maxima gelegt. Das Oszilloskop gibt dann die zugehörigen Zeiten aus.

Die Unsicherheit auf diese Zeiten wurde anhand der Genauigkeit der Positionierung der genannten Balken abgeschätzt. Diese konnten bei den verwendeten Einstellungen in Schritten von $\Delta t_{min} = 0.02\text{ms}$ verschoben werden, innerhalb welcher dann die tatsächlichen Maxima liegen. Nimmt man innerhalb dieses Bereichs eine gleichverteilte Wahrscheinlichkeit der Position des tatsächlichen Maximums an, so ergibt sich analog zur Bestimmung der Unsicherheit auf das Ablesen der Durchmesser eine Unsicherheit von

$$\sigma_t = \frac{0.02\text{ms}}{\sqrt{12}} \approx 6\mu\text{s},$$

welche für alle bestimmten Zeigen gleich ist.

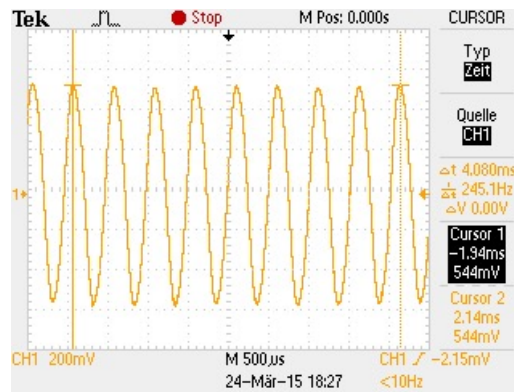


Abbildung 2.3: Beispiel eine Messung mit dem Oszilloskop

Messung Nr.	t_1 [ms]	t_2 [ms]	n
1	-2.12	1.68	5
2	-2.10	1.68	5
3	-2.10	1.68	5
4	-2.08	1.72	5

Tabelle 2.4: Rohdaten zur Frequenzbestimmung Messing

Messung Nr.	t_1 [ms]	t_2 [ms]	n
1	-1.88	2.08	6
2	-2.16	1.82	6
3	-1.82	2.14	6
4	-2.16	1.80	6

Tabelle 2.5: Rohdaten zur Frequenzbestimmung Kupfer

Messung Nr.	t_1 [ms]	t_2 [ms]	n
1	-1.94	2.14	8
2	-1.92	2.14	8
3	-1.94	2.14	8
4	-1.90	2.16	8

Tabelle 2.6: Rohdaten zur Frequenzbestimmung Aluminium

Tabelle 2.7 zeigt schließlich die gemessenen Massen m und Längen L der drei Stäbe. Die Massen wurden mithilfe einer Waage bestimmt, die das Messergebnis bis auf $\Delta m_{min} = 0.1\text{g}$ genau angibt. Unter Annahme einer Gleichverteilung innerhalb dieser kleinsten Einheit ergibt sich eine Unsicherheit von

$$\sigma_m = \frac{0.1\text{g}}{\sqrt{12}} \approx 0.03\text{g}.$$

Zur Bestimmung der Stablängen wurde ein Maßband verwendet, mit welchem sich diese bis auf $\Delta L_{min} = 1\text{mm}$ genau ablesen ließen. Wieder wird eine Gleichverteilung des wahren Wertes innerhalb dieser kleinsten Einheit angenommen und es ergibt sich eine statistische Unsicherheit auf die Länge von

$$\sigma_L = \frac{1\text{mm}}{\sqrt{12}} \approx 0.3\text{mm}.$$

Stange	m [g]	L [cm]
Messing	1233.3	129.9
Kupfer	1302.4	129.95
Aluminium	407.5	129.9

Tabelle 2.7: Bestimmte Massen und Längen der Stangen

2.4.2 Auswertung

Gemäß Gleichung 2.1 hängt der Elastizitätsmodul vom Stabdurchmesser d , seiner Länge L und der Frequenz f ab, mit welcher der Stab schwingt.

Massen und Längen der drei Stäbe sind in den Rohdaten angegeben. Der Durchmesser wurde für jeden Stab jeweils aus den gemessenen Werten gemittelt gemäß

$$\bar{d} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d_i,$$

wobei d_i ein Einzelmesswert des Durchmessers sei.

Mit den fünf Messwerten des Durchmessers lässt sich eine Unsicherheit auf den mitt-

leren Durchmesser \bar{d} gemäß

$$\tilde{\sigma}_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2}$$

bestimmen.

