Bestimmung der Erdbeschleunigung mit dem Pendel

Lars

09.04.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Vorkenntnisse

1.1 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines Systems verhält sich wie ein Massenpunkt dessen Masse die Summe aller Einzelmassen des Systems ist. Weiterhin verhält er sich so als ob alle Kräfte im ihm (Schwerpunkt) angreifen würden.

1.2 Schwerpunktsberechnung

$$s_i = \frac{\int_k x_i \, \mathrm{d}V}{\int_k \mathrm{d}V} \tag{1}$$

1.3 Schwingung

"Wiederholte zeitliche Schwankung von Zustandsgrößen."

- Harmonische Schwingung kann durch Sinus dargestellt werden.

$$y(t) = y_0 sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$(y_0 = Amplitude, \omega = Winkelgeschwindigkeit, t = Zeit, \varphi_0 = Nullphasenwinkel) \tag{2}$$

- linear gedämpfte Schwingung
  - Makroskopische Physikalische Systeme sind immer gedämpft
  - Kräftegleichgewicht

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \tag{3}$$
$$(d = Dmpfungskonstante, k = Federkonstante)$$

  - für Drehschwingungen gilt(Drehmomentgleichgewicht):

$$J\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + k\varphi = 0 \tag{4}$$
$$(J = Traegheitsmoment)$$

  - Gleichung **??** lässt sich in

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

überführen. Mit der Abklingkonstanten $\delta = \frac{d}{2m}$ und der ungedämpften Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$.

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$

$\Rightarrow$ $\delta^2 - \omega_o^2$ ist die Diskriminante. Das heißt, sie bestimmt Art und Zahl der Lösungen

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung

Schwingfall $\delta < \omega_0 \Rightarrow$ Diskriminante ist negativ $\Rightarrow$ Wurzelausdruck ist imaginär $\Rightarrow$ zwei konjugiert komplexe Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow$ Sinus

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta \Rightarrow$ neue Art 2. Lösung muss existieren $\Rightarrow x(t) = X_1 e^{-\delta t} + t * X_2 e^{-\delta t} \Rightarrow$ kein Sinus

Kriechfall hohe Dämpfung $\Rightarrow \delta < \omega_0 \Rightarrow$ Wurzel ist reell $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

<Bild Seite 159>

1.4 Winkelgeschwindigkeit

Gibt an wie schnell sich ein Winkel mit der Zeit um seine Achse ändert $[\omega] = \frac{rad}{s}$

1.5 Winkelbeschleunigung

Zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

1.6 Drehmoment M

Spielt für Drehbewegungen die gleiche Rolle wie die Kraft für geradlinige Bewegungen.

- $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6}$$
- $$\vec{M} = J\dot{\vec{\omega}} \tag{7}$$
  $$(J = Trgheitsmoment, wie\ \vec{F} = m\vec{a})$$
- $$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \tag{8}$$
  $$(L = Drehimpuls)$$

1.7 Trägheitsmoment

Gibt Widerstand eines starren Körpers gegenüber seiner Rotationsbewegung um eine gegebene Achse an.

1.8 Satz von Steiner

Berechnung des Trägheitsmomentes eines starren Körpers für parallel verschobene Drehachsen. Trägheitsmoment ist abhängig von der Drehachse. Ist das Trägheitsmoment durch den Massenmittelpunkt bekannt, kann der Satz gen utzt werden um alle Trägheitsmomente für alle Drehachsen zu berechnen, die parallel dazu sind.

$$J_2 = J_1 + md^2$$
$$(J_1 = T.\ durch\ Massenschwerpunkt, J_2 = T.\ parallelerDrehachse, d = Abstand\ der\ Achsen) \tag{9}$$

1.9 Direktionsmoment

Das Direktionsmoment D ist bei mechanischer Torsion die Konstande zwischen Drehmoment $\vec{M}$ und Drehwinkel $\vec{\varphi}$

$$\vec{M} = D\vec{\varphi} \tag{10}$$

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Mathematisches Pendel

- Rückstellendes Drehmoment wird durch Schwerkraft erzeugt. Bewegungsgleichung bringt:

$$J\ddot{\varphi} = -m_s g l sin(\varphi) \approx -m_s g l \varphi \tag{11}$$
$$(Trgheitsmoment J = m_T l^2)$$

