第三章

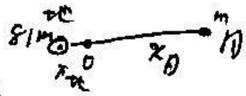
3-1. $d\vec{p} = \vec{F}dt$

$\vec{P}_1 = 0.14 \times 50\,\vec{i} = 7\vec{i}$. $\vec{P}_2 = -0.14\times 80 \times \cos 30^\circ\,\vec{i} + 0.14 \times 80 \times \sin 30^\circ\,\vec{j} = -9.7\vec{i} + 5.6\vec{j}$

$\Delta\vec{p} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = -16.7\vec{i} + 5.6\vec{j} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j}) \times 0.02$.

∴ 计算 $F = \frac{1}{0.02}(16.7^2 + 5.6^2)^{\frac{1}{2}} = 8.8\times 10^2$ 牛顿.

$F_y / F_x = 0.3187$. $\theta \approx 18^\circ 32'$.



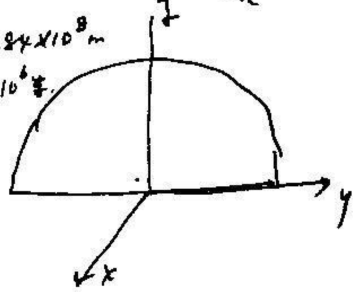
3-2. 距地心 4.68×10^6 米

$\frac{81m x_{地} + m x_{月}}{81m + m} = 0 = x_c$

$82 x_{地} + x_{月} - x_{地} = 0$

$82 x_{地} = -3.84\times 10^8$ m

$x_{地} = -4.68 \times 10^6$ 米.



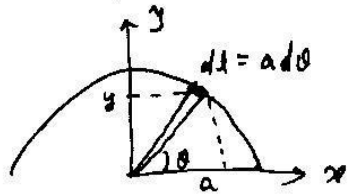
3-3. $M = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho$ 根据对称性 $x_c = y_c = 0$.

$z_c = \frac{\iiint z\rho\, dv}{M} = \frac{M}{M\ \frac{2}{3}\pi a^3}\iiint z\, dv$

$= \frac{3}{2\pi a^3}\iint_{\sigma_{底面}} d\sigma \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\, dz$

$= \frac{3}{2\pi a^3}\iint_\sigma \frac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2)\, d\sigma = \frac{3}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - r^2)\, r\, dr$

$= \frac{3}{8}a$.

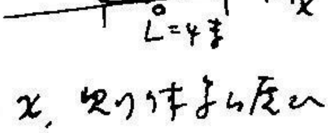


3-4. $x_c = 0$, $m = \pi a \rho$.

$y_c = \frac{1}{m}\int y\, dm = \frac{1}{m}\int a\sin\theta \cdot \rho\, dl$

$= \frac{1}{\pi a \rho}\int_0^{\pi} a\sin\theta\, \rho \cdot a\, d\theta = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = \frac{2a}{\pi}$.

3-5. 忽略船与水之间阻力，船—人系统水平方向无外力。$a_c = 0$，体系原来静止，则质心的位置将会一直保持不变。



设取原来船的中点为坐标原点，而此时，体系质心坐标

$x_c = \frac{m x_人 + M x_船}{m+M} = \frac{m(-\frac{L}{2}) + M\cdot 0}{m+M} = -\frac{2}{11}$ 米

当人走到船尾时，船的中心位置离开了原点，设坐标为 x，则体系的质心坐标为

$x_c' = \frac{m(\frac{L}{2} + x) + Mx}{m+M} = x + \frac{mL}{2(m+M)} = x + \frac{2}{11}$.

由于质心坐标不变 $x_c = x_c'$ ∴ $x = -\frac{4}{11}$ 米

or: $MV_{船} + mV_{人} = 0$. $\quad M\frac{dx_{船}}{dt} + m\frac{dV_{人}}{dt} = 0$.

$M\,dx_{船} + m\,dx_{人} = 0$

$m\int_0^{+(l-x)} dx_{人} + M\int_0^{-x} dx_{船} = 0$.

