目录 CONTENTS

第2章 Lebesgue 测度

第 2 章引言

为了建立一种新的积分理论, 我们必须对直线上比区间更一般的集, 给出一种类似于区间长度的度量.

同样, 为了在平面或三维空间上定义新的积分, 也需要对平面或三维空间上的相当广泛的一类集, 给出一种类似于面积或体积的度量.

实际上, 我们将在 $\mathbf{R}^n$ 上建立这种新的度量.

新的度量应该满足的性质

以一维情形为例. 我们希望对任意 $A\subset \mathbf{R}^1$, 给予 A 一种度量, 我们称之为**测度**, 记为 $m(A)$.

既然 $m(A)$ 是长度的推广, 它应满足如下的性质:

(1) **非负性:** $m(A)\geq 0$.

(2) **可列可加性:** 若 $\{A_k\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一列互不相交的集, 则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k). \qquad (2.1)$$

(3) **平移不变性**: $m(x+A)=m(A)$.

(4). $m([a,b])=b-a$.

在上述的性质中, 性质(2)是最重要的. 测度的可列可加性 Lebesgue 积分理论成功的关键.

注 (2.1)式的两端的值允许为$+\infty$. 即: (2.1)式表示当等式的一端取有限值时, 另一端也有取有限值, 并且两端相等. 当一端取值为$+\infty$时, 另一端也为$+\infty$.

以后遇到类似的等式, 都应这样理解.

我们当然希望能够对 $\mathbf{R}^n$ 的所有子集都能定义测度,并且满足上述的性质(1)~(4).

但已经证明这是不可能的. 我们只能对 $\mathbf{R}^n$ 中的一部分集即所谓“可测集”定义测度.

这种可测集是相当广泛的一类集, 包含了所有常见的集, 例如有限集或可列集, 各种方体, 开集和闭集等, 以及这些集经过有限或可列并, 交和余运算所得的集. 因此在应用上是足够了.

§ 2.1 外测度

外测度是通过方体覆盖来定义的，因此先对有界和无界方体的体积作出明确的规定.

设 I 是直线上的一个有界区间，$I=(a,b)$ (或 $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$), 规定 I 的长度为 $|I|=b-a$. 若 I 是无界区间, 则规定 $|I|=+\infty$.

设 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是直线上的 n 个区间(有界或无界), $I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的方体. 定义 I 的体积为

$$|I|=|I_1||I_2|\cdots|I_n|,$$

(若 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 中至少有一个是无界区间, 则 I 是无界方体, 此时规定 $|I| = +\infty$). 为方便起见, 规定空集 $\varnothing$ 也算作是方体并且 $|\varnothing| = 0$. 例如

$$|(a,b)\times(c,d)| = (b-a)(d-c),$$

$$|[0,1]\times[0,\infty)| = +\infty.$$

由于方体的体积和下面将要定义的外测度允许取 $+\infty$ 为值, 因此在体积和外测度相加时, 可能会出现某些项为 $+\infty$ 的情形. 我们作以下规定:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ (a\text{为实数}),$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

此外, 数列的极限允许为$+\infty$. 级数的和也允许为$+\infty$.

按照这个规定, 单调增加数列$\{a_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$和正项级数的和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$总是存在的(可能是有限值, 也可能是$+\infty$).

在不会引起混淆的情况下, $+\infty$通常可以简记为∞.

设 $A\subset\mathbf{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有限个或一列开方体, 使得

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{k_0} I_k, \text{ 或 } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 是 A 的一个**开方体覆盖**.

由于有限并总可以写成可列并(只要令 $I_k=\varnothing$ $(\forall k>k_0)$, 则 $\bigcup_{k=1}^{k_0} I_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$). 因此不妨只考虑 $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 的情形. 换言之, 以后在说到可列覆盖的时候, 也包括了有限覆盖的情形.

定义 2.1 对每个 $A\subset \mathbf{R}^n$, 令

$$m^*(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\{I_k\}\text{是}A\text{的开方体覆盖}\right\}. \quad (2.2)$$

称 $m^*(A)$ 为 A 的 **Lebesgue 外测度**, 简称为**外测度**.

由外测度的定义知道, 对任意 $A\subset \mathbf{R}^n$, $m^*(A)\geq 0$.

若对 A 的任意开方体覆盖 $\{I_k\}$, 总有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|=\infty$, 则 $m^*(A)=\infty$. 因此一般地, $0\leq m^*(A)\leq\infty$.

外测度是通过下确界定义的. 由下确界的意义, 直接得到以下两点经常用到的事实:

(1). 对 A 的任意一个开方体覆盖 $\{I_k\}$ 有

$$m^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

(2). **若** $m^*(A) < \infty$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(A) + \varepsilon.$$

例 1 若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数集, 则 $m^*(A)=0$.

