Thermodynamik
Rüchardt-Methode

Gruppe 7

Tim Hesse 369738
Dennis Linde 354809

21. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Versuchsziel

In dem Versuch wird der Adiabatenkoeffizent κ von Luft bestimmt. Dies geschieht gemäss der Rüchhart-Methode, welche eine gedämpfte Schwingung betrachtet, wobei die quadrierte Eigenkreisfrequenz proportional zu κ ist.

2 Versuchsbeschreibung

Der Aufbau besteht aus einem Marionettenglas auf das eine Glasröhre aufgesteckt wurde, wobei ein Gummidichtung zur Abdichtung der Schnittstelle dient. An eine zweite öffnug des Marionettenglases werden über PVC Schläuche ein Differenzialmanometer und eine Handpumpe angeschlossen. Daraufhin wird eine Stahlkugel in das Glasrohr eingeführt, die ca. mit dem Glasrohr abschliesst. Mit der Handpumpe wird Luft in den Aufbau gepumpt, sodass der Druck die Stahlkugel in der Glaskugel hält.

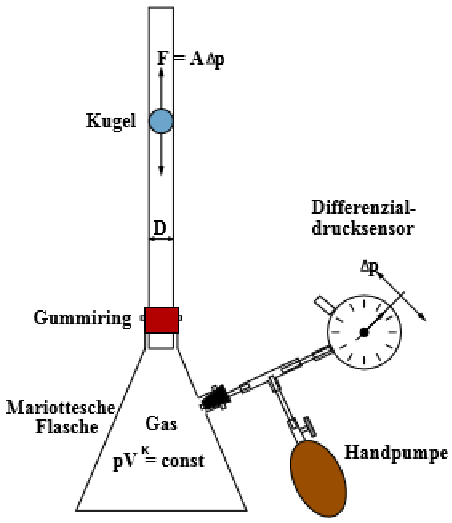

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Abbildung 2: Aufbau kleines Marionettenglas

3 Theorie

Der Druck im Versuchsaufbau ist gegeben durch:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}$$

Wird die Stahlkugel ausgelenkt wirkt eine Rückstellkraft Adp, sowie eine Reibungskraft αv, also proportional zur Geschwindigkeit. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz lässt sich folgende Differenzialgleichung herleiten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot m = A \cdot dp - \alpha \cdot \frac{dx}{dt}$$

Da die Ausdehnung und Kompression des Gases bei der Schwingung sehr schnell von statten geht und es zu keinen hohen Temperaturdifferenzen kommt, kann der Vorgang adiabatisch betrachtet werden. Dadurch lässt sich die Differenzialgleichung, durch einsetzen des totalen Differenzials der Poissongleichung, auf folgende Form bringen, wobei x der Auslenkung der Kugel entspricht:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot x = 0 \qquad (\delta := \frac{\alpha}{2m} \quad \omega_0^2 := \frac{p\kappa A^2}{mV})$$

Bei angemessen kleiner Dämpfung ($\delta < \omega_0$), beschreibt die Lösung eine gedämpfte Schwingung mit der Kreisfrequensz $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$.Aus der Gleichung für die Eigenkreisfrequenz ω_0 ergibt sich für den Adiabatenkoeffizienten κ:

$$\kappa = \omega_0^2 \cdot \frac{mV}{pA^2} = (\omega^2 + \delta^2) \cdot \frac{mV}{pA^2}$$

ω_0 lässt sich über die durch das Differenzial Manometer gemessene Schwingung bestimmen.

