

---

# Elektrizitätslehre - Gedämpfter LC - Schwingkreis

Gruppe 2

Adelind Elshani

Olexiy Fedorets

9. Januar 2018

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2 Aufbau und Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>3 Auswertung</b>	<b>3</b>
3.1 Bauteile . . . . .	3
3.2 Rohdaten . . . . .	3
3.3 Frequenzbestimmung . . . . .	4
3.4 Bestimmung der Dämpfungskonstanten . . . . .	5
3.4.1 $\delta$ -Bestimmung mit dem Oszilloskop . . . . .	6
3.5 Charakterisierung der Spule . . . . .	7
3.6 Charakterisierung des Kondensators . . . . .	8
3.7 Aperiodischer Grenzfall . . . . .	11
<b>4 Fazit</b>	<b>11</b>

## 1 Grundlagen

An einer Gleichspannung  $U_0$  wird eine Serienschaltung mit einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator angeschlossen. Nach der Maschenregel ergibt sich die Gleichung

$$\frac{U_0}{L} = \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q \quad (1)$$

mit

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2)$$

wobei  $\delta$  die Dämpfungskonstante und  $\omega_0$  die Kreisfrequenz beschreibt. Aus dieser homogenen Differentialgleichung ergibt sich die Lösung für die Anfangsbedingungen  $Q_0 = CU_0$  und  $I(0) = 0$ :

$$Q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}. \quad (3)$$

mit  $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ . Daraus erhält man drei Fälle, die man betrachten muss.

**Kriechfall** ( $\delta > \omega_0$ ) Beim Kriechfall ist die Dämpfung so stark, dass Spannung und Strom nicht Schwingen sondern asymptotisch gegen Null gehen.

$$Q(t) = CU_0 - CU_0 \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{\lambda_1 t} + CU_0 \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

**Schwingfall** ( $\delta < \omega_0$ ) Bei kleiner Dämpfung findet ein Einschwingvorgang statt. Die Energie pendelt zwischen Kondensator und Spule.

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\delta t}(\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t))) \quad (5)$$

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\delta t}(\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t))) \quad (6)$$

$$I(t) = CU_0 \cdot e^{-\delta t}(\omega + \frac{\delta^2}{\omega}) \sin(\omega t) \quad (7)$$

**Aperiodischer Grenzfall** ( $\delta = \omega_0$ ) Beim Aperiodischen Grenzfall ist die Dämpfung gerade genau so groß, dass noch keine Schwingung stattfindet aber der Kondensator in kurzer entladen wird. Spannung und Strom erreichen in kurzer Zeit denn Nullwert.

$$Q(t) = CU_0 \cdot (1 - e^{-\delta t}(1 + \delta t)) \quad (8)$$

In Abbildung 1 sind die drei Fälle zu sehen.

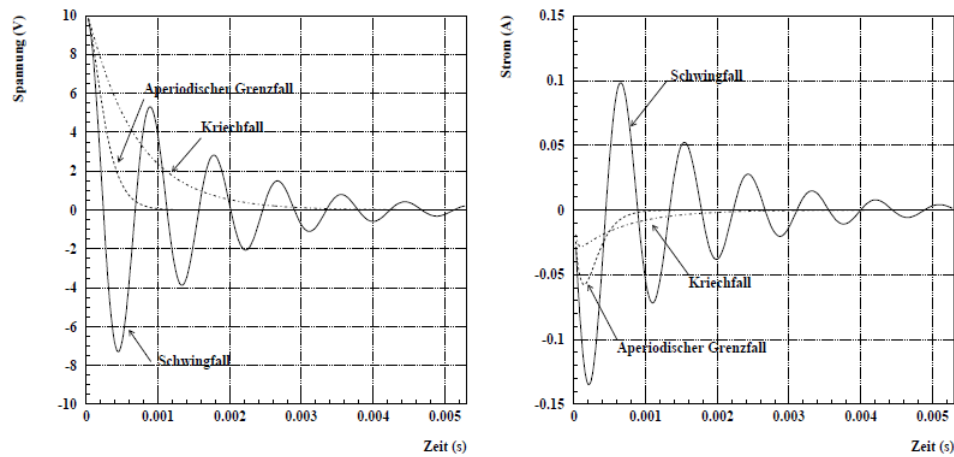


Abbildung 1: Die drei Fälle beim Entladevorgang

## 2 Aufbau und Durchführung

Auf einer Rastersteckplatte werden die einzelnen Bauteile, wie in Abbildung 2, eingesteckt und an einer Gleichspannungsquelle angeschlossen. Am Eingang A des Sensor-Cassy wird der Strom und am Eingang B die Spannung gemessen. Dabei muss im Menü des Cassy - Interface die richtigen Einstellungen ( $10 \mu\text{s}$  Messintervall, 20 ms Messzeit und 2000 Messungen) gewählt werden. Der Kondensator wird durch die Spannungsquelle aufgeladen und anschließend wird der Taster betätigt, um die Spannungsquelle kurzzuschließen. Der Ohmsche Widerstand wird variiert und die Messungen wiederholt. Die Widerstände, der Kondensator und die Spule werden vor dem Versuch mit einem Digitalvoltmeter vermessen. Mit dem Potentiometer wird der aperiodische Grenzfall bestimmt, indem zunächst der ungefähr benötigte Widerstand berechnet wird und dann das Potentiometer um diesen Wert reguliert wird, bis man einen Grenzfall beobachten kann. Dazu bestimmt man zuerst rechnerisch mit den obigen Formeln, wo ungefähr der aperiodische Grenzfall liegt.

