§ 3.2　可测函数列的收敛

3.2.1 几乎处处成立的性质

本节以下总是设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一给定的可测集.

设 $P(x)$ 是一个与 E 中的点 x 有关的命题. 若

$$m(\{x \in E : P(x)\text{不成立}\}) = 0,$$

换言之, 存在 E 的一个零测度子集 E_0, 使得当 $x \in E - E_0$ 时命题 $P(x)$ 成立, 则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立, 记为 $P(x)$ a.e.于 E.

在不会引起混淆的情况下也可以简记为 $P(x)$ a.e. (其中 a.e.是英文 almost everywhere 的缩写).

例 1 设 f 和 g 是定义在 E 上的函数. 若

$$mE(f \neq g) = 0,$$

换言之, 存在 E 一个零测度子集 E_0, 使得当 $x \in E - E_0$ 时 $f(x) = g(x)$, 则称 f 和 g 在 E 上**几乎处处相等**, 记为 $f = g$ a.e. 于 E.

例如, 设 $D(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的 Dirichlet 函数(见 § 3.1 例 2). 由于

$$mE(D \neq 0) = m(\mathbf{Q}) = 0,$$

因此在 $\mathbf{R}^1$ 上 $D(x) = 0$ a.e.

例 2 设 f 是定义在 E 上的函数. 若

$$mE(|f|=+\infty)=0,$$

换言之，存在 E 的一个零测度子集 E_0，使得当 $x\in E-E_0$ 时 $f(x)\neq\pm\infty$，则称 f 在 E 上是**几乎处处有限的**, 记为 $|f|<\infty$ a.e. 于 E.

例如, 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}(0<x\leq 1), f(0)=+\infty$. 则 f 在 $[0,1]$ 上是几乎处处有限的.

注意, f 在 E 上几乎处处有限与本性有界的区别:

称 f 在 E 上是本性有界的, 若存在 E 的一个零测度子集 E_0 和 $M>0$, 使得当 $x\in E-E_0$ 时, $|f(x)|\le M$.

本性有界的可测函数是几乎处处有限的, 但反过来则不一定. 例如, 在例 2 中的考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{x}(0<x\le 1),\ \ f(0)=+\infty.$$

f 在 $[0,1]$ 上是几乎处处有限的, 但 f 在 $[0,1]$ 上不是本性有界的.

例 3 设 f 是 E 上的可测函数, $g=f$ a.e.于 E, 则 g 在 E 上可测.

事实上, 由于 $g=f$ a.e.于 E, 存在 E 的一个零测度子集 E_0, 使得当 $x\in E-E_0$ 时, $f(x)=g(x)$. 因此, 对任意实数 a,

$$E(g>a)=\{x\in E-E_0:g(x)>a\}\cup\{x\in E_0:g(x)>a\}$$

$$=\{x\in E-E_0:f(x)>a\}\cup\{x\in E_0:g(x)>a\}.$$

由于 f 在 $E-E_0$ 上也是可测的, 因而上式右边的第一个集是可测集. 第二个集是零测度集 E_0 的子集, 因而也是可测的. 因此 $E(g>a)$ 是可测集. 这表明 g 在 E 上可测. ■

注 1　例 3 说明改变函数在一个零测度集上的函数值，不改变函数的可测性.

此外从例 3 的证明可以看出，若存在E的一个零测度集E_0，使得f在$E-E_0$上有定义并且可测，任意补充f在E_0上的定义后，则f在E上可测．因此在$E-E_0$上有定义并且可测的函数可以自动视为E上的可测函数.

3.2.2 可测函数列的几种收敛

在数学分析中,我们已经熟悉函数列的处处收敛和一致收敛.下面定义的几乎处处收敛和几乎一致收敛分别与这两种收敛类似,但更弱一些.而依测度收敛则是一种全新的收敛,在后面讨论积分的极限定理时,将会用到.

以下设所出现的可测函数都是几乎处处有限的.

定义 3.4 设$\{f_n\}$是E上的可测函数列，f是E上的可测函数.

(1). 若存在E的一个零测度子集E_0，使得当$x\in E-E_0$时，$f_n(x)\to f(x)$，则称$\{f_n\}$在E上**几乎处处收敛**于f，记为$f_n\to f$ a.e.于E.

