武汉大学计算机学院2016-2017学年第一学期

《离散数学》(计算机类)期末考试(A)卷答案

学号：____________ 姓名：____________ 成绩：____________

注意：所有答案写在答题纸上并注明题号，计算题要有计算过程。

一.（12分）求下列公式的主析取范式和主合取范式：

$$(\neg A \to (B \wedge C)) \wedge (A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$$

解： 主析取范式 $\Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \Leftrightarrow \Sigma(3,4)$.

主合取范式$\Leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \Leftrightarrow \Pi(0,1,2,5,6,7)$.

二.（12分）已知下列两个前提：院团委的每个成员既是学生又是班干部；有些院团委成员来自北京。完成下列各题：（2+5+5=12分）

(1)结论：有院团委成员来自北京并且是班干部。是否成立？

解： 结论成立。

(2)将上述前提和结论符号化。(**要求：** 论域为全总个体域。原子符号为：$M(x)$：x 是院团委的成员；$S(x)$:x是学生；$G(x)$:x是班干部；$B(x)$:x来自北京。）

解： 前提：$\forall x(M(x) \to S(x) \wedge G(x))$, $\exists x(M(x) \wedge B(x))$

结论：$\exists x(M(x) \wedge B(x) \wedge G(x))$

(3)写出上述结论（或结论的否定）为前提的有效结论的证明序列。

解： 结论的证明序列:

①$\exists x(M(x) \wedge B(x))$ 前提

②$M(e) \wedge B(e)$ ①, ES规则

③$\forall x(M(x) \to S(x) \wedge G(x))$ 前提

④$M(e) \to S(e) \wedge G(e)$ ③, US规则

⑤$M(e)$ ②, 化简

⑥$S(e) \wedge G(e)$ ④, ⑤假言推理

⑦$M(e) \wedge B(e) \wedge G(e)$ ②, ⑥合取

⑧$\exists x(M(x) \wedge B(x) \wedge G(x))$ ⑦, EG规则

三.（16分）已知函数$f : X \longrightarrow Y$，完成下列各题：（5+3+5+3=16分）

(1) 设 $A \subseteq X$, 试证明：$A \subseteq f^{-1}(f(A))$

证： $\forall x \in A, f(x) \in f(A)$, 则 $x \in f^{-1}(f(A))$, $\therefore A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(2) 若$X = Y = \{1,2\}$，试举出f和A的例子证明:$A \neq f^{-1}(f(A))$

解： 如: $f(1) = f(2) = 1$, $A = \{1\}$, $A \subset f^{-1}(f(A)) = \{1,2\}$

(3) $\forall A \subseteq X$, $A = f^{-1}(f(A))$成立的充要条件是什么？并加以证明；

解： $\forall A \subseteq X, A = f^{-1}(f(A))$的充要条件: f是单射。证明如下:

（充分性） 若f是单射， 则$\forall A \subseteq X, A = f^{-1}(f(A))$

第(1)题已证$A \subseteq f^{-1}(f(A))$，只须证$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$:

$\forall x \in f^{-1}(f(A))$,则$f(x) \in f(A)$,设$f(x) = y \in f(A)$,则$\exists x' \in A$, $f(x') = y$. 因为f为单射，所以$x = x'$, $\therefore x \in A$, 即 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

（必要性） 若$\forall A \subseteq X, A = f^{-1}(f(A))$，则$f$是单射。

设$f(x) = f(x')$, 则$f(x') \in \{f(x)\} = f(\{x\})$, 设$A = \{x\}$,

则$f(x') \in f(A)$, $x' \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$, $\therefore x' = x$, 则f为单射。

(4) 设集合$X = \{0, ..., m-1\}$, $Y = \{0, ..., n-1\}$, (其中$m, n \in \mathbb{N}$, $0 <$

$m \le n)$. 函数$f: X \longrightarrow Y,\ f(x)=x$. 试求：集合
$\{g|\ g: Y \longrightarrow X \wedge g\circ f = 1_X\}$的基数。($1_X$是$X$上的恒等函数。)

解：$\because g\circ f = 1_X,\ \therefore \forall y\in Y,\ g(y)=\begin{cases} x & if\ y\in f(A)\wedge y=f(x) \\ x_0 & if\ y\notin f(A)\wedge x_0\in X \end{cases}$

所以g的个数取决于$y\notin f(A)$的y的函数值，即$n-m$个元素映射到m个函数值的可能性，则集合的基数为m^{n-m}.

四.（12分）已知集合$X, Y(X\neq\varnothing)$，函数集合$Y^X=\{f|X:\longrightarrow Y\}$.
设$\langle Y,S\rangle$是偏序集，且Y^X上的二元关系R定义如下：

$$\forall f,g\in Y^X,\ \langle f,g\rangle\in R\Leftrightarrow\langle f(x),g(x)\rangle\in S\qquad(\forall x\in X)$$

完成下列各题：（4+4+4=12分）

(1) 试证明：R为Y^X上的偏序关系；

证：自反性：$\forall f\in Y^X, f(x)\in Y; \because S$具有自反性，
$\therefore\ \langle f(x),f(x)\rangle\in S$,即$\langle f,f\rangle\in R$

反对称性：$\forall f,g$,若$\langle f,g\rangle,\langle g,f\rangle\in R$,则$\langle f(x),g(x)\rangle,\langle g(x),f(x)\rangle\in S$,
$\because S$具有反对称性，$g(x)=f(x)(\forall x\in X)$,$\therefore f=g$

