

# Quelle verschränkter Photonen

Sven Yannick Klein (369318) und Jannik Zenner (370443)

Fortgeschrittenenpraktikum  
RWTH Aachen University

## Teil 1: Quantenmechanische Korrelation

### Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollen mithilfe der Bell-Ungleichung die lokalen verborgene-Variablen-Theorien (ab hier LVVT) widerlegt werden. Diese Theorien wurden als Erweiterung der Quantenmechanik vorgeschlagen, um *Lokalität*, *Realismus* und *Vollständigkeit* zu erreichen. Diese Prinzipien, die einige Physiker als Eigenschaften für eine physikalische Theorie voraussetzen, werden in der Quantenmechanik von verschränkten Zuständen verletzt.

### Theoretischer Hintergrund

In diesem Versuch wird die Eigenschaft der Polarisation von Photonen benutzt. Wir wählen als Ausbreitungsrichtung eine horizontale Richtung und als orthonormale Basis für den Vektorraum des Polarisationszustandes eines Photons die Basis  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  wobei die Basisvektoren die vertikale ( $|V\rangle$ ) und verbleibende horizontale ( $|H\rangle$ ) Polarisationsrichtung beschreibt. Ein System aus Polarisierungen von zwei Photonen wird als Tensorprodukt der beiden Vektorräume der Polarisation der einzelnen Photonen beschrieben. Ein Zustand dieses Systems kann dann folgende Form annehmen:

$$|\psi\rangle \propto |V_1\rangle \otimes |V_2\rangle + |H_1\rangle \otimes |H_2\rangle = |VV\rangle + |HH\rangle \quad (1)$$

Dabei geben die Indizes das Photon an, zu dem der Einphotonenzustand gehört. Wir verzichten aber ab hier auf das Tensorproduktzeichen und die Indizes. Die Zuordnung der Einphotonenzustände erfolgt dann über die Reihenfolge, in der sie angegeben sind.

Das hier beschriebene System ist schon ein verschränkter Zustand, da die beiden Photonen in derselben Richtung polarisiert sind, aber a priori nicht feststeht, welche Richtung dies ist. Erst wenn der Polarisation eines der beiden Photonen gemessen wird, stehen die Polarisationsrichtungen *beider* Photonen fest. Eine Manipulation des einen Photons hat also einen Effekt auf das andere Photon. Da dieser Effekt sofort auftritt, verstößt dieses System gegen das Prinzip der Lokalität, wenn die Photonen räumlich voneinander getrennt sind, da dieser Effekt mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen wird. (Allerdings verstößt dieses System nicht gegen die spezielle Relativitätstheorie, da keine Wirkung übertragen wird.)

Um die Lokalität beizubehalten, wurden die LVVT entwickelt. Hierbei hat jedes der beiden Photonen eine versteckte Variable  $\lambda$ , die nicht gemessen werden kann, aber in diesem Fall die Polarisationsrichtung eindeutig festlegt. Um diese Theorie zu überprüfen misst man eine künstliche Größe  $S$ . Diese ist:

$$S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') \quad (2)$$

Hierbei bezeichnen die Größen  $E(\alpha, \beta)$  die Korrelationskoeffizienten der Photonen bei Messung hinter Polarisationsfiltern, die auf die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eingestellt sind. Nach den LVVT ist der Betrag dieser

Größe immer kleiner als zwei. In der reinen Quantenmechanik kann sie Werte von betragsmäßig bis zu  $2\sqrt{2} \simeq 2,8$  annehmen.

## Versuchsaufbau

Als Photonenquelle wird ein Diodenlaser mit einer Wellenlänge von 405 nm. Der Laserstrahl wird dann mithilfe einer konvexen Linse auf zwei unmittelbar hintereinander aufgereichte Beta-Bariumboratkristalle fokussiert, deren optische Achsen senkrecht aufeinander stehen. In diesen findet parametrische Fluoreszenz statt: Wenn ein einfallendes Photon in Richtung der optischen Achse polarisiert ist, wird es in zwei Photonen umgewandelt, die jeweils die Hälfte der Energie des Ausgangsphotons besitzen und senkrecht zur optischen Achse polarisiert sind. Aufgrund von Energie- und Impulserhaltung werden sie um einen bestimmten Winkel in jeweils entgegengesetzte Richtungen abgelenkt. Damit die Photonen, die im ersten Kristall entstehen, sowohl zeitlich als auch räumlich ununterscheidbar sind zu solchen, die im zweiten Kristall entstehen, wird ein Vor- und ein Nachkompensatorkristall eingesetzt.

Den Diodenlaser verlassen Photonen, die in die Richtung der optischen Achse eines der beiden Kristalle polarisierte Photonen. Die Apparatur verlassen somit zuerst zwei nicht verschränkte Photonen. Bringt man jedoch einen Polarisationsfilter zwischen Laserquelle und den Kristallen an, der die Polarisationsrichtung um  $\pi/4$  dreht, sind die beiden Photonen polarisationsverschränkt. Der Polarisationsfilter ist durch ein Lambda-Halbe-Plättchen realisiert.

Die beiden Photonenstrahlen verlassen die Apparatur durch eine Apertur mit Tiefpassfilter. Danach werden sie auf zwei Avalanche Photo Diodes gelenkt. Vor diesen sind verstellbare Polarisationsfilter und entfernbare Tiefpassfilter angebracht. Die Photodioden sind mit einem Koinzidenzzähler verbunden. Dieser zählt die Einzelzählraten an den beiden Detektoren und Koinzidenzen, wenn an beiden Detektoren in einem Zeitfenster von 30 ns ein Ereignis auftritt.

## Versuchsdurchführung

Zuerst werden die statistischen Fehler der Messungen untersucht. Dabei wird die Laserdiode bei Strömen  $I_D$  von 30 mA bis 45 mA und 0 mA betrieben. Für jede Stromeinstellung werden jeweils 10 mal die Einzelzählungen der Detektoren in einem Zeitintervall von 1 s aufgenommen.

Dann wird der nicht polarisationsverschränkte Zustand untersucht, das heißt das Lambda-Halbe-Plättchen wird nicht in den Strahlengang geschoben. Für Winkel  $\alpha$  des Polarisationsfilters vor Detektor 0 von  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $90^\circ$  werden nun Messungen durchgeführt: Für Winkel  $\beta$  des Polarisationsfilters vor Detektor 1 von  $-50^\circ$  bis  $140^\circ$  werden dann die Einzelzählungen der Detektoren und die Koinzidenzen in einem Zeitintervall von 1 s aufgenommen. Die Intervalle zwischen den Einstellungen des Polarisationsfilters werden dabei dynamisch angepasst: Wenn eine der Zählungen oder die Koinzidenzen ein Minimum oder ein Maximum annehmen, werden die Schrittweiten verkleinert. Dieser Vorgang wird dann für einen festen Winkel  $\beta = 0^\circ$  bei Variation des Winkels  $\alpha$  wiederholt.

Zur Messung des verschränkten Zustandes wird jetzt das Lambda-Halbe-Plättchen in den Strahlengang gebracht. Es werden dieselben Messungen wie für den nicht verschränkten Zustand durchgeführt.

## Messdaten und Auswertung

### Fehlerbetrachtung

Zählexperimente sind im allgemeinen Poissonverteilt. Dass heißt, dass der Fehler auf die Zählung einfach die Quadratwurzel der Anzahl der Zählungen. Obwohl hier ein Zählexperiment vorliegt, können die Fehler hier aber nicht so angenommen werden.

Um eine sinnvolle Fehlerabschätzung auf die Zählungen machen zu können, werden von den jeweils 10 aufgenommenen Werten pro Stromeinstellung und Detektor Mittelwert und Standardabweichung bestimmt. Für Detektor 0 ergab sich:

$I_D$	Mittelwert	Standardabweichung	$\sqrt{\text{Mittelwert}}$
0 mA	4067,4	105,7	63,8
30 mA	80601,8	375,5	283,9
37,5 mA	122920,9	584,5	350,6
45 mA	152914,6	1276,5	391,0

und für Detektor 1:

$I_D$	Mittelwert	Standardabweichung	$\sqrt{\text{Mittelwert}}$
0 mA	7597,9	285,2	87,2
30 mA	70370,8	175,6	265,3
37,5 mA	100340,4	273,0	316,8
45 mA	121853,0	1147,5	349,1

Es sind deutliche Abweichungen der Standardabweichungen von der Vorhersage nach Poisson zu erkennen. Es wird also ein neues Fehlermodell benötigt. Um so nah wie möglich an den Poissonfehlern zu bleiben, wird als Modell benutzt, das die Abhängigkeit des Fehlers  $\sigma$  von den Zählungen  $z$  die Form  $\sigma = z^p$  hat, wobei  $p$  eine noch zu bestimmende Konstante ist. Wir tragen nun die Mittelwerte gegen die Standardabweichungen in doppelt-logarithmischer Darstellung auf. Die Steigung der Ursprungsgeraden, die durch die so entstandenen Datenpunkte verläuft, ist dann unsere Konstante  $p$ . Sie ist der Mittelwert der Größen  $\ln(\text{Standardabweichung})/\ln(\text{Mittelwert})$  für die verschiedenen Diodenströme.

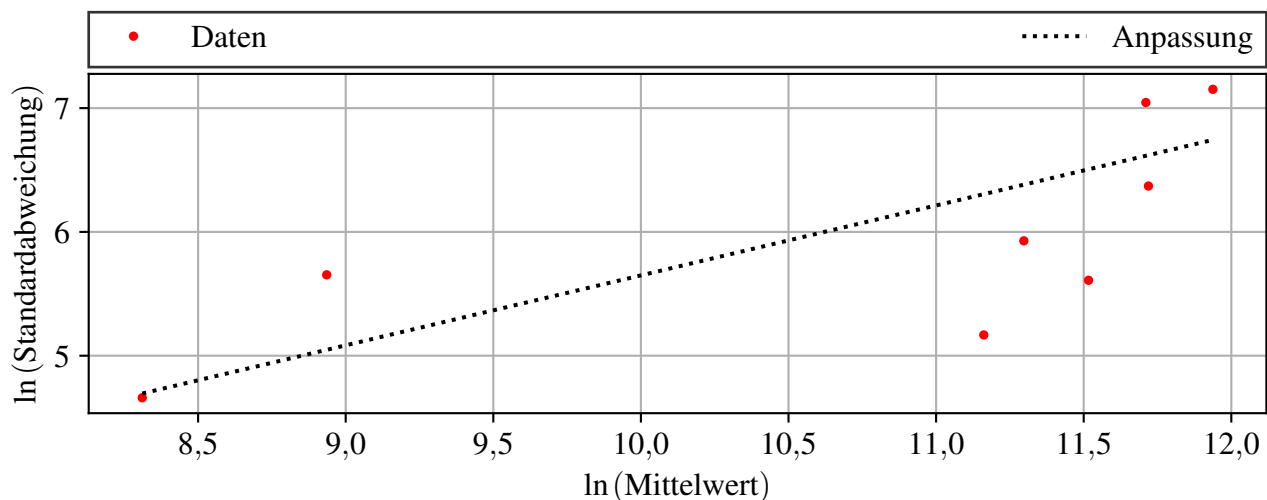


Abbildung 1: Doppelt-Logarithmische Auftragung der Standardabweichungen gegen die Mittelwerte der Zählungen mit der Geradenanpassung

Es ist offensichtlich, dass unsere Daten in dieser Auftragung nicht auf einer Geraden liegen. Deshalb ist die Fehlerabschätzung nur sehr grob. Das ist ein großes Problem, da dadurch alle Fehler auf alle Größen, die später noch bestimmt werden, nicht genau bestimmt sind. Es ergibt sich ein Wert für  $p$  von 0,56

### Der nicht verschränkte Zustand

**Einzelzählraten** Zuerst werden die Einzelzählraten ausgewertet in Abhängigkeit der Winkel ausgewertet. Die Fehler auf die Zählungen wurden schon diskutiert. Als Fehler auf die Winkel wurde eine uniforme Unsicherheit von  $0,1^\circ$  angenommen, da bei der manuellen Einstellung des Winkels keine 100 prozentige Genauigkeit gewährleistet werden kann.

Für die Messungen bei konstantem Winkel  $\alpha$  werden die Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$

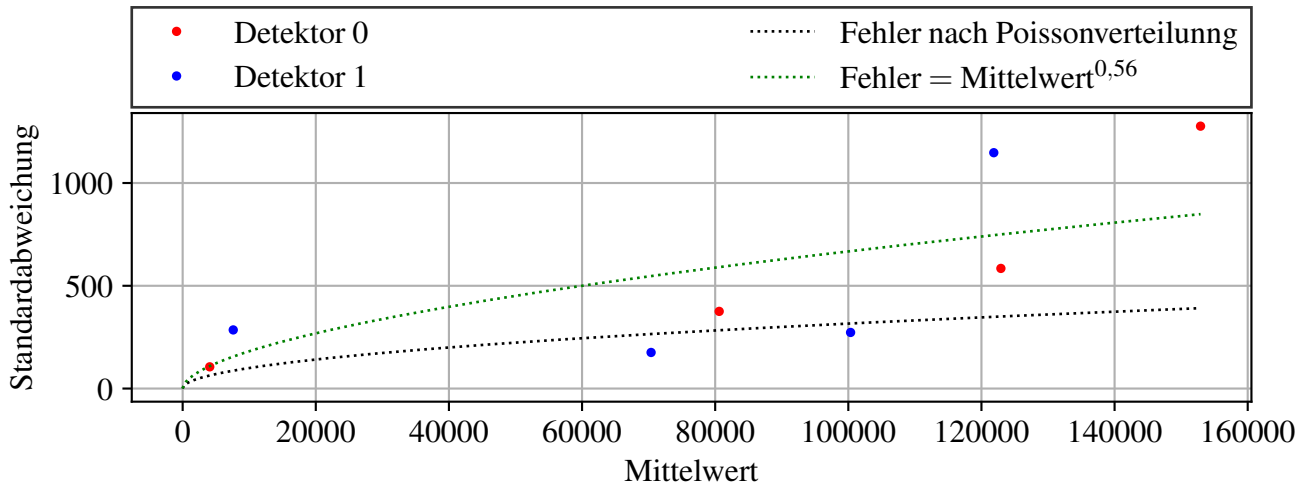


Abbildung 2: Auftragung der Standardabweichungen gegen die Mittelwerte der Zählungen mit Fehlermodellen

aufgetragen. Bei konstantem  $\beta$ , die Zählungen an Detektor 0 gegen den Winkel  $\beta$ . An diese Messpunkte wird dann eine Funktion der Form  $f(x) = -A \cdot \cos(2 \cdot B \cdot (x - C)) + D$  angepasst. Dazu wird die Orthogonal Distance Regression Methode der Python Bibliothek `scipy` benutzt. Diese führt eine  $\chi^2$ -Minimierung durch. Zur Bestimmung der Kovarianzmatrix wird zuerst die Hessematrix der Funktion  $f$  benötigt. Die Einträge dieser lauten:

$$H_{ij} = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2} \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial p_i \partial p_j} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{\min.}} \quad (3)$$

Dabei sind die  $x_k$  die Messdaten für  $x$  und  $\sigma_k$  die dazugehörigen kombinierten Fehler. Die  $p_i$  sind der jeweils  $i$ -te Parameter.  $\mathbf{p}$  ist der Vektor, der aus den Fitparametern besteht und  $\mathbf{p}_{\min.}$  ist dann der Vektor, der aus den angepassten Parametern besteht. Die Kovarianzmatrix ist dann das doppelte des Inversen dieser Hessematrix.

Wenn diese Anpassungen also mit den Daten durchgeführt werden, erhält man für die  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad Werte von 1 bis 3. Allerdings gibt es eine starke Systematische Abweichung der Datenpunkte von den erhaltenen Fits.

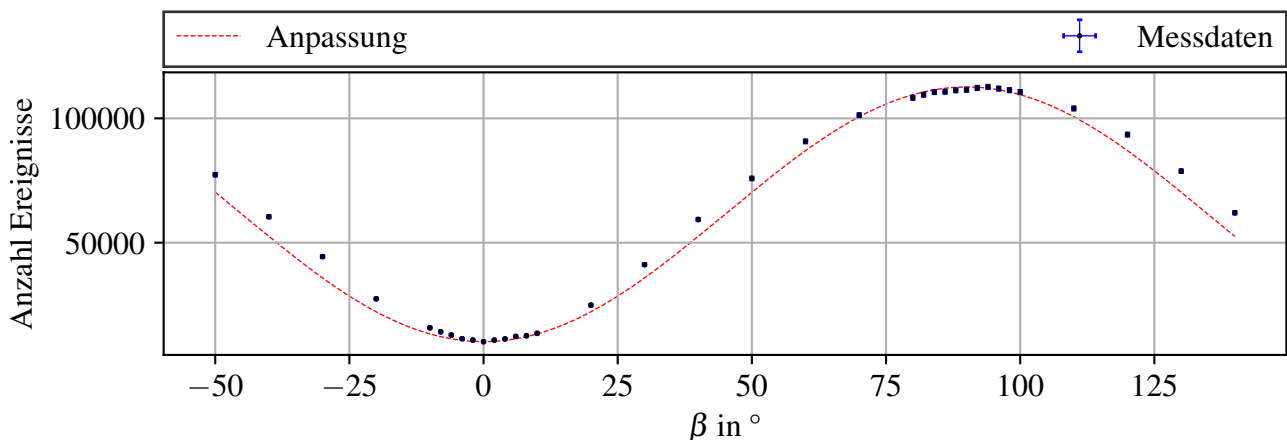


Abbildung 3: Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 45^\circ$

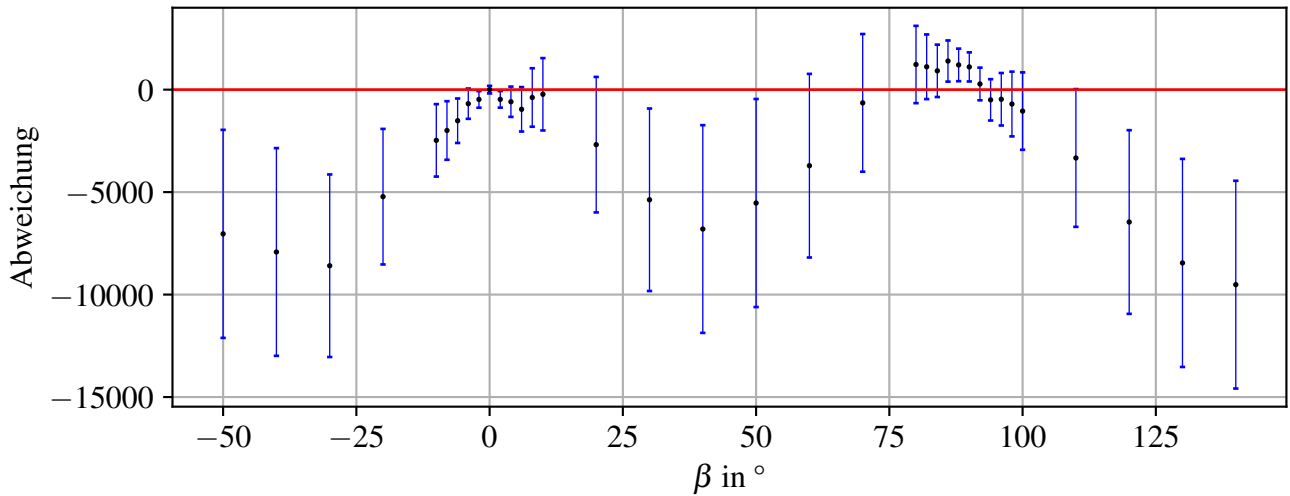


Abbildung 4: Der Residuengraph für die Anpassung an die Daten der Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  bei  $\alpha = 45^\circ$

Es ist deutlich sichtbar, dass die Messdaten außerhalb der Extrempunkte immer nach oben von der Anpassung abweichen. Dies ist nicht nur bei dieser Anpassung der Fall, sondern für alle Fits. Das heißt, es muss noch irgendeine Korrektur in der funktionalen Abhängigkeit geben. Erst einmal werden wir das aber ignorieren.

Die Ergebnisse der Anpassungen sind im Anhang zu finden.

**Polarisationsgrad** Der Polarisationsgrad ist definiert durch:

$$\Pi = \frac{N_{\max}}{N_{\max} + N_{\min}} \quad (4)$$

In Abhängigkeit unserer Fitparameter ist sie also gegeben durch:

$$\Pi = \frac{D + A}{2 \cdot D} \quad (5)$$

Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ist dann der Fehler auf diese Größe gegeben durch:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \left( \frac{\sigma_A}{2 \cdot D} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_D \cdot A}{2 \cdot D^2} \right)^2 - C(A, B) \cdot \frac{A}{2 \cdot D^3} \quad (6)$$

Hierbei bezeichnet  $C(A, B)$  die Kovarianz zwischen den beiden Parametern. Die Ergebnisse lauten dann:

Messreihe	Polarisationsgrad	Unsicherheit
$\alpha = -45^\circ$	0,8925	0,0015
$\alpha = 0^\circ$	0,9139	0,0000
$\alpha = 45^\circ$	0,9169	0,0003
$\alpha = 90^\circ$	0,9237	0,0004
$\beta = 0^\circ$	0,9625	0,0007

Die Werte sind also nicht innerhalb ihrer Fehler miteinander verträglich obwohl sie sehr ähnlich sind. (Außer die letzte Messung.) Das spricht dafür, dass die Fehler noch zu klein abgeschätzt wurden.