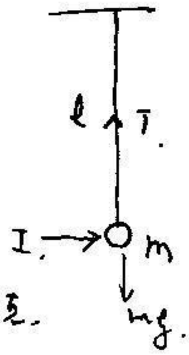
$50(4-x) - 500x = 0$. $\quad x = \frac{4}{11}$(米). 向负 x 方向.

3-6. 在冲力 I 作用下, m 获得动量 mV. m 作圆周运动向心力. 由于 $\frac{mv^2}{l} = \frac{I^2}{lm}$

$T - mg = \frac{mv^2}{l} = \frac{I^2}{lm}$

$\therefore I^2 = Tml - m^2gl$, $\quad T_{max} = 10$ 牛顿, $m = 0.5$ 千克, $l = 0.3$ 米, $g = 10$

$I = 0.86$ 牛·秒.



3-7. 设子弹在 t_1 时间穿过 m_1 木块, 受到的阻力为 F. 所以它损失动量 Ft_1. 由于 m_1, m_2 紧贴在一起, 所以子弹损失的动量转移给了木块 m_1 和 m_2, 所以木块 m_1 的速度为 $\quad v_1 = \frac{Ft_1}{m_1+m_2}$,

子弹穿过 m_2 的时间是 t_2, 动量损失为 Ft_2, 它全部由 m_2 接收. 所以

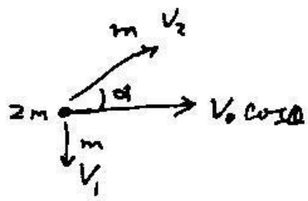
$$V_2 = v_1 + \frac{Ft_2}{m_2} = \frac{Ft_1}{m_1+m_2} + \frac{Ft_2}{m_2}.$$

3-8. 爆炸一瞬间, 重力忽略, 动量守恒.

水平 $\quad 2mV_0\cos\theta = mV_2\cos\alpha$

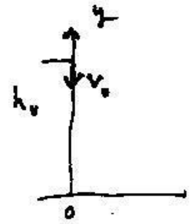
竖直: $\quad mV_1 = mV_2\sin\alpha$

$\therefore V_2 = \sqrt{V_1^2 + 4V_0^2\cos^2\theta}$, $\quad \alpha = tg^{-1}\frac{V_1}{2V_0\cos\theta}$.



3-9. 设 $m = kar^3$. $\frac{dr}{dt} = a$, $r = (r_0 + at)$.

初始 $t = 0$, $r = r_0$, $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = -V_0$, $y = h_0$.



运动方程 $\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg \qquad d(m\dot{y}) = -mg\,dt$

积分 $\quad \dot{y} = v = -\frac{r_0^3}{r^3}V_0 + \frac{g}{4ar^3}(r_0^4 - r^4)$.

$$y = h_0 - \frac{g}{8a^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right) + \frac{v_0}{2a}\left(\frac{r_0^3}{r^2} - r_0\right).$$

或变质量方程 $\quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad u = -v \qquad m\frac{dv}{dt} = -mg - v\frac{dm}{dt}$

$\frac{dmv}{dt} = -mg \qquad mv\Big|_{t=0}^{t} = -ka\int(r_0+at)^3dt$

[illegible]

3-10. $m=m_0+\lambda x$ $t=0$: $m=m_0$, $x=0$, $\dot{x}=0$.

$dm=\lambda dx$, $u=-v$.

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\theta-v\frac{dm}{dt} \qquad \frac{d(mv)}{dt}=mg\sin\theta$$

$$d(mv)=mg\sin\theta\, dt. \qquad \text{两边乘 } mv$$

$$(mv)\,d(mv)=m^2 g\sin\theta\, dx.$$

$$\frac{1}{2}d(mv)^2=(m_0+\lambda x)^2 g\sin\theta\, dx$$

$$\frac{1}{2}(mv)^2=\frac{g\sin\theta}{\lambda}\int(m_0+\lambda x)^2\, d(m_0+\lambda x)$$

$$=\frac{g\sin\theta}{\lambda}\frac{1}{3}(m_0+\lambda x)^3+C.$$

$t=0$, $x=0$, $v=0$. $\quad C=-\dfrac{g m_0^3\sin\theta}{3\lambda}$.