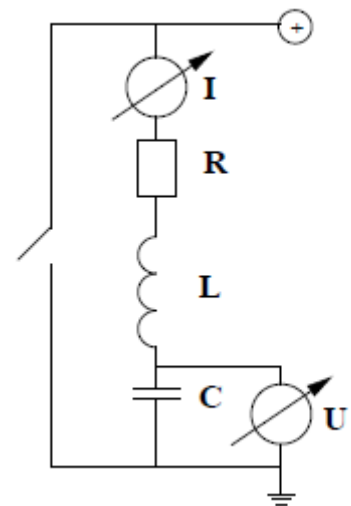


Abbildung 2: Schaltplan

Beim Anschließen des Oszilloskops muss darauf geachtet werden, dass beide Channels den selben Ground haben. Für die Bestimmung der Dämpfungskonstante wird eine Schwingung mit **Single Sequence** aufgezeichnet, danach können die Peaks der Schwingung mit dem Cursor angefahren und Spannungs- und Zeit-Werte abgelesen werden.

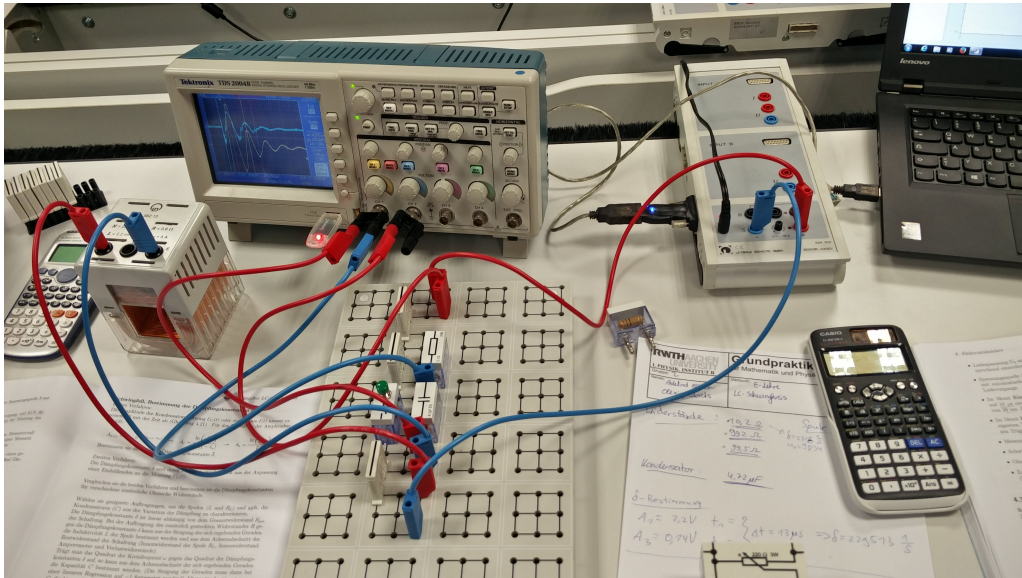


Abbildung 3: Versuchsaufbau mit angeschlossenem Oszilloskop

### 3 Auswertung

#### 3.1 Bauteile

Vor dem Versuch wurden zunächst alle Bauteile vermessen. Dafür wurde ein Digital-Multimeter verwendet, dessen Messfehler leider nicht bekannt war.

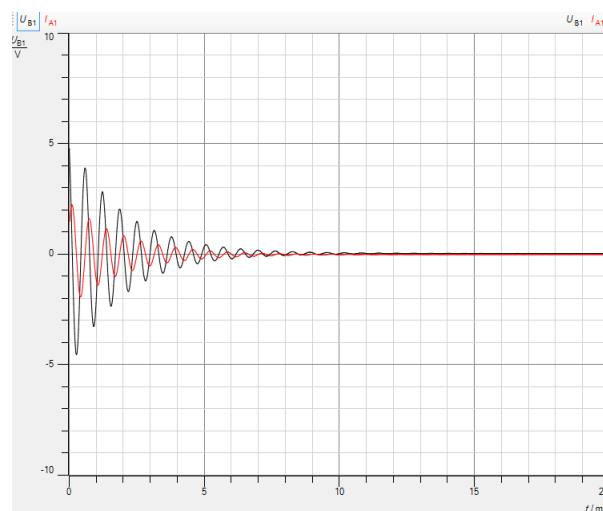
	Spule	Kondensator	Widerstände		
Wert	2.3 mH, 250W., 0.7 $\Omega$	4.72 $\mu F$	1.1 $\Omega$	5.2 $\Omega$	10.1 $\Omega$

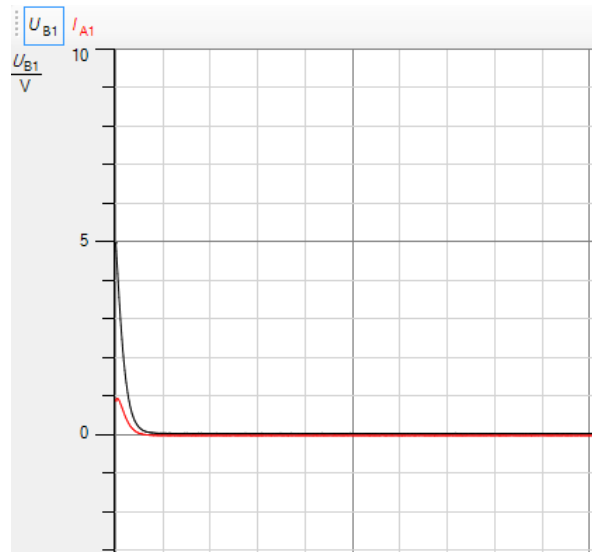
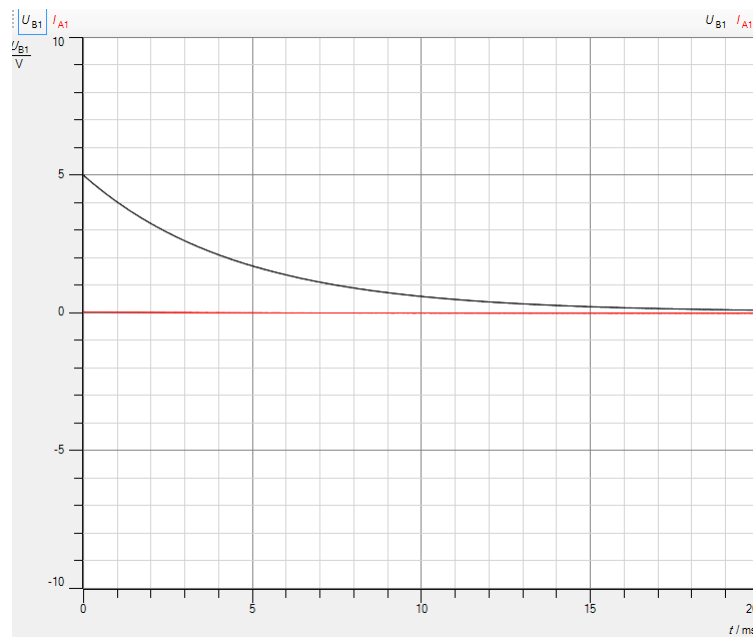
Tabelle 1: Im Versuch verwendete Bauteile

