武汉大学 2010-2011 第一学期
概率论与数理统计 D 期末试题（A 卷）（36 学时）

1、（12 分）若 $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$。

⑴求 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率。　⑵求 $p(C\mid A\cup B)$。

2、（12 分）设工厂 A 和 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，求它是 A 生产的概率。

3、（14 分）若随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，记 A 为事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$；

对随机变量 X 进行 4 次观测，以 Y 表示事件 A 出现的次数；

⑴ $p(A)$；　⑵求 $p(Y=2)$。

4、（14 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+2y)}, x>0, y>0\\ 0, \text{其它}\end{cases}$，

（1）求 A 的值？　（2）求 $f_X(x), f_Y(y)$；

（3）随机变量 X 与 Y 是否独立？　（4）求 $Z=X+Y$ 的密度。

5、（12 分）设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上均匀分布的随机变量，而经销商进货数量 Y 为区间 $[10,30]$ 中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位仅获利 300 元。为使商店所获利润期望值不少于 9280，试确定最小进货量。

6、（12 分）若随机变量 (X,Y) 在 $D:0<x<1, x^2<y<x$ 上服从均匀分布，求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{xy}。

7、（12 分）某厂生产的钉子的不合格率为 0.01。问一盒钉子中至少要装多少个才能保证其中有 100 只合格品的概率不少于 0.95？（已知 $\Phi(1.65)=0.95$）

8、（12 分）若随机变量 X,Y 独立而且服从二项分布 $B(2,0.5)$，$M=Max(X,Y), N=Min(X,Y)$。求 (M,N) 的联合分布及 $Z=X+Y$ 的分布律。

武汉大学 2011-2012 第一学期

《概率论与数理统计 D》期末试题 A（36 学时）

一、（12 分）若 A 、B 为两独立事件，$P(A)=0.5, P(B)=0.4$

求：(1) $P(A+B)$；(2) $P((A-B)|(A+B))$。

二、（12 分）某车间的零件来自甲、乙、丙三厂，其各占比例为 5：3：2，合格率分别为 0.9、0.8、0.75；现从中任取一件，若它是合格品，求它来自甲厂的概率。

三、（12 分）若 10000 件产品中优等品的概率为 0.2。

求：（1）试用切比雪夫不等式估计其中优等品数量介于 1800~2200 之间的概率。

（2）从中任取 5 件，以 X 表示其中优等品的个数。写出 X 的分布律。

四、（14 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

（1）求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；

（2）X 和 Y 是否独立 ？

（3）求 $Z=X-Y$ 的概率密度

五、（14 分）设 n 个随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立且服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，试求 $M=\max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ 的概率分布，并计算 M 的期望和方差。

六、（12 分）某单位有 300 部电话，每部电话约有 4%的时间要使用外线。假设每部电话是否使用外线通话是相互独立的，问该单位至少需要安装多少条外线，才能保证外线畅通的概率不少于 0.95？（已知 $\Phi(1.65)=0.95$）

七、（12 分）若随机变量 (X,Y) 在区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求它们的的相关系数 ρ。

八、（12 分）某商店经销某商品，已知销售量和进货量相互独立，且均在(50,100)上服从均匀分布。若每销售 1 单位获利 500 元，且需求量大于进货量时可以从其他部门调剂，此时每单位获利 300 元；如果有积压，则每单位亏损 200 元。求平均利润。

武汉大学 2010-2011 第一学期概率论与数理统计 D 期末试题答案

1、解：（1）P(A∪B∪C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(C)P(A)+P(A)+P(B)P(B)P(C)=$\frac{5}{8}$

（2）P(C|A∪B)=P(C∩(A∪B))/P(A∪B)=(1/8)/(1/4+1/4)=1/4

2、解：$P(A生产)=\frac{P(A生产且次品)}{P(次品)}=\frac{60\%\times1\%}{60\%\times1\%+40\%\times2\%}=\frac{3}{7}$

3、解：（1）P(A)=$\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$；（2）P(Y=2)=$C_4^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{128}$