$$\frac{1}{2}m^2v^2=\frac{g\sin\theta}{3\lambda}\left[(m_0+\lambda x)^3-m_0^3\right]$$

$$\therefore\ v=\left[\frac{2g\sin\theta}{3\lambda}\ \frac{(m_0+\lambda x)^3-m_0^3}{(m_0+\lambda x)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

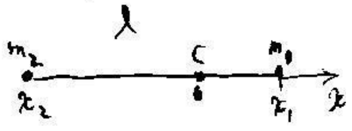
3-11. $\dfrac{dv}{dt}=0$. $F=mg\sin\theta$. 吸入 $\dfrac{dm}{dt}=q$, $u=-v$, 喷出, $u=v$. $m=qt=q\dfrac{L}{v}$

$$0=mg\sin\theta-vq. \qquad \sin\theta=\frac{v^2}{Lg}.$$

3-12. $\vec{f}=\vec{u}\dfrac{dm}{dt}=\vec{u}_1\dfrac{dm_1}{dt}+\vec{u}_2\dfrac{dm_2}{dt}$ 吸入：-200×50 kg 喷出 -400×-50.2

$$f=-200\times 50+50.2\times 400=1.08\times 10^4\ \text{牛顿}.$$

3-13. 按住瞬时，系统相对 m_1 点处的角动量 $J_0=m_2 l v_0$.



放开后，系统相对原 m_1 点处的角动量与 J_0 相等（角动量守恒）

是因对质心而言，$J_0=J_c+J_c'$.

① $J_c'=J_0-J_c=m_2 l v_0-(m_1+m_2)\cdot x_1 v_c$

$$=m_2 l v_0-\cancel{(m_1+m_2)}\frac{m_2 l}{\cancel{m_1+m_2}}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2}v_0$$

$$=l v_0 m_2\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}l v_0$$

$x_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l$, $x_2=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}l$

$v_c=x_1\omega$

$m_2 l v_0=I_2\omega=m_2 l^2\omega$

$\omega=\dfrac{v_0}{l}$

$v_c=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l\cdot\dfrac{v_0}{l}$

$=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_0$

② $T=m_1 \cancel{x_1}\omega^2=m_2 x_2\omega^2$

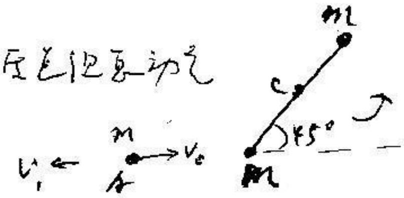
$$=m_1\frac{m_2}{m_1+m_2}l\cdot\frac{v_0^2}{l^2}=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{v_0^2}{l}$$

3-14. 选小球为研究，碰后杆质心向右平动，杆绕C反时针转动.

① 动量守恒：

质心的动量等于质点组总动量

$$mv_0 = -mv_1 + 2mV_c$$



② 弹性碰撞 能量守恒.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(2m)V_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

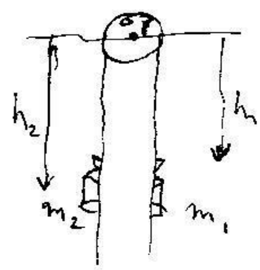
③ 角动量守恒 相对质心： 碰撞瞬间尚未位移，这上面m是对质心c的力矩.

$$mv_0\frac{l}{2}\sin45^\circ = -mv_1\frac{l}{2}\sin45^\circ + I_c\omega$$

$I_c = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2$，代入 v_c，v_1，得 $\omega = \dfrac{4\sqrt{2}\,v_0}{7l}$