#### 3.2 Rohdaten

Im Folgenden ist zu den drei oben genannten Fällen jeweils eine Beispielmessreihe zu sehen.

##### Schwingfall ( $\delta < \omega_0$ ) 1

Abbildung 4: Schwingung bei einem Widerstand von 1  $\Omega$  (1. Messreihe)

**Aperiodischer Grenzfall ( $\delta = \omega_0$ ) 2**Abbildung 5: Grenzfall bei einem Widerstand von  $43.27 \Omega$  (1. Messreihe)**Kriechfall ( $\delta > \omega_0$ ) 3**Abbildung 6: Kriechfall bei einem Widerstand von  $1 k\Omega$  (1. Messreihe)**3.3 Frequenzbestimmung**

Die Schwingungsfrequenz wurde mit verschiedenen Methoden jeweils für den Strom und die Spannung bestimmt. Die Ergebnisse waren sehr ähnlich, im Folgenden werden die Werte aus der Spannungsmessung verwendet.

**Methode 1 - Nulldurchgänge** Es wurden die Nulldurchgänge der Schwingung und die Anzahl der Perioden gezählt, wobei der Ablesefehler der Abtastrate von  $\sigma_t = 10\mu s$  entspricht.

$$T = \frac{t_2 - t_1}{n} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \sigma_\omega = \omega \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_t}{n} \cdot \frac{1}{T} \quad (9)$$

Da jeweils 3 Messungen für einen Widerstand gemacht wurden, werden die Frequenzen noch gewichtet gemittelt.

**Methode 2 - FFT Peaks** In der FFT im CassyLab werden die Peaks bestimmt, wobei die Fehler auf die Peaks mit der Mehrfachmessung aus dem Fehler auf den Mittelwert bestimmt werden.

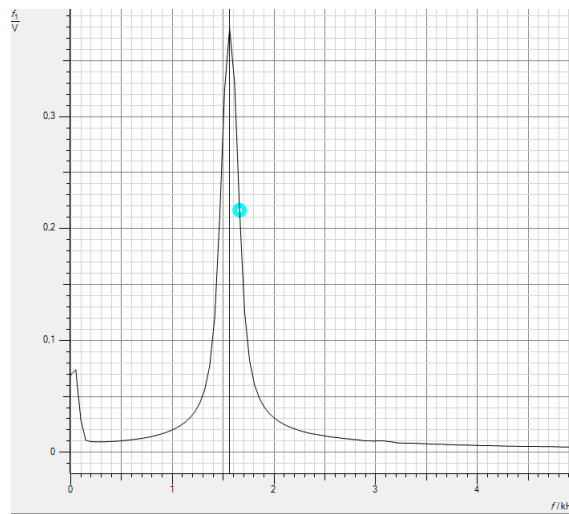


Abbildung 7: FFT der 1. Spannungsmessung bei  $1\Omega$ , Peak bei  $f = 1563Hz$

Die Ergebnisse der Frequenzbestimmung sind in Tabelle 3.3 zu sehen.

	$1.1\Omega$	$5.2\Omega$	$10.1\Omega$	$15.3\Omega$
$\omega_1 [1/s]$	$10170 \pm 15$	$9539 \pm 44$	$9342 \pm 40$	$8497 \pm 66$
$\omega_2 [1/s]$	$9816 \pm 44$	$10420 \pm 80$	$10281 \pm 93$	$10432 \pm 55$

Tabelle 2: Frequenzbestimmung durch Nulldurchgänge (1) und FFT-Peaks (2)

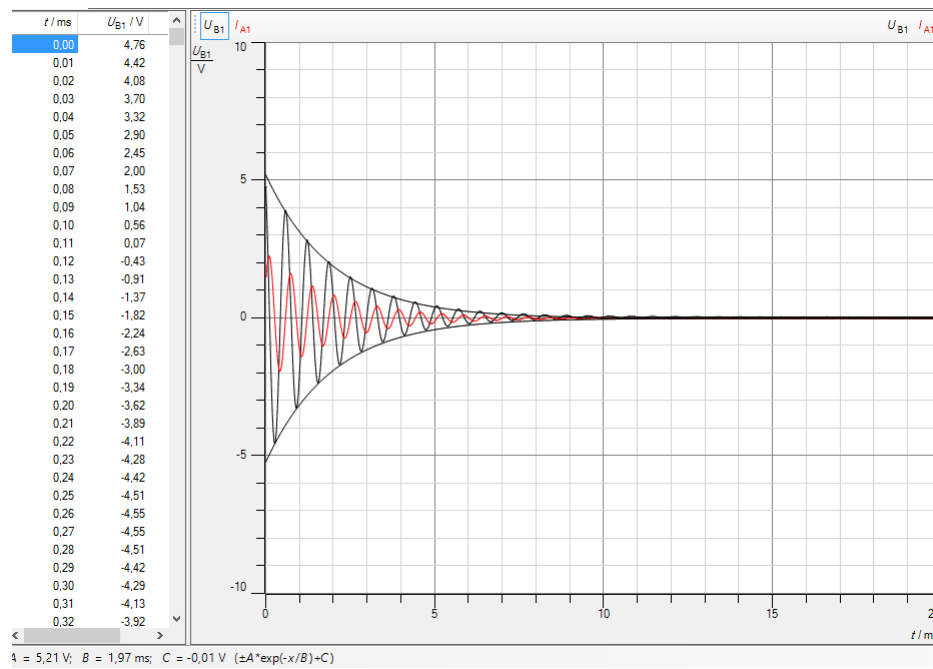
### 3.4 Bestimmung der Dämpfungskonstanten