传递性：若$\forall f,g,h\in Y^X$, $\langle f,g\rangle\in R$, $\langle g,h\rangle\in R$,
则$\langle f(x),g(x)\rangle\in S$, $\langle g(x),h(x)\rangle\in S(\forall x\in X)$,
$\because S$具有传递性，$\langle f(x),h(x)\rangle\in S$,$\therefore\ \langle f,h\rangle\in R$

(2) 设b^*是偏序集$\langle Y,S\rangle$的最大元，试证明：最大元b^*是唯一的；

证：假设最大元不唯一，设有另一元素$b'\neq b^*$也是最大元，$\therefore\ \langle b^*,b'\rangle\in S\wedge\langle b',b^*\rangle\in S$,则根据反对称性，$b'=b^*$，则最大元$b^*$一定唯一。

(3) 试给出偏序集$\langle Y^X,R\rangle$存在最大元的充要条件，并求出最大元。

解：$\langle Y^X,R\rangle$存在最大元的充要条件是$\langle Y,S\rangle$存在最大元。设b^*是偏序集$\langle Y,S\rangle$的最大元，则$\langle Y^X,R\rangle$的最大元f^*为$f^*(x)=b^*(\forall x\in X)$.

五.（12分）设集合$A=\{a,b,c\}$，集合A上的二元运算$\circ$的定义如下表所示，完成下列各题：（4+4+4=12分）

(1) 运算$\circ$是否存在左、右单位元？是否存在单位元？并说明原因；

$\circ$	a	b	c
a	a	b	b
b	a	b	c
c	a	b	a

解： 存在左单位元b, $\because \forall x \in A$, 有$b \circ x = x$. 不存在右单位元，因为不存在元素r, 使得$\forall x \in A$, $x \circ r = x$. 也不存在单位元，因为不存在元素e, 使得$\forall x \in A$, $e \circ x = x \circ e = x$.

(2) 运算$\circ$是否存在左、右零元？是否存在零元？并说明原因。

解： 存在两个右零元a, b, $\because \forall x \in A$, 有$x \circ a = a$, $x \circ b = b$. 不存在左零元，因为不存在元素l, 使得$\forall x \in A$, $l \circ x = l$. 也不存在零元，因为不存在元素θ, 使得$\forall x \in A$, $\theta \circ x = x \circ \theta = \theta$.

(3) A上的二元运算中有多少个运算满足交换律？有多少个运算有单位元？

解： 满足交换律的二元运算表是对称的，所以一共有$3^{1+2+3} = 729$个。有单位元的运算表单位元对应的行列唯一确定，又因每个元素都可为单位元，所以一共有$3 * 3^4 = 243$个。

六.（12分）设$\langle G, \circ \rangle$是一个群，$r \in G$，定义G上的二元运算$\triangle$如下：

$$\forall x, y \in G,\ x \triangle y = x \circ r^{-1} \circ y$$

试证明：$\langle G, \triangle \rangle$是一个群。

证： ①$\langle G, \triangle \rangle$是代数系统：$\forall x, y \in G$, $x \triangle y = x \circ r^{-1} \circ y$, $\because \langle G, \circ \rangle$是群，$\therefore$ $x \triangle y = x \circ r^{-1} \circ y \in G$;

②运算$\triangle$是可结合的： $\because \langle G, \circ \rangle$是群，$\therefore$ $\circ$是可结合的，则$\forall x, y, z \in G$, $(x \triangle y) \triangle z = (x \circ r^{-1} \circ y) \circ r^{-1} \circ z = x \circ r^{-1} \circ (y \circ r^{-1} \circ z) = x \triangle (y \triangle z)$;

③ 运算$\triangle$存在单位元： $\because \langle G, \circ \rangle$是群，$\therefore$ $\circ$存在单位元，设为e.

令$e' = r$, 则$\forall x \in G$有：

$x \triangle e' = x \circ r^{-1} \circ e' = x \circ r^{-1} \circ r = x \circ (r^{-1} \circ r) = x \circ e = x$;

$e' \triangle x = e' \circ r^{-1} \circ x = r \circ r^{-1} \circ x = (r \circ r^{-1}) \circ x = e \circ x = x$;

所以运算$\triangle$存在单位元，单位元为r;

④$\forall x \in G$关于运算$\triangle$存在逆元：$\because \langle G, \circ\rangle$是群，$\forall x \in G$，$\exists x^{-1}$，$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$，则$x \triangle (r \circ x^{-1} \circ r) = (r \circ x^{-1} \circ r) \triangle x = r$，所以$\forall x \in G$关于运算$\triangle$存在逆元$r \circ x^{-1} \circ r$

由以上，$\langle G, \triangle\rangle$是一个群。

七.（12分）已知无向连通图G有k个奇度数的结点，完成下列各题：（4+8=12分）

(1) 在图G中至少要添加多少条边才能使其称为欧拉图？

解： 至少要添加$k/2$条边；

(2) 证明上述结论。

证： 图G中度数为奇数的结点为偶数，且欧拉图的充要条件是G中不含奇度数的结点，因此只要在每对奇度数结点之间添加一条边，使G中所有的结点的度数变为偶数即可，故最少需要添加$k/2$条边。

八.（12分）已知连通的简单平面图$G = \langle V, E\rangle$，$|V| = n$，$|E| = m$，$\forall v \in V$，$deg(v) = 3$. 试画出同构意义下所有的图G，并计算n, m的值。

解： 图G为连通的简单平面图，所以$m \le 3n - 6$，又所有结点度数之和$= 2m = 3n$，得出$m \ge 6$，因为$\forall v \in V$，$deg(v) = 3$，且G为连通图，所以$m = 6, n = 4$，图G同构于K_4.