3-15. 见习题课讲稿

3-16. 设 m_1 的速度 $\dot{y}_1$，m_2，$\dot{y}_2$



$h_1 = \dot{y}_1 t$，$h_2 = \dot{y}_2 t$，$\therefore \dot{y}_1 = \dfrac{h_1\dot{y}_2}{h_2}$，$\ddot{y}_1 = \dfrac{h_1\ddot{y}_2}{h_2}$

$$(m_2 g - m_1 g)r = \frac{d}{dt}(m_1\dot{y}_1 - m_2\dot{y}_2)r$$

$$= (m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2)r$$

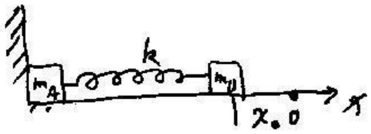
$$\therefore (m_2 - m_1)g = m_1\frac{h_1\ddot{y}_2}{h_2} - m_2\ddot{y}_2 = \frac{m_1h_1 - m_2h_2}{h_2}\ddot{y}_2$$

$$\therefore \ddot{y}_2 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1h_1 - m_2h_2}h_2$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_2 t^2 \qquad \therefore t^2 = \frac{2h_2}{\ddot{y}_2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(m_1h_1 - m_2h_2)}{(m_2 - m_1)g}}$$

3-17.



外力撤除后，系统的外力还有$N_{墙} = kx_0$.

$$\therefore (m_A+m_B)\ddot{x}_c = kx_0$$

$$\ddot{x}_c = \frac{kx_0}{m_A+m_B}.$$ 为最大质心加速度.

离开墙后，系统不受任何外力，内部是保守力，当外力撤去的瞬时，m_B获得一个冲击力的作用而得到一个最大速度

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m_B V_B^2 \qquad V_B = \sqrt{\frac{k}{m_B}}\,x_0.$$

质心的动量等于质点组的总动量，且$V_A=0$.

$$\therefore (m_A+m_B)V_c = m_B V_B$$

$$V_{c\,max} = \frac{m_B}{m_A+m_B}\sqrt{\frac{k}{m_B}}\,x_0.$$

3-18. $a_c=g$. $V_c=\sqrt{\frac{m_1}{k}}\,g$.

外力和：$F=(m_1+m_2)g$ 向上. $a_c=\frac{(m_1+m_2)g}{m_1+m_2}=g$

外力$F=(m_1+m_2)g$加上后，系统的弹簧压缩，$(m_1+m_2)g = kz'$

$z'=\frac{m_1+m_2}{k}g$. F撤除后，m_1获得的动能

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}k(z')^2 = \frac{1}{2}K\frac{(m_1+m_2)^2g^2}{k^2}.$$

$$V_1^2 = \frac{(m_1+m_2)^2g^2}{m_1K}$$

$$(m_1+m_2)V_c = m_1V_1+m_2V_2 = m_1V_1. \quad \therefore V_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1}V_c.$$

$$\therefore \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2}V_c^2 = \frac{(m_1+m_2)^2g^2}{m_1K}$$

$$\therefore V_c = \sqrt{\frac{m_1}{K}}\,V_1.$$

3-19.

角动量守恒： $m r_1 v_1 = m r_2 v_2 \rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$

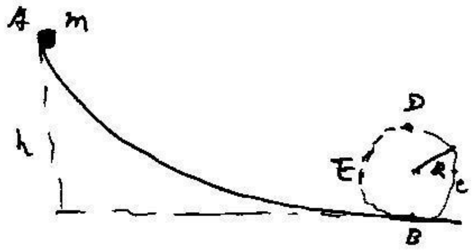
$\therefore \omega_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2^2}$.

$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left[\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right]$.

3-20.

取此点为零势能.

初始位置势能 $E_A = mgh = E_0$.



运动中机械能守恒：

在D点处的能量是

$E_0 = mg2R + \frac{1}{2} m v_D^2$

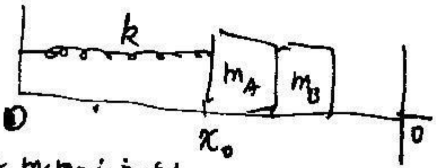
要维持在D处仍处于作圆周运动状态. 其速度必须满足：

$mg = m\frac{v_D^2}{R} \quad \therefore \quad mRg = m v_D^2$.