Die Dämpfungskonstanten wurden ebenfalls mit 2 Methoden bestimmt.

**Methode 1 - Amplituden** Aus dem Verhältnis der stetig abfallenden Amplituden kann mit folgender Formel die Dämpfungskonstante ermittelt werden:

$$\delta_n = \frac{\ln(A_n/A_{n+1})}{t_{n+1} - t_n} \quad (10)$$

**Methode 2 - Einhüllende** Mit Hilfe des CassyLaby wurde eine exponentielle Einhüllende an die Schwingung gelegt, was Beispielfhaft in Abbildung 8 zu sehen ist. Daraus erhält man die Dämpfungskonstante.

Abbildung 8: exp()-Einhüllende der 1. Spannungsmessung bei  $1\Omega$ ,  $\delta = 510 \text{ 1/s}$ 

Leider konnte mit dieser Methode das  $\delta$  bei einem Widerstand von  $15\Omega$  nicht bestimmt werden, da es dort nur eine Schwingung gab und keine Einhüllende gelegt wurde.

Die so bestimmten Dämpfungskonstanten aus mehreren Messungen wurden jeweils untereinander gemittelt und der Fehler auf den Mittelwert bestimmt. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 3.4

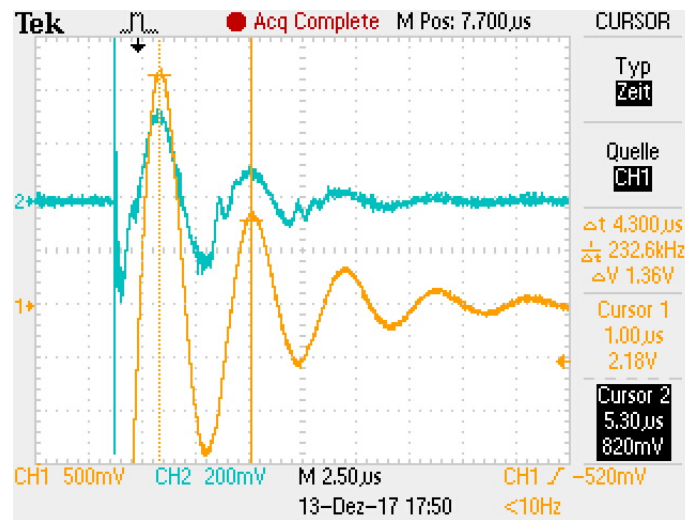
	$1.1\Omega$	$5.2\Omega$	$10.1\Omega$	$15.3\Omega$
$\delta_1 \text{ [1/s]}$	$567 \pm 10$	$1403 \pm 11$	$2323 \pm 63$	$2657 \pm 199$
$\delta_2 \text{ [1/s]}$	$520 \pm 8$	$1470 \pm 82$	$2520 \pm 16$	-
$\delta_{theo} \text{ [1/s]}$	239	1130	2196	3326

Tabelle 3:  $\delta$ -Bestimmung durch Amplituden und Einhüllende

### 3.4.1 $\delta$ -Bestimmung mit dem Oszilloskop

Zusätzlich wurde während des Versuchs die Dämpfungskonstante für den  $5.2\Omega$ -Widerstand mit dem Oszilloskop bestimmt.



Abbildung 9:  $\delta$ -Bestimmung mit dem Oszilloskop

Mit dem Cursor wurden folgende Werte abgelesen:  $A_1 = 3.04V$ ,  $A_2 = 1.08V$ ,  $\Delta t = 640 \mu s$ . Mit der Formel 10 ergibt sich eine Dämpfungskonstante von  $\delta = 16171/s$ .

### 3.5 Charakterisierung der Spule

Zur Bestimmung der Induktivität und des Spulenwiderstands wurde für beide Methoden der  $\delta$ -Bestimmung jeweils eine lineare Regression mit  $f(x) = a \cdot x + b$  durchgeführt. Diese sind in den Abbildungen 10 und 11 zu sehen. Bei der Auftragung von  $\delta$  gegen  $R$  gelten folgende Zusammenhänge

$$\delta = \frac{R + R_{rest}}{2L} \Rightarrow a = \frac{1}{2L}, b = \frac{R_{rest}}{2L} \Rightarrow L = \frac{1}{2a}, R_{rest} = \frac{b}{a} \quad (11)$$