(2). 若对任给的$\varepsilon>0$，总有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x\in E : |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}=0,$$

则称$\{f_n\}$在E上**依测度收敛**于f，记为在E上$f_n\xrightarrow{m}f$.

(3). 若对任给的 $\delta>0$, 存在 E 可测子集 E_δ, $m(E-E_\delta)<\delta$, 使得 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f, 则称 $\{f_n\}$ 在 E 上**几乎一致收敛**于 f, 记为 $f_n \to f$ a.un. 于 E. (其中 a.un.是英文 almost uniformly 的缩写).

注意, 实际上**几乎一致收敛不是一个几乎处处成立的性质.** 因此“几乎一致收敛”也许并不是一个很恰当的术语. 由于这个原因,“几乎一致收敛”这个术语并不是普遍使用的. 但是为了行文的简洁与方便, 我们仍然使用这个术语.

例 4　(几乎处处收敛不能推出依测度收敛)对每个自然数n, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,n],\\ 0, & x\in(n,\infty).\end{cases}$$

则$\{f_n\}$在$[0,\infty)$上处处收敛于1. 但是当$n\to\infty$时,

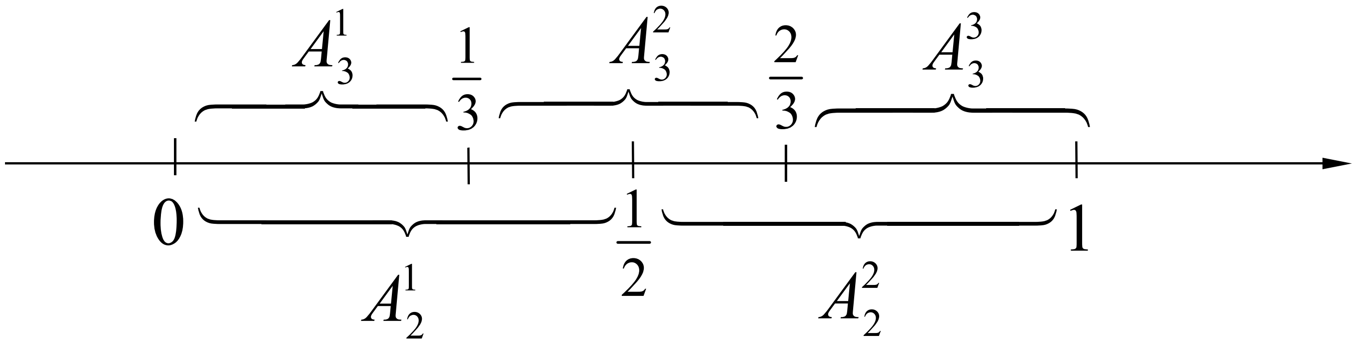
$$mE(|f_n-1|\geq\frac{1}{2})=m((n,\infty))=+\infty\not\longrightarrow 0.$$

因此$f_n(x)$不依测度收敛于1.

例 5　设 $E=[0,1]$, $f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$. 对任意 $\delta>0$ (不妨设 $0<\delta<1$), 令 $E_\delta=[0,1-\delta]$, 则 $m(E-E_\delta)\leq\delta$, 并且 $f_n(x)$ 在 E_δ 上一致收敛于 0. 因此 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎一致收敛于 0.

例 6 (依测度收敛不能推出几乎处处收敛)对每个自然数n, 将区间$[0,1]$分为n个等长的小区间. 记

$$A_n^i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\quad(i=1,\cdots,n).$$



将$\{A_n^i\}$按照顺序 $A_1^1, A_2^1, A_2^2, A_3^1, A_3^2, A_3^3, \cdots$重新编号记为$\{E_n\}$. 显然$m(E_n)\to 0(n\to\infty)$.

对每个自然数n, 令 $f_n(x)=\chi_{E_n}(x)(x\in[0,1])$. 对任意$\varepsilon>0$(不妨设$0<\varepsilon<1$), 由于当$n\to\infty$时

$$m\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\geq\varepsilon\}=m(E_n)\to 0.$$

因此在$[0,1]$上$\{f_n\}$依测度收敛于0.

但$\{f_n\}$在$[0,1]$上处处不收敛. 事实上, 对任意$x_0\in[0,1]$必有无限多个E_n包含x_0, 也有无限多个E_n不包含x_0. 因此有无限多个n使得$f_n(x_0)=1$, 又有无限多个n使得$f_n(x_0)=0$. 这说明$f_n(x_0)$不收敛.