**Koinzidenzzählraten** Zur Auswertung der Koinzidenzzählungen müssen erst einmal die *falschen* Koinzidenzen bestimmt werden. Diese sind rein statistischer Natur und treten auf, wenn in den Detektoren in dem Zeitfenster von  $\Delta t = 30\text{ ns}$  zufällig jeweils ein Photon gemessen wird. Die Häufigkeit des Auftretens kann mithilfe der Formel  $K_{\text{falsch}} = N_1 \cdot N_2 \cdot \Delta t$  abgeschätzt werden. Von jeder Koinzidenzzählung wird also dieser Betrag mit den korrespondierenden Einzelzählraten  $N_1$  und  $N_2$  abgezogen. Als Fehler auf den korrigierten Wert der Koinzidenzzählung wird wieder unser Fehlermodell benutzt.

Zur weiteren Bearbeitung werden die Koinzidenzen gegen den Winkel aufgetragen und wie oben bei den Einzelzählraten wird dann die Funktion  $f$  an diese Daten angepasst. Hier teilweise dieselben Systematiken wie oben zu erkennen.

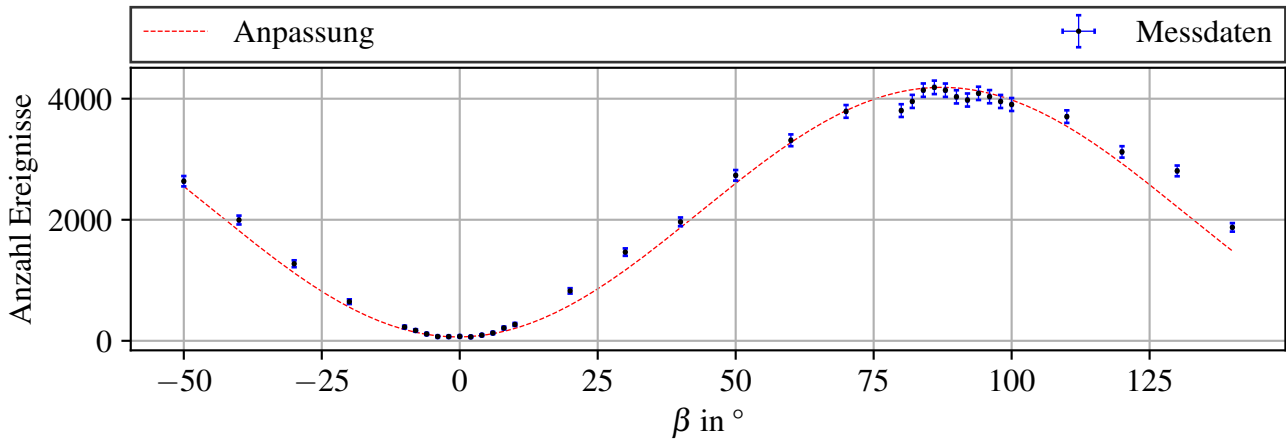


Abbildung 5: Auftragung der Koinzidenzen gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 45^\circ$

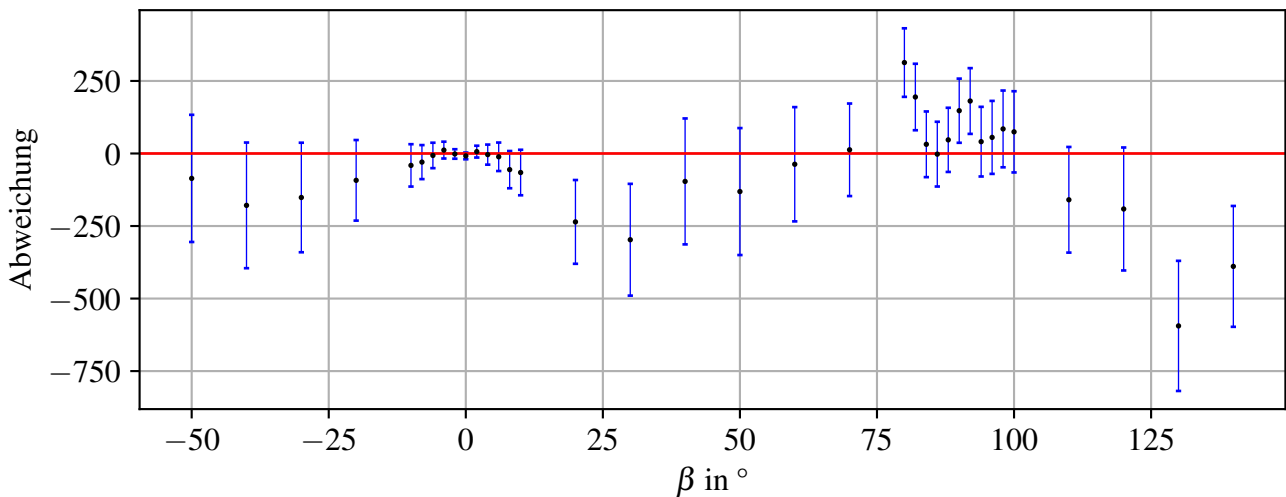


Abbildung 6: Der Residuengraph für die Anpassung an die Daten der Auftragung der Koinzidenzen gegen den Winkel  $\beta$  bei  $\alpha = 45^\circ$

In keinem Fall weichen die Daten von der Anpassung signifikant ab. Interessant ist allerdings das Ergebnis für die Messungen, bei denen der feste Winkel  $0^\circ$  ist. Dann ist der feste Winkel orthogonal zu der Polarisation der austretenden nicht verschränkten Photonen:

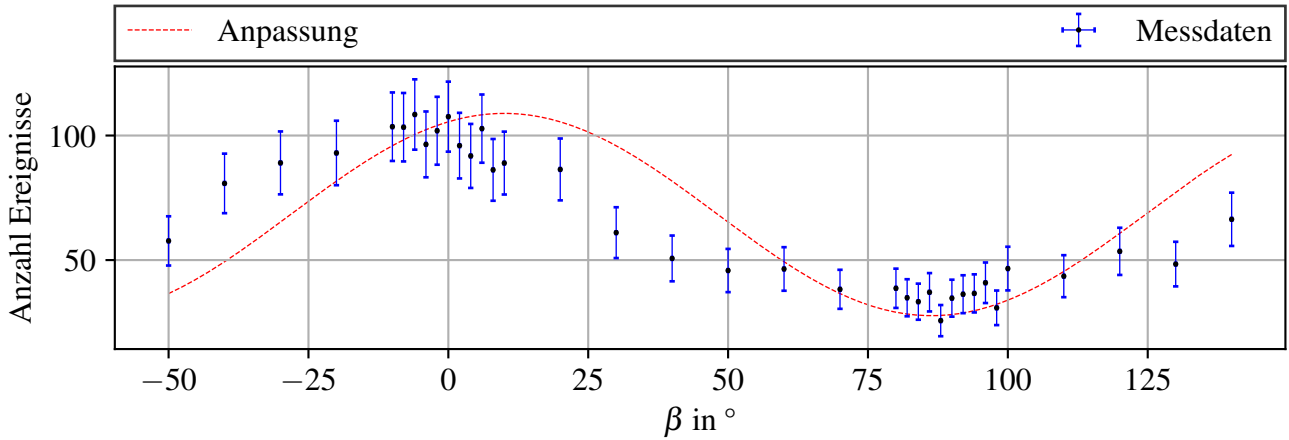


Abbildung 7: Auftragung der Koinzidenzen gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 0^\circ$

Abgesehen davon, dass hier die Anpassung nicht komplett die Daten beschreibt, was aber darauf zurückzuführen ist, dass hier die Ereignisraten so klein sind, dass Untergrundrauschen signifikant wird, sieht man die meisten Koinzidenzen, wenn *beide* Polarisationsfilter senkrecht auf der Polarisationsachse stehen. Eigentlich sollte man hier keine Koinzidenzen sehen. Diese Abweichung ist dadurch zu erklären, dass wir hier doch keinen vollständig nicht verschränkten Zustand haben. Der Zustand ist also nicht  $|\psi\rangle \propto |HH\rangle$ , sondern  $|\psi\rangle \propto |HH\rangle + \varepsilon|VV\rangle$ , wenn die Horizontale  $90^\circ$  entspricht. Die Ergebnisse der Fits sind wie oben auch im Anhang zu finden.

**Winkel maximaler Koinzidenzen** Die Winkel maximaler Koinzidenzen sind in Abhängigkeit unserer Fitparameter:

$$\phi_{\max} = C + \frac{90^\circ}{B} \quad (7)$$

Der Fehler ist dann:

$$\sigma_\phi^2 = \sigma_C^2 + \left( \frac{90^\circ \cdot \sigma_B}{B^2} \right)^2 - C(A, B) \frac{180^\circ}{B^2} \quad (8)$$

Allerdings kann es vorkommen, dass der Parameter  $A$  negativ ist. In diesem Fall ist der Winkel maximaler Koinzidenz einfach der Parameter  $C$ . Es ergeben sich folgende Werte:

Messreihe	Winkel maximaler Koinzidenz	Unsicherheit
$\alpha = -45^\circ$	$91,62^\circ$	$0,82^\circ$
$\alpha = 0^\circ$	$9,99^\circ$	$5,89^\circ$
$\alpha = 45^\circ$	$87,33^\circ$	$0,91^\circ$
$\alpha = 90^\circ$	$88,81^\circ$	$0,90^\circ$
$\beta = 0^\circ$	$-9,38^\circ$	$2,95^\circ$

Wir sehen, dass die Maxima für die Messreihen, bei denen der festgehaltene Winkel  $0^\circ$  beträgt wie oben besprochen bei etwa  $0^\circ$  liegt. Hier sind die Unsicherheiten bedeutend größer als bei den anderen Messreihen. Das liegt daran, dass die Zählraten niedriger sind und somit die relativen Fehler deutlich ansteigen. Bei den anderen Messreihen liegt das Maximum bei etwa  $90^\circ$  aus dem einfachen Grund, dass hier die meisten Photonen an Detektor 1 gemessen werden. Dies ist aber nicht der Effekt der falschen Koinzidenzen.

**Bellsche Ungleichung** Jetzt wollen wir den  $S$ -Wert bestimmen und somit überprüfen, ob die Bellsche Ungleichung gültig ist. Zur Bestimmung von  $S$  die verschiedenen Korrelationskoeffizienten (vgl. Gleichung

(2)). Diese müssen durch die Koinzidenzzählraten ausgedrückt werden:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{K(\alpha, \beta) + K(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) - K(\alpha_{\perp}, \beta) - K(\alpha, \beta_{\perp})}{K(\alpha, \beta) + K(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) + K(\alpha_{\perp}, \beta) + K(\alpha, \beta_{\perp})} \quad (9)$$

Hierbei sind die durch  $\perp$  gekennzeichneten Winkel diejenigen, um  $90^\circ$  gedreht zu den nicht so gekennzeichneten Winkeln sind.

Zur Berechnung benutzen wir die Messreihen, bei denen der Polarisator vor Detektor 0 festgehalten wird. Somit stehen die Winkel  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha' = 45^\circ$  fest. (Damit sind  $\alpha_{\perp} = 90^\circ$  und  $\alpha'_{\perp} = -45^\circ$ ). Für die anderen Winkel wählen wir  $\beta = 22,5^\circ$  und  $\beta' = 67,5^\circ$ . Für die einzelnen Koinzidenzraten in Formel (9) setzen wir die Ergebnisse der jeweiligen Anpassung für den entsprechenden festgehaltenen Winkel  $\alpha$  ausgewertet an der benötigten Stelle  $\beta$  ein:

$$K(\alpha, \beta) = -\hat{A}_{\alpha} \cdot \cos(2 \cdot \hat{B}_{\alpha} \cdot (\beta - \hat{C}_{\alpha})) + \hat{D}_{\alpha} \quad (10)$$

Dabei sind die mit dem  $\hat{\cdot}$  gekennzeichneten und mit  $\alpha$  indizierten Variablen die Schätzparameter für die jeweiligen Anpassungen für die Messreihen der Koinzidenzmessung bei konstantem Winkel  $\alpha$ . Diese Formeln werden mithilfe der SymPy Bibliothek in Python definiert für die Winkel  $\alpha = -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$  und  $90^\circ$ . Diese werden dann zu den benötigten Korrelationskoeffizienten zusammengesetzt gemäß Formel (9). Die Formeln für die Korrelationskoeffizienten können dann zusammenaddiert beziehungsweise subtrahiert werden, sodass sich nach Formel (2) der  $S$ -Wert ergibt. Der Vorteil des Benutzens der SymPy Bibliothek ist die Fehlerbetrachtung. Die Gesamtformel, die man mit diesem Vorgehen für  $S$  erhält ist schon zu lang, um sie hier vernünftig darstellen zu können. Somit sind die Ableitungen, die für die Gaußsche Fehlerfortpflanzung notwendig sind, manuell nicht in einer sinnvollen Zeit zu schaffen. SymPy kann die Funktion für  $S$  allerdings nach den Schätzparametern ableiten. Somit wird eine Funktion für die Varianz von  $S$  nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz mit Berücksichtigung der Korvarianzen zwischen den verschiedenen Schätzparametern desselben Fits bestimmt nach:

$$\sigma_S^2 = \sum_k \left( \sigma_p \frac{\partial S}{\partial \hat{p}_k} \right)^2 + 2 \cdot \sum_k \sum_{j>k} \frac{\partial S}{\partial \hat{p}_k} \frac{\partial S}{\partial \hat{p}_j} \cdot C(\hat{p}_k, \hat{p}_j) \quad (11)$$

Hierbei sind die  $\hat{p}_i$  die Schätzparameter. Nun werden die Ergebnisse für die Schätzparameter aus den Fits und die Werte für  $\beta$  in die Formeln für  $S$  und  $\sigma_S^2$  eingesetzt. Man erhält folgendes Ergebnis:

$$S = 1,178 \pm 0,071$$

Das heißt, dass die Bellsche Ungleichung hier nicht verletzt ist. Das ist auch entsprechend der Erwartung, da hier keine Verschränkung vorliegt. Auch die Quantenmechanik sagt für diesen Fall keine Werte voraus, die Größer als 2 sind.



## Der verschränkte Zustand

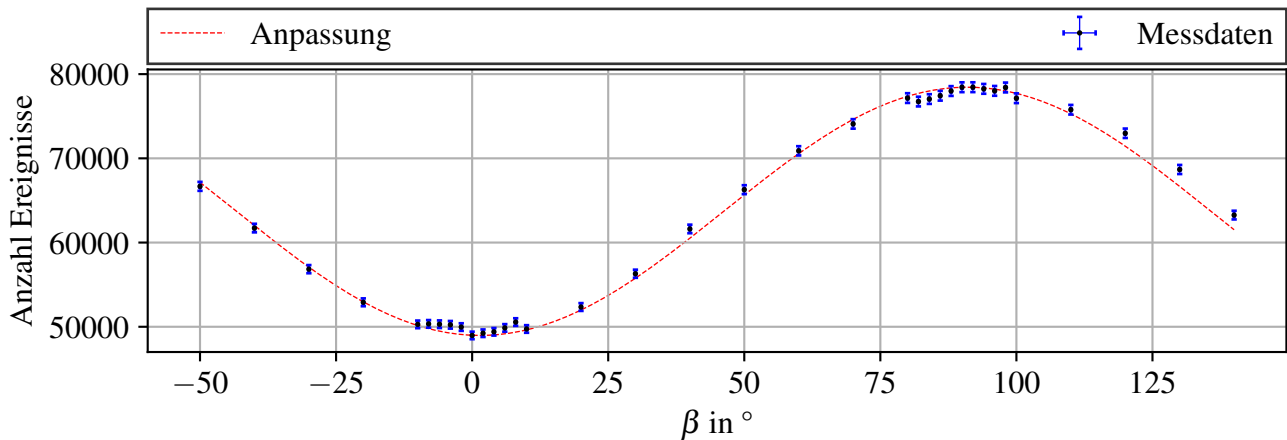


Abbildung 8: Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 0^\circ$ . Hier ist die Systematik noch nicht zu sehen.

**Einzelzählraten** Die Auswertung dieses Versuchsteils erfolgt größtenteils genauso wie die Auswertung des nicht verschränkten Zustandes. Zuerst wird wieder die gleiche trigonometrische Funktion an die Einzelzählraten der Detektoren hinter dem variierten Polarisator aufgetragen gegen den Winkel eben dieses Polarisators angepasst. Auch hier gibt es dieselbe systematische Abweichung außerhalb der Extrempunkte wie bei der Messung des nicht verschränkten Zustandes. Allerdings tritt sie diesmal in der Intensität wie oben nur bei der Messung auf, bei dem der konstante Winkel  $\alpha = 90^\circ$  betrug. Bei den anderen Messreihen tritt diese Systematik auch auf, ist aber deutlich abgeschwächt.

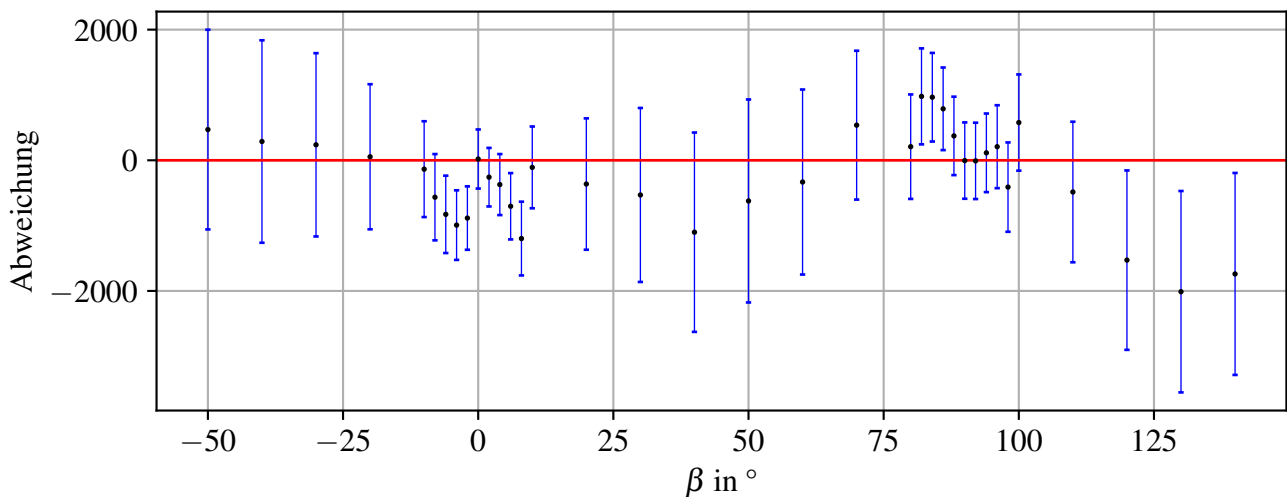


Abbildung 9: Der Residuengraph für die Anpassung an die Daten der Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  bei  $\alpha = 0^\circ$ . Die Systematik lässt sich hier sehen, auch wenn die Daten zwischen den Maxima innerhalb ihrer Fehler mit der Anpassung verträglich sind.

Es gibt also irgendwo einen Fehler im Messvorgang der zu dieser Abweichung führt. Wo dieser Fehler genau liegt ist anhand der Daten alleine aber sehr schwierig festzustellen. Die vollständigen Ergebnisse der Anpassungen sind wieder im Anhang zu finden.

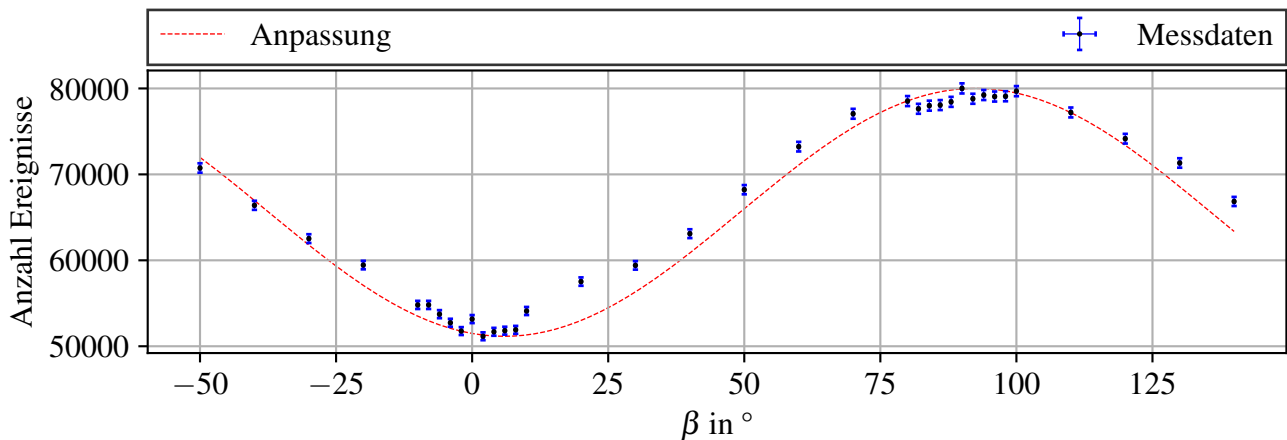


Abbildung 10: Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 90^\circ$ . Hier tritt die Systematik auf.