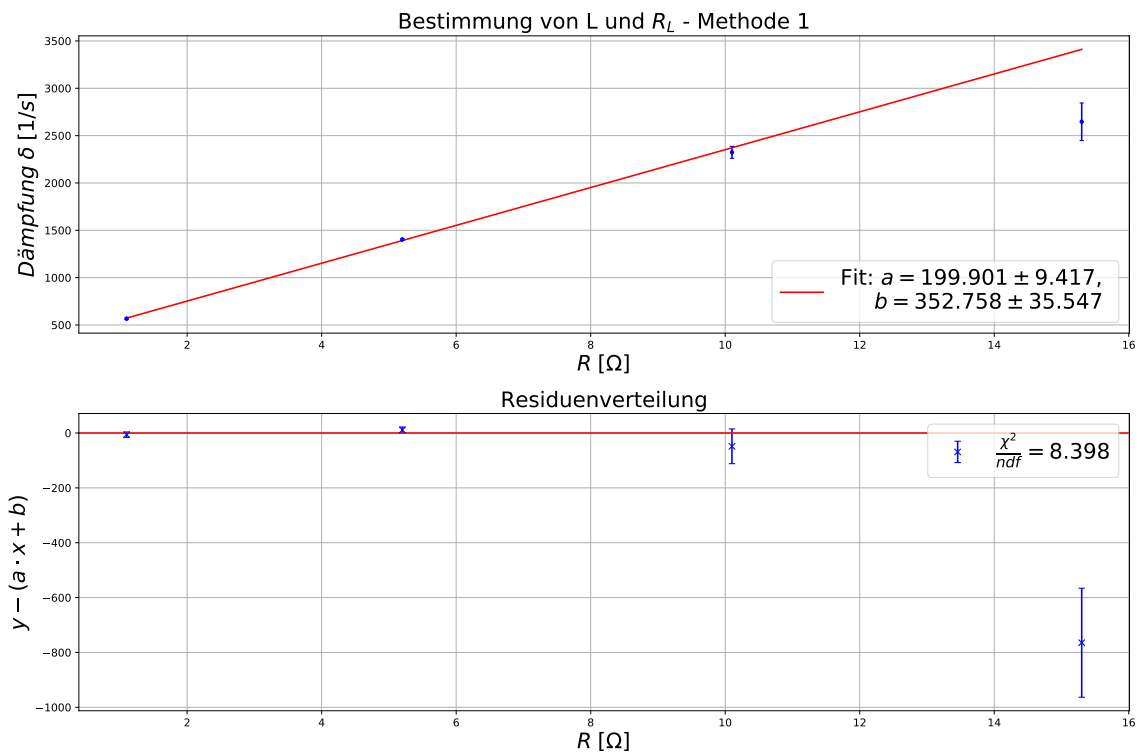
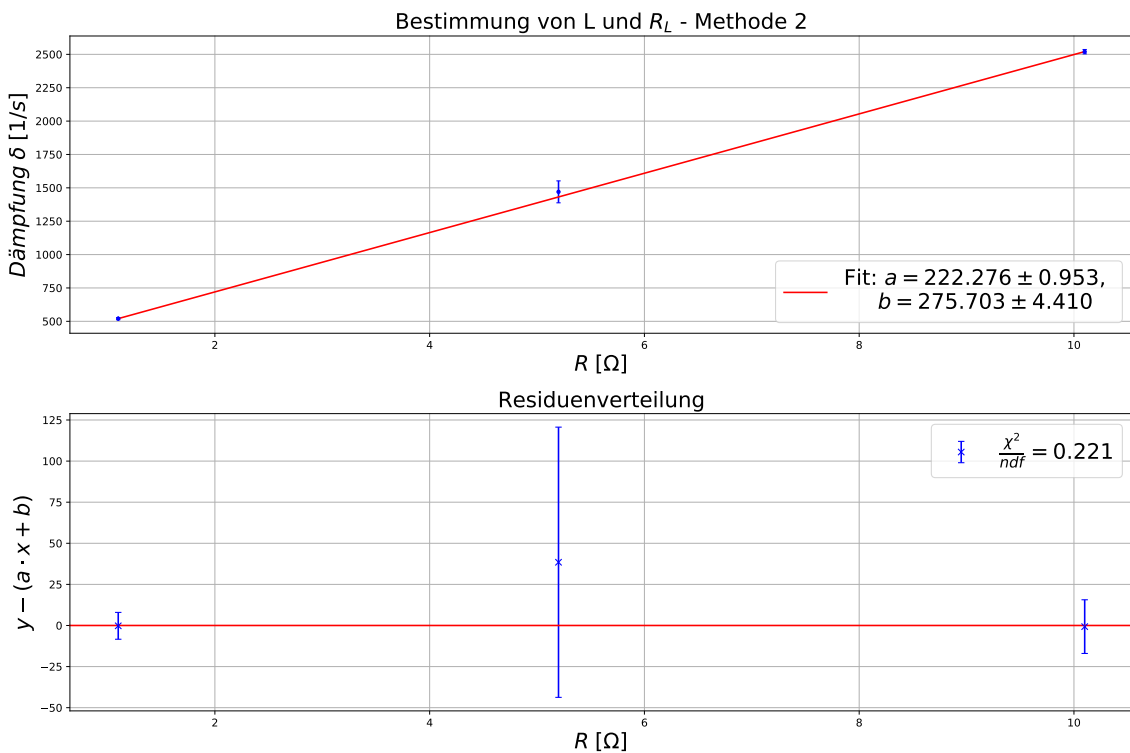
Damit ergeben sich die in Tabelle 3.5 zu sehenden Werte. Diese sind mit den realen Werten in Tabelle 3.1 verglichen.

	Methode 1	Methode 2	Sollwert	Abweichung
a [1/H]	$199.9 \pm 9.4$	$222.3 \pm 0.9$		
b [ $\Omega/H$ ]	$353 \pm 35.5$	$275.7 \pm 4.4$		
$\chi^2/ndf$	8.4	0.2		
L [mH]	$2.50 \pm 0.12$	$2.25 \pm 0.01$	2.3	$1.6\sigma(1), 5\sigma(2)$
$R_{rest}$ [ $\Omega$ ]	$1.76 \pm 0.20$	$1.24 \pm 0.02$	0.7	$5.3\sigma(1), 27\sigma(2)$

Tabelle 4: Bestimmung der Induktivität und des Restwiderstands

Der hier als  $R_{rest}$  bestimmte Widerstand bezeichnet den gesamten restlichen Widerstand, der sowohl den Innenwiderstand der Spule  $R_L$  als auch den Innenwiderstand des Amperemeters und Verlustwiderstände durch Drähte etc. beinhaltet. Das erklärt die Abweichungen von dem erwarteten Wert von  $R_L = 0.7\Omega$ .