$E_0 = mgh = 2mRg + \frac{1}{2} mgR = \frac{5}{2} Rmg$

$\therefore h = \frac{5}{2} R$.

3.21.(1). 撤除外力后，弹簧回复使 m_A m_B 一起运动：



机械能守恒：$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2$，

当 x 从 x_0 减少到 O 时，弹性势能全部转变为 m_A m_B 的动能。

过程过后，而后 m_A 在弹簧的拉力作用下做减速运动，m_B 将以 v 继续运动，于是 m_A、m_B 分离。(在O)

由：$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2$ 得

$$v = \sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}\,x_0.$$

(2). 分离后 m_A 的动能是 $\frac{1}{2}m_A v^2$，当它全部转为弹性势能时 m_A 到达右方最大距离：

$$\frac{1}{2}m_A v^2 = \frac{1}{2}kx_A^2$$

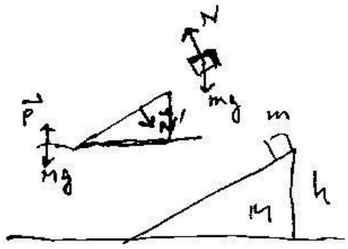
$$x_A = \sqrt{\frac{m_A}{k}}\,v$$

$$x_{max} = x_0 + \sqrt{\frac{m_A}{k}}\,v = x_0 + \sqrt{\frac{m_A}{k}}\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}\,x_0$$

$$= \left(1+\sqrt{\frac{m_A}{m_A+m_B}}\right)x_0.$$

3.22：

①分析：以地面为参照系，分别分析 M、m 的受力及运动：



M：重力 $M\vec{g}$ 和地面支持力不作功。

但 m 对 M 的作用力 $\vec{N}'$ 的水平分量 $N'\sin\theta$ 对 M 作正功：A_M

使得 M 具有动能 $\frac{1}{2}MV_M^2$.

m：重力 $m\vec{g}$ 及 M 的约束力 $\vec{N}$ 对 m 的运动都作功，$\vec{N}$ 对 m 作功用 A_m 代表。

于是在 m、M 相对地面运动过程中 $\vec{N}'$ 和 $\vec{N}$ 作功之和是

$$A_m' = A_m + A_M.$$

但 $\vec{N}'$ 和 $\vec{N}$ 是一对作用力和反作用力，当我们将 m、M 视为质点组时它是一对内力，而一对内力作功和参照系选择无关。

② 以 M 为参照系计算 A_m'，即 m 相对 M 运动时 $\vec{N}$ 作的功。

显然：这时 $\vec{N}$ 与 m 相对 M 的运动方向垂直，所以

$$A_m' = A_m + A_M = 0.$$

$$\therefore A_m = -A_M.$$

③ 在地面参照系中计算 A_m.

这时 M 的运动是来自 $\vec{N}'$

$\therefore A_m = -A_M = -\frac{1}{2} M V_M^2$.

按机械能守恒有：

$$mgh = \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{1}{2} M V_M^2 = \frac{1}{2} m V_{mx}^2 + \frac{1}{2} m V_{my}^2 + \frac{1}{2} M V_M^2 \quad ①$$

水平方向动量守恒：

$$mV_{mx} + MV_M = 0 . \qquad V_{mx} = -\frac{M}{m} V_M \quad ②$$

约束条件：书 P71-72： $tg\theta = \frac{h-y'}{x'} \Rightarrow \frac{-y'}{x'} = \frac{-V_{my}}{V_m - V_M}$

$$V_{my} = -tg\theta\,(V_m - V_M) = \frac{M+m}{m} tg\theta\, V_M \quad ③$$

由 ①②③

可解得

$$V_M^2 = \frac{2m^2gh}{M^2 + Mm + (m+M)^2 tg^2\theta}$$

$$\therefore A_m = -A_M = -\frac{1}{2} M V_M^2 = -\frac{m^2 M g h \cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$$