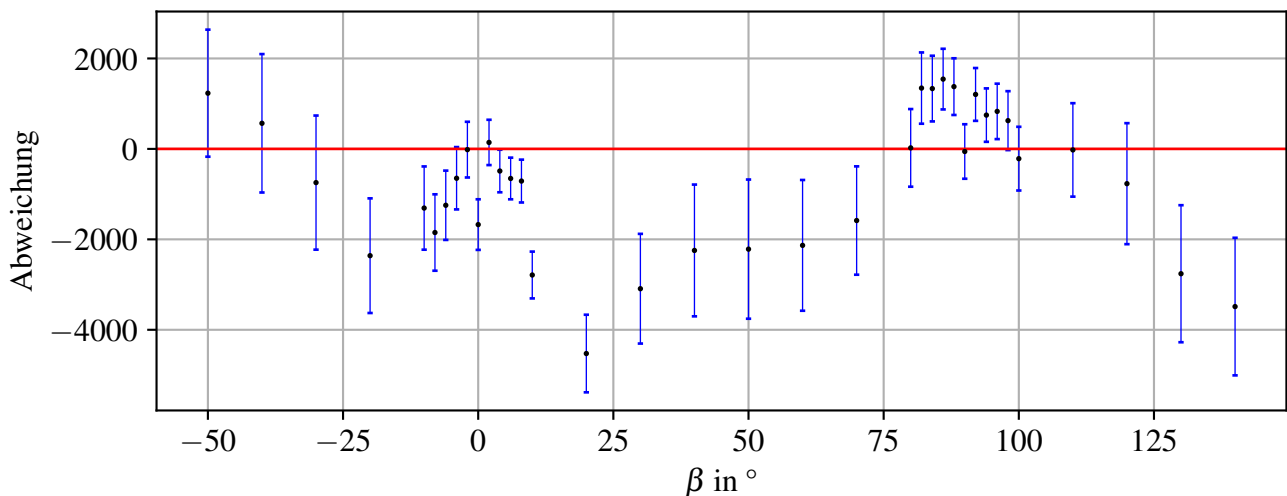


Abbildung 11: Der Residuengraph für die Anpassung an die Daten der Auftragung der Zählungen an Detektor 1 gegen den Winkel  $\beta$  bei  $\alpha = 90^\circ$ . Eindeutig ist die Systematik zu erkennen.

**Polarisationsgrad** Die Polarisationsgrade werden wie oben bestimmt. Sie lauten:

Messreihe	Polarisationsgrad	Unsicherheit
$\alpha = -45^\circ$	0,6069	0,0009
$\alpha = 0^\circ$	0,6157	0,0000
$\alpha = 45^\circ$	0,6134	0,0011
$\alpha = 90^\circ$	0,6100	0,0005
$\beta = 0^\circ$	0,6148	0,0003

Wieder sind die Polarisationsgrade sehr ähnlich aber nicht innerhalb ihrer Fehler miteinander verträglich. Also scheinen die Fehler wieder zu klein abgeschätzt worden zu sein. Theoretisch sollte hier der Polarisationsgrad 0,5 sein. Wir sehen hier Abweichungen von diesem Wert, weil zum einen einfach aufgrund Ungenauigkeiten des Aufbaus wie der, dass möglicherweise die optischen Achsen der Beta-Bariumboratkristalle nicht genau senkrecht aufeinander stehen. Allerdings wurde hier Untergrundrauschen noch nicht berücksichtigt. Wie bei den Messungen zur Fehlerbetrachtung beobachtet wurde, gab es auch bei Diodenströmen

von  $I_D = 0 \text{ mA}$  Ereignisse. Dieser Untergrund bewirkt einen Offset, der wiederum eine Veränderung der Messungen für den Polarisationsgrad bewirkt.

**Koinzidenzzählraten** Auch mit den Koinzidenzzählraten wird hier genauso verfahren wie oben. Es wird wieder dieselbe trigonometrische Funktion an die Daten angepasst. Hier sind wieder systematischen Abweichungen zu erkennen. Die vollständigen Ergebnisse sind wie immer im Anhang zu finden.

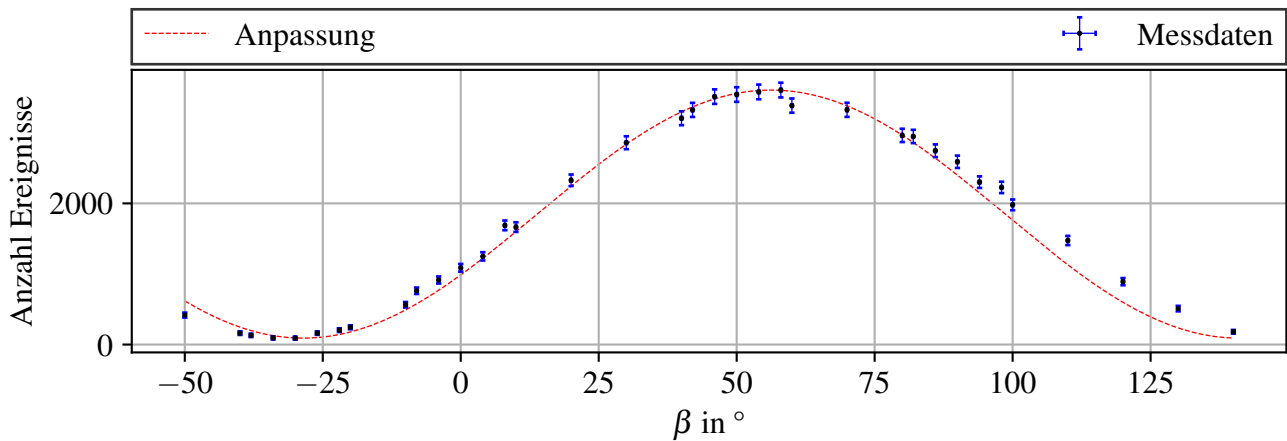


Abbildung 12: Auftragung der Koinzidenzen gegen den Winkel  $\beta$  und die zugehörige Anpassung bei  $\alpha = 45^\circ$

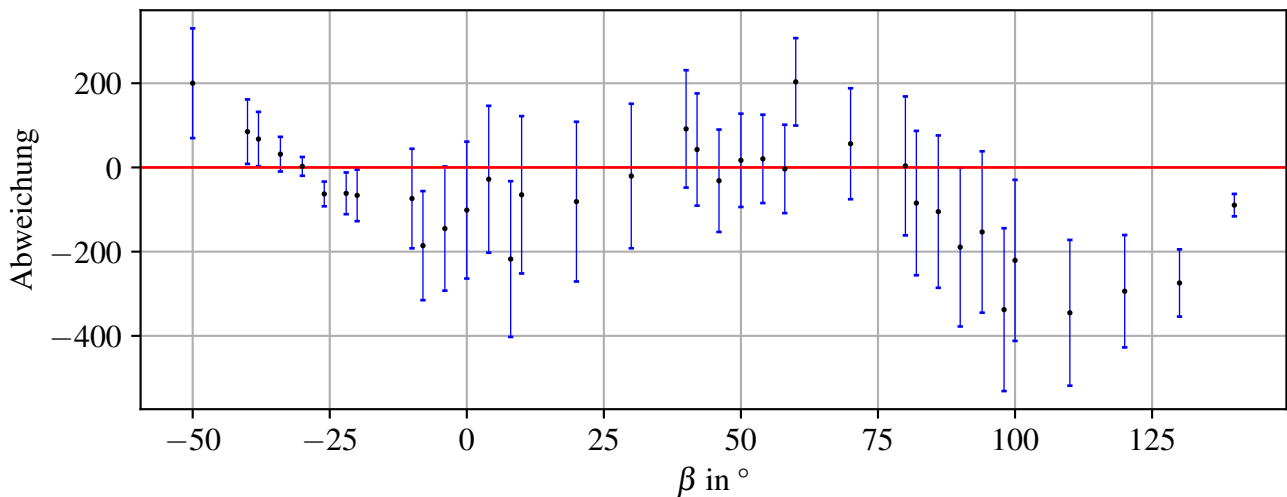


Abbildung 13: Der Residuengraph für die Anpassung an die Daten der Auftragung der Koinzidenzen gegen den Winkel  $\beta$  bei  $\alpha = 45^\circ$

**Winkel maximaler Koinzidenzen** Die Winkel maximaler Koinzidenzen werden wie oben bestimmt. Auch hier muss darauf geachtet werden ob  $A$  positiv oder negativ ist. Die Ergebnisse lauten:

Messreihe	Winkel maximaler Koinzidenz	Unsicherheit
$\alpha = -45^\circ$	$119,85^\circ$	$3,39^\circ$
$\alpha = 0^\circ$	$1,72^\circ$	$1,12^\circ$
$\alpha = 45^\circ$	$56,67^\circ$	$0,66^\circ$
$\alpha = 90^\circ$	$88,20^\circ$	$4,19^\circ$
$\beta = 0^\circ$	$1,02^\circ$	$1,35^\circ$

Man erkennt, dass die Winkel maximaler Koinzidenzen sehr grob bei  $0^\circ$  plus dem Winkel des festgehaltenen Polarisators sind. (Das System ist rotationssymmetrisch bezüglich Drehungen um  $180^\circ$ . Es ist also  $0^\circ \triangleq 180^\circ$ ) Es gibt nun größtenteils zwei verschiedene Arten von polarisationsverschränkten Zuständen in diesem System. Diese sind  $|\psi\rangle \propto |VV\rangle \pm |HH\rangle$ . Bei dem symmetrischen Zustand ( $|\psi\rangle \propto |VV\rangle + |HH\rangle$ ) erhält man in der Quantenmechanik  $E(\alpha, \beta) \propto \cos(2(\alpha - \beta))$ . Im antisymmetrischen Fall erhält man  $E(\alpha, \beta) \propto \cos(2(\alpha + \beta))$ . In unserem Fall handelt es sich also um den symmetrischen Zustand  $|\psi\rangle \propto |VV\rangle + |HH\rangle$ .

**Sichtbarkeit** Man kann die Sichtbarkeit  $V$  des verschränkten Zustandes definieren. Eine Definition lautet:

$$V = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{K_{\max} + K_{\min}} \quad (12)$$

Ausgedrückt in unseren Fitparametern ist die Sichtbarkeit dann:

$$V = \frac{A}{D} \quad (13)$$

Damit ergibt sich der Fehler zu:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\sigma_A}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D}{D^2}\right)^2 - 2 \cdot C(A, D) \frac{A}{D^3} \quad (14)$$

Die Ergebnisse lauten dann:

Messreihe	Sichtbarkeit	Unsicherheit
$\alpha = -45^\circ$	0,9603	0,0121
$\alpha = 0^\circ$	0,9898	0,0095
$\alpha = 45^\circ$	0,9517	0,0042
$\alpha = 90^\circ$	0,9980	0,0004
$\beta = 0^\circ$	0,9832	0,0017

Die Sichtbarkeiten sind für die Winkel  $\pm 45^\circ$  signifikant kleiner als für die anderen Winkel. Dies ist merkwürdig, da der Polarisationszustand der Photonen, wenn sie die Quelle verlassen keine ausgezeichnete Richtung hat.

**Bellsche Ungleichung** Der Wert für  $S$  und der Fehler werden wie oben bestimmt. Allerdings betrachten wir verschiedene Werte von  $S$  aufgetragen gegen eine Wahl des Winkels  $\beta$ , wobei wir immer  $\beta' = 45^\circ + \beta$  wählen. Dies ergibt folgenden Graphen:

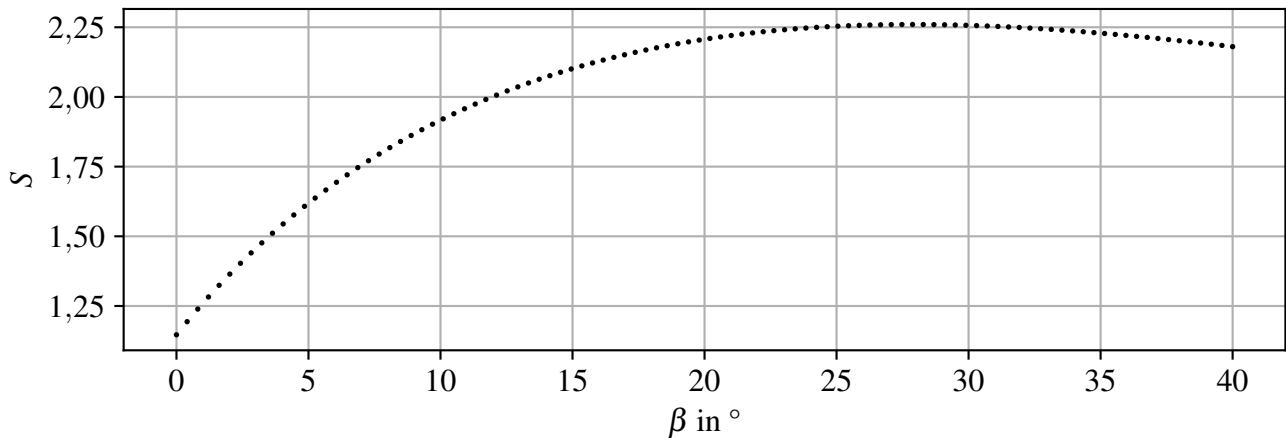


Abbildung 14: Die Auftragung von  $S$  gegen  $\beta$

Man kann ein Maximum bei etwa  $27^\circ$  erkennen. Es wird also  $\beta = 27^\circ$  und  $\beta' = 72^\circ$  gewählt. Damit erhält man folgenden Wert:

$$S = 2,259 \pm 0,121$$

Hier erhalten wir also eine  $2\sigma$ -Abweichung von der Vorhersage der LVVT. Das heißt, dass LVVT nicht anzunehmen sind. Allerdings sagt die Quantenmechanik Werte von bis zu 2,8 voraus. Davon sind wir hier noch weit entfernt.

## Conclusio

Dieses Experiment hinterlässt ein paar Unklarheiten. Zum einen die merkwürdige Systematik bei den Messungen der Einzelzählraten. Die Unsicherheiten auf alle Zählraten sind großen Schwankungen unterworfen, was jede Fehlerangabe ungenau macht. Abschließend konnte aber jedoch eine Verletzung der Bellschen Ungleichung gezeigt und somit das ultimative Ziel dieses Versuchsteils erreicht werden.

## Teil 2: Ununterscheidbarkeit von Photonen

### Ziel des Versuchs

Hier soll die Ununterscheidbarkeit von Photonen gezeigt werden. Dies geschieht mithilfe des Hanbury-Brown-Twiss-Experiments. Dann soll mithilfe des Hong-Ou-Mandel-Effekts die Kohärenzzeit der Photonen unserer Quelle bestimmt werden.

### Theoretischer Hintergrund

#### Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung

Im Hanbury-Brown-Twiss-Experiment wird ein Photonenstrahl auf einen Strahlteiler gelenkt. An den Ausgängen wird gemessen, wie oft ein Photon dort ankommt. Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für die beiden Messungen ergibt sich dann zu:

$$g^{(2)}(0) = \frac{P_{12}}{P_1 P_2} \quad (15)$$

Hierbei sind die  $P_i$  die Beobachtungswahrscheinlichkeiten an den beiden Ausgängen des Strahlteilers und  $P_{12}$  die Koinzidenzwahrscheinlichkeit. Diese Korrelationsfunktion kann auch durch die Einzelzählraten an den Ausgängen des Strahlteilers und die Koinzidenzrate ausgedrückt werden:

$$g^{(2)}(0) = \frac{N_{12}}{N_1 N_2 \Delta t} \quad (16)$$

Hierbei ist  $\Delta t$  das Koinzidenzeitintervall. Im Hanbury-Brown-Twiss Experiment (ab hier HBT) wird jedoch ein zweiter Photonenstrahl benutzt. In diesem wird dann ein Photon erzeugt, wenn auch im ersten Strahl ein Photon erzeugt wird. Das Photon im zweiten legt dieselbe Strecke zurück wie ein Photon im anderen Strahl unabhängig von seinem Ausgang aus dem Strahlteiler zum Detektor. Somit kann das Photon aus dem zweiten Strahl dasjenige aus dem ersten *ankündigen*. Man kann dann eine konditionierte (engl.: *heralded*) Korrelationsfunktion definieren:

$$g^{(2)}(0)_h = \frac{P_{012}}{P_{01} P_{02}} \quad (17)$$

Hierbei ist  $P_{01}$  und  $P_{02}$  die Koinzidenzwahrscheinlichkeit der Messung des ankündigenden Photons und des Photons an den jeweiligen Ausgängen des Strahlteilers und  $P_{012}$  die Koinzidenzwahrscheinlichkeit für alle diese Ereignisse. Auch diese Korrelationsfunktion kann durch die Koinzidenzraten ausgedrückt werden:

$$g^{(2)}(0)_h = \frac{N_{012} N_0}{N_{01} N_{02}} \quad (18)$$

Wir erwarten hier aufgrund der Unteilbarkeit der Photonen Werte der Korrelationsfunktionen, die deutlich kleiner als 1 sind.

#### Zwei-Photonen-Interferenz am Strahlteiler

Treffen zwei Photonen gleichzeitig aus verschiedenen Richtungen auf einen Strahlteiler, sodass beide einzeln gesehen jeweils den Strahlteiler in die gleichen zwei Richtungen wieder verlassen können, kann der Zustand, der den Strahlteiler wieder verlässt, durch Anwenden der bosonischen Erzeugungsoperatoren für eben die zwei möglichen Richtungen  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  auf den Vakuumzustand konstruiert werden:

$$|\psi\rangle = \left( \sqrt{\eta - \eta^2} (\hat{a}^2 - \hat{b}^2) + (2 \cdot \eta - 1) \cdot \hat{a} \cdot \hat{b} \right) |0\rangle \quad (19)$$

Hierbei ist  $\eta$  der Reflektionsgrad des Strahlteilers. Wenn dieser nun genau 0,5 ist, fällt der letzte Term weg. Das heißt, dass beide Photonen den Strahlteiler in derselben Richtung verlassen.

### Hong-Ou-Mandel-Effekt

Die Photonen, die auf den Strahlteiler treffen, können mit einem Zeitversatz  $\Delta t$  auf den Strahlteiler treffen. Dann sind die Photonen *partiell* unterscheidbar. Dann ist die Koinzidenzwahrscheinlichkeit für eine Photonenmessung an den beiden Ausgängen eines 50:50 Strahlteilers näherungsweise gegeben durch:

$$K(\Delta t) = \frac{C}{2} \left( 1 - e^{-(\Delta\omega\Delta t)^2} \right) \quad (20)$$

Zeichnet man also die Koinzidenzzählrate gegen den Zeitversatz auf, sieht man den sogenannten Hong-Ou-Mandel-Dip (HOM-Dip).  $1/\Delta\omega$  ist die Kohärenzzeit der Quelle.

### Versuchsaufbau und Durchführung

Als Photonenquelle wird dieselbe verwendet, die auch im ersten Versuchsteil benutzt wurde. Dabei wird der Polarisationsfilter zum Einstellen des verschränkten Zustandes entfernt. Die beiden Photonenstrahlen werden in eine optische Faser eingekoppelt, nachdem sie einen Tiefpassfilter und einen Polarisator, der so eingestellt ist, dass maximale Zählraten gemessen werden.

Zuallererst werden Kennlinien für die Laserdiode aufgenommen. Dazu werden die beiden Fasern, in die die Photonenstrahlen eingekoppelt sind, direkt mit den Detektoren (Wie in Teil 1 sind das Avalanche Photo Dioden) verbunden. Bei Diodenströmen von 0 mA bis 45 mA werden dann bei einer Messzeit von 1 s die Einzelzählungen und die Koinzidenzzählungen aufgenommen. Die Koinzidenzlogik arbeitet wie im ersten Teil mit einem Koinzidenzzeitintervall von  $\Delta t = 30 \text{ ns}$ .

Zur Bestimmung der Korrelationsfunktionen für den Strahlteiler wird eine Faser vom Detektor entfernt und an einen Faserstrahlteiler angeschlossen. Die beiden Ausgänge dieses werden an zwei Detektoren angeschlossen. Für Diodenströme zwischen 20 mA und 45 mA, werden bei einem Messintervall von 10 s die Einzelzählungen an den Detektoren sowie die Koinzidenzen aufgenommen.