Die zweite Methode der  $\delta$ -Bestimmung liefert sehr geringe Fehler, was sich auch im  $\chi^2/ndf$  widerspiegelt. Hier fällt der sehr große Fehler vom Wert bei  $5.2 \Omega$  auf. Bei der ersten Methode ist das  $\chi^2/ndf$  von 8 zu hoch, da der letzte Wert bei  $15.3 \Omega$  verglichen mit den anderen ein Ausreißer ist.

Abbildung 10: lineare Regression von  $\delta$  gegen  $R$  mit Dämpfungen nach Methode 1Abbildung 11: lineare Regression von  $\delta$  gegen  $R$  mit Dämpfungen nach Methode 2

### 3.6 Charakterisierung des Kondensators

Um die Kapazität des Kondensators zu bestimmen wurde bei der linearen Regression  $\omega^2$  gegen  $\delta^2$  aufgetragen und die Steigung der Geraden auf -1 festgelegt. Durch die Kombination der

verschiedenen Auswertemethoden bei der Bestimmung von Frequenz und Dämpfungskonstante ergaben sich die folgenden 4 Regressionen.

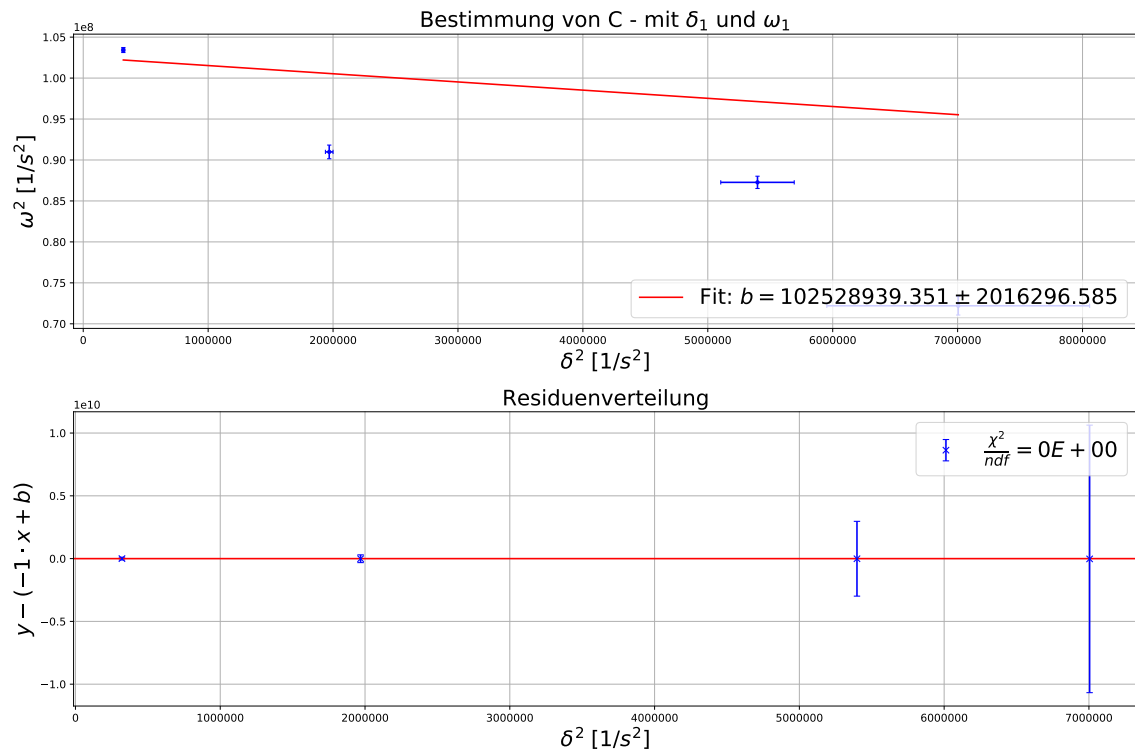


Abbildung 12: Bestimmung der Kapazität mit  $\delta$  und  $\omega$  nach Methode 1