证 为叙述简单计, 只证 $\mathbf{R}^1$ 中的情形, $\mathbf{R}^n$ 中的情形可类似证明. 不妨只证 A 是可列集的情形.

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$ 是可列集. 对任意 $\varepsilon>0$, 开区间列

$$I_k=\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},\ a_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)(k=1,2,\cdots)$$

是 A 的一个开区间覆盖. 因此

$$m^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得到 $m^*(A)=0$. ■

特别地, 由例 1 知道, 若 $\mathbf{Q}$ 是有理数集, 则 $m^*(\mathbf{Q})=0$.

定理 2.1 外测度具有如下性质:

(1) $m^*(\varnothing)=0$.

(2) **单调性**: 若 $A\subset B$, 则 $m^*(A)\le m^*(B)$.

(3) **次可列可加性**: 对 $\mathbf{R}^n$ 中的任意一列集 $\{A_k\}$ 有

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k). \tag{2.3}$$

证 (1). 由于 $\varnothing$ 也算作是方体, 并且 $|\varnothing|=0$, 因此 $\{\varnothing\}$ 是空集 $\varnothing$ 的一个开方体覆盖, 并且 $m^*(\varnothing)\le|\varnothing|=0$. 从而 $m^*(\varnothing)=0$.

(2) 单调性: 若 $A\subset B$, 则 $m^*(A)\le m^*(B)$.

(2). 设 $A\subset B$, 不妨设 $m^*(B)<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 B 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(B)+\varepsilon$.

既然 $A\subset B$, $\{I_k\}$ 也是 A 的开方体覆盖. 因此

$$m^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(B)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得到 $m^*(A)\le m^*(B)$.

(3). 不妨设$m^*(A_k)<\infty\,(k\geq 1)$ (否则(2.3)式显然成立).

对任意$\varepsilon>0$和每个$k\geq 1$, 存在A_k的一个开方体覆盖$\{I_{k,i}\}_{i\geq 1}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_{k,i}\right|\leq m^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}. \qquad (2.4)$$

由于$\{I_{k,i}:k,i=1,2,\cdots\}$是$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$的一个开方体覆盖, 由(2.4)式得到

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_{k,i}\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)+\varepsilon.$$

由于ε的任意性, 因此得到(2.3)式. ■

注 1 外测度也具有次有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathbf{R}^n$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} m^*(A_i).$$

事实上, 利用外测度的次可列可加性和 $m^*(\varnothing) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(A_1 \cup \cdots \cup A_k) &= m^*(A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &\le m^*(A_1) + \cdots + m^*(A_k) + m^*(\varnothing) + \cdots \\ &= m^*(A_1) + \cdots + m^*(A_k). \end{aligned}$$

定理 2. 2 若 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的方体, 则 $m^*(I)=|I|$.

证 为叙述简单计, 只证 $\mathbf{R}^1$ 中的情形. 在 $\mathbf{R}^n$ 中的情形其证明思想是一样的.

设 $I=[a,b]$ 为一有界闭区间. 对任意 $\varepsilon>0$, 开区间 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 是 I 的一个开区间覆盖. 因此

$$m^*(I)\le|(a-\varepsilon,b+\varepsilon)|=b-a+2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得到 $m^*(I)\le b-a=|I|$.

现在证明反向不等式. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 I 的一个开区间覆盖 $\{I_k\}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(I)+\varepsilon$.

根据有限覆盖定理, 存在$\{I_k\}$的一个有限子列, 不妨

设其为$\{I_1, I_2, \cdots, I_{k_0}\}$, 使得$I \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k$. 于是

$$|I| \le \sum_{k=1}^{k_0} |I_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(I) + \varepsilon.$$

由ε的任意性得到$|I| \le m^*(I)$. 因此当$I = [a, b]$时,

$m^*(I) = |I|$.

现在设I为任一有界区间. 则存在有界闭区间I_1和I_2

使得$I_1 \subset I \subset I_2$, 并且$|I| - |I_1| < \varepsilon$, $|I_2| - |I| < \varepsilon$.

由外测度的单调性和对有界闭区间证明的结果得到

$$|I|-\varepsilon \leq |I_1| = m^*(I_1) \leq m^*(I) \leq m^*(I_2) = |I_2| < |I| + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得 $m^*(I) = |I|$.

现在设 $I = [a, \infty)$ 为一无界区间. 对任意 $k > 0$, 由于 $[a, a+k] \subset [a, \infty)$, 因此

$$k = m^*([a, a+k]) \leq m^*([a, \infty)).$$

由 k 可以任意大, 这表明 $m^*([a, \infty)) = \infty$. 类似可证其它类型的无界区间的外测度为 ∞. 因此, 当 I 是无界区间时也有 $m^*(I) = |I|$. ■

定理 2.2 若 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的方体, 则 $m^*(I)=|I|$.