Die statistische Unsicherheit σ_d auf den abgelesenen Durchmesser für die Einzelmessung und die Unsicherheit $\tilde{\sigma}_{\bar{d}}$ auf den mittleren Durchmesser ergeben zusammen die gesamte Unsicherheit auf den Durchmesser:

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\sigma_d^2 + \tilde{\sigma}_{\bar{d}}^2}.$$

Mit dieser Methode ergeben sich die in Tabelle 2.8 angegebenen mittleren Durchmesser für die drei Stäbe:

Stange	$\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}}$ [mm]
Messing	11.982 ± 0.015
Kupfer	11.9660 ± 0.0024
Aluminium	11.9420 ± 0.0019

Tabelle 2.8: Mittlere Durchmesser der Stangen

Anhand der bestimmten Zeiten lässt sich für jede Messreihe eine Periodendauer T nach

$$T = \frac{t_2 - t_1}{n}$$

bestimmen.

Die aus der Unsicherheit auf das Ablesen folgende Unsicherheit auf die Periodendauer ist dann

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{2}}{n} \sigma_t$$

mit der in den Rohdaten angegebenen Unsicherheit σ_t .

Durch Mittelung der jeweils vier pro Stab bestimmten Periodendauern lässt sich analog zur Auswertung der Durchmesser eine mittlere Periodendauer \bar{T} mit einer zugehörigen Unsicherheit $\tilde{\sigma}_{\bar{T}}$ bestimmen, wobei für die gesamte Unsicherheit auf die mittlere Periode wieder

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\sigma_d^2 + \tilde{\sigma}_{\bar{d}}^2}$$

gilt. Die gesuchten Frequenzen ergeben sich nun nach

$$f = \frac{1}{\bar{T}} \quad \sigma_f = \frac{\sigma_{\bar{T}}}{\bar{T}^2},$$

wobei die Fehlerfortpflanzung nach Gauß angewandt wurde.

Tabelle 2.9 zeigt die so bestimmten Periodendauern und Frequenzen sowie die zugehörigen Unsicherheiten:

Stange	$\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}} [\mu\text{s}]$	$f \pm \sigma_f [\text{Hz}]$
Messing	758.0 ± 2.0	1319.3 ± 3.5
Kupfer	660.8 ± 1.6	1513.2 ± 3.7
Aluminium	508.8 ± 1.3	1965.6 ± 4.8

Tabelle 2.9: Bestimmte mittlere Periodendauern und Frequenzen

Mit diesen Werten lässt sich nun nach Gleichung 2.1 der Elastizitätsmodul E für alle drei Stäbe bestimmen. Für die Unsicherheit auf den so bestimmten Elastizitätsmodul gilt dann nach Gauß

$$\sigma_E = E \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{\sigma_L^2}{L^2} + 4 \frac{\sigma_f^2}{f^2} + 4 \frac{\sigma_d^2}{d^2}}.$$

Die resultierenden Werte sind in Tabelle 2.10 angegeben. Die zum Vergleich angegebenen Literatur werten sind von *chemie.de* übernommen und gelten für eine Temperatur von 20°C.

Stange	$E \pm \sigma_E [\text{N/m}^2]$	$E_{lit} [\text{N/m}^2]$
Messing	$(9.891 \pm 0.058) \cdot 10^{10}$	$(7.8 \dots 12.3) \cdot 10^{10}$
Kupfer	$(13.785 \pm 0.067) \cdot 10^{10}$	$12.0 \cdot 10^{10}$
Aluminium	$(7.304 \pm 0.036) \cdot 10^{10}$	$7.0 \cdot 10^{10}$

Tabelle 2.10: Bestimmte Elastizitätsmodule

Die gemessenen Werte weichen offensichtlich von den Literaturwerten ab, sofern diese korrekt sind. Da jedoch bei einer annähernd gleichen Temperatur gemessen wurde, sollten die Literaturwerte zum Vergleich ausreichen. Einzig der Elastizitätsmodul für Messing liegt innerhalb des Literatur-Bereichs, da jedoch die genaue Legierung nicht bekannt ist, lässt sich keine Aussage über die Kompatibilität von Literaturwert und Messung machen.

Der Messwert für Aluminium weicht um mehr als 4% von Literaturwert ab. Eine noch deutlich größere Abweichung von fast 15% tritt bei Kupfer auf, für welches der gemessene Wert auch im Rahmen seiner Unsicherheit stark vom Literaturwert abweicht.

3 Untersuchung einer klassischen Gitarre

3.1 Theorie

Auf der Gitarre sind sechs unterschiedliche Saiten aufgespannt, auf welchen durch Anschlagen oder Zupfen stehende Wellen erzeugt werden, wobei beide Saitenenden bzw. die Enden des schwingenden Teils der Saite fest eingespannt sind. Für die dabei auftretenden Frequenzen gilt

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (3.1)$$

wobei L die Länge des schwingenden Teils der Saite, T die Saitenspannung und μ der Massebelag der Saite, also die Masse der Saite pro Längeneinheit sei. Wie diese Gleichung zeigt, treten neben der Grundschiwingung f_1 weitere Oberschwingungen auf, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind.

