

武汉大学数学与统计学院
2001—2002 学年第一学期期末考试
《离散数学》试卷

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

一、判断题：(10 分，每小题 1 分，正确的打√，错误的打×)

- (1) $A - B = A$ 当且仅当 $B = \emptyset$ 。 ()
- (2) $(A \times C) - (B \times D) = (A - B) \times (C - D)$ 。 ()
- (3) 设 $A = \{a, b, c\}$, $R \subseteq A \times A$ 且 $R = \{<a, b>, <a, c>\}$, 则 R 是传递的。 ()
- (4) 函数 $f: A \rightarrow B$ 是单射, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是单射。 ()
- (5) 设 R 为非空集合 A 上的关系, R 是可传递的, 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。 ()
- (6) 有补格一定是有界格; ()
- (7) 在有补分配格中, 每个元素有惟一的补元。 ()
- (8) 任何代数系统都存在子代数系统; ()
- (9) $\forall x(F(y) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow F(y) \rightarrow \exists xG(x)$ 。 ()
- (10) 任何图中的基本回路都是简单回路。 ()

二、填空题：(20 分，每空 1 分)

1. A, B 是两个集合, 则 $A \oplus B = B$ 的充分必要条件是_____。
2. 在一个班级的 50 个学生中, 有 26 个人在第一次考试中得 A, 21 人在第二次考试中得 A, 并且有 17 人两次考试均没有得 A, 两次考试中均得 A 的有_____人。
3. 设 $A = \{a, b\}$, 则
 - (1) A 上有_____个函数, 其中有_____个满射, 有_____个单射, 有_____个双射。
 - (2) A 上可定义_____个一元运算, _____个二元运算。
 - (3) 以 A 中元素作为群内元素, 可以构成_____个不同构的群, 以 A 中元素作为格的元素, 可以构成_____个不同构的格。
4. 设 $S = Q \times Q$, Q 为有理数集合, $*$ 为 S 上的二元运算, 对于任意的 $<a, b>, <x, y> \in S$, $<a, b> * <x, y> = <ax, ay + b>$ 。则 $*$ 的单位元是_____, 存在逆元的元素 $<a, b>$ 的逆元是_____, $<a, b>$ 可逆的条件是_____。
5. 已知 $\langle L_1, | \rangle, \langle L_2, | \rangle, \langle L_3, | \rangle$ 为三个偏序集, 其中 $L_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}$, $L_2 = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, $L_3 = \{1, 2, 3, 6, 18, 54\}$, $|$ 为整除关系。则其中_____是格。

6. 无向图 G 有 11 条边, 2 度与 3 度顶点各 2 个, 其余都是 4 度顶点, 则 G 中共有____个顶点。
7. 在无向树 T 中, 有 2 个 2 度结点, 3 个 3 度结点, \dots , 5 个 5 度结点, 其余都是树叶。则 T 有____片树叶, 有____条边。将 T 变成完全图, 需加____条边。
8. 设 p : 天下雨, q : 天刮风, r : 我去书店, 则命题“如果天不下雨并且不刮风, 我就去书店”的符号化形式为_____。
9. 若个体域为非负整数集, $A(x, y)$ 表示 $x + y = y$, 则 $\exists x \forall y A(x, y)$ 的真值是_____。

三、单项选择题: (10 分, 每小题 1 分, 将正确答案的选项填在括号内横线上)