这里顺便指出证明区间 $(0,1)$ 不是可数集的另一方法. 由例 3 知道可数集的外测度为零. 但根据定理 2.2, $m^*((0,1))=1$, 因此区间 $(0,1)$ 不是可数集.

例 2 （外测度的平移不变性） 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 则对任意 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 有

$$m^*(x_0 + E) = m^*(E),$$

其中 $x_0 + E = \{x_0 + x : x \in E\}$.

证 若 $\{I_k\}$ 是 E 的开方体覆盖, 则 $\{x_0 + I_k\}$ 是 $x_0 + E$ 的开方体覆盖. 由于方体的体积是平移不变的, 故

$$m^*(x_0 + E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_0 + I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

对 E 的所有开方体覆盖取下确界得到

$$m^*(x_0 + E) \leq m^*(E).$$

由于E可以看成是x_0+E经过$-x_0$的平移得到, 因此又有$m^*(E)\le m^*(x_0+E)$, 从而

$$m^*(E)=m^*(x_0+E).$$ ■

对一个集作数乘变换有类似的结果:

例 3 设$E\subset\mathbf{R}^n$. 则对任意实数λ有

$$m^*(\lambda E)=|\lambda|^n m^*(E), \tag{2.5}$$

其中$\lambda E=\{\lambda x: x\in E\}$.

证明 略(不作要求).

习 题

1, 2, 4

§ 2.2　可测集与测度

2. 2. 1　可测集的定义

在 § 2.1 中引入的外测度 m^* 虽然具有一些与长度, 面积和体积类似的性质. 但**外测度不具有有限可加性**, 即当 $A, B \subset \mathbf{R}^n$ 并且 $A \cap B = \varnothing$ 时, 不一定总是有

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) \qquad \text{(反例见 § 2.3)}$$

思路: 希望把外测度限制在满足某种条件的所谓“好”的集上, 使其具有可加性. 这些“好”的集的应满足如下条件: (1). 这些“好”的集的全体 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数. (2). 包含一些常见的集, 例如所有方体.

在这种条件下, 我们看看$\mathcal{M}$中的集应该满足什么样的条件. 设$E\in\mathcal{M}$. 对任意方体I, 由于$I\in\mathcal{M}$, 因此$I\cap E$, $I\cap E^C\in\mathcal{M}$. 显然I是$I\cap E$和$I\cap E^C$的不相交并, 即

$$(I\cap E)\cap(I\cap E^C)=\varnothing,\ (I\cap E)\cup(I\cap E^C)=I.$$

既然m^*在$\mathcal{M}$上具有可加性, 此时应有

$$m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^C). \qquad (2.6)$$

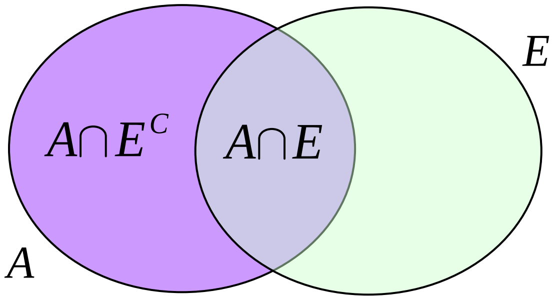
以上分析表明, $E\in\mathcal{M}$的必要条件是对任意方体I, (2.6) 式成立.

我们证明条件 (2.6) 式实际上等价于一个更强的条件.

$$m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^C). \qquad (2.6)$$

引理 2.1 设$E\subset \mathbf{R}^n$. 则(2.6)式对任意开方体I都成立的充要条件是对任意$A\subset \mathbf{R}^n$有

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C). \qquad (2.7)$$



证 只需证明必要性. 设(2.6)式成立. 由于

$$A=(A\cap E)\cup(A\cap E^C),$$

由于外测度的次有限可加性得到

$$m^*(A)\le m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C). \qquad (2.8)$$

再证明反向的不等式. 不妨设$m^*(A)<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$,

存在 A 的一个开方体覆盖$\{I_k\}$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(A)+\varepsilon$.

由于

$$A\cap E\subset\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\cap E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(I_k\cap E),$$

$$A\cap E^C\subset\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\cap E^C=\bigcup_{k=1}^{\infty}(I_k\cap E^C),$$

由外测度的次可列可加性, 得到

$$m^*(A\cap E)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E),\quad m^*(A\cap E^C)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E^C).$$

$$m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^C). \qquad (2.6)$$

利用以上两式和(2.6)式得到

$$m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E)+\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E^C)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[m^*(I_k\cap E)+m^*(I_k\cap E^C)\right]$$

根据(2.6)式

$$=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(A)+\varepsilon.$$

由ε的任意性得到

$$m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\le m^*(A). \qquad （2.9）$$

综合(2.8),(2.9)两式得到(2.7)式. ■

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^C). \quad (2.6)$$

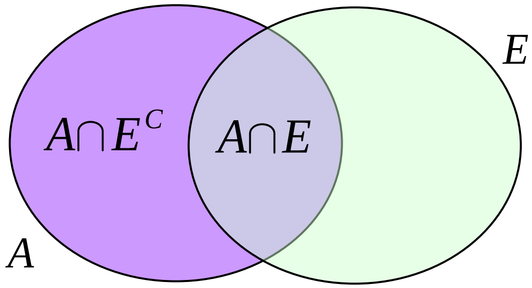
$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C). \quad (2.7)$$

从以上讨论知道, 若要求 m^* 限制在 $\mathcal{M}$ 上具有可加性, 则 $\mathcal{M}$ 中的集要满足的必要条件是(2.6).