Ist die Gitarre gestimmt, so lassen sich gleiche Töne auf verschiedenen Saiten durch Greifen der Saite auf einem Bund, also Verkürzen der schwingenden Saitenlänge, erzeugen. Verstimmt man nun eine Saite leicht, lässt sich so eine Schwebung als Überlagerung zweier Schallwellen unterschiedlicher Frequenzen erzeugen. Schwingt eine Saite mit der Grundfrequenz f_a und die andere mit der Frequenz $f_b < f_a$, so sind zwei resultierende Frequenzen im Schalldruck zu beobachten: Eine Grundschiwingung der Frequenz

$$f_{res} = \frac{f_a + f_b}{2} \quad (3.2)$$

sowie eine Schwebungsfrequenz

$$f_{schw} = \frac{f_a - f_b}{2}, \quad (3.3)$$

mit welcher die Grundschiwingung modelliert wird. Wählt man dabei $f_b \approx f_a$, also nur eine kleine Frequenzdifferenz, so ist der Unterschied zwischen Grund- und Schwebungsfrequenz besonders deutlich.

3.2 Beobachtung der Schwebung

Im folgenden Versuch soll die oben beschriebene Schwebung mithilfe der Gitarre erzeugt und quantitativ untersucht werden.

3.2.1 Versuchsaufbau

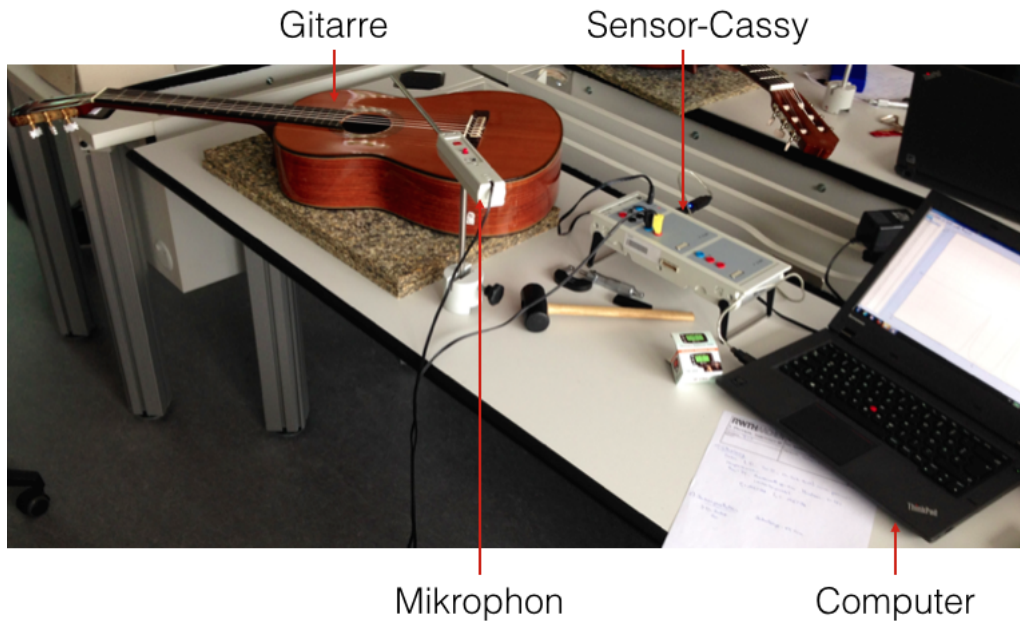


Abbildung 3.1: Versuchsaufbau zur Untersuchung der Gitarre

Verwendete Geräte:

- Klassische Gitarre
- Mikrophon
- Stativ für das Mikrophon
- Stimmgerät
- Sensor-Cassy
- Computer zur Auswertung mit dem Sensor-Cassy

In diesem wie in den folgenden Versuchen wurde die Gitarre auf einen Tisch gelegt und das Mikrophon mithilfe des Stativs knapp über die Saiten gestellt, wie es in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Das Mikrophon war an den Spannungseingang des Sensor-Cassy angeschlossen, welches vom Computer gesteuert und ausgewertet wurde.

3.2.2 Versuchsdurchführung

Zunächst wurden alle sechs Saiten der Gitarre mit dem Stimmgerät gestimmt. Um eine Schwebung zu erzeugen, wurde nun die D-Saite leicht entspannt, sodass beim Anschlagen ein etwas tieferer Ton erzeugt wird als zuvor.