这个例子表明依测度收敛不能推出几乎处处收敛.■

从例 6 可以看出几乎处处收敛与依测度收敛的不同意义.

对于例 6 中的函数列$\{f_n\}$而言，对任意固定的$x_0 \in [0,1]$，有无限多个n使得$f_n(x_0)=1$. 因此$f_n(x_0)$不趋于0.

但对固定的n而言，使得$f_n(x)=0$的点x出现的"频率"却很大. 而且随着$n \to \infty$，$E(f_n=0)$的测度趋近于整个E的测度.

这说明依测度收敛是从整体的角度反映当$n \to \infty$时$\{f_n\}$的变化性态的一种收敛.

3.2.3 几种收敛的相互关系

引理 3.1 设 $m(E)<\infty$. 若 $f_n \to f$ a.e.于E, 则对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) = 0.$$

证 对于给定的$x\in E$, 若对任意$n\geq 1$, 存在$k\geq n$, 使得 $|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon$, 则 $f_k(x)$不收敛于 $f(x)$. 这表明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\varepsilon)\subset\{x\in E: f_k(x)\not\longrightarrow f(x)\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geq\varepsilon)\subset\{x\in E: f_k(x)\not\longrightarrow f(x)\}.$$

由于 $f_n\to f$ a.e.于 E, 上式右边的集是零测度集. 故

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geq\varepsilon)\right)=0.$$

注意到 $m(E)<\infty$, 由测度的上连续性, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_i-f|\geq\varepsilon)\right)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_k-f|\geq\varepsilon)\right)=0.$$

引理证毕. ■

容易证明, $f_n \to f$ a.un.蕴涵 $f_n \to f$ a.e.(其证明留作习题).
下面的定理表明当 $m(E)<\infty$ 时, 其逆也成立.

定理 3.9 (Egoroff, 叶戈洛夫)

设 $m(E)<\infty$. 若 $f_n \to f$ a.e., 则 $f_n \to f$ a.un.

证 由引理 3.1, 对每个自然数 $k \geq 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E(|f_i - f| \geq \frac{1}{k})\right) = 0.$$

于是对任意给定的 $\delta > 0$, 可以依次选取自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使得

$$m\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geq \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k} \quad (k = 1.2, \cdots).$$

$$m\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geq \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k} \ (k = 1. 2, \cdots).$$

令
$$E_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| < \frac{1}{k}).$$

由 De Morgan 公式得到

$$E - E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geq \frac{1}{k}).$$

由测度的次可列可加性得到

$$m(E - E_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} E(|f_i - f| \geq \frac{1}{k})\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

$$E_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=n_k}^{\infty} E\left(|f_i - f| < \frac{1}{k}\right).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 k 足够大使得 $\frac{1}{k} < \varepsilon$. 则当 $i \geq n_k$ 时, 对所有 $x \in E_\delta$, 有

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

这表明 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f. 这就证明了 $f_n \to f$ a.un.于 E. ■

例 7 在 Egoroff 定理中，条件$m(E)<\infty$不能去掉.

例如, 设$\{f_n\}$是例 4 中定义的函数列. 在例 4 中我们已经知道$\{f_n\}$在$[0,\infty)$上处处收敛于 1, 但不依测度收敛于 1. 因此$\{f_n\}$更不可能在$[0,\infty)$上几乎一致收敛于 1 (参见习题 3, A 类第 18 题).

定理 3.10 设$m(E)<\infty$. 若$f_n \to f$ a.e., 则$f_n \xrightarrow{m} f$.

证 由引理 3.1, 对任意$\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E(|f_i-f|\geq\varepsilon)\right)=0.$$

由测度的单调性得到

$$0\leq mE(|f_n-f|\geq\varepsilon)\leq m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E(|f_i-f|\geq\varepsilon)\right).$$

令$n\to\infty$得到$\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geq\varepsilon)=0$, 即$f_n \xrightarrow{m} f$. ■

本节例 4 表明, 在定理 3.10 中, 条件$m(E)<\infty$不能去掉.

在例 6 中我们已经看到, 依测度收敛不能推出几乎处处收敛. 但我们有下面的重要定理:

定理 3. 11 (F. Riesz) 若 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \to f$ a.e.