条件(2.7)与(2.6)等价但在形式上更具有一般性, 因此我们宁愿采用 (2.7)式. 我们将看到 (2.7)式这个条件也是充分的.

下面我们就根据 (2.7)式这个条件给出可测集的定义.

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C). \quad (2.7)$$



定义 2. 2　设 $E \subset \mathbf{R}^n$.

(1) 若对任意 $A \subset \mathbf{R}^n$, (2.7)式成立, 则称 E 是 **Lebesgue 可测集**.

(2) 若 E 是 Lebesgue 可测集, 则称 $m^*(E)$ 为 E 的 **Lebesgue 测度**, 记为 $m(E)$.

Lebesgue 可测集和 Lebesgue 测度以后分别简称为可测集和测度. $\mathbf{R}^n$ 中的可测集的全体所成的集类记为 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$.

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C). \quad (2.7)$$

等式(2.7)称为 **Caratheodory 条件**(简称为**卡氏条件**).

注 由于对任意$E\subset \mathbf{R}^n$, 由外测度的次有限可加性总有

$$m^*(A)\le m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C).$$

因此卡氏条件(2.7)等价于对任意$A\subset \mathbf{R}^n$,

$$m^*(A)\ge m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C).$$

所以在验证卡氏条件时可以只验证上述不等式.

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\ \text{(卡氏条件)}$$

可测集的例

显然空集 $\varnothing$ 和全空间 $\mathbf{R}^n$ 满足卡氏条件, 它们都是可测集. 以下是可测集的一些例子.

例 1 (1) 若 $m^*(E)=0$, 则 E 是可测集.

(2) 零测度集的子集也是可测的.

(3) 可数集是可测集, 并且测度为零.

证 (1). 设$m^*(E)=0$. 由于外测度的单调性, 对任意$A\subset\mathbf{R}^n$, 我们有

$$m^*(A)=m^*(E)+m^*(A)\geq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C).$$

即E满足卡氏条件, 因此E是可测集. 由于$m(E)=0$, 称E是**零测度集.**

(2). 设E是零测度集, $E_1\subset E$. 由于$m^*(E_1)\leq m^*(E)=0$, 故$m^*(E_1)=0$. 由结论(1)知道E_1也是可测集.

(3). 根据§2.1 例 1, 可数集的外测度为零, 再由结论(1)即知.

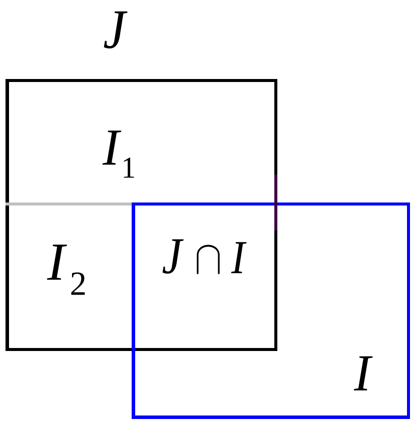
特别地, 有理数集$\mathbf{Q}$是可测集, 并且$m(\mathbf{Q})=0$.

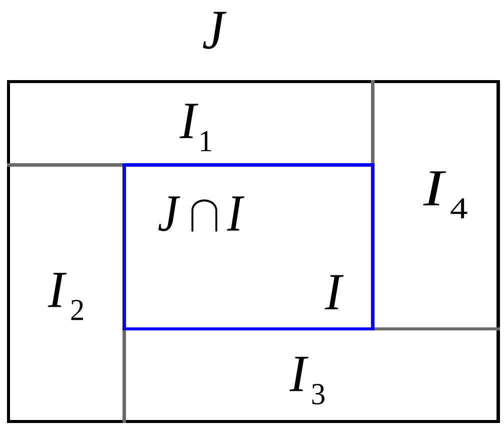
定理 2. 3　$\mathbf{R}^n$ 中的每个方体 I 都是可测集, 并且

$$m(I)=|I|.$$

证　设 $J\subset\mathbf{R}^n$ 为任一方体. 则 $J\cap I$ 仍是方体, 而 $J\cap I^C$ 可以表示为有限个互不相交的方体的并.

(下图所示是 $\mathbf{R}^2$ 上的情形).