Nun wurde die A-Saite im fünften Bund gegriffen, wo auch ein D erzeugt wird, und A- und D-Saite wurden mit zwei Fingern möglichst gleichzeitig gezupft. Unmittelbar nach dem Zupfen wurde die Messung mit *CassyLab* gestartet und somit über das Mikrophon der Schalldruck aufgezeichnet. Dabei wurde ein Messintervall von $\Delta t = 1\text{ms}$ gewählt und über eine Dauer von 16s gemessen, was der maximalen Anzahl von 16000 Datenpunkten entspricht, um später bei der Fourier-Analyse bei der größtmöglichen Messdauer ein möglichst genaues Ergebnis zu erzielen.

3.2.3 Auswertung

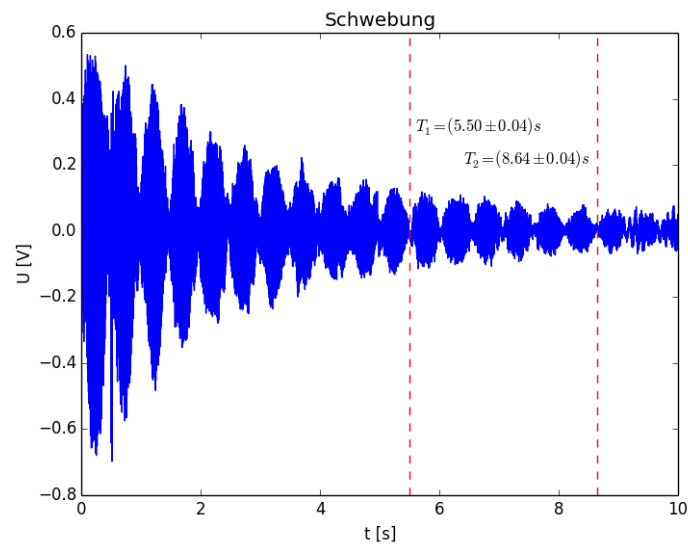


Abbildung 3.2: Gemessene Schwebung

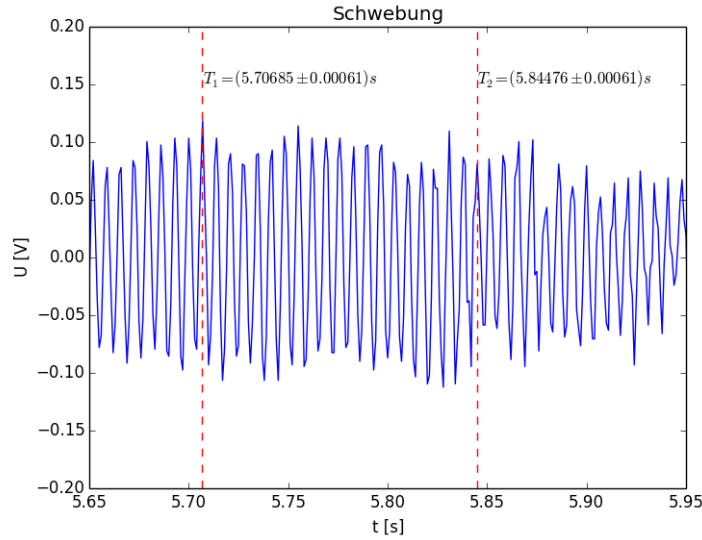


Abbildung 3.3: Vergrößerter Ausschnitt aus der gemessenen Schwebung

Abbildung 3.2 zeigt die gemessene Schwebung, welche deutlich an der sinusförmigen Modulation der Amplituden zu erkennen ist. Anhand der Abbildung lässt sich die Schwebungsfrequenz ablesen, indem man wie dargestellt zwei Zeitpunkte minimaler Amplitude sucht und deren Differenz durch die Anzahl n der dazwischenliegenden Perioden dividiert. Wie in Abbildung 3.2 markiert ergibt sich beispielsweise

$$t_1 = (5.50 \pm 0.04)s; \quad t_2 = (8.64 \pm 0.04)s; \quad n = 3.$$

Die Unsicherheit auf die abgelesenen Zeiten wurde hierbei durch Abschätzung des Bereichs der möglichen wahren Zeitpunkte der minimalen Amplituden bestimmt unter Annahme einer Gleichverteilung innerhalb dieses Bereichs.

Es folgt analog zum Versuch zum Elastizitätsmodul:

$$T_{schw} = (1.047 \pm 0.057)s \quad \Rightarrow \quad f_{schw} = (0.96 \pm 0.05)\text{Hz}.$$

Abbildung 3.3 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus dem Schwebungs-Plot. Auch hier wurden zwei Zeitpunkte abgelesen:

$$t_1 = (5.70685 \pm 0.04)s; \quad t_2 = (5.84476 \pm 0.00061)s; \quad n = 20.$$

Die Unsicherheit auf diese Zeiten wurde wie zuvor abgeschätzt. Da nun die Maxima allerdings deutlich besser zu erkennen sind, ist die Unsicherheit deutlich kleiner als zuvor.