1. 已知 $A \oplus B = \{1, 2, 3\}$, $A \oplus C = \{2, 3, 4\}$, 若 $2 \in B$, 则 (_____)。
- A. $1 \in C$; B. $2 \in C$; C. $3 \in C$; D. $4 \in C$ 。
2. 对任何二元关系 R , 在 $R \cap \tilde{R}$, $R \cup \tilde{R}$, $R \circ \tilde{R}$, $\tilde{R} \oplus R$ 中, 有 (_____) 个一定是对称关系, 其中 \tilde{R} 表示关系 R 的逆。
- A. 1; B. 2; C. 3; D. 4。
3. $R = \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$, 则 (_____) $\notin t(R)$ 。
- A. $\langle 1, 1 \rangle$; B. $\langle 1, 2 \rangle$; C. $\langle 1, 3 \rangle$; D. $\langle 1, 4 \rangle$ 。
4. 集合 A 到 B 共有 64 个不同的函数, 则 B 中元素个数不可能是 (_____)。
- A. 4; B. 8; C. 16; D. 64。
5. 设 R_+ 、 I_+ 分别是正实数集合和正整数集合, $+$ 、 $-$ 、 \times 、 $/$ 分别为普通的实数加法、减法、乘法、除法, 则 (_____) 是半群。
- A. $\langle I_+, - \rangle$; B. $\langle R_+, - \rangle$; C. $\langle R_+, \times \rangle$; D. $\langle R_+, / \rangle$ 。
6. 设 $\langle G, * \rangle$ 是阶大于 1 的群, 则下列命题中 (_____) 不真。
- A. 存在零元; B. 存在单位元;
- C. 运算 $*$ 是可结合的; D. G 中每个元素都有逆元。
7. 二部图 $K_{2,3}$ 是 (_____)。
- A. 欧拉图; B. 哈密顿图; C. 非平面图; D. 平面图。
8. 5 阶无向完全图的边数为 (_____)。
- A. 5; B. 10; C. 15; D. 20。
9. 带权 4, 6, 8, 10, 12 的最优树的权是 (_____)。
- A. 80; B. 90; C. 100; D. 110。

10. 下列式子 () 是永真的。

A. $Q \rightarrow (P \wedge Q)$; B. $P \rightarrow (P \wedge Q)$; C. $(P \wedge Q) \rightarrow P$; D. $(P \vee Q) \rightarrow Q$ 。

四、简答题：(解答写在答题纸上)

1. (6分) R 是集合 A 上自反和传递的关系, 证明: $R \circ R = R$ 。

2. (7分) 设 $A = \{1, 2, 3\}$, f 是 A 上函数, 且 $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$, 定义 $G: A \rightarrow P(A)$, $G(x) = f^{-1}(x) = \{y \mid y \in A, f(y) = x\}$ 。说明 G 有何性质(单、满或双射), 计算值域 $\text{ran}G$ 。

3. (8分) 设 $A = \{1, 2, 3\}$, B 是 A 上等价关系的集合。

(1) 列出 B 的元素;

(2) 给出代数系统 $V = (B, \cap)$ 的运算表。

(3) 求出 V 的单位元, 零元和所有可逆元素的逆元;

(4) 说明 V 是否为半群, 独异点和群?

4. (5分) 设 $(G, *)$ 是一群, $a \in G$, 定义函数 $f: G \rightarrow G, f(x) = a * x * a^{-1}$;

证明: f 是 G 的自同构;

5. (6分) 设 $S = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, 设 D 是 S 上的整除关系:

$\langle x, y \rangle \in D$ 当且仅当 y 是 x 的倍数;

证明:

(1) D 是一个偏序关系; 试画出关系 D 的哈斯图, 并由此简要说明 $\langle S, D \rangle$ 是一个格;

(2) D 是分配格吗? 简要说明理由。

(3) 求集合 $\{2, 4, 6, 12, 18\}$ 的下界, 最大下界, 最小元及上界, 最小上界和最大元。

6. (6分) 设 G 是一个简单无向平面图, n 和 m 分别是图 G 的顶点数和边数, 设图 G 的所有的基本回路的长度都大于 4。证明: $m \leq \frac{5n}{3} - \frac{10}{3}$ 。

7. (6分) 给定以下4组数:

(a) 4, 4, 4, 4;

(b) 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1;

(c) 2, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1;

(d) 2, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1;

(1) 以上4组数中, 哪些能构成无向图的度序列?

(2) 哪些能构成无向简单图的度序列?

(3) 哪些能构成无向树的度序列?

(4) 画出能构成无向树的度序列的至少二个非同构的无向树。

8. (8分) 设命题公式 G 的定义如下:

$$((P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)) \wedge ((P \vee \neg R) \leftrightarrow (Q \vee \neg R))。$$

(1) 计算公式 G 的真值表;

(2) 求公式 G 的主析取范式和主合取范式;

(3) 由此证明: $G \iff P \leftrightarrow Q$ 。

9. (8分) 如下图所示, 求 v_1 到各顶点的最短路径, 并给出它们的权。