设$J\cap I^C=\bigcup_{i=1}^{k}I_i$, 其中$I_1,\cdots;\ I_k$是互不相交的方体. 于是

$$J=(J\cap I)\cup(J\cap I^C)=(J\cap I)\cup\bigcup_{i=1}^{k}I_i. \quad (2.10)$$

由外测度的次可加性有

$$m^*(J\cap I^C)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}I_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}m^*(I_i). \quad (2.11)$$

由于体积是有限可加的, 利用(2.10),(2.11)两式得到

$$m^*(J)=|J|=|J\cap I|+\sum_{i=1}^{k}|I_i|=m^*(J\cap I)+\sum_{i=1}^{k}m^*(I_i)$$

$$\ge m^*(J\cap I)+m^*(J\cap I^C).$$

另一方面, $m^*(J) \le m^*(J \cap I) + m^*(J \cap I^C)$, 因此

$$m^*(J) = m^*(J \cap I) + m^*(J \cap I^C). \qquad (2.12)$$

根据引理 2.1, (2.12)式表明 I 满足卡氏条件. 因此 I 是可测的. 最后根据定理 2.2, $m^*(I) = |I|$, 也就是 $m(I) = |I|$. ■

2.2.1 可测集与测度的性质

引理 2.2 (1) 若 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是可测集，则 $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ 是可测集.

(2) 若 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是互不相交的可测集，$A_i \subset E_i$ $(i = 1, \cdots, k)$. 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A_i). \tag{2.13}$$

证 (1). 先证明当 $k=2$ 时结论成立. 令 $E=E_1\cup E_2$. 注意到 $E=E_1\cup(E_1^C\cap E_2)$, 利用 E_1 和 E_2 的可测性, 对任意 $A\subset\mathbf{R}^n$, 我们有

$$m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$

$$\le\left[m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2)\right]+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2^C)$$

$$=m^*(A\cap E_1)+\left[m^*\left((A\cap E_1^C)\cap E_2\right)+m^*\left((A\cap E_1^C)\cap E_2^C\right)\right]$$

$$=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C)=m^*(A).$$

上式表明 E 满足卡氏条件, 因此 $E=E_1\cup E_2$ 是可测集.

重复利用这个结论知道 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i$ 是可测的.

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} m^*(A_i). \qquad (2.13)$$

(2).先证明当$k=2$时结论成立. 因为E_1和E_2是互不相交的, 并且$A_1 \subset E_1, A_2 \subset E_2$, 所以

$$(A_1 \cup A_2) \cap E_1 = A_1,\ (A_1 \cup A_2) \cap E_1^C = A_2.$$

由于E_1是可测的, 利用卡氏条件有

$$m^*(A_1 \cup A_2) = m^*\big((A_1 \cup A_2) \cap E_1\big) + m^*\big((A_1 \cup A_2) \cap E_1^C\big)$$
$$= m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

重复利用这个结论知道(2.13)式对任意k成立.■

定理 2.4 (1). 可测集的全体 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 σ-代数.

(2). 每个 Borel 集都是可测集, 即 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$.

证 (1). 由可测集的定义可以看出, 若 E 是可测的, 则 E^C 也是可测的, 因此 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 对余运算封闭.

由引理 2.2 结论 (1) 知道 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 对并运算封闭. 因此 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 是一个代数.

根据习题 1, A 类第 16 题的结论, 为证 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 σ-代数, 只需再证明 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 对不相交可列并运算封闭即可.

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 中的一列互不相交的集. 令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 我们证明 $E\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$. 对任意 $A\subset\mathbf{R}^n$, 由于 $A\cap E_i\subset E_i\ (i\geq 1)$, 利用引理 2.2 结论 (2) 得到

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A\cap E_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}m^*(A\cap E_i)\quad (k=1,2,\cdots). \tag{2.14}$$

由引理 2.2 结论 (1), 对任意 $k\geq 1$, $\bigcup_{i=1}^{k}E_i$ 是可测集.

利用卡氏条件和(2.14)式我们有

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A\cap E_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}m^*(A\cap E_i). \quad (2.14)$$

$$m^*(A)=m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)+m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)^C\right)$$

利用(2.14)式

$$\geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A\cap E_i)\right)+m^*(A\cap E^C) \qquad (2.15)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}m^*(A\cap E_i)+m^*(A\cap E^C).$$

在(2.15)式中令$k\to\infty$, 并利用外测度的次可列可加性得到

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^C)$$

$$\geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap E_i)\right) + m^*(A \cap E^C) \qquad (2.16)$$

$$= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C).$$

(2.16)式表明E满足卡氏条件. 因此

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n).$$

这就证明了$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$是一个$\sigma$-代数.

(2). 设 G 是一个开集. 根据定理 1.27, 存在一列半开方体 $\{I_k\}$, 使得 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. 根据定理 2.3, 半开方体是可测集, 再利用结论 (1) 知道 G 是可测集.

