武汉大学计算机学院2018-2019学年第一学期

《离散数学》期末考试(A)卷

学号：____________ 姓名：____________ 成绩：____________

注意：所有答案写在答题纸上并注明题号，计算题要有计算过程。

一. 求下列公式的主析取范式和主合取范式：（12分）

$$(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$$

二. 写出证明序列，证明下列结论的有效性：（7+7=14分）

(1) 前提：$A \wedge B \to C$，$\neg C \vee D$，$\neg D$； 结论：$\neg A \vee \neg B$

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to Q(x))$，$\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$；

结论：$\neg \forall x(R(x) \to P(x))$

三. 设A, B, C为集合， 且$|A| = 3$，$|\rho(A \cup B)| = 128$，$|\rho(B \cup C)| = 64$，$|\rho(A \cap B)| = 2$，$|\rho(B \cap C)| = 4$，求$|C - B|$.（10分）

四. 对下述函数f，g及集合A，B，分别计算$f \circ g$，$f \circ g(A)$和$f \circ g(B)$，并说明$f \circ g$是否为单射或满射：（7+7=14分）

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x) = x^4 - x^2$，$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，$g(x) = \sqrt{x}$，

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，$B = \{0, 1\}$.

(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，$f(x) = e^x$，$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，$g(x) = x^2$，

$A = \mathbb{N}$，$B = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$.

五. 设$\pi = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$是集合$A$的一个划分，$R \subseteq A \times A$，

$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$. 证明：$R$是等价关系.（12分）

六. 设$\langle A, R\rangle$和$\langle B, S\rangle$为偏序集，$C = A \times B$，$T \subseteq C \times C$，

$\forall \langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in C \times C$，$\langle a_1, b_1\rangle T \langle a_2, b_2\rangle$，$iff$，$a_1 R a_2 \wedge b_1 S b_2$.

证明：T为$A \times B$上的偏序关系。（12分）

七. 设简单无向连通图$G = \langle V, E \rangle, |V| = n$. 已知有$k$个3度结点，其他结点的度数均小于3，则$G$中至少有多少条边？至多有多少条边？并证明结论。（12分）

八. 证明：一棵无向树的每个结点的度数均为奇数，当且仅当，在树上任删一条边会产生2个结点数均为奇数的子树。（14分）