Damit ergibt sich eine Grundfrequenz von

$$f_{res} = (145.01 \pm 0.27)\text{Hz}.$$

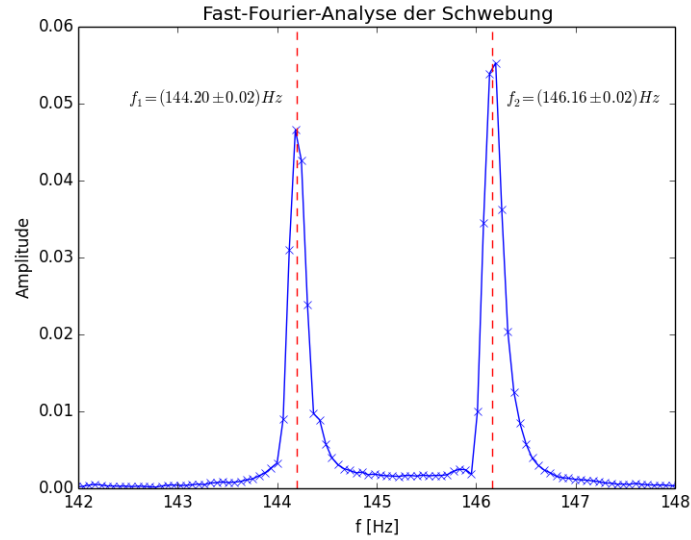


Abbildung 3.4: Fast-Fourier-Analyse der Schwebung

Neben dem Ablesen der Frequenzen kann auch eine Fourier-Analyse der Schwebung durchgeführt werden, welche allerdings nicht die Frequenzen f_{res} und f_{schw} liefert, sondern die beiden Frequenzen, mit denen die Saiten jeweils schwingen. Abbildung 3.4 zeigt diese Fourier-Analyse. Es sind deutlich zwei Peaks zu erkennen, anhand welcher die jeweilige Frequenz abgelesen wurde. Die zugehörigen Unsicherheiten wurden über den Abstand zwischen zwei Frequenzpunkten, also die kleinste Auflösung der Analyse abgeschätzt, wobei innerhalb dieses Bereichs eine Gleichverteilung angenommen wurde. Da die kleinste Frequenzauflösung bei $\Delta f_{min} = 0.061\text{Hz}$ liegt, ergibt sich so eine Unsicherheit von

$$\sigma_f = \frac{0.061\text{Hz}}{\sqrt{12}} \approx 0.02\text{Hz}.$$

Die abgelesenen Werte sind

$$f_b = (144.20 \pm 0.02)\text{Hz} \quad \text{und} \quad f_a = (146.16 \pm 0.02)\text{Hz}.$$

Damit lässt sich nun die theoretische Schwebungsfrequenz sowie die theoretische Grundfrequenz nach den Gleichungen 3.3 und 3.2 bestimmen, wobei für die Unsicherheit auf beide Werte nach Gauß

$$\sigma_{f_{schw}} = \sigma_{f_{res}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_f$$

gilt.

Damit folgt nun

$$f_{schw}^{theo} = (0.98 \pm 0.02)\text{Hz} \quad f_{res}^{theo} = (145.18 \pm 0.02)\text{Hz}.$$

Diese Werte stimmen im Rahmen ihrer Ungenauigkeiten mit den durch Ablesen bestimmten Werten überein.

3.3 Untersuchung der Materialeigenschaften der Saite

Im Folgenden soll das Verhältnis von Spannkraft T und Massebelag μ zweier Gitarrensaiten untersucht werden.

3.3.1 Versuchsaufbau und -durchführung

Der Aufbau dieses Versuchs ist gleich dem Aufbau zur Untersuchung der Schwebung. Auch die Durchführung ist ähnlich: Nun wird für die Untersuchung einer Saite diese in verschiedenen Bünden gegriffen und angeschlagen, um dann den Schalldruck aufzuzeichnen. Untersucht werden im Folgenden die D-Saite und die G-Saite der Gitarre, welche direkt nebeneinander liegen. Für beide Saiten wurden jeweils zehn Schwingungen aufgezeichnet, die erste davon ohne Greifen der Saite, also 'leer', die weiteren bei gegriffener Saite im ersten bis zum neunten Bund.

Nach der Aufnahme der Schwingungen wurde die Länge der Saiten bei Greifen im jeweiligen Bund durch Messen des Abstandes vom Steg zum jeweiligen Bund bestimmt.

3.3.2 Auswertung

Tabelle 3.1 zeigt die gemessenen Frequenzen der Schwingungen der D- und G-Saite für verschiedene Saitenlängen.