证 设 $f_n \xrightarrow{m} f$. 则对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得当 $n \geq N$ 时, 有 $mE(|f_n - f| \geq \varepsilon) < \delta$.

于是对每个自然数 $k \geq 1$, 令 $\varepsilon = \frac{1}{k}, \delta = \frac{1}{2^k}$, 可以依次选取自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使得

$$mE\left(\left|f_{n_k} - f\right| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}. \qquad (3.3)$$

$$mE\left(\left|f_{n_k}-f\right|\geq\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{2^k}. \qquad (3.3)$$

我们证明 $f_{n_k}\to f$ a.e. 令

$$E_0=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}E\left(\left|f_{n_k}-f\right|\geq\frac{1}{k}\right).$$

对每个 $N=1,2,\cdots,$ 利用(3.3)式得到

$$m(E_0)\leq m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E\left(\left|f_{n_k}-f\right|\geq\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\leq\sum_{k=N}^{\infty}mE\left(\left|f_{n_k}-f\right|\geq\frac{1}{k}\right)<\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{N-1}}.$$

$$m(E_0) < \frac{1}{2^{N-1}} \quad (N = 1, 2, \cdots)$$

令 $N \to \infty$ 即知 $m(E_0) = 0$. 由 De Morgan 公式得到

$$E - E_0 = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} E(|f_{n_k} - f| < \frac{1}{k}).$$

因此若 $x \in E - E_0$, 则存在 $N \geq 1$, 使得当 $k \geq N$ 时,

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

因此 $f_{n_k}(x) \to f(x)$. 这表明在 $E - E_0$ 上 $f_{n_k} \to f$, 即在 E 上 $f_{n_k} \to f$ a. e. ■

定理 3.12 设$m(E)<\infty$. 则 $f_n \xrightarrow{m} f$ 的充要条件是对$\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_k}\}$, 都存在其子列$\{f_{n_{k'}}\}$使得$f_{n_{k'}} \to f$ a.e.

证 必要性: 设$f_n \xrightarrow{m} f$. 显然$\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_k}\}$也依测度收敛于f. 由 Riesz 定理, 存在$\{f_{n_k}\}$的子列$\{f_{n_{k'}}\}$, 使得$f_{n_{k'}} \to f$ a.e.$(k' \to \infty)$.

充分性: 若$\{f_n\}$不依测度收敛于f, 则存在$\varepsilon>0$, 使得$mE(|f_n - f| \geq \varepsilon)$不收敛于0. 于是存在$\delta>0$和$\{f_n\}$的一个子列$\{f_{n_k}\}$, 使得