3-23. 开始： $mv_0 = (m+m_1)v'$ $\qquad v' = \frac{m}{m+m_1} v_0$

后来当弹簧压缩到最大时，m_1, m_2, m 速度相等，此时系统动量等于初始动量

$$m v_0 = (m_1 + m_2 + m) v_2 .$$

且 $$\frac{1}{2}(m_1+m)(v')^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m) v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 .$$

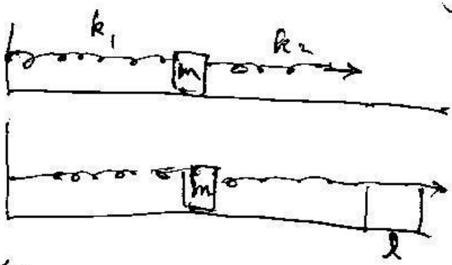
$$\frac{1}{2}\cancel{(m+m_1)} \frac{m^2}{(m_1+m)^{\cancel{2}}} v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2+m)} \frac{m^2}{(m_1+m_2+m)^{\cancel{2}}} v_0^2 + \frac{1}{2} k x^2 .$$

$$x^2 = \frac{m^2}{k}\left(\frac{1}{m_1+m} - \frac{1}{m_1+m_2+m}\right) v_0^2 = \frac{m^2 v_0^2}{k} \frac{\cancel{m_1} + m_2 \cancel{+m} - \cancel{m_1} - \cancel{m}}{(m_1+m)(m_1+m_2+m)}$$

$$= \frac{m^2 m_2}{k(m_1+m)(m_1+m_2+m)} v_0^2$$

$$x = \sqrt{\frac{m_2}{k(m_1+m)(m_1+m_2+m)}}\, m v_0$$

3-24.



① 过程非常缓慢，是一个准平衡的过程，
m 也在移动，但处于平衡，m 与弹簧之间
弹性力及外力作用，拉到 l 距离后，系统仍
处于静平衡，外力作功等于弹性势能的增加。

$$A_f = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 .$$

$x_1 + x_2 = l$. 在力平衡时 要也有 $k_1 x_1 = k_2 x_2$.

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1}x_2 \qquad l = x_2 + \frac{k_2}{k_1}x_2 = \frac{k_1+k_2}{k_1}x_2 . \quad x_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}l .$$

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1}\frac{k_1}{k_1+k_2}l = \frac{k_2}{k_1+k_2}l .$$

$$A_f = \frac{1}{2}k_1\frac{k_2^2}{(k_1+k_2)^2}l^2 + \frac{1}{2}k_2\frac{k_1^2}{(k_1+k_2)^2}l^2 = \frac{l^2}{2}\frac{k_1k_2(k_1+k_2)}{(k_1+k_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}l^2 .$$

② 突然拉伸至 l，m 未动，k_1 未伸长，

$$\therefore A_f = \frac{1}{2}k_2 x^2 .$$

3-25. 这样提起的绳子，合力 $F - \lambda y g$.

$v = v_0$ 向上，$\frac{dv}{dt} = 0$. $\qquad \frac{dm}{dt} = \lambda\frac{dy}{dt} = \lambda v_0$.

$u = -v_0$

$$\therefore \quad 0 = F - \lambda y g - v_0 \lambda v_0 .$$

$$\therefore F = \lambda v_0^2 + \lambda y g .$$

$E_{机} = E_{动} + E_{势}$，$E_{势} = \frac{1}{2}(\lambda g y)y = \frac{1}{2}\lambda g y^2$. $\quad E_{动} = \frac{1}{2}\lambda y v_0^2$