Die Frequenzen wurden dabei durch Ablesen aus dem mit *Cassylab* erstellten Fourier-Spektrum bestimmt. Dazu wurde der erste deutliche Peak gesucht (es treten aufgrund der Oberschwingungen weitere Peaks bei höheren Frequenzen auf) und dann abgeschätzt, wo die Amplitude liegt. Die Unsicherheit auf die so bestimmten Frequenzen wurde wie zuvor anhand der kleinsten Auflösung der Fourier-Analyse unter Annahme einer Gleichverteilung abgeschätzt und ergab sich wie zuvor zu

$$\sigma_f = 0.02\text{Hz.}$$

Die Unsicherheit auf die Längenmessung wurde auch über die Ablesegenauigkeit auf dem Maßband zu

$$\sigma_L = 0.1\text{cm}$$

für alle Längen abgeschätzt. Hier wird jedoch keine Gleichverteilung innerhalb des Wertes angenommen, da der Fehler der Messung aufgrund der Positionierung des Maßbandes auf den Bundstäbchen vermutlich etwas größer ist.

Bund	L [cm]	f_1 [Hz] (D-Saite)	f_1 [Hz] (G-Saite)
0	65.1	146.11	194.79
1	61.7	152.82	205.94
2	58.3	163.97	221.26
3	54.9	173.69	233.68
4	51.7	183.62	247.30
5	48.9	193.90	261.32
6	46.3	204.70	276.69
7	43.5	220.77	292.60
8	41.2	233.53	310.53
9	38.9	247.04	329.65

Tabelle 3.1: Gemessene Frequenzen für verschiedene Saiten und Saitenlängen

Bei bekannter Saitenlänge L und Frequenz f lässt sich nun nach Gleichung 3.1 eine lineare Regression der Form

$$\frac{1}{2L} = a \cdot f + b$$

durchführen, wobei das gesuchte Verhältnis von Spannkraft T und Massebelag μ in der Steigung a der Geraden auftaucht:

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{T}}.$$

Die Größe $\frac{1}{2L}$ wurde dabei mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Längen bestimmt, wobei die zugehörige Unsicherheit über die Gauß'sche Fortpflanzung berechnet wurde:

$$\sigma_{\frac{1}{2L}} = \frac{\sigma_L}{2L^2}.$$

Die Abbildungen 3.5 und 3.6 zeigen beide linearen Regressionen und die zugehörigen Residuenverteilungen. Für beide Regressionen ist die Testgröße χ^2 pro Freiheitsgrad eindeutig zu groß. Die Residuenverteilungen zeigen den Grund dafür: Die Daten weichen teilweise stark von der gefitteten Geraden ab. Auch scheinen die Residuen nicht statistisch um den Wert 0 verteilt zu sein, sondern systematisch darüber und darunter zu liegen, was auf Fehler in der Messung oder der Auswertung hindeutet.

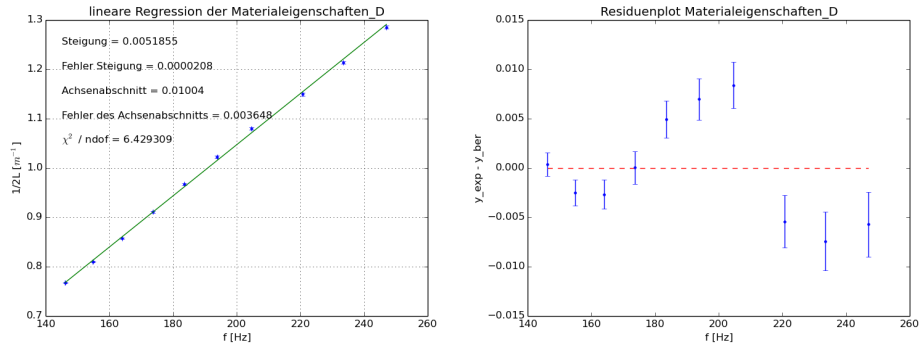


Abbildung 3.5: Lineare Regression (D-Saite) und zugehörige Residuen

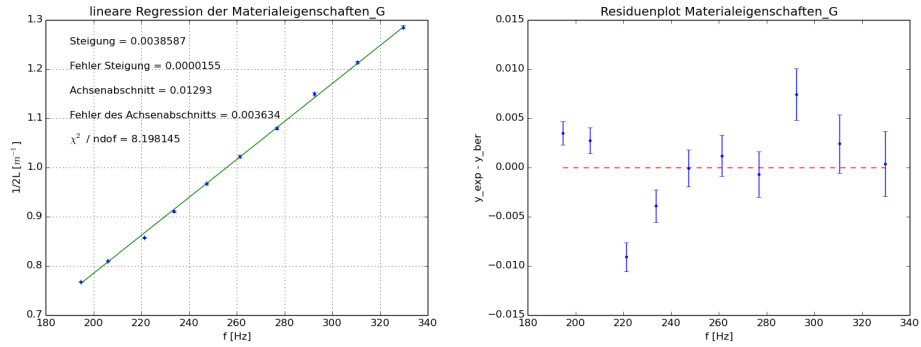


Abbildung 3.6: Lineare Regression (G-Saite) und zugehörige Residuen

Die sich ergebenden Steigungen sind

$$a_D = (5.186 \pm 0.021) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad a_G = (3.859 \pm 0.016) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}.$$