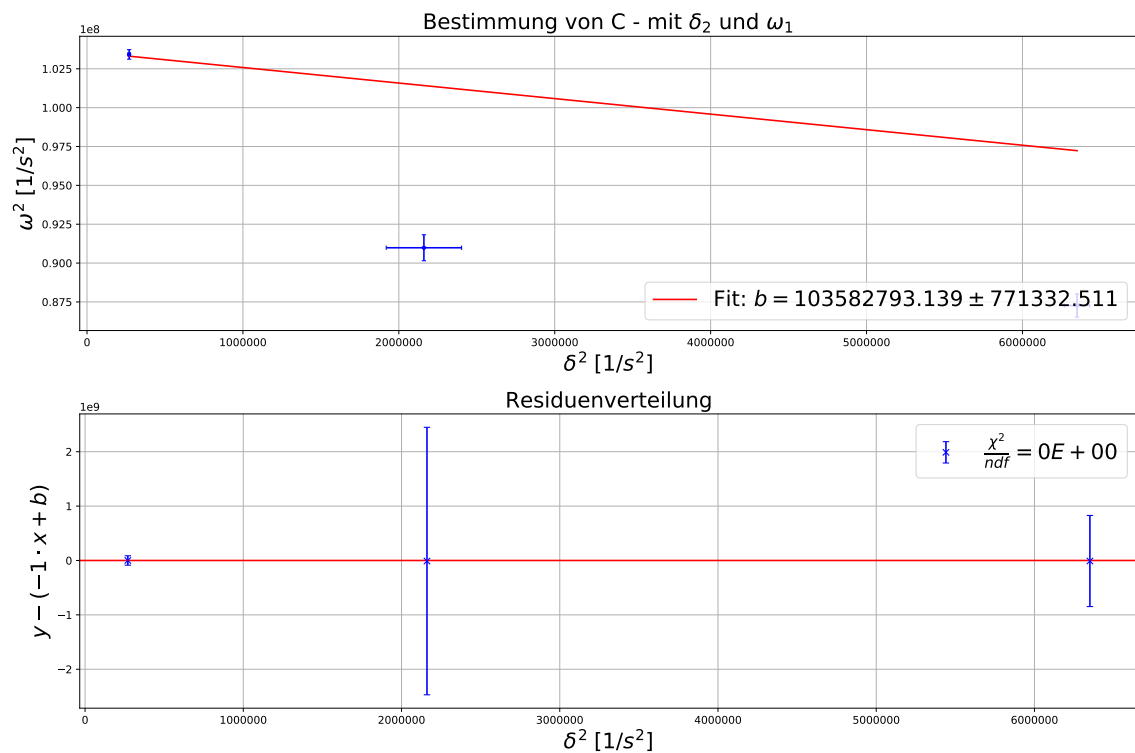
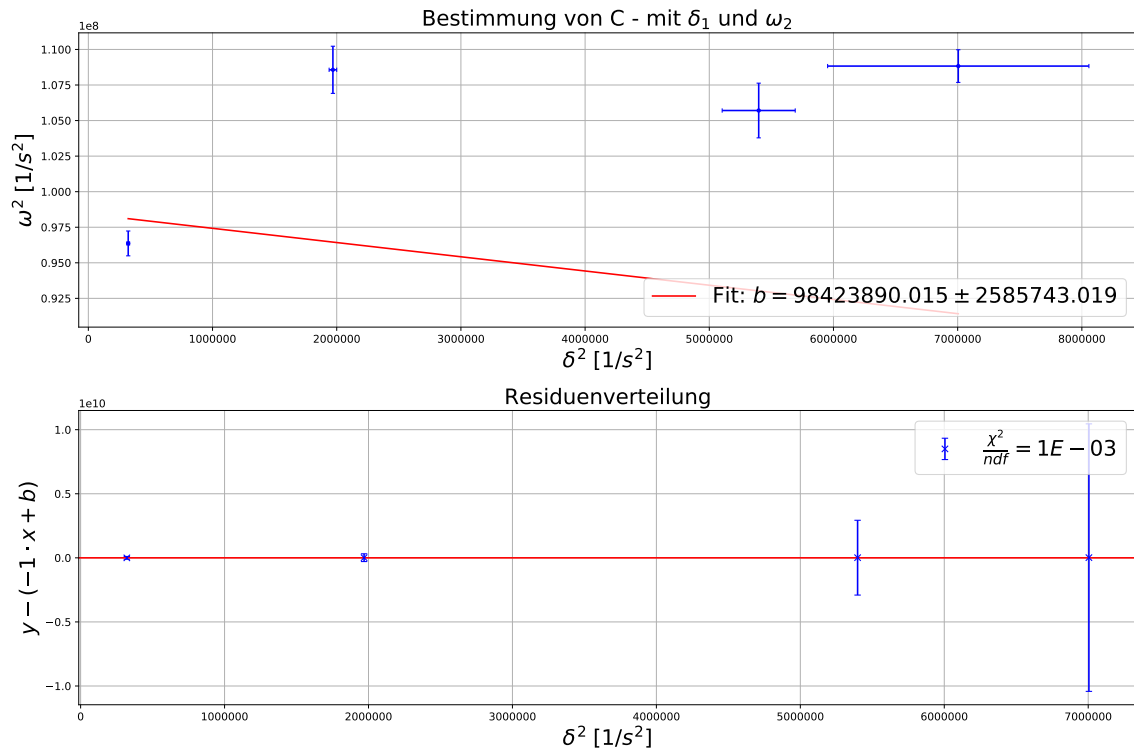
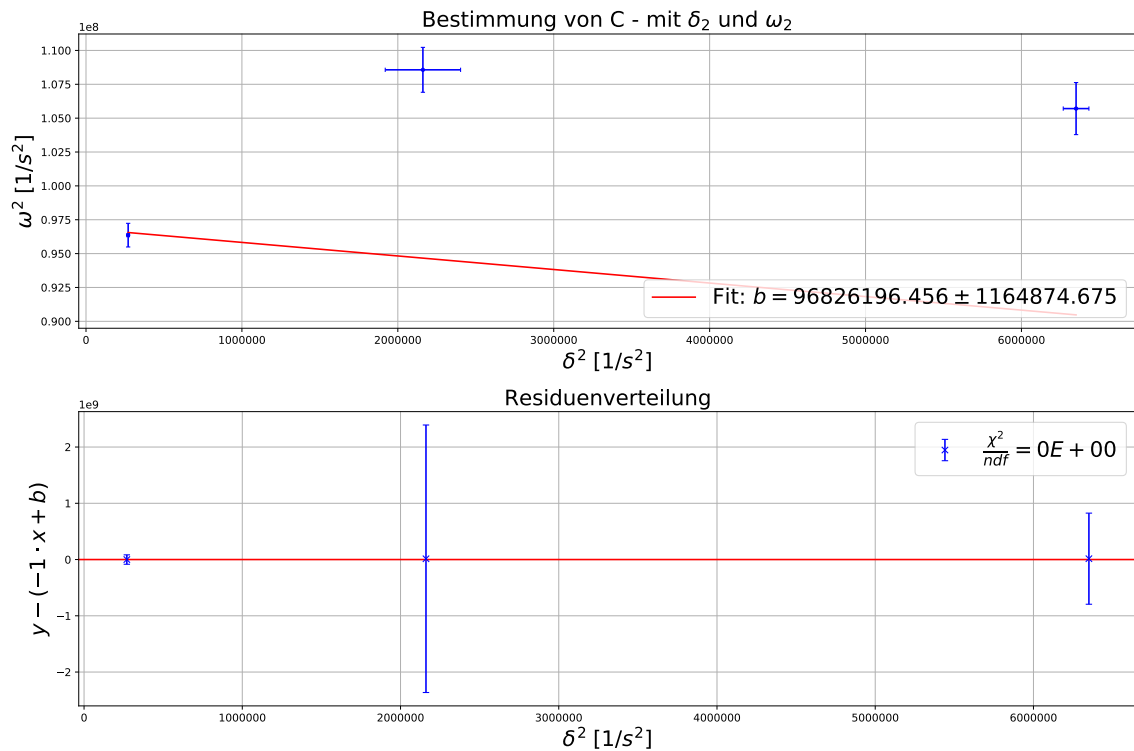