4、解：（1）由概率的归一化条件的性质：$\int_0^{+\infty}[\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+2y)}dx]dy=\frac{1}{2}A=1$，得 A=2；

（2）$f_X(x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)dy=2e^{-x}\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy=e^{-x}$；$f_X(x)=\int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dy=2e^{-2y}$

（3）因为 $f_X(x)f_Y(y)=2e^{-(x+2y)}=f(x,y)$；所以变量 X 与 Y 独立

（4）利用积分转化法有：

$$\int_0^{+\infty}[\int_0^{+\infty}h(x+y)2e^{-(x+2y)}dx]dy=\int_0^{+\infty}[\int_y^{+\infty}h(z)2e^{-(z+y)}dz]dy=\int_0^{+\infty}[\int_z^{+\infty}h(z)2e^{-(z+y)}dy]dz$$

$$=\int_0^{+\infty}2h(z)e^{-z}[\int_z^{+\infty}e^{-y}dy]dz=\int_0^{+\infty}h(z)2e^{-2z}dz$$

所以 Z=X+Y 的密度：$f_Z(z)=2e^{-2z}$

5、解：讨论当 X≥Y 时，利润是 W_1=500Y+300(X-Y)=300X+200Y；

当 X<Y 时，有利润 W_2=500X-100(Y-X)=600X-100Y。

理论上利润的期望 $W=P(X\geq Y)W_1+P(X<Y)W_2$

$=\frac{30-Y}{20}(300X+200Y)+\frac{Y-10}{20}(600X-100Y)$,代入 X=E(X)=20 得：

W=-15Y^2-650Y+3000≥9280⇒14.5≤Y≤28.8；所以进货量的最小值是 15 单位。

6、解：首先确定 $f(x,y)=\frac{1}{\int_0^1[\int_{x^2}^x dy]dx}=6,0<x<1,x^2<y<x$；

E(X)=$\int_0^1[\int_{x^2}^x x\times6dy]dx=\frac{1}{2}$；E($X^2$)=$\int_0^1[\int_{x^2}^x x^2\times6dy]dx=\frac{3}{10}$；E(Y)=$\int_0^1[\int_y^{\sqrt{y}}y\times6dx]dy=\frac{2}{5}$

E(Y^2)=$\int_0^1[\int_y^{\sqrt{y}}y^2\times6dx]dy=\frac{3}{14}$；E(XY)=$\int_0^1[\int_{x^2}^x xy\times6dy]dx=\frac{1}{4}$

从而可以得到：$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{20}$；$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{20}$

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\dfrac{19}{350}$； $\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\dfrac{\sqrt{1330}}{38}\approx 0.9597$

7、解：至少要装 103 个。（详细请参考课本 P195 例 5.2.5）

8、解：X,Y 分布率为：

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

M、N 的联合分布率为：

M\N	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Z=X+Y 的分布律：

Z	0	1	2	3	4
P(Z)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

武汉大学 2011-2012 概率论与数理统计 D(第一学期)期末试卷答案

一、解：(1)P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+0.4-0.5×0.4=0.7

(2)P((A-B)|(A+B))=P((A-B)∩(A+B))/P(A+B)=[P(A)-P(A)P(B)]/P(A+B)=0.3/0.7=3/7

二、解：

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}(\text{合格且来自甲厂})/\mathrm{P}(\text{合格})$$
$$=(\frac{5}{5+3+2})\times 0.9/[(\frac{5}{5+3+2})\times 0.9+(\frac{3}{5+3+2})\times 0.8+(\frac{2}{5+3+2})\times 0.75]$$
$$=4.5\div(4.5+2.4+1.5)=\frac{15}{28}$$

三、解：(1)由切比雪夫不等式可知：

$$\text{因为：}E(X)=2000,\text{所以}\varepsilon=200$$
$$D(X)=10000(1-0.2)\times 0.2=1600$$
$$P(|X-E(X)|\le 200)\ge 1-\frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{1600}{40000}=0.96$$