Zur Messung des HOM-Dips werden die Fasern in die die Photonenstrahlen eingekoppelt werden mit einem Zwei-Photonen-Interferometer verbunden. Dieses besitzt eine Mikrometerschraube, mit der sich eine Wegdifferenz zwischen den beiden in das Interferometer einfallenden Strahlengängen einstellen lässt. Die Ausgänge des Interferometers werden mit zwei Detektoren verbunden. Es wird bei einem Diodenstrom von 40 mA unter Messintervallen von 200 ms und 500 ms unter Variation der Verzögerungsstrecke mithilfe der Mikrometerschraube die Koinzidenzrate aufgenommen, sodass der HOM-Dip zu erkennen ist. (Es muss der richtige Bereich der Wegdifferenz zwischen den Strahlengängen abgetastet werden.) Dann werden die Tiefpassfilter vor den Fasereinkopplungen der Photonenstrahlen entfernt und die Messung bei einer Messzeit von 500 ms wiederholt.

Als letztes wird einer der Fasern, die von einem der Ausgänge des Interferometers kommen, vom Detektor entfernt und an den Faserstrahlteiler angeschlossen. Die beiden Ausgänge werden mit Detektoren verbunden. Bei einem Messintervall von 1 s werden die Koinzidenzzählungen notiert, wobei die Verzögerungsstrecke einmal so eingestellt ist, dass die Messung im HOM-Dip erfolgt und einmal so, dass sie außerhalb stattfindet.

### Messdaten und Auswertung

#### Kennlinie der Laserdiode

Auf die Zählraten werden in diesem Versuchsteil dieselben Unsicherheiten angenommen wie im ersten Versuchsteil. Der Fehler auf den Diodenstrom ist vernachlässigbar gegenüber diesen. Die Messungen zur Kennlinie der Laserdiode ergaben:

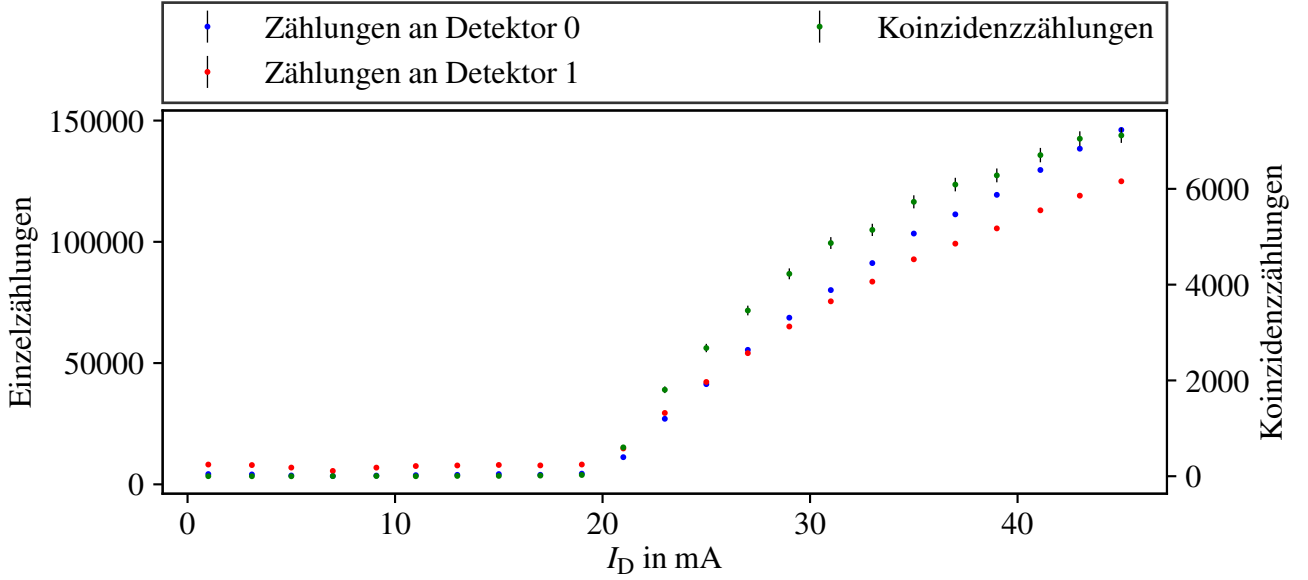


Abbildung 15: Die Einzelzählungen und Koinzidenzen für die Messung der Kennlinie

Man erkennt, dass bei niedrigen Diodenströmen  $I_D$  die Zählraten konstant niedrig sind. Ab einem Diodenstrom von etwa 20 mA steigen die Zählraten. Jedoch nimmt der Grad der Steigung konsekutiv ab. Der Schwellenstrom der Laserdiode, bei dem der Pumpvorgang in der Diode ausreicht, um die Besetzungsinversion zu erreichen und somit den Laserbetrieb anfangen lässt, ist also etwa 20 mA. Vor dieser Schwelle sieht man allerdings Rauschen, das einen Beitrag hat, der um Vielfache größer ist als alle Unsicherheiten auf die Zählraten. Dieses Rauschen verfälscht somit alle Messungen.

### Hanbury-Brown-Twiss-Experiment zur Bestimmung der Korrelationsfunktionen zweiten Grades

Auf die Einzelzählungen und Koinzidenzzählungen, die einen Wert ergaben, der größer als 200 ist, wird wieder unser Fehlermodell aus Teil 1 benutzt. Auch der Fehler auf den Diodenstrom wird wieder vernachlässigt. Für Koinzidenzzählungen, die kleiner sind als 200 ist unser Fehlermodell nicht mehr sinnvoll (vgl. auch Abbildung 7). Dann wird zu dem Fehler aus unserem Fehlermodell noch ein uniformer Fehler von 10 hinzuaddiert. Die Messungen ergaben:

$I_D$	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_{01}$	$N_{02}$	$N_{12}$	$N_{012}$
20 mA	43685	48972	58390	400	411	11	0
30 mA	748268	394220	413893	24560	27334	487	49
40 mA	1241470	637329	702819	39189	45896	1353	126
45 mA	1442900	726275	811299	43250	50868	1797	138

Hierbei ist Detektor 0 derjenige, der die Photonen aus dem Strahl misst, der nicht in den Strahlteiler eingekoppelt ist. Mit diesen Werten und den Formeln (16) und (18) können dann die Korrelationsfunktionen zweiten Grades jeden Diodenstrom berechnet werden. Allerdings werden hier keine falschen Koinzidenzen abgezogen. Die Fehler folgen mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{g^{(2)}(0)}^2 = \left( \frac{\sigma_{N_{12}}}{N_1 N_2 \cdot \Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{N_1 N_{12}}}{N_1^2 N_2 \cdot \Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{N_2 N_{12}}}{N_1 N_2^2 \cdot \Delta t} \right)^2 \quad (21)$$

und:

$$\sigma_{g^{(2)}(0)_h}^2 = \left( \frac{\sigma_{N_{012} N_0}}{N_{01} N_{02}} \right)^2 + \left( \frac{N_{012} \sigma_{N_0}}{N_{01} N_{02}} \right)^2 + \left( \frac{N_{012} N_0 \sigma_{N_{01}}}{N_{01}^2 N_{02}} \right)^2 + \left( \frac{N_{012} N_0 \sigma_{N_{02}}}{N_{01} N_{02}^2} \right)^2 \quad (22)$$



Damit ergibt sich:

$I_D$	$g^{(2)}(0)$	$\sigma_{g^{(2)}(0)}$	$g^{(2)}(0)_h$	$\sigma_{g^{(2)}(0)_h}$
20 mA	0,128	0,045	0,000	5,314
30 mA	0,099	0,007	0,055	0,021
40 mA	0,101	0,004	0,087	0,018
45 mA	0,102	0,004	0,091	0,017

Die Berechnung der konditionierten Koerrelationsfunktion aus der Messung bei einem Diodenstrom von 20 mA ist natürlich wenig aussagekräftig, da hier keine Dreifachkoinzidenz gemessen wurde. Alle Berechnungen außer der konditionierten Korrelationsfunktion für die 30 mA-Messung stimmen innerhalb ihrer Fehler mit einem Wert von circa 0,1 überein. Wir nehmen also an, dass dieser eine Fall ein Ausreißer ist. Auf jedenfall ist die Korrelationsfunktion deutlich kleiner als 1. Das heißt, dass vom Strahlteiler nicht unmittelbar aufeinanderfolgend zwei Photonen emittiert werden. Dies widerspricht einer semiklassischen Vorstellung von Photonen als Wellenpakete im elektromagnetischen Feld. Diese wären teilbar. Damit würde beim Eintreffen eines Wellenpaketes auf den Strahlteiler zwei Wellenpakete mit der halben Intensität die beiden Ausgänge des Strahlteilers verlassen. Die Korrelationsfunktionen wären größer als 1. Da dies nicht der Fall ist, müssen Photonen unteilbar sein.

Mit den Ergebnissen dieses Versuchsteils kann auch das Teilungsverhältnis  $\eta$  des Strahlteilers bestimmt werden. Es ist einfach das Verhältnis von den an Detektor 1 gemessenen Photonen, zu denen an Detektor 0. Allerdings muss hier berücksichtigt werden, dass die beiden Detektoren auch bei gleicher Anzahl eintreffender Photonen nicht gleich viele Ereignisse messen. Sie werden also mit den in der Kennlinienmessung gemessenen Werten bei dem jeweiligen Diodenstrom normiert. Da dort nicht teilweise nicht genau bei den hier gemessenen Strömen gemessen wurde, sondern jeweils ein Messpunkt bei einem Strom, der 1 mA größer war, wird einfach der Mittelwert dieser beiden Werte benutzt. Der Fehler auf diesen Wert folgt dann mittels Fehlerfortpflanzung. Die Formel für das Teilungsverhältnis lautet dann:

$$\eta = \frac{N_1 N_{0'}}{N_0 N_{1'}} \quad (23)$$

Hierbei sind die mit ' gekennzeichneten Zählraten diejenigen aus der Kennlinienmessung. Diese Formel ist von seiner Form her dieselbe wie die zur Bestimmung der konditionierten Korrelationsfunktion. Somit ist die Fehlerfortpflanzung auch die gleiche. Es ergeben sich dann folgende Werte:

$I_D$	$\eta$	$\sigma_\eta$
20 mA	0,761	0,042
30 mA	0,558	0,012
40 mA	0,585	0,011
45 mA	0,589	0,010

Die Messung für 20 mA weicht deutlich von den anderen ab. Dies ist nicht sehr verwunderlich, da hier der Schwellenstrom der Diode gerade erst überschritten ist, und Rauschen die Messung dominiert. Dieses wurde jedoch in unserem Fehlermodell nicht berücksichtigt. Die sind innerhalb ihrer Fehler miteinander kompatibel. Allerdings liegt der wahre Wert bei  $\eta = 0,535$ . Davon weichen zumindest die zwei Messungen mit den höchsten Diodenströmen wieder signifikant ab. Grund dafür könnte auch wieder das schon genannte Rauschen sein.

### Hong-Ou-Mandel-Dip

Bei der Durchführung dieses Versuchsteils gab es ein Problem mit dem Versuchsaufbau. Die Strahlengangdifferenz verändert sich auch ohne betätigen der Mikrometerschraube kontinuierlich selbstständig. Damit wurde eine Anpassung einer Funktion an die Daten unmöglich. Trotzdem können die Daten ausgewertet

werden. Wir nehmen an, dass der statistische Fehler auf die Strahlengangdifferenz bei den späteren Berechnungen vernachlässigbar gegen die statistischen Fehler der Koinzidenzraten. Das automatische Verstellen der Schraube ist ein systematischer Fehler und a priori schwer zu bestimmen. Die Messungen ergaben beispielsweise:

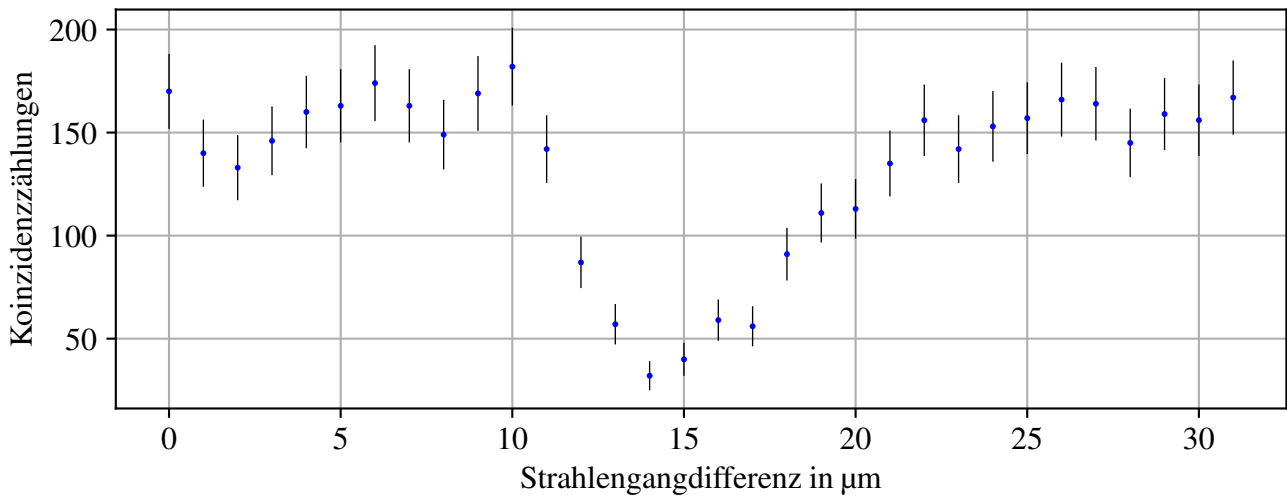


Abbildung 16: Auftragung der Koinzidenzzählungen gegen die Streckenänderung der Mikrometerschraube bei einem Messintervall von 200 ms

Man erkennt den HOM-Dip zwar eindeutig, allerdings ist auch erkennbar, dass die Daten nicht wirklich gaußförmig sind.

**Sichtbarkeit** Für den HOM-Dip kann man eine Sichtbarkeit  $V$  definieren:

$$V = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{K_{\max}} \quad (24)$$

Dabei sind die  $K$  die maximalen und minimalen Koinzidenzzählungen. Für die minimalen Koinzidenzzählungen wurde einfach die minimale gemessene Koinzidenz benutzt. Die maximale ist das gewichtete Mittel aus den Zählungen außerhalb des HOM-Dips. Der Fehler auf diese ist dann mit den Fehlern  $\sigma_i$  auf die einzelnen Zählungen:

$$\frac{1}{\sigma_{K_{\max}}}^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (25)$$

Der Fehler auf die Sichtbarkeit ist:

$$\sigma_V^2 = \left( \frac{\sigma_{K_{\min}}}{K_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{K_{\max}} K_{\min}}{K_{\max}^2} \right)^2 \quad (26)$$

Das ergibt folgende Ergebnisse:

Tiefpassfilter	Messintervall	$V$	$\sigma_V$
Ja	200 ms	0,793	0,046
Ja	500 ms	0,725	0,034
Ja	500 ms	0,781	0,029
Nein	500 ms	0,711	0,032

Die Sichtbarkeiten liegen alle im Bereich von 70 % bis 80 %. Das heißt, dass der HOM-Dip immer sehr deutlich gemessen wurde.

**Kohärenzzeit** Um die Kohärenzzeit zu bestimmen, muss die Breite des HOM-Dips gefunden werden, also die Stellen, an denen die Koinzidenzzählungen wieder auf  $K_{\max} - 1/e(K_{\max} - K_{\min})$  abfallen:

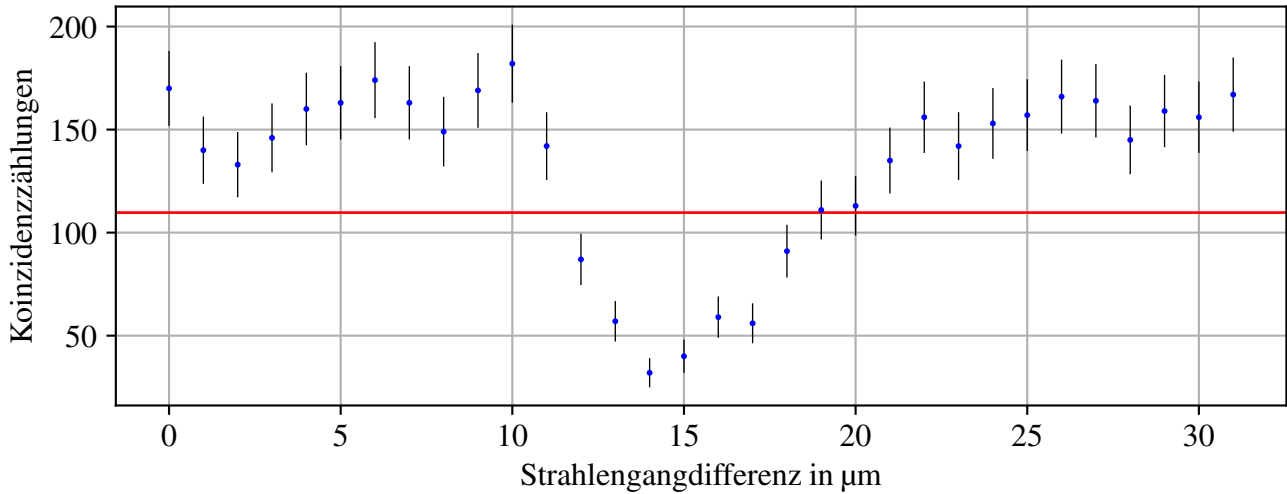


Abbildung 17: Auftragung der Koinzidenzzählungen gegen die Streckenänderung der Mikrometerschraube bei einem Messintervall von 200 ms. Außerdem ist hier die Koinzidenz eingezeichnet, bei der die Breite abgelesen wird (Die rote Linie).

$K_{\max}$  und  $K_{\min}$  werden wie oben bestimmt. Wir ziehen also von allen Messpunkten den Wert  $K_{\max} - 1/e(K_{\max} - K_{\min})$  ab. Der Fehler auf diese verschobenen Messpunkte lautet dann:

$$\sigma_{\text{neu}}^2 = \sigma_{\text{alt}}^2 + \left(\frac{\sigma_{K_{\min}}}{e}\right)^2 + \left(\sigma_{K_{\max}} \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right)^2 \quad (27)$$

Dann werden in den bearbeiteten Daten jeweils zwei nebeneinanderliegende Datenpunkte gesucht, bei denen eine bearbeitete Koinzidenz größer und eine kleiner als null ist. Durch diese zwei Punkte wird dann eine Gerade gelegt und die Nullstelle dieser Geraden berechnet. Wenn  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  zwei solche Punkte sind, ist die Nullstelle also:

$$x_N = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \quad (28)$$

Der Fehler darauf folgt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{x_N}^2 = \left(\sigma_{x_1} \left(1 - \frac{y_1}{y_1 - y_2}\right)\right)^2 + \left(\sigma_{x_2} \frac{y_1}{y_1 - y_2}\right)^2 + \left(\sigma_{y_1} \frac{(x_2 - x_1)y_2}{(y_1 - y_2)^2}\right)^2 + \left(\sigma_{y_2} \frac{(x_2 - x_1)y_1}{(y_2 - y_1)^2}\right)^2 \quad (29)$$

Jetzt wird die Differenz dieser beiden Nullstellen gebildet. Diese wird durch  $2c$  geteilt ( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit). Das Ergebnis ist die Kohärenzzeit  $1/\Delta\omega$  beziehungsweise der Kehrwert der Bandbreite des Spektrums der Photonenquelle. Es ergeben sich dann folgende Werte:

Tiefpassfilter	Messintervall	Kohärenzzeit	Unsicherheit
Ja	200 ms	12,25 fs	1,95 fs
Ja	500 ms	12,78 fs	1,18 fs
Ja	500 ms	20,06 fs	1,01 fs
Nein	500 ms	8,61 fs	0,32 fs

Für die Messungen mit Tiefpassfilter erkennt man, dass zwei Werte kompatibel sind, aber einer deutlich größer ist. Das liegt höchstwahrscheinlich an dem kontinuierlichen ungewollten Verstellung der Verzöge-

rungsstrecke. Bei den kleineren Werten wurde der HOM-Dip in der entgegengesetzten Richtung abgetastet, in der die automatische Verstellung lief. Bei dem größeren Wert in die gleiche Richtung. Jedoch sind alle Werte mit Tiefpassfilter größer als der Wert für die Messung ohne ihn. Das heißt die Spektrale Bandbreite ohne Tiefpassfilter ist größer als die ohne Tiefpassfilter. Das stimmt durchaus mit den Erwartungen überein.

### Zwei-Photonen-Interferometer mit Hanbury-Brown-Twiss

Hier führen wir nur eine qualitative Analyse der Messergebnisse durch, da der HOM-Dip schon im vorigen Teil quantitativ ausgewertet wurde. Die Messergebnisse ergaben:

	$N_{01}$	$N_{02}$	$N_{12}$	$N_{012}$
Im HOM-Dip	78	109	418	2
Im HOM-Dip (nicht im Minimum)	154	179	483	0
Außerhalb des HOM-Dips	477	523	288	0

Hierbei ist Detektor 0 derjenige, der die Photonen der Faser misst, die direkt aus dem Zweiphotoneninterferometer kommen. Die Detektoren 1 und 2 nehmen die Photonen der Fasern aus dem Faserstrahlteiler auf. Zuallererst ist zu bemerken, dass die Dreifachkoinzidenzen nicht auszuwerten sind, da sie einfach zu niedrig sind.