因此若将 $\mathbf{R}^n$ 中的开集的全体记为 $\mathcal{C}$, 则 $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$.

根据结论 (1), $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 σ-代数. 由此得到

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)=\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{M}(\mathbf{R}^n).$$

定理证毕. ■

注 (1).根据定理 2.4,可测集的全体$\mathscr{M}(\mathbf{R}^n)$ 是一个σ-代数. 这说明**可测集具有很好的运算封闭性**. 而且由于每个Borel集都是可测集, 因此**可测集是足够多的**.

(2). 虽然可测集很多, 但**不可测集是存在的**. (例子见 § 2.3).

此外, **存在不是 Borel 集的可测集**, 即$\mathscr{M}(\mathbf{R}^n)$严格包含$\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$. (例子见 § 3.1)).

由于可测集的测度就是这个集的外测度, 因此外测度的性质也是测度的性质. 所以**测度具有单调性, 次可列可加性, 次有限可加性.**

下面的定理给出了测度的可列可加性, 以及其他几个重要的性质.

定理 2.5 测度具有如下性质:

(1).**有限可加性**: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是互不相交的可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i). \tag{2.17}$$

(2).**可减性**: 若 A, B 是可测集, $A \subset B$ 并且 $m(A) < \infty$, 则

$$m(B - A) = m(B) - m(A).$$

(3). **可列可加性**: 若 $\{A_k\}$ 是一列互不相交的可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k). \tag{2.18}$$

(4).**下连续性**: 若 $\{A_k\}$ 是一列单调递增的可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

(5). **上连续性**: 若$\{A_k\}$是一列单调递减的可测集, 并且 $m(A_1)<\infty$, 则

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

证 (1). 在引理 2.2 中的(2.13)式中令 $A_i=E_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$即得.

(2). 由于$A\subset B$, 因此

$$B=A\cup(B-A),\ A\cap(B-A)=\varnothing.$$

由测度的有限可加性得到 $m(B)=m(A)+m(B-A)$.

由于$0\le m(A)<\infty$, 由上式即得

$$m(B-A)=m(B)-m(A).$$

(3). 由于测度是有限可加的, 对任意$k\geq 1$有

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

在上式中令$k\to\infty$, 得到 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right).$

另一方面, 根据测度的次可列可加性, 我们有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

这就证明了

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

(4). 令 $B_1 = A_1, B_k = A_k - A_{k-1}\ (k \geq 2)$. 由于 $\{A_k\}$ 是单调递增的, 容易知道有 $B_i \cap B_j = \varnothing\ (i \neq j)$, 并且

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

利用以上两式和测度的可列可加性, 得到

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m(B_i)$$

$$= \lim_{k\to\infty} m\Big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\Big) = \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

这就证明了结论(4)成立.

(5). 令$B_k = A_1 - A_k\ (k \geq 1)$. 则$\{B_k\}$是单调递增的并且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 - A_k) = A_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

注意到$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq m(A_k) \leq m(A_1) < \infty$, 利用测度的可减性和下连续性, 我们有

$$m(A_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(B_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} (m(A_1) - m(A_k))$$

$$= m(A_1) - \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

因而$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$. ■

注 1　在定理 2.5 的结论(2)中, 若 $m(A)=\infty$, 则也有 $m(B)=\infty$. 此时 $m(B)-m(A)$ 无意义. 因此在测度的可减性中要求 $m(A)<\infty$.

此外, 在定理 2.5 的结论(5)中, 若去掉条件 $m(A_1)<\infty$, 则不能保证结论(5)中的等式成立.

例如, 设 $A_k=[k,\infty)(k=1,2,\cdots)$, 则 $\{A_k\}$ 是单调递减的并且 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\varnothing$. 于是 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=0$. 另一方面, 由于 $m(A_k)=\infty(k\geq 1)$, 因此 $\lim_{k\to\infty}m(A_k)=\infty$. 这表明此时

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)\neq\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

根据上面的讨论,可测集的测度具有与长度, 面积和体积类似的性质. 而且由于方体的测度就是方体的体积, 因此 **Lebesgue 测度确实是长度, 面积和体积概念的推广.**

例 2 设 K 是 Cantor 集. 将 Cantor 集的邻接开区间记为 $\{I_k\}$. 在 §1.4 例 6 中已经知道 $\{I_k\}$ 是互不相交的并且 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|=1$. 由于 $K=[0,1]-\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 因此 K 是可测集, 并且

$$m(K)=m([0,1])-m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|=0.$$

我们知道 K 是不可数集, 这个例子表明, **不可数集的测度也可能为零.**

例 3 设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 中的零测度集. 我们证明 $A\times[a,b]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测集并且 $m(A\times[a,b])=0.$