四、解：（1）

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=\frac{1}{2}+x,(0\le x\le 1)\\ 0,else\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dx=\frac{1}{2}+y,(0\le y\le 1)\\ 0,else\end{cases}$$

(2)因为$f_X(x)f_Y(y)=(\frac{1}{2}+x)(\frac{1}{2}+y)\ne f(x,y)$,所以$X,Y$不独立；

$$(3)\int_0^1[\int_0^1 h(x-y)f(x,y)dy]dx=\int_0^1[\int_x^{x-1}-h(z)(x+x-z)dz]dx$$
$$=\int_{-1}^0[\int_0^{z+1}h(z)(2x-z)dx]dz+\int_0^1\int_z^1 h(z)(2x-z)dx]dz$$
$$=\int_{-1}^0 h(z)(z^2+z+1)dz+\int_0^1 h(z)(1-z^2-z)dz$$
$$所以f_Z(z)=\begin{cases}z^2+z+1,-1\le z\le 0\\1-z^2-z,0<z\le 1\\0,else\end{cases}$$

五、解:

$$F_M(m)=(\frac{m}{\theta})^n$$
$$f_M(m)=[(\frac{m}{\theta})^n]'=n(\frac{m}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}$$
$$E(M)=\int_0^\theta f(m)mdm=\frac{n\theta}{n+1}$$
$$E(M^2)=\int_0^\theta f(m)m^2dm=\frac{n\theta^2}{n+2}$$
$$D(M)=E(M^2)-E^2(M)=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

六、解：根据 n 重伯努利实验 $X_k=\begin{cases}1,第k部电话使用外线通话\\0，第k部电话使用外线通话\end{cases}$，则 $n_A=\sum_{k=1}^{300}X_k$ 表 示同时使用外线电话的总数。P=P($X_k=1$)=0.04,np=12,np(1-p)=11.52,即求最小值 m，使得：

$P(n_A\le m)\ge 0.95,$ According to **De Moivre-Laplace limit theorem,**

we have： $P(n_A\le m)=\Phi(\frac{m-12}{\sqrt{11.52}})\ge 0.95$,即：$\frac{m-12}{\sqrt{11.52}}\ge 1.65$，m≥17.61 取 m=18，即至少要安装 18 条外线才能保证 95%把握外线畅通。

七、解：先求分布函数如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}=\frac{1}{\iint\limits_D 1d\sigma}=\frac{1}{\pi},x^2+y^2\le 1\\0,else\end{cases}$$ ；再求得：

$$E(x)=\int_{-1}^1[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xf(x,y)dy]dx=0;\quad E(x^2)=\int_{-1}^1[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x^2f(x,y)dy]dx=\frac{1}{4}$$

$$E(y)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} yf(x,y)dx]dy=0；\ E(y^2)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y^2 f(x,y)dx]dy=\frac{1}{4}$$

$$E(xy)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xyf(x,y)dx]dy=0；\ D(X)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{1}{4}$$

$$D(Y)=E(y^2)-E^2(y)=\frac{1}{4}$$

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$$

八、解：设进货量为 X（单位），销售量为 Y（单位），有

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2500},50\le x\le 100,50\le y\le 100\\ 0,else\end{cases}$$

利润：$\omega=\begin{cases}-200(X-Y)+500Y,X>Y\\ 500Y+300(Y-X),X\le Y\end{cases}\Rightarrow\omega=\begin{cases}700Y-200X,X>Y\\ 800Y-300X,X\le Y\end{cases}$

平均利润：

$$E(\omega)=\int_{50}^{100}[\int_{50}^{x}(700y-200x)f(x,y)dy]dx+\int_{50}^{100}[\int_{50}^{y}(800y-300x)f(x,y)dx]dy$$

$$=\frac{1}{25}[\int_{50}^{100}(\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{2}\times 50^2-2x)dx+\int_{50}^{100}(4y^2-4\times 50^2-3y)dy]$$

$$=\frac{1}{25}\times 1231250$$

$$=49250$$