Es ist aber auffällig, dass die Zählraten  $N_{01}$  und  $N_{02}$  im Dip deutlich kleiner sind als außerhalb, jedoch die Koinzidenz  $N_{12}$  im Dip ansteigt. Die erste Beobachtung deckt sich mit der Beobachtung des HOM-Dips. Wenn die zwei Photonen aus der Quelle gleichzeitig auf den Strahlteiler fallen, verlassen sie diesen gemeinsam in derselben Richtung. Daran, dass in diesem Fall die Koinzidenz  $N_{12}$  steigt, ist zu erkennen, dass tatsächlich zwei Photonen das Interferometer verlassen. Diese zwei werden dann am Faserstrahlteiler getrennt und an den Detektoren 1 und 2 gemessen.

### Conclusio

Die Messungen zur den Korrelationsfunktion waren sehr erfolgreich, auch wenn das Teilungsverhältnis des Strahlteilers nicht mit letzter Sicherheit genau bestimmt werden konnte. Die restlichen Messungen waren stark beeinträchtigt durch das eigenmächtige Verhalten der Verzögerungsstrecke. Jedoch stimmen die Messungen zumindest quantitativ mit den Vorhersagen überein.

# Anhang

## Rohdaten

### Zählungen bei der Fehlermessung

$I_D = 30 \text{ mA}$		$I_D = 40 \text{ mA}$		$I_D = 45 \text{ mA}$		$I_D = 0 \text{ mA}$	
Detektor 0	Detektor 1	Detektor 0	Detektor 1	Detektor 0	Detektor 1	Detektor 0	Detektor 1
79900	70398	123427	99795	151640	124389	4168	7413
80212	70534	123944	100371	153150	122906	4117	7782
80659	70440	123763	100556	153025	122181	4202	7860
80600	70522	122781	100182	152807	121510	4152	7877
80345	70486	122279	100519	151440	121092	4088	7887
80887	70405	122427	100643	151357	120640	4018	7718
80899	70173	122696	100338	152490	120552	4093	7585
81078	70347	122839	100575	153442	121305	4040	7472
80975	69966	122623	100001	154755	121906	3876	7386
80463	70437	122430	100424	155040	122049	3920	6999

### Der nicht verschränkte Zustand

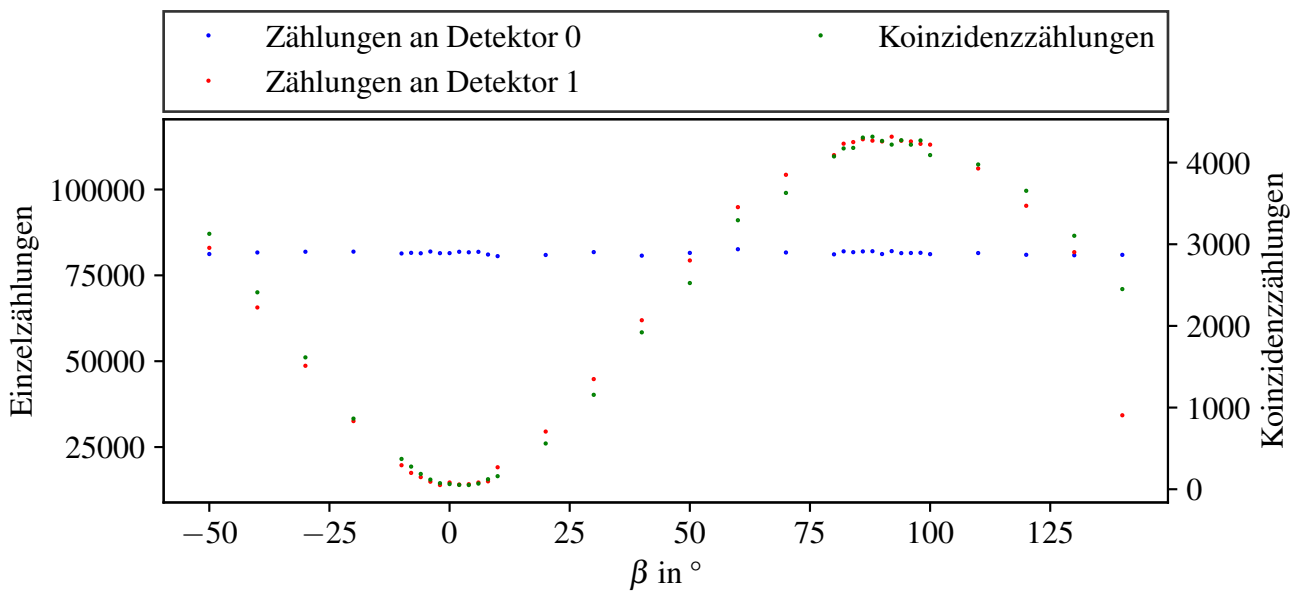


Abbildung 18: Die Rohdaten für die Vermessung des nicht verschränkten Zustandes bei  $\alpha = -45^\circ$ .

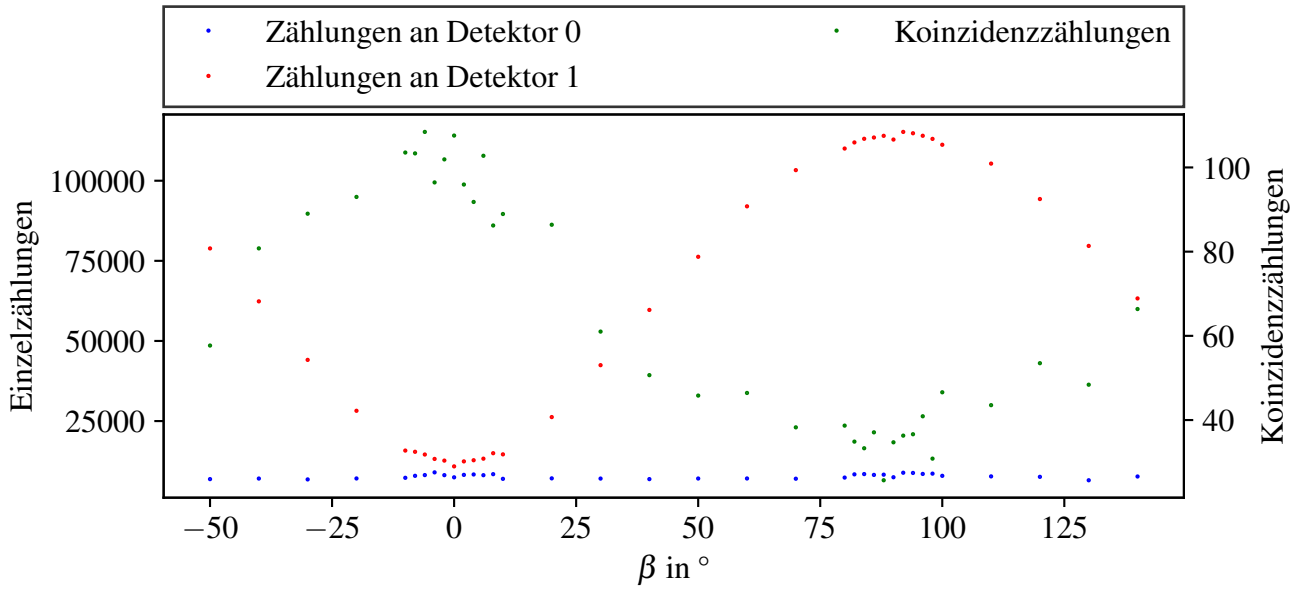


Abbildung 19: Die Rohdaten für die Vermessung des nicht verschränkten Zustandes bei  $\alpha = 0^\circ$ .

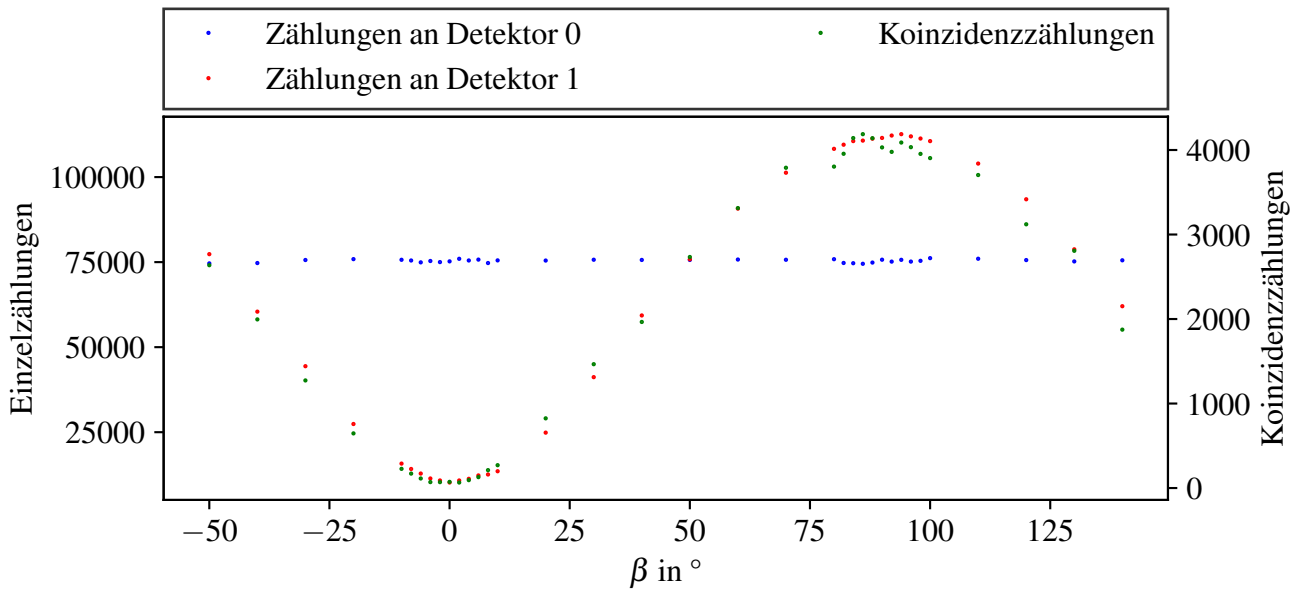
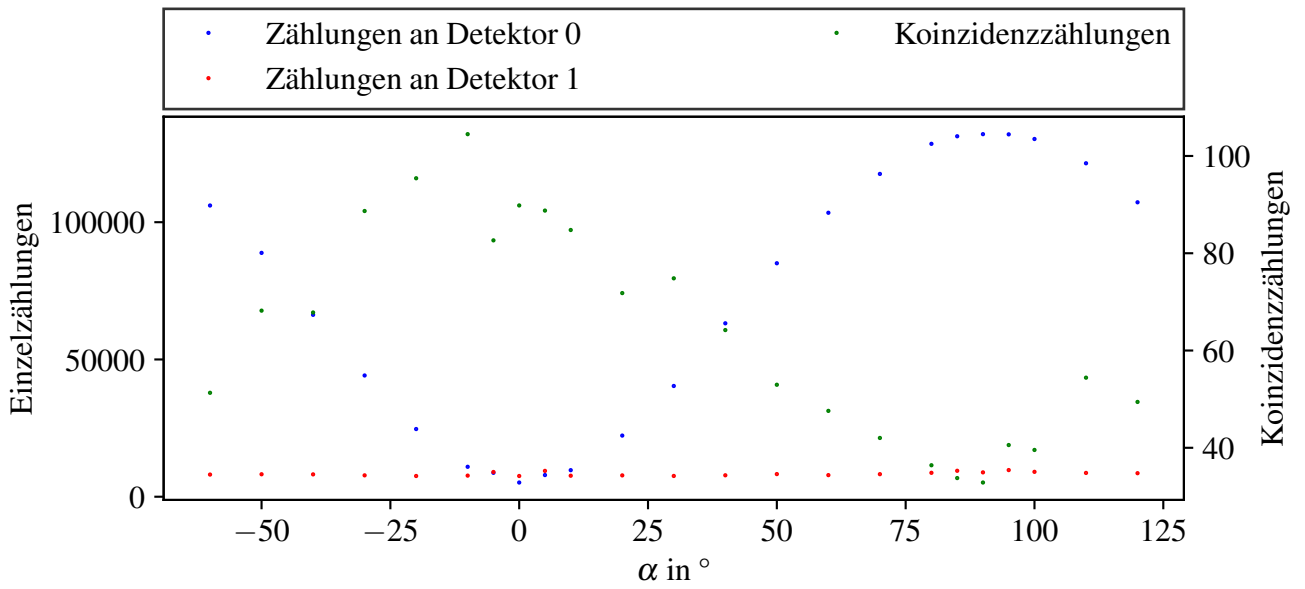
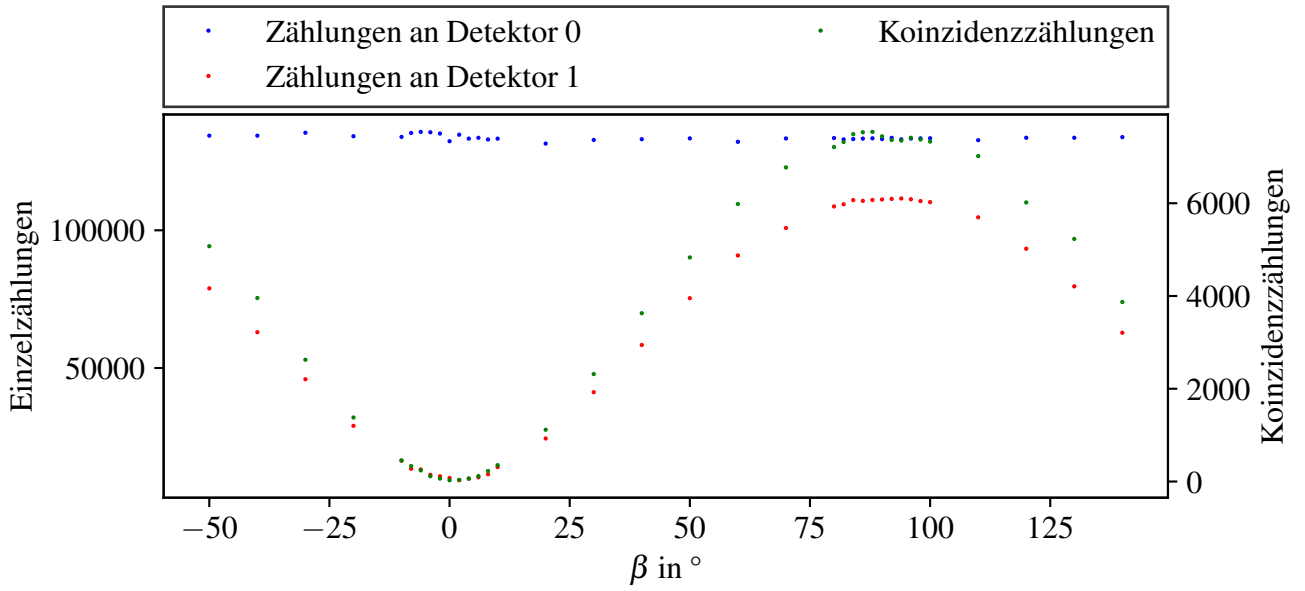


Abbildung 20: Die Rohdaten für die Vermessung des nicht verschränkten Zustandes bei  $\alpha = 45^\circ$ .



## Der verschränkte Zustand

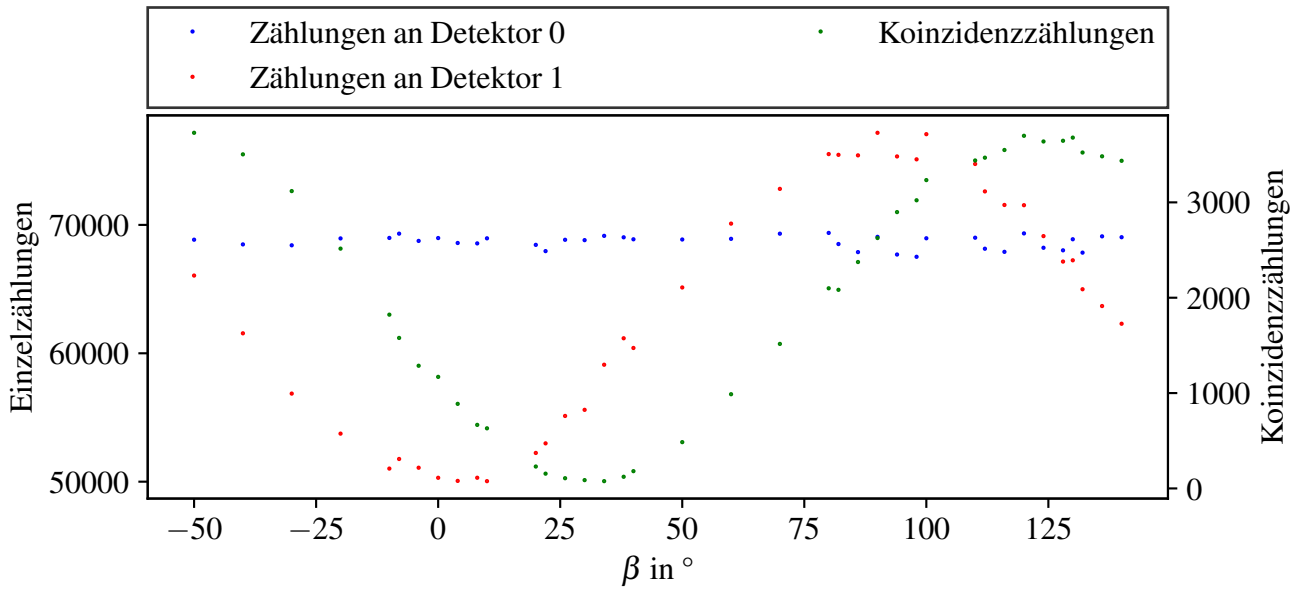


Abbildung 23: Die Rohdaten für die Vermessung des verschränkten Zustandes bei  $\alpha = -45^\circ$ .

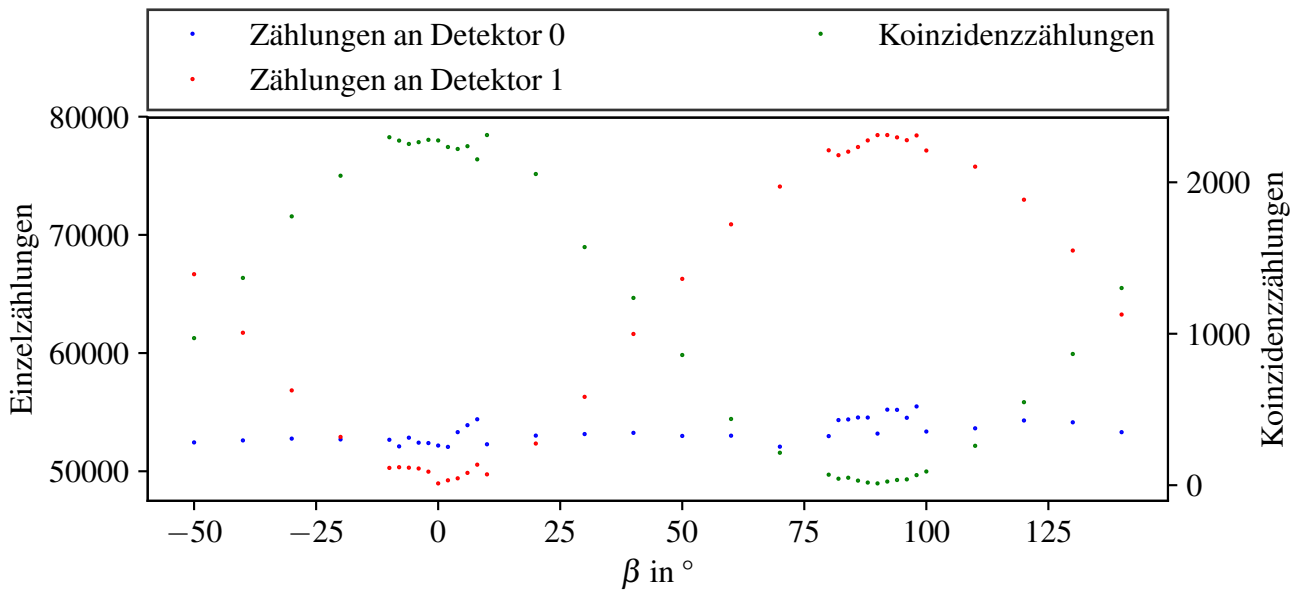


Abbildung 24: Die Rohdaten für die Vermessung des verschränkten Zustandes bei  $\alpha = 0^\circ$ .