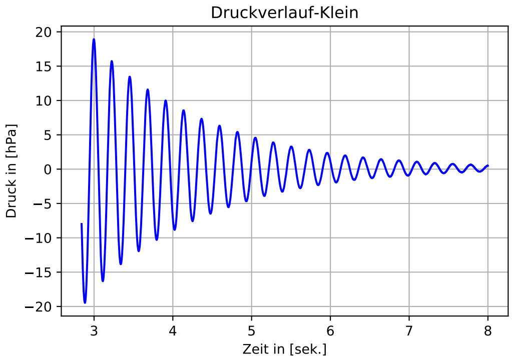

Abbildung 3: Schwingung $V = 0.00042227m^3$

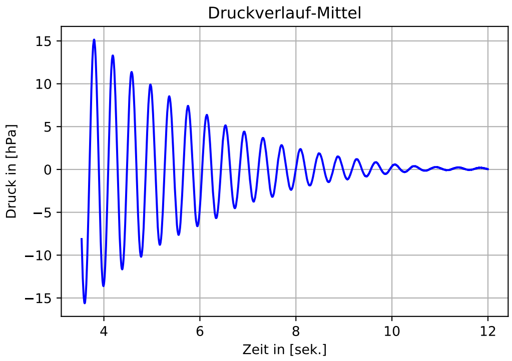

Abbildung 4: Schwingung $V = 0.00125497m^3$

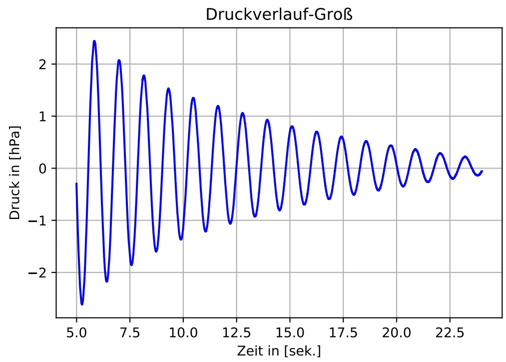

Abbildung 5: Schwingung $V = 0.01160877m^3$

4 Durchführung

Zunächst wurden die Masse der Stahlkugel, die Querschnitsfläche des Glasrohrs und das Volumen der angeschlossenen PVC Schläuche ermittelt. Der Athmosphärendruck wurde von der Website der Wetterstation Hörn entnommen. Dann wurden drei Markierungen an dem Glasrohr mit jeweils 10cm Abstand angebracht über die Handpumpe wurde die Stahlkugel auf die Höhe der Markierungen gebracht. Nach starten der Messung wurde die Kugel um 10cm ausgelenkt und die Schwingung aufgezeichnet. Es wurden 4 Messreihen für 3 verschiedene Höhen für 3 verschiedene Marionettengläser durchgeführt. Also insgesamt 36 Messreihen. Die folgenden Marionettengläser und Einstellungen des CAssY wurden verwendet:

Gefäss Grösse	Volumen	σ_V	Messbereich	Messintervall	Anzahl an Messungen
Kleines Gefäss	0.0003135 m^3	$0.5625 \cdot 10^{-}6\text{m}^3$	[-70,70] hPa	1 ms	16000
Mittleres Gefäss	0.001146 m^3	$3.1415 \cdot 10^{-}6\text{m}^3$	[-70,70] hPa	2 ms	16000
Grosses Gefäss	0.0115 m^3	$7.0683 \cdot 10^{-}6\text{m}^3$	[-21,21] hPa	2 ms	16000

Nach den Messungen wurde eine zusätzliche Rauschmessung durchgeführt, bei der der Athmosphärendruck gegen Athmosphärendruck gemessen wurde. Danach wurden die Volumina des kleinen und des mittelgrossen Marionettenglases bestimmt, indem diese leer und ein mal mit Wasser gefüllt gewogen wurden. über die Gewichtszunahme und die Dichte von Wasser bei 18C wurden Volumen ermittelt.

5 Versuchsauswertung

5.1 Fehlerrechnung auf das Volumen

Wie in der Durchführung beschrieben haben wir die Volumina über die Dichte von Wasser gemessen. Da es kaum möglich war die Gefässe exakt mit Wasser zu befüllen und auch auf der Aussenseite trocken zu halten war diese Methode relativ unpräzise. Deshalb haben wir den Fehler eigenhändig und nicht über die Genauigkeit der Messegeräte abgeschätzt. Als Fehler haben wir für jedes Gefäss einen Zylinder mit der Höhe 1cm und dem Durchmesser der öffnung des Marionettenglases genommen. Da dieser Fehler relativ gross ist haben wir den kleineren Fehler auf die PVC Schläuche, sowie die Volumen der Folien innerhalb der Marionettengläser vernachlässigt. Auch die Höhe der Kugel im Glasrohr konnte relativ Präzise bestimmt werden sodass wir den dadurch resultierenden Fehler auf das Volumen vernachlässigt haben. Da die Kugel nicht exakt mit der Wand des Marionettenglases abschliesst entweicht Luft und dadurch verringert sich das Volumen kontinuierlich. Diese Volumenabnahme pro Sekunde $(3,31 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s})$ wurde jedoch der Einfachheit halber vernachlässigt.