证 由于 $m(A)=0,$ 因此对任意 $\varepsilon>0,$ 存在 A 的一个开区间覆盖 $\{I_k\}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon.$ 于是 $A\times[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(I_k\times[a,b]).$

由于 $|I_k\times[a,b]|=(b-a)|I_k|,$ 因此

$$m^*(A\times[a,b])\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\times[a,b])=(b-a)\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<(b-a)\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得到 $m^*(A\times[a,b])=0.$ 因此 $A\times[a,b]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测集并且 $m(A\times[a,b])=0.$

习 题

5～9, 12, 13, 15～19

B 类: 1, 3, 9

§ 2.3　可测集与测度(续)

2. 3. 1　可测集的逼近性质

可测集可以用较熟悉的集例如开集, 闭集等来逼近.

定理 2. 6　设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. 则

(1) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$, 使得 $m(G-E)<\varepsilon$.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, 使得 $m(E-F)<\varepsilon$.

(3) 存在 G_δ 型集 $G\supset E$, 使得 $m(G-E)=0$.

(4) 存在 F_σ 型集 $F\subset E$, 使得 $m(E-F)=0$.

证 (1). 先设 $m(E)<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在一列开方体 $\{I_k\}$ 使得 $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ 并且 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\varepsilon$. 令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 则 G 为开集, $G\supset E$ 并且

$$m(G)\le\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\varepsilon. \qquad (2.21)$$

注意到 $m(E)<\infty$, 由测度的可减性得到

$$m(G-E)=m(G)-m(E)<\varepsilon.$$

现在设 $m(E)=\infty$. 设 $\{A_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一列互不相交的可测集, 使得 $m(A_k)<\infty$ 并且 $\mathbf{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$.

(例如$\mathbf{R}^2$可以表示为一列互不相交的边长为1的半开正方形的并).

令$E_k = E \cap A_k \, (k \geq 1)$, 则$m(E_k) < \infty$并且$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 由上面所证的结果, 对每个$k$, 存在开集$G_k \supset E_k$使得$m(G_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

令$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 则$G$是开集并且$G \supset E$. 由于

$$G - E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k),$$

因此

$$m(G-E) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k - E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

(2). 由于E^C也是可测集, 根据(1)的结果, 存在开集$G \supset E^C$, 使得$m(G - E^C) < \varepsilon$. 令$F = G^C$, 则F是闭集并且$F \subset E$.

由于

$$E - F = E \cap F^C = (E^C)^C \cap G = G - E^C.$$

于是得$m(E - F) = m(G - E^C) < \varepsilon$.

(3). 由于(1)的结果, 对每个自然数k, 存在开集$G_k \supset E$使得$m(G_k - E) < \frac{1}{k}$. 令$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. 则$G$为$G_\delta$型集, $G \supset E$并且

$$m(G - E) \le m(G_k - E) < \frac{1}{k} \quad (k \ge 1).$$

令$k \to \infty$, 即得$m(G - E) = 0$.

(4). 由(2)的结果, 对每个自然数k, 存在闭集$F_k \subset E$使得 $m(E-F_k)<\frac{1}{k}$. 令$F=\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则$F$是$F_\sigma$型集, $F \subset E$并且

$$m(E-F) \le m(E-F_k) < \frac{1}{k} \quad (k \ge 1).$$

令$k \to \infty$, 即得$m(E-F)=0$. ■

注 设E为$\mathbf{R}^n$中的可测集. 根据定理 2.6, 存在一个F_σ型集$F \subset E$, 使得$m(E-F)=0$. 令$A=E-F$, 则$m(A)=0$, 并且$E=F \cup A$. 这表明**每个可测集与一个 Borel 集仅相差一个零测度集.**

例 1 设 E 是直线上的可测集并且 $m(E)<\infty$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限个开区间的并集 U, 使得

$$m\left(E\Delta U\right)<\varepsilon.$$

证 根据定理 2.6, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 使得 $m(G-E)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由直线上开集的构造定理, G 是有限或一列互不相交的开区间的并.

若 $G=\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i)$, 令 $U=G$. 则

$$m\left(E\Delta U\right)=m(U-E)=m(G-E)<\varepsilon.$$

现在设$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$. 由$m(E)<\infty$知道$m(G)<\infty$. 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)=m(G)<\infty.$$

因此可以取k足够大使得$\sum_{i=k+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\frac{\varepsilon}{2}$. 令$U=\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i)$, 则$m(G-U)<\frac{\varepsilon}{2}$. 我们有

$$\begin{aligned} m\big((E-U)\cup(U-E)\big)&=m(E-U)+m(U-E)\\ &\le m(G-U)+m(G-E)\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{aligned}$$