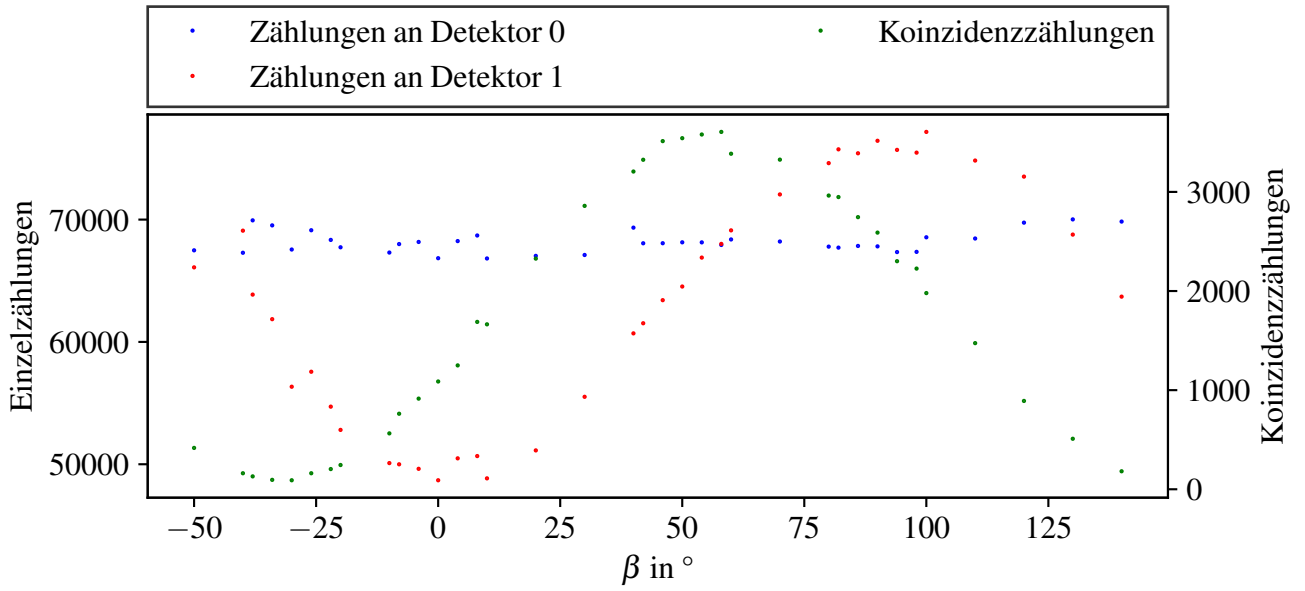


Abbildung 25: Die Rohdaten für die Vermessung des verschränkten Zustandes bei  $\alpha = 45^\circ$ .

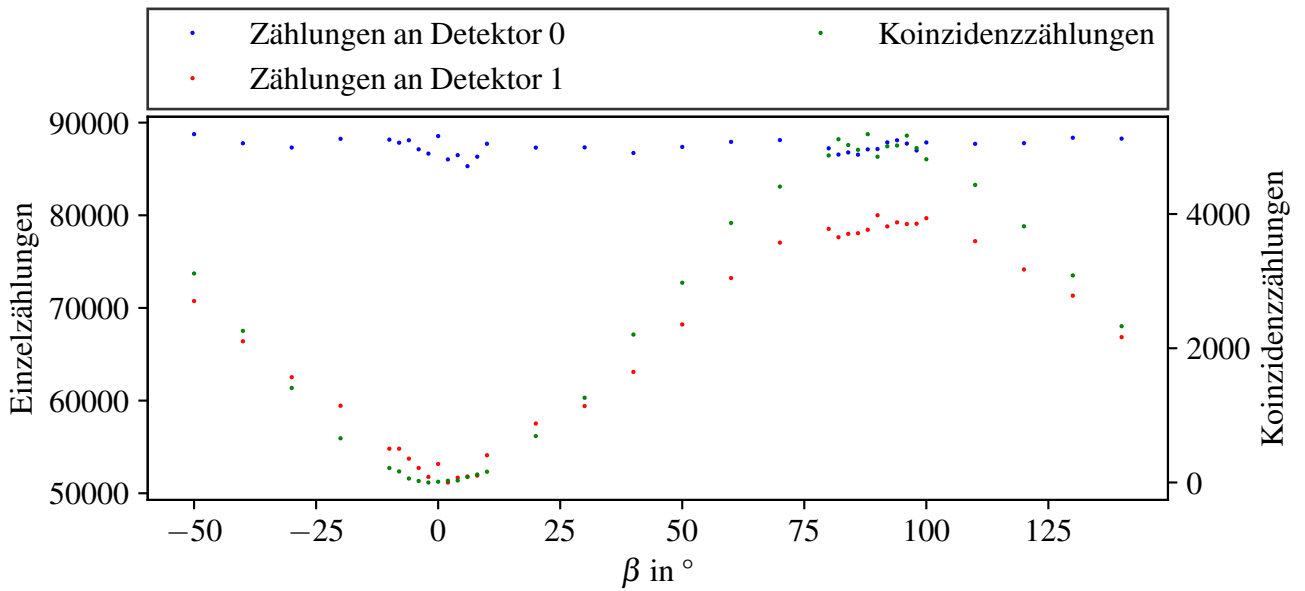


Abbildung 26: Die Rohdaten für die Vermessung des verschränkten Zustandes bei  $\alpha = 90^\circ$ .

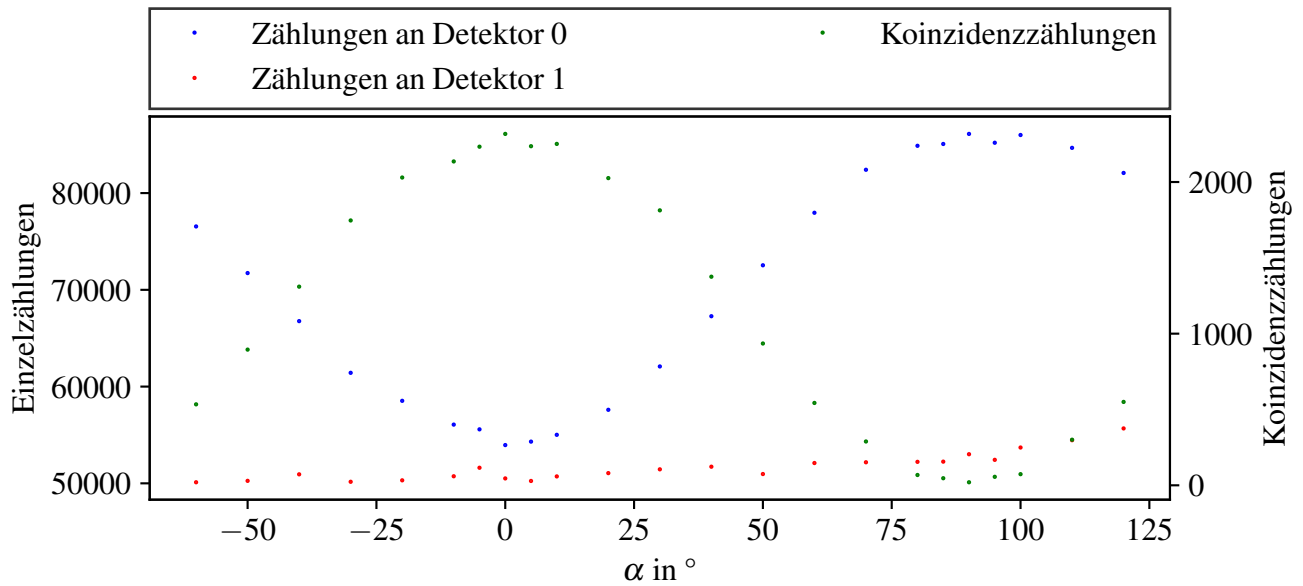


Abbildung 27: Die Rohdaten für die Vermessung des verschränkten Zustandes bei  $\beta = 0^\circ$ .

#### Die Kennlinie der Laserdiode

$I_D$	$N_0$	$N_1$	$N_{01}$
1,0 mA	4224	8164	2
3,1 mA	4081	7951	1
5,0 mA	3642	6915	0
7,0 mA	3432	5530	2
9,1 mA	3612	6897	5
11,0 mA	3776	7546	1
13,0 mA	3912	7784	7
15,0 mA	4220	7993	8
17,0 mA	3931	7808	14
19,0 mA	4400	8177	27
21,0 mA	11200	14801	607
23,0 mA	27034	29434	1829
25,0 mA	41318	42217	2729
27,0 mA	55458	54096	3550
29,0 mA	68713	65082	4360
31,0 mA	80103	75467	5050
33,0 mA	91239	83592	5372
35,0 mA	103418	92796	6017
37,0 mA	111332	99254	6421
39,0 mA	119380	105543	6659
41,1 mA	129624	112998	7144
43,0 mA	138405	119035	7541
45,0 mA	146149	124962	7664

## Messungen zu Korrelationsfunktionen mit Hanbury-Brown-Twiss

$I_D$	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_{01}$	$N_{02}$	$N_{12}$	$N_{012}$
20,0 mA	43 685	48 972	58 390	400	411	11	0
30,0 mA	748 268	394 220	413 893	24 560	27 334	487	49
40,0 mA	1 241 470	637 329	702 819	39 189	45 896	1353	126
45,0 mA	1 442 900	726 275	811 299	43 250	50 868	1797	138

## HOM-Dip

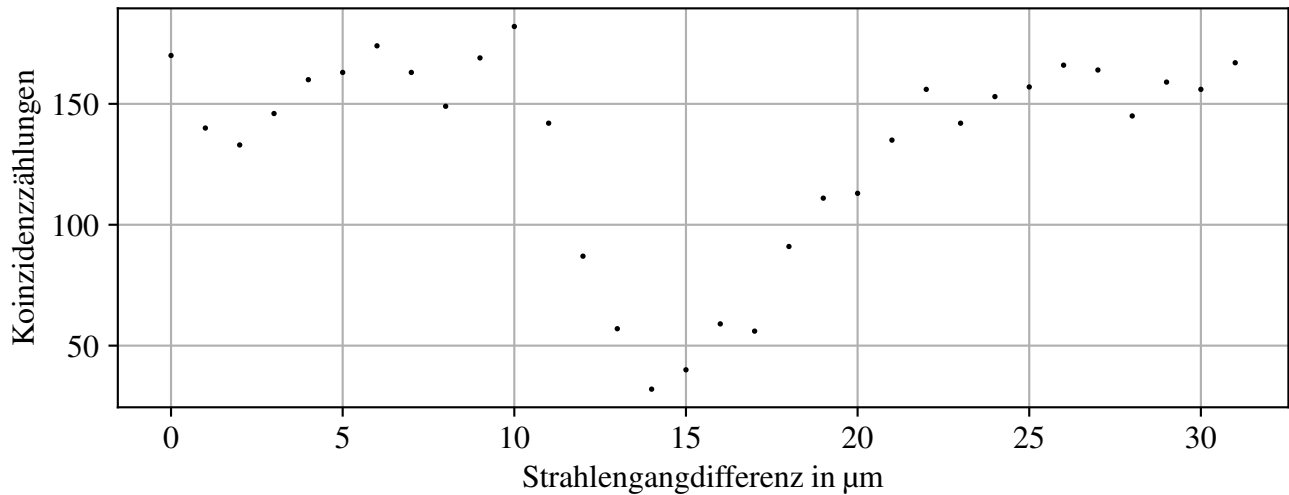


Abbildung 28: Die Rohdaten für die Vermessung des HOM-Dips mit Tiefpassfilter bei einem Messintervall von 200 ms.

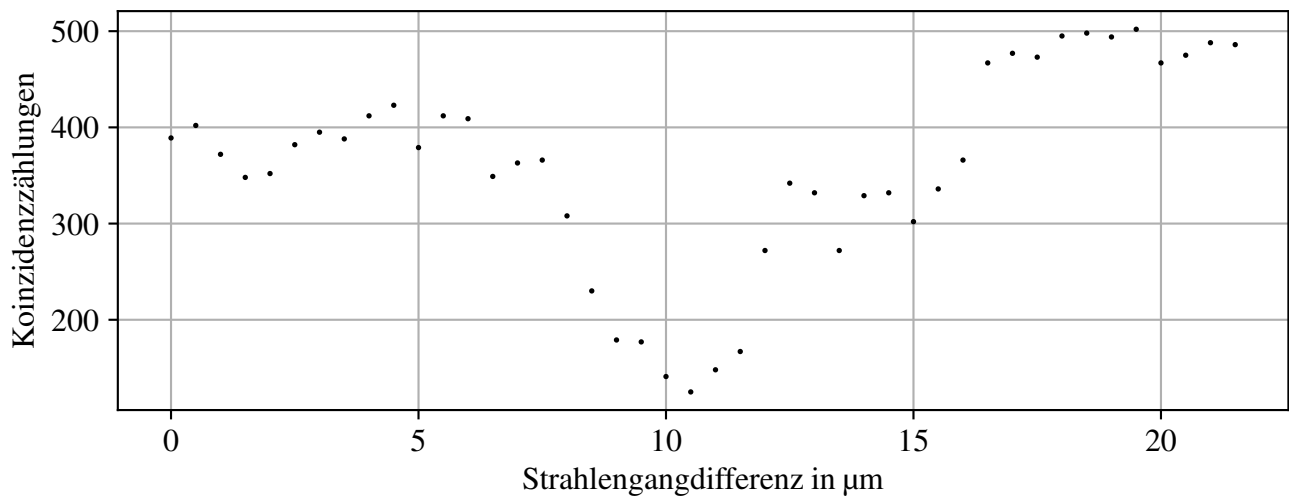


Abbildung 29: Die Rohdaten für die Vermessung des HOM-Dips mit Tiefpassfilter bei einem Messintervall von 500 ms.

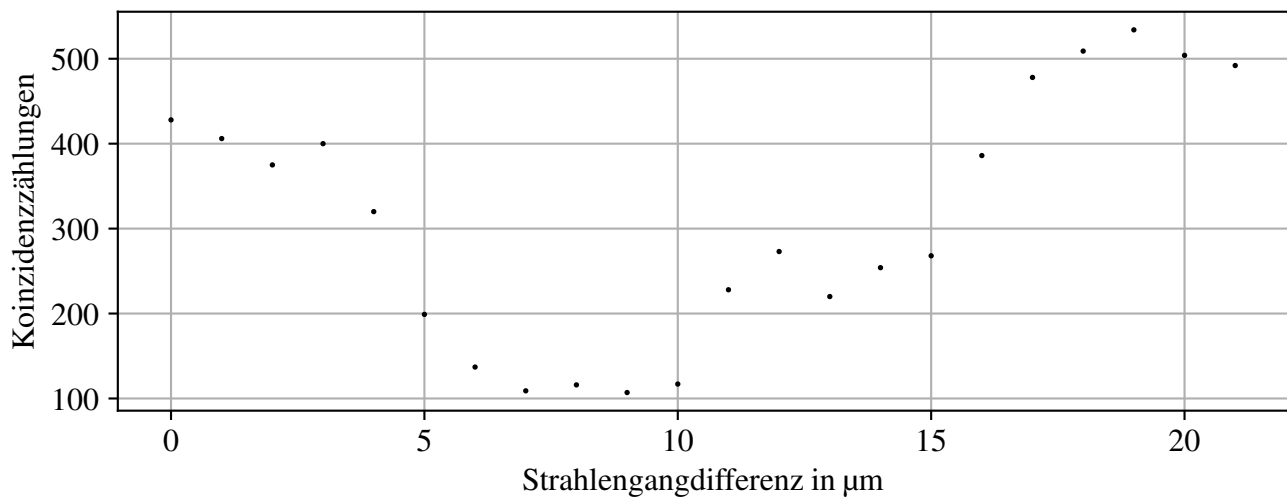


Abbildung 30: Die Rohdaten für die Vermessung des HOM-Dips mit Tiefpassfilter bei einem Messintervall von 500 ms.

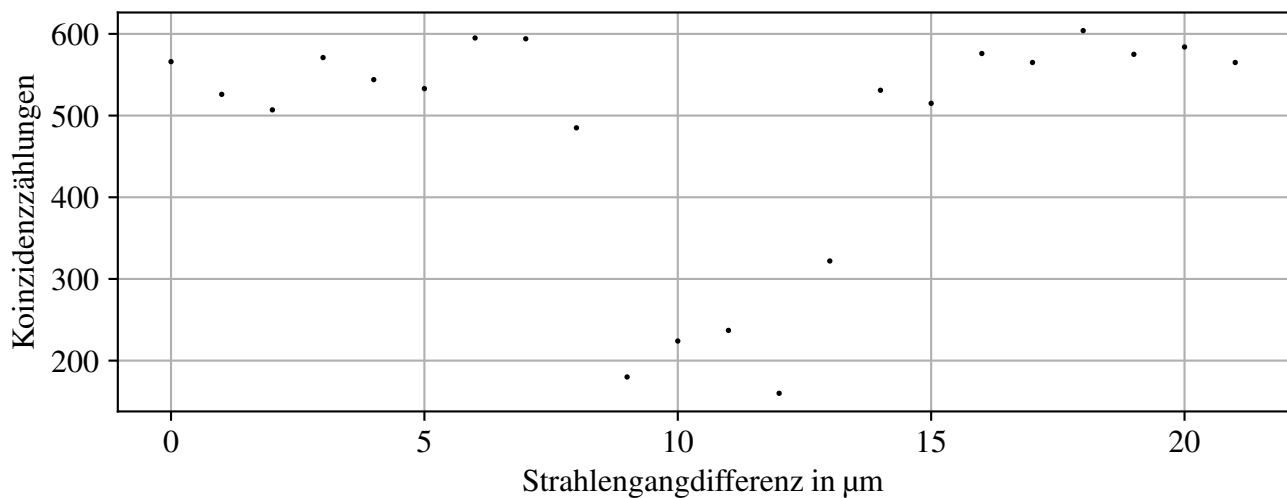


Abbildung 31: Die Rohdaten für die Vermessung des HOM-Dips ohne Tiefpassfilter bei einem Messintervall von 500 ms.

## Anpassungen

**Nicht verschränkter Zustand bei  $\alpha = -45^\circ$ , Einzelzählrate**

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
50746,197	23602,168	50746,197	23267,574	2,624	0,782	1,033	0,000

Residuengraph:

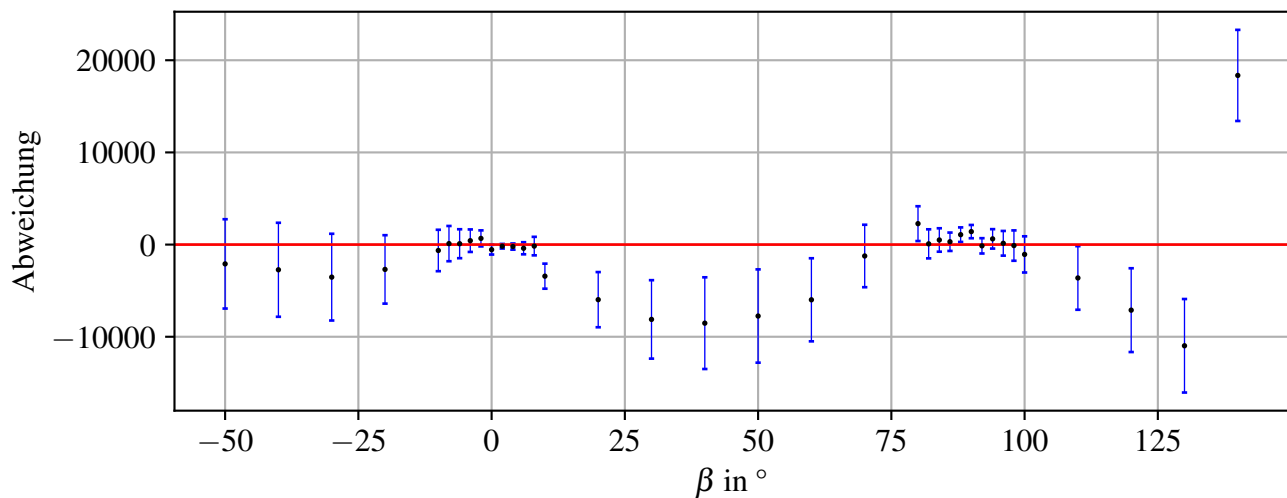


Abbildung 32: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = -45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,750

#### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 0^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_A^2$	$\hat{B}$	$\sigma_B^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_C^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_D^2$
52 186,449	1309,409	52 186,449	1306,502	1,302	1,012	1,010	0,000

Residuengraph:

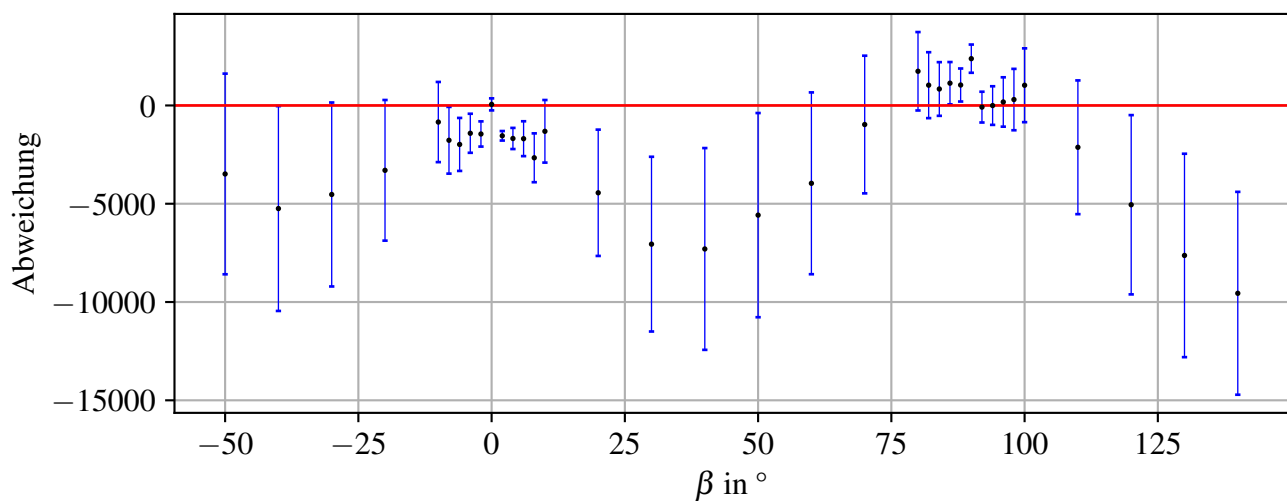


Abbildung 33: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 3,258

#### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 45^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
51 216,921	5022,638	51 216,921	5006,641	1,333	0,450	0,991	0,000

Residuengraph:

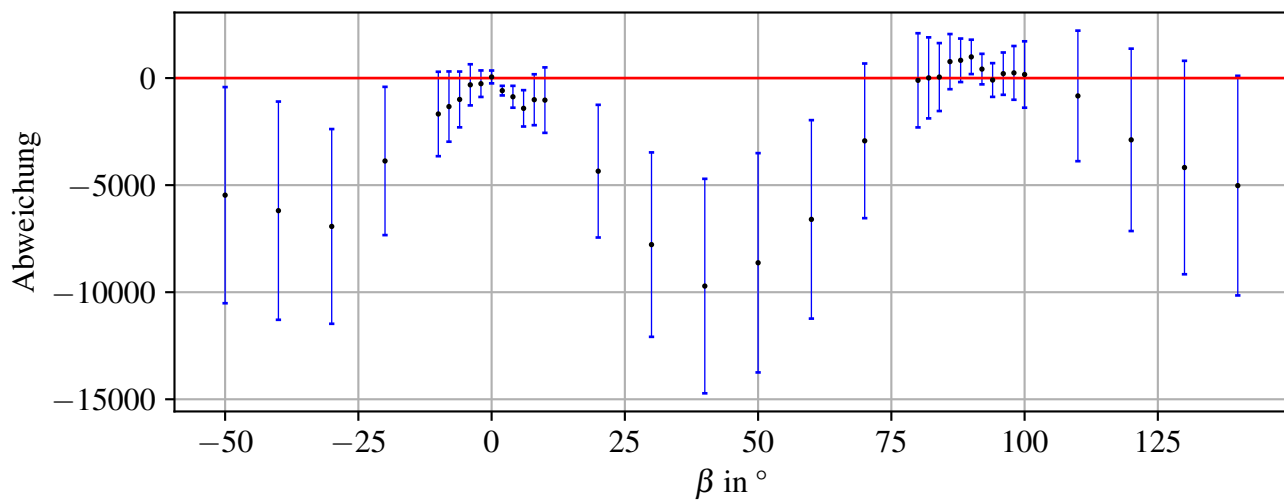


Abbildung 34: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,311

#### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 90^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
51 216,921	5022,638	51 216,921	5006,641	1,333	0,450	0,991	0,000

Residuengraph:

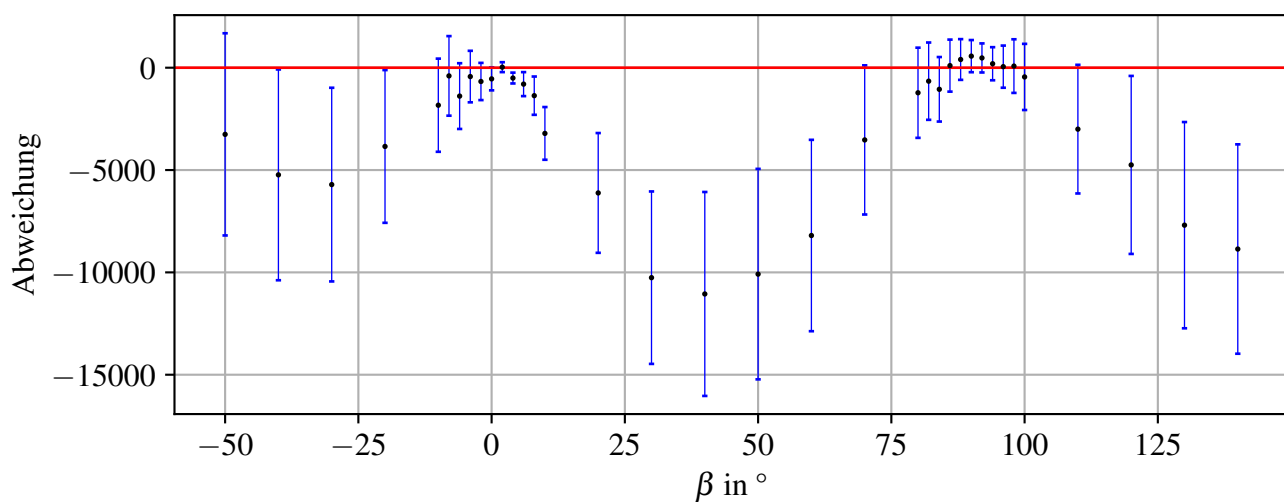


Abbildung 35: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 90^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,675

### Nicht verschränkter Zustand bei $\beta = 0^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
63 788,809	62 622,856	63 788,809	62 145,882	1,413	0,409	1,009	0,000

Residuengraph:

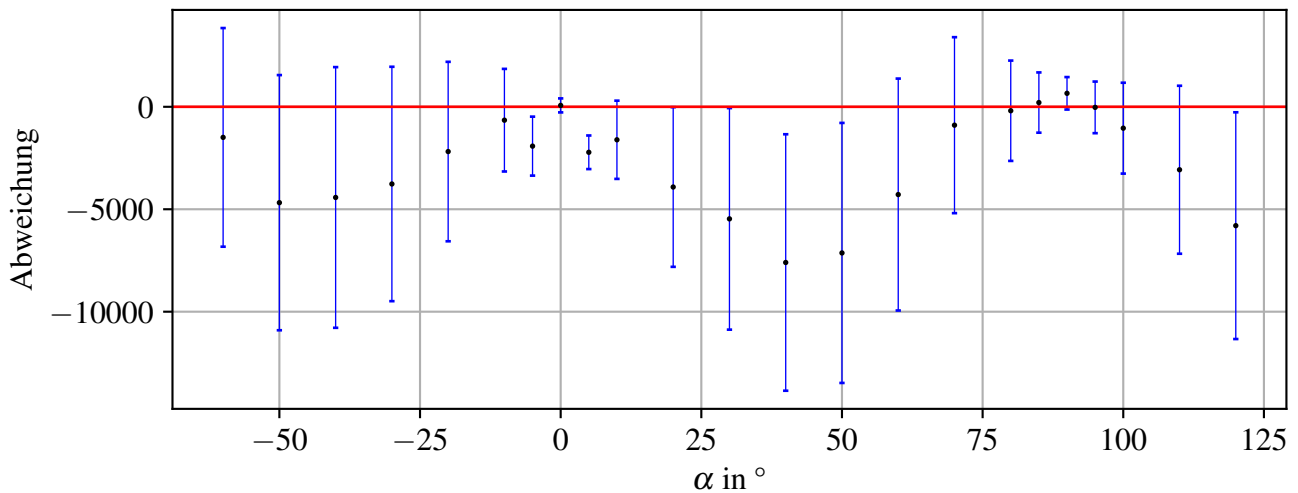


Abbildung 36: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\beta = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,039

### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = -45^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
2134,227	34,468	2134,227	34,580	3,520	0,608	1,022	0,000

Residuengraph:

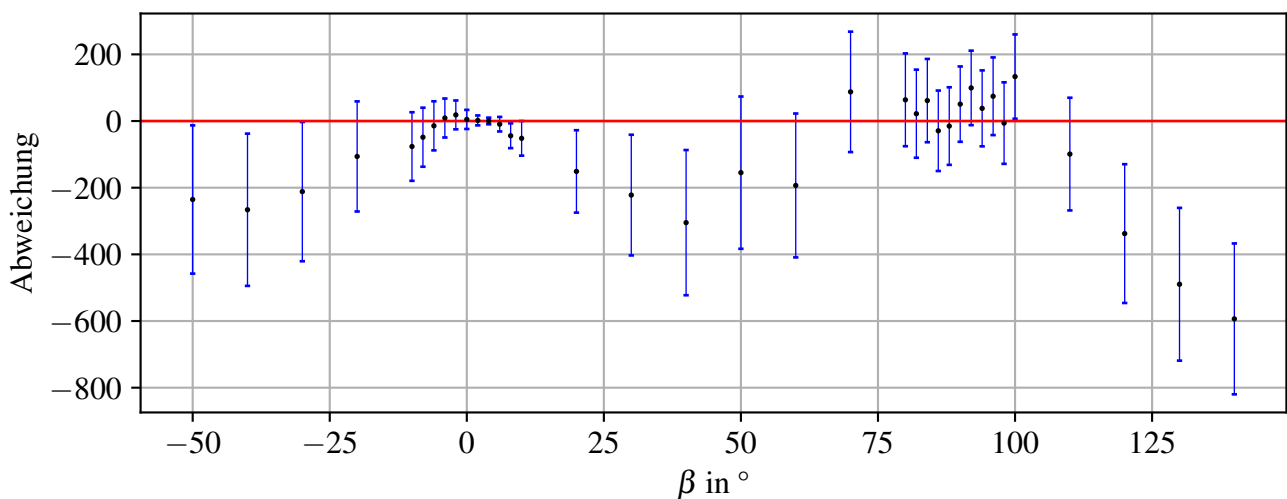


Abbildung 37: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = -45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,991

### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 0^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
-40,606	12,028	-40,606	10,213	9,992	34,700	1,178	0,012

Residuengraph:

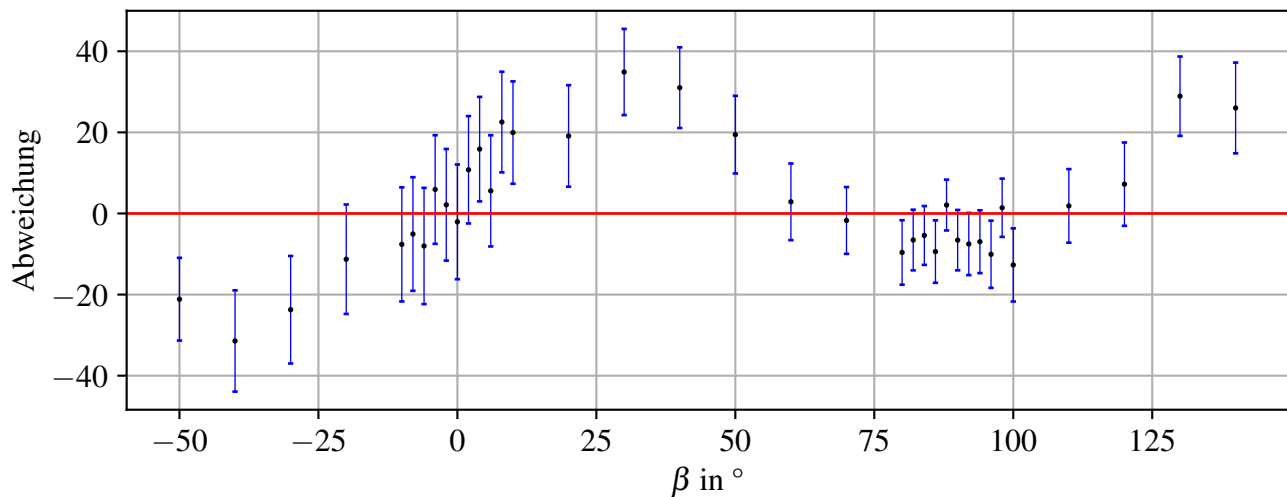


Abbildung 38: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 2,37

### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 45^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
2061,576	16,478	2061,576	16,587	-0,358	0,851	1,026	0,000

Residuengraph:



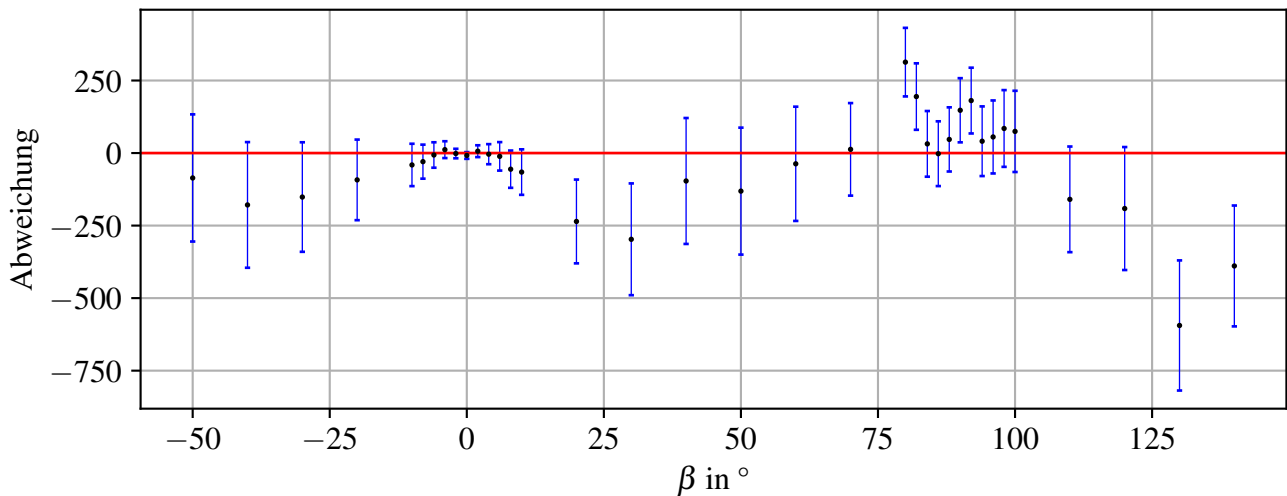


Abbildung 39: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,190

#### Nicht verschränkter Zustand bei $\alpha = 90^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
3755,477	10,067	3755,477	9,979	1,360	0,815	1,029	0,000

Residuengraph:

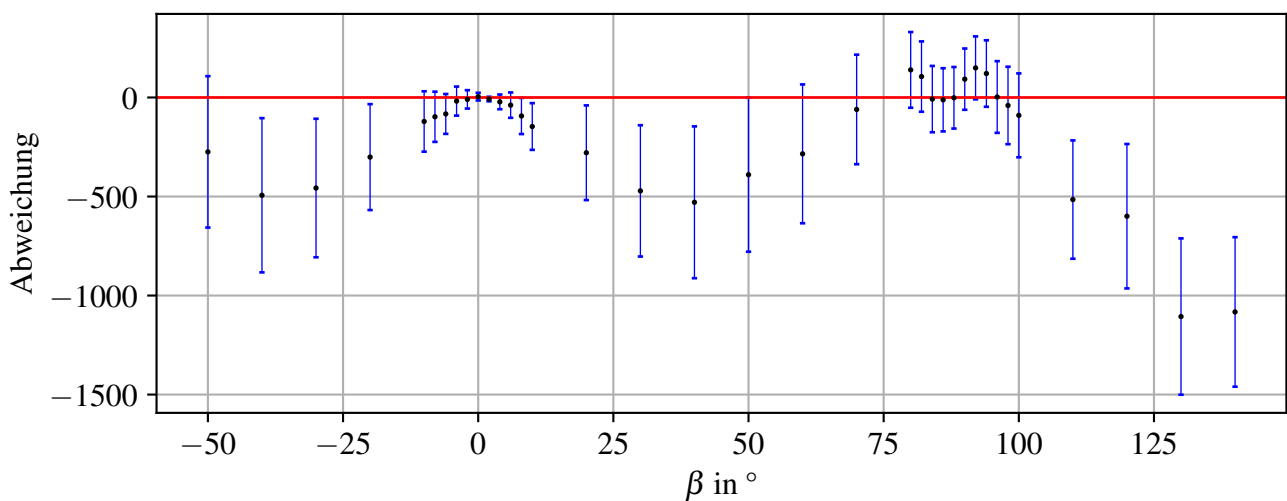


Abbildung 40: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 90^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,331

#### Nicht verschränkter Zustand bei $\beta = 0^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C} \text{ in } ^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2 \text{ in } ^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
-33,639	3,647	-33,639	2,335	-9,376	8,698	1,026	0,002

Residuengraph:

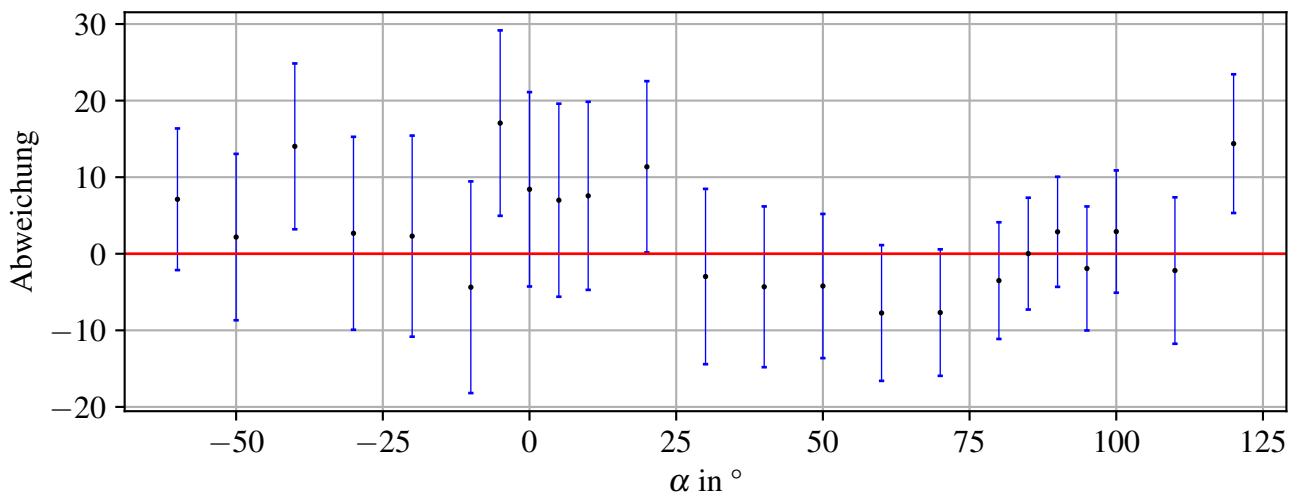


Abbildung 41: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\beta = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,622

### Verschränkter Zustand bei $\alpha = -45^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C} \text{ in } ^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2 \text{ in } ^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
13 555,304	1 933 965 701,979	13 555,304	1 933 939 911,666	0,010	30 061,441	0,986	25,331

Residuengraph:

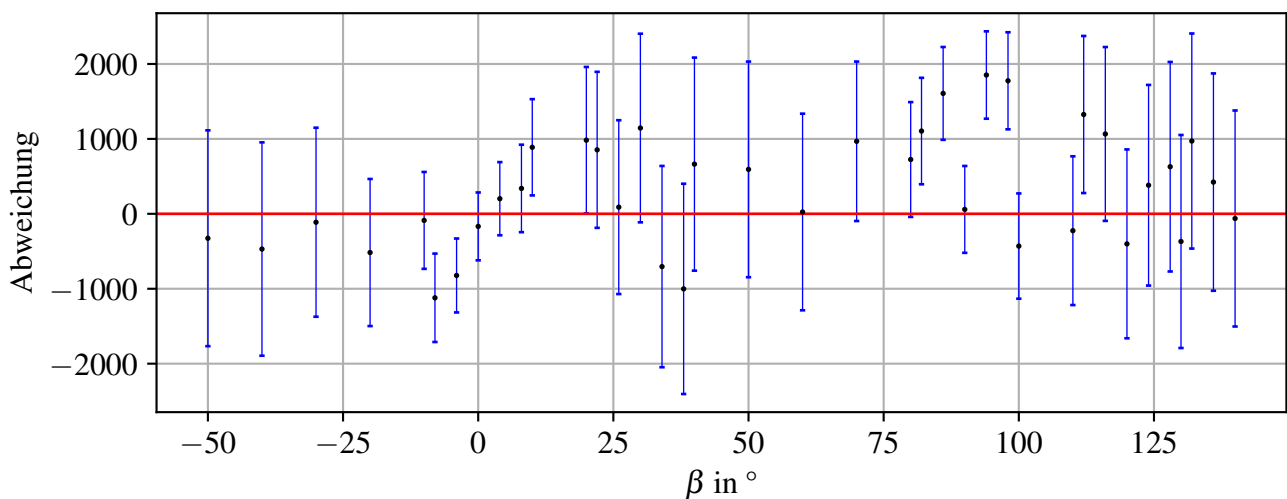


Abbildung 42: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = -45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 1,337

### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 0^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
14737,326	76,818	14737,326	76,517	1,432	0,634	0,990	0,000

Residuengraph:

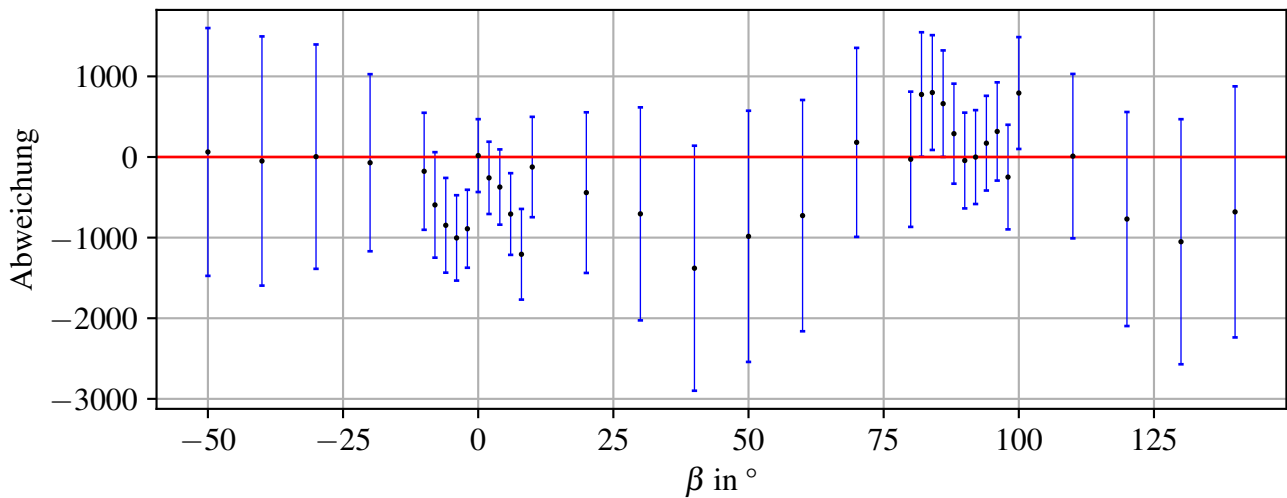


Abbildung 43: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,807

### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 45^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
14276,037	18980,383	14276,037	18000,383	3,892	1,385	1,015	0,000

Residuengraph:

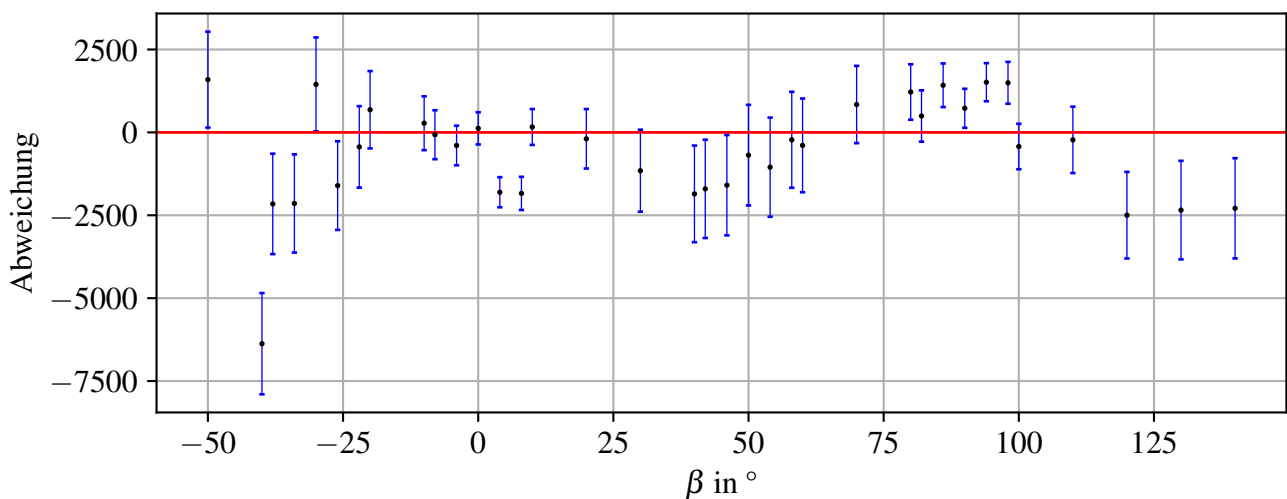


Abbildung 44: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 2,883

### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 90^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
14 195,361	338 166 779 547,570	14 195,361	338 166 727 495,674	0,013	300 573,003	1,103	3178,137

Residuengraph:

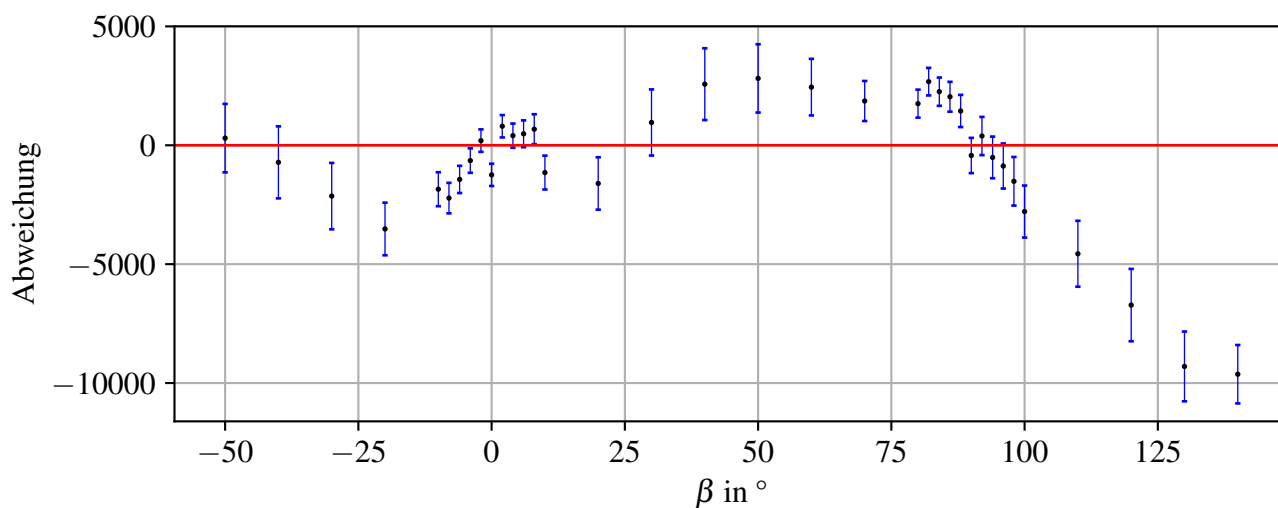


Abbildung 45: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\alpha = 90^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 8,601

### Verschränkter Zustand bei $\beta = 0^\circ$ , Einzelzählrate

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
1827,480	362,787	1827,480	349,080	31,581	6,010	1,020	0,002

Residuengraph:

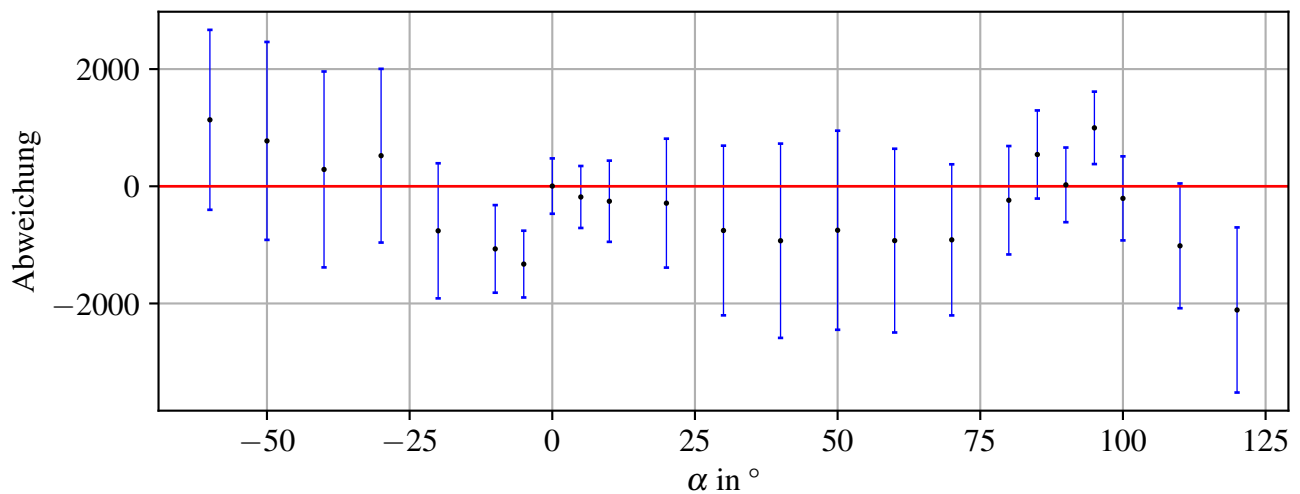


Abbildung 46: Der Residuengraph für die Anpassung der Einzelzählmessung für  $\beta = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,906

#### Verschränkter Zustand bei $\alpha = -45^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
2134,227	34,468	2134,227	34,580	3,520	0,608	1,022	0,000

Residuengraph:

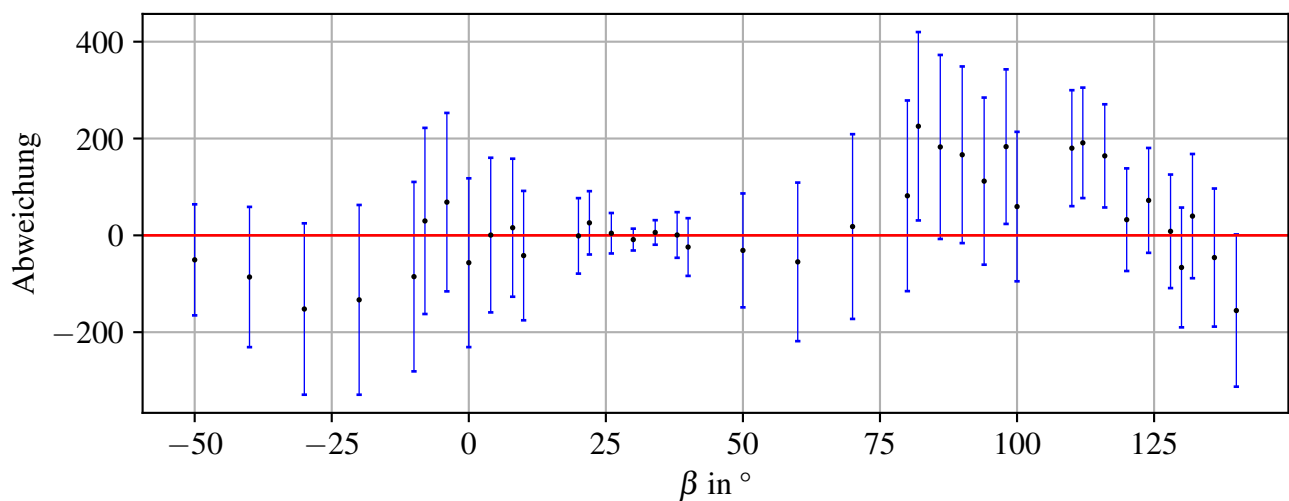


Abbildung 47: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = -45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,519

#### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 0^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C} \text{ in } ^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2 \text{ in } ^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
-1151,306	31,075	-1151,306	31,094	1,721	1,262	1,013	0,000

Residuengraph:

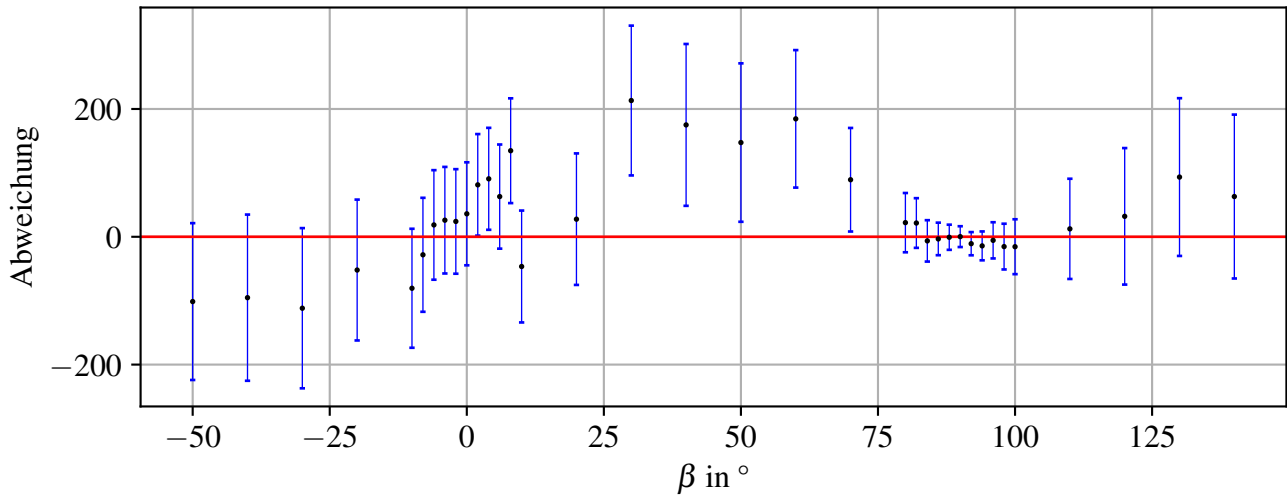


Abbildung 48: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,716

#### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 45^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C} \text{ in } ^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2 \text{ in } ^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
1758,093	17,515	1758,093	17,528	-32,689	1,023	1,007	0,000

Residuengraph:

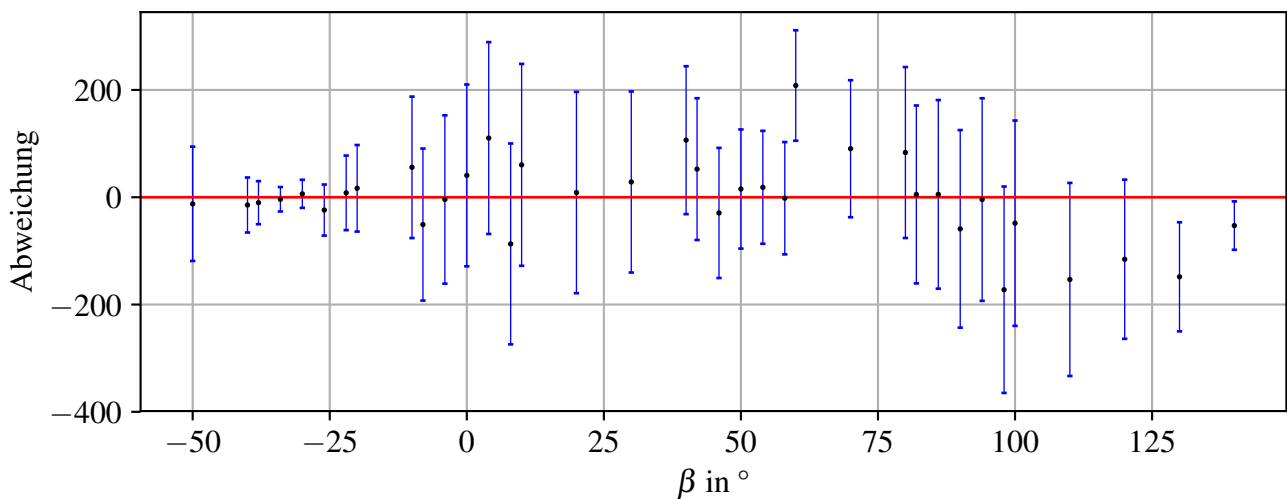


Abbildung 49: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 45^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,412

### Verschränkter Zustand bei $\alpha = 90^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
2592,353	0,741	2592,353	0,743	-0,009	18,865	1,020	0,004

Residuengraph:

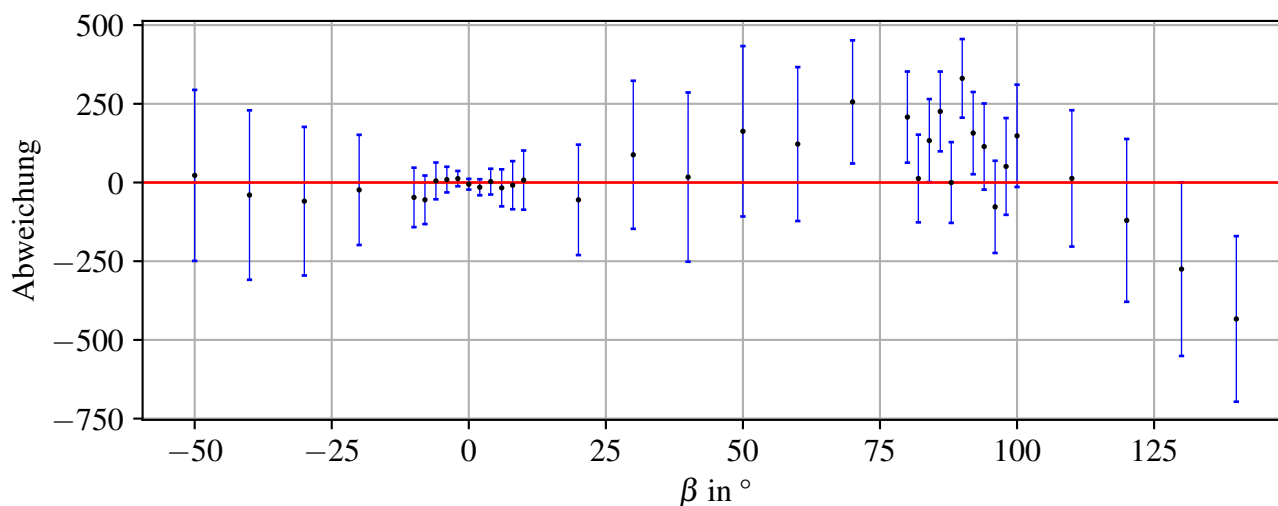


Abbildung 50: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\alpha = 90^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,778

### Verschränkter Zustand bei $\beta = 0^\circ$ , Koinzidenzen

Ergebnisse:

$\hat{A}$	$\sigma_{\hat{A}}^2$	$\hat{B}$	$\sigma_{\hat{B}}^2$	$\hat{C}$ in $^\circ$	$\sigma_{\hat{C}}^2$ in $^\circ$	$\hat{D}$	$\sigma_{\hat{D}}^2$
-1148,799	9,046	-1148,799	9,196	1,021	1,825	1,019	0,000

Residuengraph:

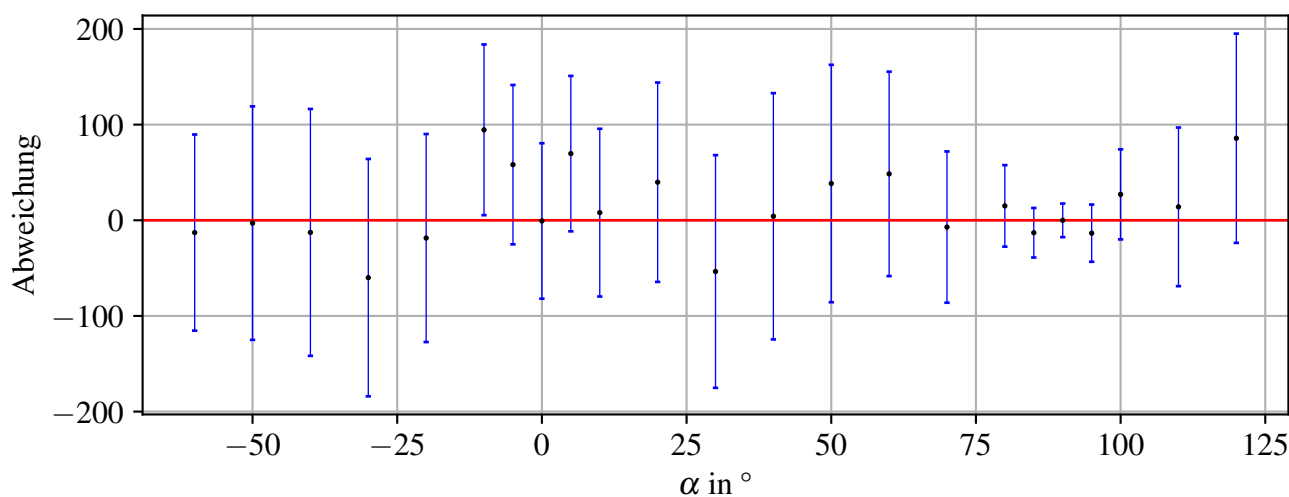


Abbildung 51: Der Residuengraph für die Anpassung der Koinzidenzen für  $\beta = 0^\circ$ .

$\chi^2$  pro Freiheitsgrad ist 0,255