5.2 Bestimmung der Frequenz

Wie bereits in der Theorie besprochen, hängt das zu bestimmende kappa in diesem Versuchsaufbau von der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ab. Zu aller erst bestimmten wir das Rauschen durch drei unabhängigen Rauschmessungen, welche gemittelt ein Rauschen von 0,073 hBar über dem Normaldruck ergaben. Dieser Wert wurde von allen unseren Messungen abgezogen, um vom Offset bereinigte Werte zu erhalten. Um daraufhin die Kreisfrequenz quantitativ zu bestimmen, benutzten wir eine selbstgeschriebene Peak-Funktion, welche uns die Hoch- und Tiefpunkte unserer Messungen bestimmt. Die Differenz dieser ergibt die Periodendauer, deren reziproker Wert faktorisiert mit 2 pi der Kreisfrequenz entspricht.
Die Fehler auf die einzelnen Frequenzen ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$$

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma_t \cdot 2\pi}{T_i^2}$$

Der Fehler auf die Periodendauer kommt durch den Ablesefehler auf die Zeit zustande:

$$\sigma_T = \frac{10^{-5}s}{\sqrt{12}}$$

Anschließend werden die Kreisfrequenzen gewichtet gemittelt und die Standardabweichung der Kreisfrequenz auf die Messreihe bestimmt. Durch mehrere Messreihen des selben Versuchs wird die Standardabweichung nochmals verringert und somit der Wert genauer.

$$\mu_{gewichtet} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N} 1/\sigma_i^2}$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} 1/\sigma_i^2}$$

5.3 Bestimmung von der Dämpfungskonstante

Zum einen lässt sich δ über das Verhältnis der Amplituden bestimmen. Um die Rechnung zu vereinfachen, haben wir den Nullwert auf den Normaldruck normiert.
Aus folgender Relation folgt der Ausdruck mit dem sich die mittlere Dämpfungskonstante bestimmen lässt:

$$\delta_i = \frac{ln(\frac{A_i}{A_{i+1}})}{T_i}$$

Der Fehler ergibt sich aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_{\delta_n} = \frac{\sqrt{(\frac{\sigma_{U_n}}{U_n})^2 + (\frac{\sigma_{U_{n+1}}}{U_{n+1}})^2 + (\delta_n \cdot \sigma_{T_n})^2}}{T_n}$$

$Versuch$	Höhe	ω	σ_ω	δ	σ_δ	ω_0	σ_{ω_0}
Klenes Gefäss	15 cm	29.113 s^{-1}	0.0099 s^{-1}	0.408 s^{-1}	0.0119 s^{-1}	29.117s^{-1}	0.0705s^{-1}
	25 cm	28.327 s^{-1}	0.0123 s^{-1}	0.359 s^{-1}	0.0153 s^{-1}	28.328s^{-1}	0.0847s^{-1}
	35 cm	25.275 s^{-1}	0.0099 s^{-1}	0.351 s^{-1}	0.0134 s^{-1}	25.628s^{-1}	0.0763s^{-1}
Mittleres Gefäss	15 cm	15.516 s^{-1}	0.006 s^{-1}	0.198 s^{-1}	0.0067 s^{-1}	15.606s^{-1}	0.0552s^{-1}
	25 cm	16.246 s^{-1}	0.007 s^{-1}	0.234 s^{-1}	0.0075 s^{-1}	16.247s^{-1}	0.0592s^{-1}
	35 cm	14.069 s^{-1}	0.006 s^{-1}	0.217 s^{-1}	0.0073 s^{-1}	14.611s^{-1}	0.056s^{-1}
Grosses Gefäss	15 cm	4.634 s^{-1}	0.0006 s^{-1}	0.074 s^{-1}	0.0007 s^{-1}	4.714s^{-1}	0.0182s^{-1}
	25 cm	5.463 s^{-1}	0.0008 s^{-1}	0.08 s^{-1}	0.0008 s^{-1}	5.463s^{-1}	0.0204s^{-1}
	35 cm	5.443 s^{-1}	0.0007 s^{-1}	0.063 s^{-1}	0.0007 s^{-1}	5.443s^{-1}	0.0196s^{-1}

5.4 Lineare Regression (Bestimmung von κ)

Mit der obigen Tabelle lässt sich ein linearer Zusammenhang zwischen $\frac{1}{V}$ und ω_0^2 der folgenden Art schaffen:

$$\omega_0^2 = \kappa \cdot (\frac{p_0 A^2}{m} + gA) \cdot \frac{1}{V}$$

Bei dieser Regression ist der y-Achsenabschnitt auf 0 gesetzt und die Steigung ergibt sich durch:

$$a = \kappa \cdot (\frac{p_0 A^2}{m} + gA)$$

Durch die Least-Square-Methode lässt sich die beste Gerade mit der Steigung $a = 0.303$ fitten.