Das Inverse dieser Steigung ist nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf der Saite:

$$v = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{mit} \quad \sigma_v = \frac{\sigma_a}{a^2}.$$

Mit den Messwerten ergibt sich:

$$v_D = (192.83 \pm 0.78) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad v_G = (259.1 \pm 1.1) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Für beide Saiten wird vom Hersteller angegeben:

Saite	$\mu \left[\frac{\text{g}}{\text{m}} \right]$	$T [\text{N}]$
D	1.9910	70.76
G	0.8663	54.88

Damit ergibt sich für beide Saiten mit $v = \sqrt{T/\mu}$ mit den Herstellerangaben:

$$v_D^{herst} = 188.52 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad a_G^{herst} = 251.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der Vergleich zeigt, dass beide experimentell bestimmten Werte zwar von der Größenordnung der Herstellerangaben sind, jedoch im Rahmen ihrer jeweiligen Unsicherheiten beide nicht kompatibel mit den entsprechenden Herstellerangaben sind. Dies ist sicherlich auf die nicht besonders guten Regressionen zurückzuführen und somit auf die in den Regressionen erkennbare Systematik.

3.4 Qualitative Untersuchung der Obertöne

Im Folgenden soll qualitativ der Unterschied der Obertöne bei verschiedenen Erzeugungen des gleichen Tons auf der Gitarre untersucht werden.

3.4.1 Versuchsaufbau und -durchführung

Aufbau und Durchführung wurden aus dem Vorversuch übernommen. Nun wurde jedoch ein Ton auf verschiedene Weisen erzeugt. Der untersuchte Ton ist die erste Oktave des tiefsten Es auf der Gitarre. Dazu wurde jeweils einmal der Schalldruck bei Griff des zwölften Bundes auf der tiefen E-Saite, bei Griff des siebten Bundes auf der A-Saite, bei Griff des zweiten Bundes auf der D-Saite und bei Auflegen des Fingers auf die Mitte der E-Saite (*Flagolett*) aufgenommen.

3.4.2 Auswertung

Die Frequenzspektren der vier Messungen sind in den Abbildungen 3.7, 3.8, 3.9 und 3.10 zu sehen.

Der deutlichste Unterschied zeigt sich in den Spektren zum Griff im zwölften Bund der E-Saite und zum Flagolett. Während beim normalen Griff eindeutig mehrere Peaks vorliegen, ist die Kurve beim Flagolett deutlich glatter. Grund dafür ist, dass beim auflegen des Fingers auf die Saitenmitte im Idealfall nur der erste Oberton nicht unterdrückt wird. Im Frequenzspektrum sind zwar noch wenige andere Peaks zu sehen, das liegt jedoch vermutlich daran, dass das Auflegen des Fingers nicht perfekt war. Weiter fällt auf, dass die Peaks der verschiedenen Obertöne sich je nach Saite in ihrer Höhe deutlich unterscheiden. Auch dies ist zu erwarten, da die Frequenzen von der Beschaffenheit und Länge der Saite abhängen.

