

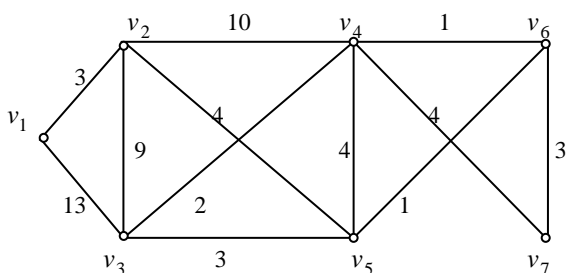
武汉大学 2016-2017 第一学期《离散数学》考试题

1. (8 分) 试证明: 对集合 A, B, C , 如果 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$. 其中 $A \oplus B$ 表示 A 与 B 的对称差。
2. (8 分) 求在 1 和 1000 之间不能被 5, 6, 也不能被 8 整除的数的个数。
3. (8 分) 设 R 是集合 A 上的关系, 证明: R 传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$.
4. (8 分) $A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$, A 上关系 R 定义为:

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \text{ 当且仅当 } |x + y| = |u + v|,$$

证明 R 是等价关系, 并求由 R 确定的 A 的划分。

5. (8 分) 设 $A = \{a, b, c\}$, f 是 A 上的函数, 定义为 $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b$ 。定义 $G: A \rightarrow P(A)$, $G(x) = f^{-1}(\{x\})$. 说明 G 有什么性质(单射、满射或双射), 计算其值域 $\text{Ran } G$.
6. (10 分) 有理数集 Q 中的 $*$ 定义如下: $x * y = 6 - 2x - 2y + xy, \forall x, y \in Q$.
 - (1) $(Q, *)$ 是半群吗? 是可交换的吗?
 - (2) 求单位元;
 - (3) $*$ 中是否有可逆元? 若有, 指出哪些是可逆元? 并指出逆元是什么?
7. (8 分) 设 (G, \cdot) 是一群, H 是 G 的子群, $a \in G$. 证明 $a \cdot H \cdot a^{-1} = \{a \cdot h \cdot a^{-1} \mid h \in H\}$ 是 G 的子群。
8. (8 分) 设 (L, \vee, \wedge) 是一个分配格, 而且是一个有界格. 若元素 x 是有补元, 证明它的补元是唯一的。
9. (8 分) 对如下给出的赋权图 G , 求出结点 v_1 到其余各个结点的最短路径。



10. (10 分) 在通讯中要传输八进制数字 0, 1, 2, ..., 7. 这些数字出现的频率为
0: 35%; 1: 18%; 2: 12%; 3: 10%; 4: 10%; 5: 6%; 6: 5%; 7: 4%。
编一个最佳前缀码, 使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下:
 - (1) 画出相应的二元树;
 - (2) 写出每个数字对应的前缀码;
 - (3) 传输按上述比例出现的数字 10000 个时, 至少要用多少个二进制数字?
11. (8 分) 求公式 $(\neg R \vee (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$ 的主析取范式与主合取范式, 并写出相应的为真赋值。
12. (8 分) 用谓词和量词将下列命题符号化:
 - (1) 没有不犯错误的人;
 - (2) 并不是外语学得好的学生都是三好生, 但外语学得不好的学生一定不是三好生。
13. (附加题: 5 分) 将下列推理形式化, 并对正确的推理给出推理过程, 要求指明所设命题或谓词的含义。
每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车, 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车, 并非每个人都喜欢骑自行车, 因而有人不喜欢步行。