课堂练习： 证明$\mathbb{G}=<\mathbb{Z}_{12},\oplus>$为循环群，并求出所有的生成元和子群。

封闭性：由于运算模12.封闭性显然满足

结合性$a+(b+c)=(a+b)+c$

单位元：0

逆元：a的逆元是$12-a$

$Z_{12}=\{0,1,2,3..11\}$，而$1^{12}=1$，Z可由生成元$a=1$生成，因此Z是循环群

12的正因数是1, 2, 3, 4, 6, 12，因此有这些阶子群

1阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{1}=12$，$a^{12}=0$，故为$<0>=\{0\}$

2阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{2}=6$，$a^{6}=6$，故为$<6>=\{0,6\}$

3阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{3}=4$，$a^{4}=4$，故为$<4>=\{0,4,8\}$

4阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{4}=3$，$a^{3}=3$，故为$<3>=\{0,3,6,9\}$

6阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{6}=2$，$a^{2}=2$，故为$<2>=\{0,2,4,6,8,10\}$

12阶子群：生成元形如$a^j,(j,12)=\frac{12}{12}=1$，$a^{1}=1$，故为$<1>=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,,11\}$

课堂练习： 证明素数阶群一定是循环群。

设素数阶群G阶为素数p，根据拉格朗日定理，群G的子群G'的阶被p整除，因此G'的阶为1或者p

阶为1的子群是$\{e\}$，而素数$p>1$，因此G中存在元素a，a不是单位元e，

由a构成的子群$<a>=\{a,a^2\dots\}$，y因为a不是单位元，所以$<a>$的阶不为1，只能为p，因此$a^p=1$

所以$<a>$阶为p，$<a>=G$，G是循环群

证明：阶是p^m的群（p是素数）一定包含一个阶是p的子群。

设群G的阶为p^m，p是素数因而$p^m>1$，所以G中存在非单位元的元素a，

设$H=<a>$，H的阶为n，即有$a^n=e$，$n|p^m$；

由于p是素数，所以$n=p^i$.

因此，$a^n=a^{p^i}=e$；

而$b=a^{p^{i-1}}$在子群$<a>$中，于是以b作为生成元构建子群$H_1=<a^{p^{i-1}}>$

显然，H_1的阶为p，H_1就是阶为p的子群

课堂练习： 假定a和b是一个群G的两个元，并且$ab=ba$。又假定a的阶是m，b的阶是n，并且$(m,n)=1$。证明：ab的阶是mn。

设ab的阶为k, 于是有$(ab)^k = e$, 而$a^m = e, b^n = e$
所以有$(ab)^{mn} = e$, $k|mn$
$(ab)^k = a^k b^k = e$, 因此b^k是a^k的逆元, a的逆元是a^{-1}, 因此a^k的逆元$b^k = a^{-k}$
所以$b^{kn} = a^{-kn} = e$; 所以$m|kn$, 而$(m,n) = 1$, 因此$m|k$;
同理, $n|k$;
所以$[m,n]|k$, 而$(m,n) = 1$, 所以$[m,n] = mn$;
因此有$mn|k$, 又$k|mn$; 所以$k = mn$; ab的阶是mn.

课堂练习3：p, q为不同素数，证明不存在pq阶整环。

假设存在pq阶的整环R, 所以R是交换环, 有单位元, 无零因子.
因此, $< R, + >$构成一个pq阶的$Abel$群.
p, q为不同素数, 所以 $< R, + >$有p阶元a, q阶元b;
于是元$a + b$的阶为pq; 所以 $< R, + >$是循环群. 生成元$c = a + b$, $\quad pqc = e = 0$
$R = < a + b > = \{0, c, 2c \ldots (pq-1)c\}$
取R中元素$x = pc, y = qc$; 于是有$xy = pqcc = 0c = 0$; 而R是交换环, 所以$yx = 0$;

所以, x, y均是零因子, 与假设矛盾