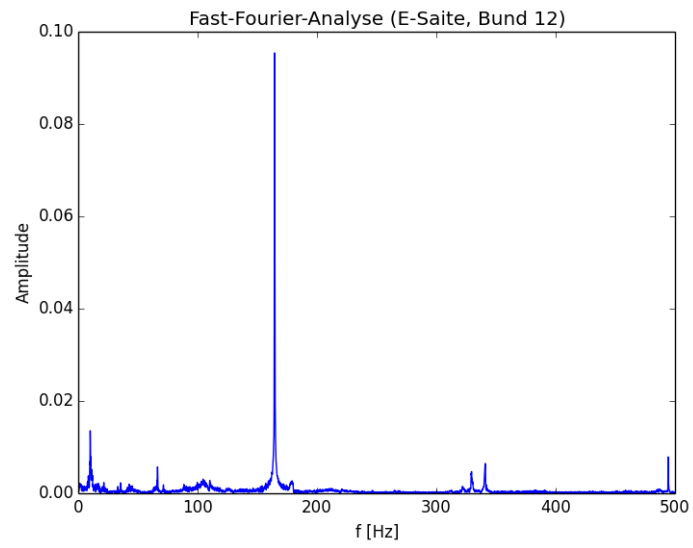


Abbildung 3.7: E-Saite, 12. Bund

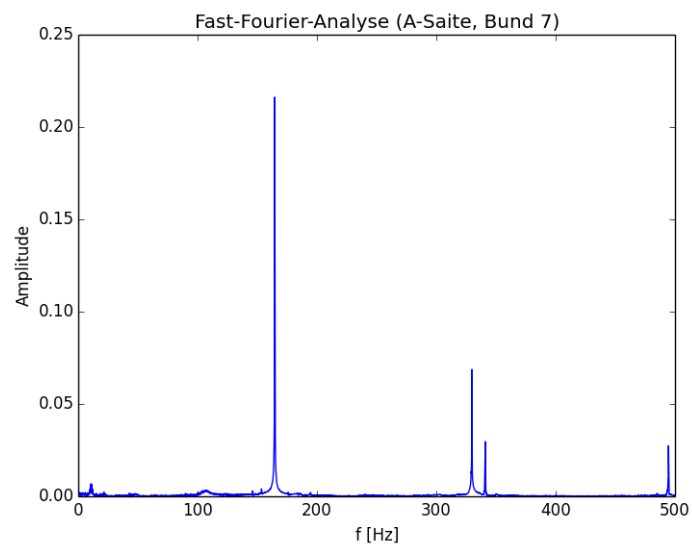


Abbildung 3.8: A-Saite, 7. Bund

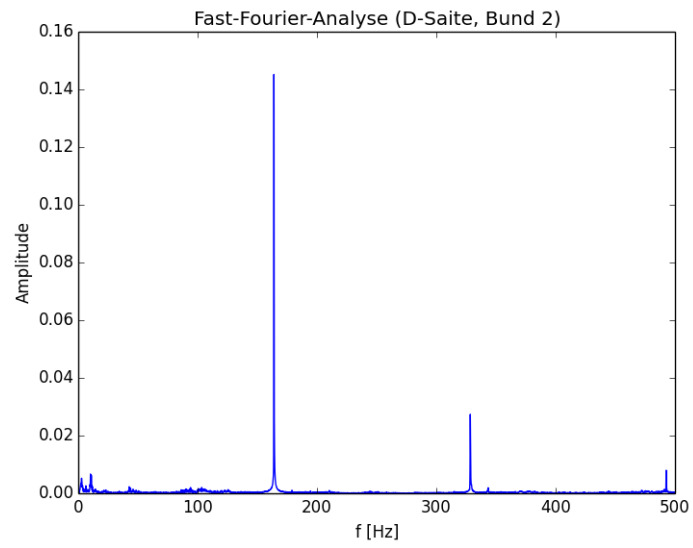


Abbildung 3.9: D-Saite, 2. Bund

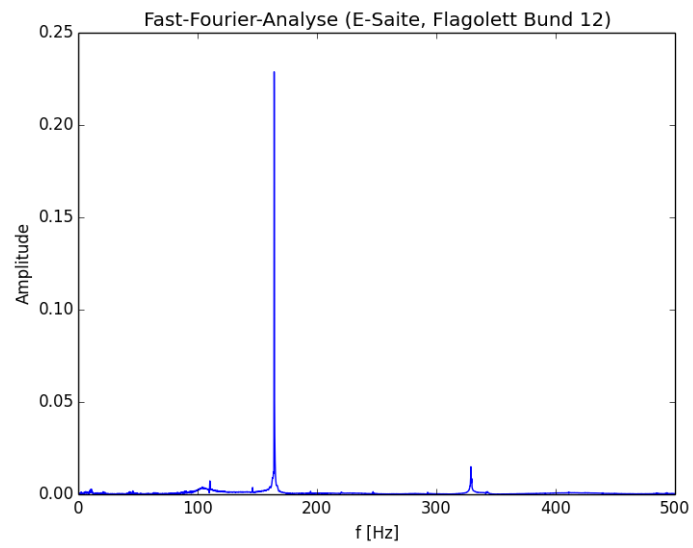


Abbildung 3.10: E-Saite, Flagolett 12. Bund

4 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass keine der Messungen wirklich genau war. Bei der Schallgeschwindigkeit traten Messreihen auf, die eindeutig vom erwarteten Wert abweichen. Da jedoch mehrere solcher Werte vorliegen, können diese nicht einfach aus der Auswertung entfernt werden.

Weiter stimmt kein Messwert für die Schallgeschwindigkeit in Luft mit dem erwarteten Wert überein und auch die Messwerte passen nicht zusammen. Gleiches gilt für die Untersuchung der Gitarre: Die berechneten Materialeigenschaften stimmen nicht mit den Herstellerangaben überein.

Eine Erklärung für diese Abweichungen kann die allgemeine Durchführung sein: Vermutlich ist die Messung mit Mikrofonen in einer Umgebung, in der gleichzeitig andere Gruppen messen, nicht besonders präzise.