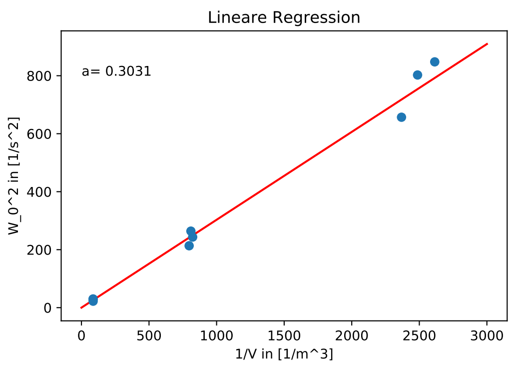

Abbildung 6:

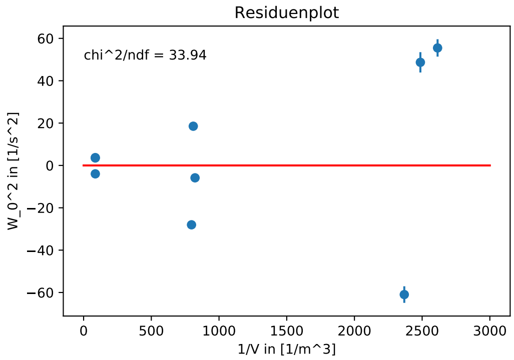

Abbildung 7:

Da anscheinend unser Fehler auf ω_0 zu klein geschätzt worden ist, beträgt das χ^2 pro Freiheitsgrad 33.94. Dies lässt sich damit begründen, dass wir nur die statistischen Fehler auf Delta berücksichtigt haben. Der systematische Fehler auf die sich stets ändernde Reibung ist leider nicht zugänglich, aber eindeutig dominant. Aufgrund von dessen, haben wir den Fehler auf ω_0 auf das 6-fache des vorherigen Wertes geschätzt, sodass sich das χ^2 pro Freiheitsgrad auf 0.94 verringert hat.

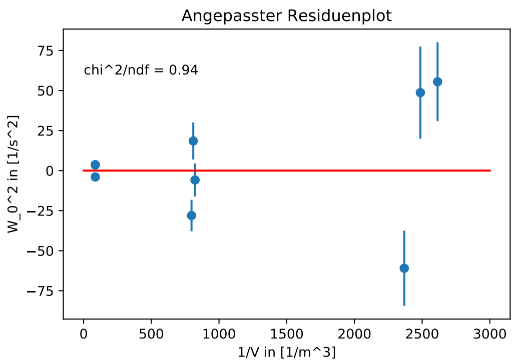

Abbildung 8:

Da wir die Steigung der Regression kennen, lässt sich jetzt unser Kappa mit seinem Fehler folgenderman ermitteln:

$$\kappa = \frac{a}{\frac{p_0 A^2}{m} + gA}$$

$$\sigma_\kappa = a \cdot \sqrt{\frac{(\frac{2p_0 A}{m} + g)^2 \sigma_A^2 + (\frac{p_0 A^2}{m^2})\sigma_m^2}{(\frac{p_0 A^2}{m} + gA)^2}}$$

Wobei der Fehler auf die Querschnittsfläche sich durch die Ablese-Ungenauigkeit des Durchmessers ergibt:

$$\sigma_A = 0.5 \cdot \pi d \sigma_d \qquad mit \quad \sigma_d = \frac{0.00001}{\sqrt{12}} m$$

und der Fehler der Masse durch die Digitalisierung der elektronischen Waage zustande kommt:

$$\sigma_m = \frac{0.0001}{\sqrt{12}} kg$$

Endgütig erhalten wir für Kappa folgenden Wert:

$$\kappa = 1.26 \pm 0.0022$$

6 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Experiment trotz des leicht unterschiedlichem κ eine sehr gute Näherung zum tatsächlichem Adiabaten-Koeffizient liefert. Die Ungenauigkeit des Wertes, lässt sich auf 2 grundlegende Sachen zurückführen. Zum einem wurde eine idealisierte Annahme eines adiabaten Prozesses angenommen. Diese Annahme nähert zwar die Lösung gut an, ist allerdings in der Praxis nie 100 prozentig gegeben. Zum anderem stellt der Versuchsaufbau ebenfalls keine idealen Vorraussetzungen dar. Aufgrund von mehreren weiteren Einflüssen (z.B. die Reibung der Kugel mit dem Glasrohr) sind unsere Messdaten stets systematischen Fluktationen ausgesetzt, welche das Messergebnis unkontrolliert verschieben.