武汉大学 2013-2014 学年第一学期期末考试

概率统计 D（A）参考答案

一、（12 分）已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B\mid A)=0.8$, 求 $P(A\cup B)$ 和 $P(B\mid\overline{A})$。

解　$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.4$　…………………　4

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$ ……………4

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}=\frac{2}{5}\quad \text{………………4}$$

二、（12 分）抛掷两枚骰子，在第一枚出现的点数能被 3 整除的条件下，求两枚骰子出现的点数之和大于 8 的概率？

解　　设 A 表示"第一枚出现的点数能被 3 整除"，　B 表示"两枚骰子出现的点数之和大于 8"………………………………………………..2'

则

$$P(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{6}\right)\text{…………………………….3'}$$

$$P(AB)=\frac{5}{36}\text{…………………………….3'}$$

$$P(BA)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{5}{12}\text{………………..4'}$$

三、（12 分）若随机变量 X_1, X_2 相互独立而且分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布；（1）证明：X_1+X_2 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。（2）若 $P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}$，求 $E[(X_1+X_2)^2]$。

解　（1）证明：由题设，X_1+X_2 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,k,\cdots,$　………2'

$$P(X_1+X_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i,X_2=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i)P(X_2=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-1)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$(k=0,1,2,\cdots)$

X_1+X_2 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布　4'

所以，此泊松分布的参数 $\lambda=1$，……………………………………………2'

故

$$E[(X_1+X_2)^2]=\{E[(X_1+X_2)]\}^2+D[(X_1+X_2)]=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

四、（12 分）一批元件其寿命 X 服从参数为 λ 的指数分布，取两个这种元件，分别（1）并联，（2）串联；求形成的新电路的各自平均使用寿命。

解　X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

（1）$F_M(x)=F^2(x)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})^2 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$\therefore \quad f_M(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}) & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\therefore \quad E(M)=\int_0^{+\infty}2\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx=\frac{3}{2\lambda} \cdots\cdots\cdots\cdots 5'$$

（2）$F_N(x)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$\therefore \quad f_N(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\therefore \quad E(N)=\frac{1}{2\lambda} \cdots\cdots\cdots\cdots 5'$$

五、（16 分）2013 年的红牛 CNBA 联赛决赛在开封雄狮队和宁波南虎队之间进行，决赛采取五局三胜制（先胜三局后比赛终止），由以往的数据表示，两队的胜率相同；第一局雄狮队获胜。（1）求南虎队取得冠军的概率。（2）若一场比赛的收入为 160 万元，胜利的队可以分得 120 万，其余归失败的队，求南虎队收入的数学期望。

解　设 $A=\{$南虎队得冠军$\}$，$B_i=\{$第 i 场南湖队获胜$\}$（i=1, 2, …5）…………2'

（1）

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_2B_3B_4+(\overline{B_2}B_3B_4+B_2\overline{B_3}B_4+B_2B_3\overline{B_4})B_5)\\&=\frac{1}{8}+C_3^2\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

（2）南虎队收入函数为

$$L=\begin{cases} 40\times 3 & p=1/4 \\ 40\times 3+120 & p=1/4 \\ 40\times 3+120\times 2 & p=3/16 \\ 40+120\times 3 & p=1/8 \\ 40\times 2+120\times 3 & p=3/16 \end{cases}$$

所以，$EL=290$ 万。……………………………………………………10'

六、（12分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x), x\in R$，又 $D(X)=2$，而随机变量 Y 的概率密度为 $f(-y)$，而且相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{4}$，记 $Z=X+Y$，求 $E(Z), D(Z)$。

解　做变换 $y=-x$，

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(-y)dy=-\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=-E(X)$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=E(X^2)$$

$$\therefore\quad E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=E(X)-E(Y)=0$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(X^2)-[-E(X)]^2=D(X)=2$$

故　$D(Z)=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}=3$。……………12'

七、（12分）若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|}, -\infty<x<+\infty, \lambda>0$；

（1）求关于 y 的方程 $y^2+2Xy+\lambda^2=0$ 有实根的概率；（2）求 $Z=e^{-|X|}$ 的概率密度。

解　（1）所求概率为

$$P\{\Delta=4X^2-4\lambda^2\ge 0\}=\int_{-\infty}^{-\lambda} f(x)dx+\int_{\lambda}^{+\infty} f(x)dx=2\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=e^{-1}；\quad \cdots\cdots 6'$$

（2）$Z=e^{-|X|}$ 的取值范围为 $(0,1]$，

当 $0<z<1$ 时，其分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{e^{-|X|}\le z\}=P\{|X|\ge -\ln z\}$$

$$=\int_{-\ln z}^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=z^{\frac{1}{\lambda}}$$

所以，概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}z^{\frac{1}{\lambda}-1} & 0\le z\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 。……………………………………………6'

八、（12 分）某种螺丝钉的重量是随机变量，平均值为 50 克，标准差为 5 克；100 个这样的螺丝钉装入一袋；分别用中心极限定理和切比雪夫不等式求一袋的重量介于 4.9 与 5.1 千克之间的概率。（标准正态分布函数用 Φ（x）表示）

解　假设 X_i 表示第 i 颗螺丝钉的重量，$i=1,2,\cdots,100$，$S=\sum_{i=1}^{100}X_i$；则

$$E(S)=5000, D(S)=2500$$

（1）　由中心极限定理

$$P\{4900<S<5100\}=1-2P\{S\le 4900\}=1-2\Phi(\frac{4900-5000}{50})$$
$$=1-2\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$$

………………………………….6'

（2）　由切比雪夫不等式

$$P\{4900<S<5100\}\ge 1-\frac{D(S)}{100^2}=0.75$$ ……………………………6'