Abbildung 13: Bestimmung der Kapazität mit  $\delta$  nach Methode 2 und  $\omega$  nach Methode 1

Abbildung 14: Bestimmung der Kapazität mit  $\delta$  nach Methode 1 und  $\omega$  nach Methode 2Abbildung 15: Bestimmung der Kapazität mit  $\delta$  und  $\omega$  nach Methode 2

Mit Hilfe der Zusammenhänge

$$L = \frac{1}{\omega^2 C + \delta^2 C} \Rightarrow \omega^2 = -\delta^2 + \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L \cdot b}, \sigma_C = C \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} \quad (12)$$

erhält man daraus die in Tabelle 3.6 gezeigten Kapazitäten.

	$\delta_1, \omega_1$	$\delta_2, \omega_1$	$\delta_1, \omega_2$	$\delta_2, \omega_2$
C [ $\mu F$ ]	$4.34 \pm 0.09$	$4.29 \pm 0.04$	$4.52 \pm 0.12$	$4.59 \pm 0.06$
Abweichung von $4.72 \mu F$	$4.2 \sigma$	$11 \sigma$	$1.7 \sigma$	$2.2 \sigma$

Tabelle 5: Bestimmung der Kapazität des Kondensators (hier steht der Index für die Methode der  $\delta$ - bzw.  $\omega$ -Bestimmung, dessen Daten für die lineare Regression verwendet wurden)

Dabei fällt auf, dass die Verwendung der Frequenzdaten aus der FFT-Peakbestimmung wesentlich bessere Ergebnisse für die Kapazität liefert.

Trotz der scheinbar sehr schlechten Fits ließ sich hier die Kapazität dennoch gut abschätzen.

### 3.7 Aperiodischer Grenzfall

Zusätzlich wird der Widerstand bestimmt, der für einen aperiodischen Grenzfall benötigt bzw. gesteckt werden muss.

$$R_{ges} = R_{ap} + R_{rest} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13)$$

Rechnerisch ergab sich dieser während des Versuchs zu  $R_{ap} = 44.15 \Omega$ , mit dem in Abschnitt 3.5 bestimmten Wert für  $R_{rest} = 1.25 \Omega$  (hierfür wurde gewichtet gemittelt) ergibt sich eine Erwartung von  $R_{ap} = 42.9 \Omega$ . Bei einer Einstellung des Potentiometers von  $43.27 \Omega$  wurde dann der Grenzfall beobachtet, der bereits in Abbildung 5 gezeigt wurde.

## 4 Fazit

## Abbildungsverzeichnis

1	Die drei Fälle beim Entladevorgang . . . . .	2
2	Schaltplan . . . . .	2
3	Versuchsaufbau mit angeschlossenem Oszilloskop . . . . .	3
4	Schwingung bei einem Widerstand von $1\ \Omega$ (1. Messreihe) . . . . .	3
5	Grenzfall bei einem Widerstand von $43.27\ \Omega$ (1. Messreihe) . . . . .	4
6	Kriechfall bei einem Widerstand von $1\ k\Omega$ (1. Messreihe) . . . . .	4
7	FFT der 1. Spannungsmessung bei $1\Omega$ , Peak bei $f = 1563\text{Hz}$ . . . . .	5
8	exp()-Einhüllende der 1. Spannungsmessung bei $1\Omega$ , $\delta = 510\ 1/s$ . . . . .	6
9	$\delta$ -Bestimmung mit dem Oszilloskop . . . . .	7
10	lineare Regression von $\delta$ gegen R mit Dämpfungen nach Methode 1 . . . . .	8
11	lineare Regression von $\delta$ gegen R mit Dämpfungen nach Methode 2 . . . . .	8
12	Bestimmung der Kapazität mit $\delta$ und $\omega$ nach Methode 1 . . . . .	9
13	Bestimmung der Kapazität mit $\delta$ nach Methode 2 und $\omega$ nach Methode 1 . . . . .	9
14	Bestimmung der Kapazität mit $\delta$ nach Methode 1 und $\omega$ nach Methode 2 . . . . .	10
15	Bestimmung der Kapazität mit $\delta$ und $\omega$ nach Methode 2 . . . . .	10

## Tabellenverzeichnis

1	Im Versuch verwendete Bauteile . . . . .	3
2	Frequenzbestimmung durch Nulldurchgänge (1) und FFT-Peaks (2) . . . . .	5
3	$\delta$ -Bestimmung durch Amplituden und Einhüllende . . . . .	6
4	Bestimmung der Induktivität und des Restwiderstands . . . . .	7
5	Bestimmung der Kapazität des Kondensators (hier steht der Index für die Methode der $\delta$ - bzw. $\omega$ -Bestimmung, dessen Daten für die lineare Regression verwendet wurden) . . . . .	11