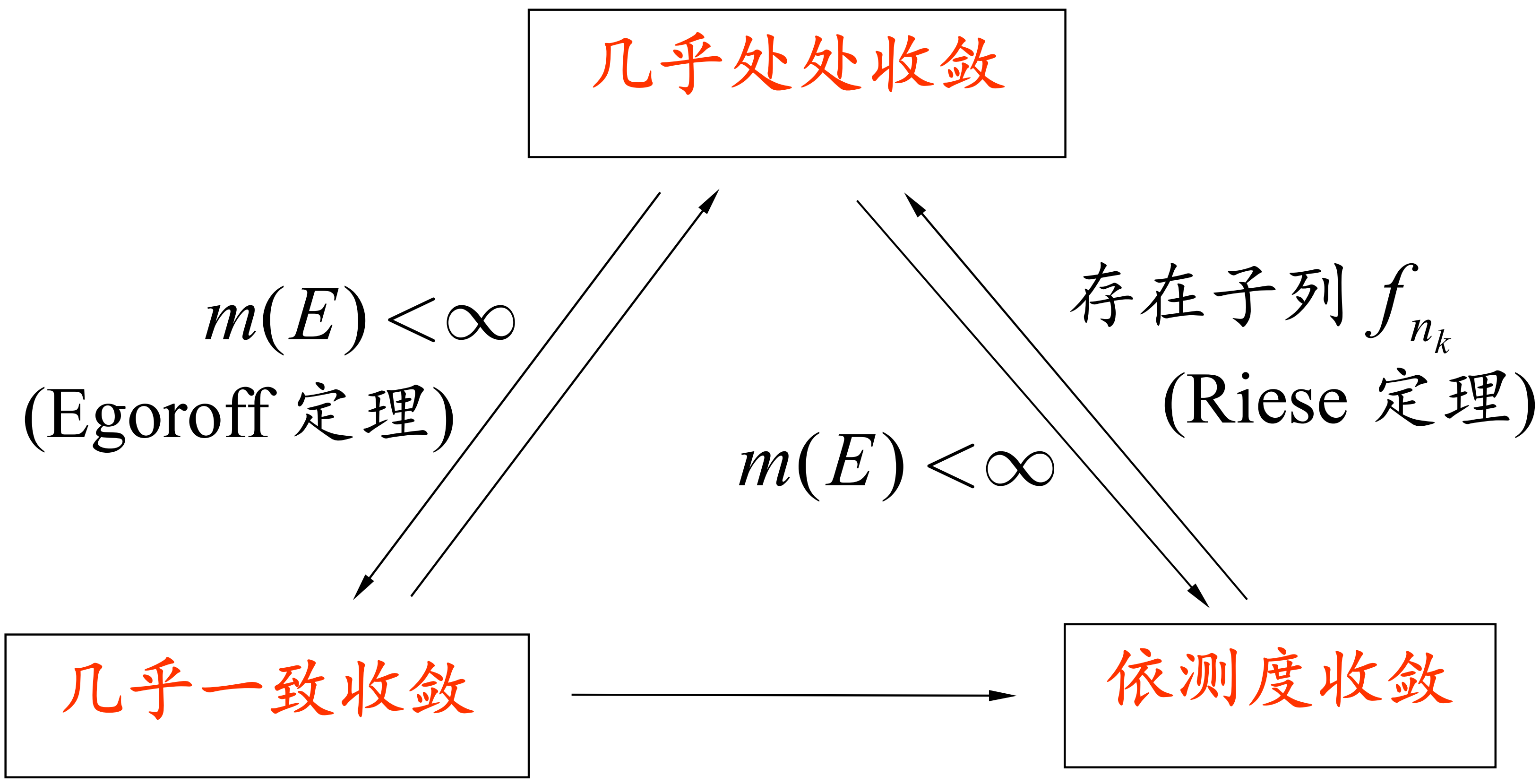
$$mE\left(\left|f_{n_k} - f\right| \geq \varepsilon\right) \geq \delta \ (k=1,2,\cdots). \quad (3.4)$$

$$mE\left(\left|f_{n_k}-f\right|\geq\varepsilon\right)\geq\delta\ (k=1,2,\cdots)\qquad(3.4)$$

另一方面, 由假设条件, 存在$\{f_{n_k}\}$的子列$\{f_{n_{k'}}\}$,使得 $f_{n_{k'}}\to f$ a.e. 由于$m(E)<\infty$, 根据定理 3.10, 此时应有$f_{n_{k'}}\xrightarrow{m}f$. 但这与(3.4)式矛盾. 因此必有$f_n\xrightarrow{m}f$. ■

定理 3.11 和定理 3.12 给出了依测度收敛和几乎处处收敛的联系. 利用这种联系, 常常可以把依测度收敛的问题转化为几乎处处收敛的问题. 而几乎处处收敛是比较容易处理的.

几种收敛之间的关系总结如下图:



例 8 设 $m(E)<\infty$, $f, f_n (n\geq 1)$ 是 E 上的实值可测函数 φ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 若在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则在 E 上 $\varphi(f_n)\xrightarrow{m}\varphi(f)$.

证 设 $\varphi(f_{n_k})$ 是 $\varphi(f_n)$ 的任一子列. 由于 $f_n \xrightarrow{m} f$, 根据定理 3.12, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. $(k'\to\infty)$. 既然 φ 是连续的, 因此有 $\varphi(f_{n_{k'}})\to\varphi(f)$ a.e. 这表明对 $\varphi(f_n)$ 的任一子列 $\varphi(f_{n_k})$, 都存在其子列 $\varphi(f_{n_{k'}})$ 使得 $\varphi(f_{n_{k'}})\to\varphi(f)$ a.e. 再次应用定理 3.12 知道 $\varphi(f_n)\xrightarrow{m}\varphi(f)$. ■

习 题

14～19, 20(3),(4), 21, 22, 24.