即$m\big(E\Delta U\big)<\varepsilon$. 结论得证. ■

定理 2.7 （Lebesgue 测度的平移不变性） 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, $x_0 \in \mathbf{R}^n$. 则 $x_0 + E$ 是可测集并且

$$m(x_0 + E) = m(E).$$

证 对任意 $A \subset \mathbf{R}^n$. 由习题 1, A 类第 5 题的结果, 有

$$x_0 + A \cap E = (x_0 + A) \cap (x_0 + E). \tag{2.22}$$

$$x_0 + E^C = (x_0 + E)^C. \tag{2.23}$$

根据 § 2.1 例 2, 外测度是平移不变的. 若 E 是可测集, 利用外测度的平移不变性和(2.22),(2.23)两式得到

$$m^*(x_0+A)=m^*(A)$$
$$=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$
$$=m^*(x_0+A\cap E)+m^*(x_0+A\cap E^C)$$
$$=m^*\big((x_0+A)\cap(x_0+E)\big)+m^*\big((x_0+A)\cap(x_0+E^C)\big)$$
$$=m^*\big((x_0+A)\cap(x_0+E)\big)+m^*\big((x_0+A)\cap(x_0+E)^C\big).$$

将上式中的A换成$-x_0+A$得到

$$m^*(A)=m^*(A\cap(x_0+E))+m^*(A\cap(x_0+E)^C).$$

这表明x_0+E满足卡氏条件, 因此x_0+E是可测集. 利用外测度的平移不变性得到$m(x_0+E)=m(E)$. ■

利用 § 2.1 例 3 的结果, 仿照定理 2.7, 可以证明若 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, 则对任意实数 λ, λE 是可测集并且 $m(\lambda E) = |\lambda|^n m(E)$. 其证明留作习题.

2.3.2 不可测集的例

前面我们已经提到不可测集是存在的，现在我们给出一个例子.

由于$\mathbf{R}^n$中的常见的集, 例如有限集或可列集, 各种方体, 开集, 闭集, 以及这些集经过有限或可列并, 交和余运算后得到的集都是可测集. 因此要作出一个不可测集是不容易的. 下面我们要构造出一个不可测集, 这其中要用到 Zermelo 选取公理.

Zermelo 选取公理 若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是一族互不相交的非空的集. 则存在一个集$E\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 使得对每个$\alpha\in I$, $E\cap A_\alpha$是单点集. 换言之, 存在一个集E, 使得E是由每个A_α中选取一个元构成.

例 3 不可测集的例. 设 $x, y \in [0,1]$. 若 $x-y$ 是有理数则称 x 与 y 等价, 记为 $x \sim y$. 对任意 $x \in [0,1]$, 令

$$\tilde{x} = \{y \in [0,1] : y \sim x\}.$$

则 $\tilde{x}$ 是 $[0,1]$ 的一个子集, 称之为由 x 确定的**等价类**.

容易验证:

(1) 若 $x_1 \sim x_2$, 则 $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. (2) 若 $x_1 \nsim x_2$, 则 $\tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2 = \varnothing$.

因此区间 $[0,1]$ 被分割为一些互不相交的等价类.

根据 Zermelo 选取公理, 存在 $[0,1]$ 的一个子集 E, 它是由每个等价类中选取一个元构成. 我们证明 E 不是可测的.

设$\{r_n\}$是$[-1,1]$中的有理数的全体. 对每个自然数n,
令$E_n=r_n+E$. 则集列$\{E_n\}$具有如下性质:

(1). 当$m\neq n$时, $E_m\cap E_n=\varnothing$.

若不然, 设$x\in E_m\cap E_n$, 则$x-r_m\in E$, $x-r_n\in E$.

由于$x-r_m-(x-r_n)=r_n-r_m$是有理数, 故$x-r_m\sim x-r_n$,
因此$x-r_m$和$x-r_n$属于同一等价类.

但$x-r_m\neq x-r_n$. 这样E就包含了某一等价类中的两个不同的元. 这与E的性质矛盾! 因此$E_m\cap E_n=\varnothing$.

(2). 成立如下包含关系:

$$[0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset[-1,2].$$

事实上, 设 $x\in[0,1]$. 由 E 的性质, E 应包含 $\tilde{x}$ 中的某一元 y. 由于 $x\sim y$, 故 $r=x-y$ 是 $[-1,1]$ 中的有理数. 设 $r=r_{n_0}$, 则 $x=r_{n_0}+y\in E_{n_0}$. 这就证明了 $[0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 至于包含关系 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset[-1,2]$ 是显然的.

现在用**反证法**. 假定 E 是可测的. 根据 Lebesgue 测度的平移不变性, 每个 E_n 是可测的, 并且 $m(E_n)=m(E)$. 由测度的可列可加性, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\leq m([-1,2])=3.$$

故必须 $m(E)=0$. 于是 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=0$. 但另一方面由于 $[0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 应有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\geq 1.$$

这样就导致矛盾. 因此 E 不是可测集. ■

本节后面的内容略, 不作要求.

习 题

20, 21, 22