- $m_{Trg} = m_{Schwer} \Rightarrow m_T l^2 \ddot{\varphi} = -m_s g l \varphi \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g\varphi}{l} = -\omega^2\varphi$ da nach Pendelgleichung $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ gilt.
- Allgemeine Lösung: $\varphi(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$. Aus den Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_{max}, \dot{\varphi}(t=0) = 0$ folgt $\varphi(t) = \varphi_{max}cos(\omega t)$
- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} \tag{12}$$
$$(\Rightarrow T^2 \propto l)$$

2.2 Physikalisches(reales) Pendel

- J ist Gesamtträgheitsmoment um Drehachse
- l_s ist Distanz vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt
- $T^2 = \frac{4\pi^2 J}{g m l_s}$ (Formal das selbe)

2.3 Bestimmung der Erdbeschleunigung

- Eine Möglichkeit ist die explizite Berechnung von J
- die Zweite Möglichkeit ist den Systematischen Fehler durch J_{Stange} und das Rückstellmoment zu minimieren.
  - Schwingungsfrequenz der Stange allein Messen
  - Pendelkörper so anbringen, sodass diese Schwingungsfrequenz beibehalten wird. ⇒ Pendelkörper und Stange beeinflussen sich nicht.
  - für die Stange allein gilt: $\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}}$
  - Für den Pendelkörper allein gilt: $\omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}$
  - für $\omega_p = \omega_{st}$ folgt $\frac{D_{st}}{J_{st}} = \frac{D_p}{J_p}$
  - Pendel kann nun so behandelt werden als bestünde es nur aus dem Pendelkörper. Im folgenden werden also alle Größen die Größen des Pendelkörpers gemeint sein

- Mithilfe von des Steinerschen Satzes und des Trägheitsmoments eines homogenen Zylinders folgert man nun mit $J = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2 und D = mgl \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{J} = \frac{mgl}{\frac{1}{2}mr^2+ml^2} = \frac{gl}{\frac{1}{2}r^2+l^2} \Leftrightarrow$

  $$g = \omega^2 l(1 + \frac{r^2}{2l^2}) \tag{13}$$

  Die 1 steht für das mathematische Pendel. Der zweite Term in der Klammer für die Korrektur durch die Ausdehnung des Körpers)

2.4 Frequenzbestimmung

- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- $T = \frac{t_2-t_1}{n}(n = Anzahlvollstndiger Perioden.)$
- Nulldurchgänge betrachten $\Rightarrow$ genauer
- Δt ist Genauigkeit für T $\Rightarrow \Delta T = \sqrt{2}\frac{\Delta t}{n}$

3 Fehlerrechnung

l_p Massbandfehler $\pm 1mm \Rightarrow$ im promillbereich

r_p Durch Faktor $\frac{r_p^2}{l_p^2} \approx \frac{1}{300}$ stark unterdrückt

f Ein Nulldurchlauf circa 10 ms. 2 Nulldurchläufe entsprechen einer Periode also circa 20 ms genau. Fehler auf f bzw. T sehr klein halten! Mindestens 120 Perioden messen, damit relative Genauigkeit besser als die von l_p

3.1 Fehler durch Vernachlässigung der Stange

- $\omega_p = \omega_{st}$ nie genau erreichbar. $\Rightarrow$ Abschätzung
- $\omega_s^2 = \frac{D_s}{J_s},\ \omega^2 = \frac{D_s+D_p}{J_s+J_p} = \omega_s^2 + \epsilon \Leftrightarrow \omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p} = \omega^2 + \epsilon\frac{J_s}{D_s}$
- $\frac{J_s}{J_p} \approx 0.1 \Rightarrow$ relative Abweichung der Frequenz geht mit 0,2 in g ein $\Rightarrow$ beide Frequenzen müssen besser als 0,5% übereinstimmen. $\Rightarrow$ Korrekturfaktor für g aus Abweichung der Frequenzen bestimmen.

4 Versuchsaufbau und Durchführung

- Winkelaufnehmer an CASSY anschließen Versorgung + Hallspannung
- Nullage einstellen.
- Periodendauer aus gemesserner Spannung bestimmen (CASSY)
- Stange alleine schwingen lassen (120 Perioden)
- Pendelkörper so anbringen, dass $\omega_s = \omega_p$
- Kombination schwingenlassen (mindestens 120 Perioden)
- l_p messen
- r_p messen
- Größe der Einzelbeiträge bei der Fehlerberechnung angeben. (Möglicher Systematischer Fehler: Luftreibung...)