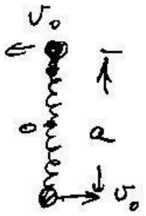
$$E_{机} = \frac{1}{2}\lambda y v_0^2 + \frac{1}{2}\lambda g y^2$$

$$\frac{dE_{机}}{dt} = \frac{1}{2}\lambda\frac{dy}{dt}v_0^2 + \lambda g v_0 y = \frac{1}{2}\lambda v_0^3 + \lambda g v_0 y$$

$$P = F v_0 = \lambda v_0^3 + \lambda g y v_0 .$$

$$F v_0 - \frac{dE_{机}}{dt} = \frac{1}{2}\lambda v_0^3 .$$ → 转化为热能。

3-26. 冲击后，两球在水平方向不受外力，故系统角动量守恒且水平方向动量守恒

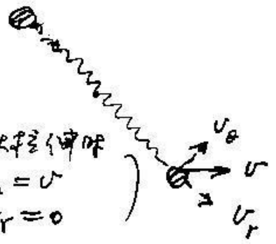


以质心为参照系

动量：$mv_0 - mv_0 = 0 = p_0 = p$

角动量：$J_0 = mv_0\frac{a}{2} + mv_0\frac{a}{2} = mav_0$

最大拉伸时：$J = mv\frac{b}{2} + mv\frac{b}{2} = mbv$



（最大拉伸时 $v_\theta = v$ $v_r = 0$）

即有 $mav_0 = mbv$

∴有 $v = \frac{a}{b}v_0 = \frac{a}{2a}v_0 = \frac{1}{2}v_0$

又∵系统机械能守恒：$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{1}{2}k(b-a)^2$

即 $mv_0^2 = mv^2 + \frac{1}{2}a^2k$

∴ $mv_0^2 = m\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{1}{2}a^2k$ 可得 $v_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{k}{m}a^2$

∴ $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}\,a$

3-28 [解] 卫星在有心力场中运动，所以卫星相对地心，角动量守恒。

即有 $mR_{\text{近}}v_{\text{近}} = mv_{\text{远}}R_{\text{远}}$

∵ $R_{\text{近}} = R$ （地球半径） 即有 $Rv_{\text{近}} = R_{\text{远}}v_{\text{远}}$

若卫星作圆周运动，满足：$\frac{GmM}{R^2} = \frac{mv_0^2}{R}$ 即 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

而 $v_{\text{近}} = \sqrt{1.5}\,v_{\text{圆}} = \sqrt{1.5}\,v_0 = \sqrt{1.5}\sqrt{\frac{GM}{R}}$

可得 $v_{\text{远}} = \frac{R}{R_{\text{远}}}v_{\text{近}} = \frac{R}{R_{\text{远}}}\sqrt{1.5}\,v_0 = \frac{R}{R_{\text{远}}}\sqrt{1.5}\sqrt{\frac{GM}{R}}$

又考虑机械能守恒 即 $E_{\text{近}} = E_{\text{远}}$

而 $E_{\text{近}} = \frac{1}{2}mv_{\text{近}}^2 - \frac{GMm}{R} \Rightarrow E_{\text{远}} = \frac{1}{2}mv_{\text{远}}^2 - \frac{GMm}{R_{\text{远}}}$

即有 $1.5\frac{GM}{R} - \frac{2MG}{R} = \frac{R^2}{R_{\text{远}}^2}1.5\frac{GM}{R} - \frac{2GM}{R_{\text{远}}} = GM\left(\frac{R\,1.5}{R_{\text{远}}^2} - \frac{2}{R_{\text{远}}}\right)$

即 $-\frac{GM}{R}0.5 = \frac{GM}{R_{\text{远}}}\left(\frac{R}{R_{\text{远}}} - 2\right) = \frac{GM}{R_{\text{远}}}\left(\frac{R}{R_{\text{远}}} - 2\right) = \frac{GM}{R_{\text{远}}^2}(1.5R - 2R_{\text{远}})$

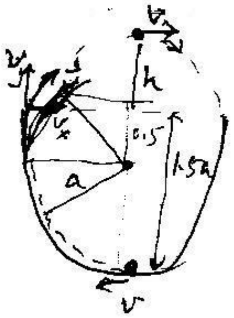
即 $-\frac{1}{2R} = \frac{1}{R_{\text{远}}^2}(1.5R - 2R_{\text{远}})$ 即 $-R_{\text{远}}^2 = 2R(1.5R - 2R_{\text{远}}) = 3R^2 - 4RR_{\text{远}}$

即 $3R^2 - 4RR_{\text{远}} + R_{\text{远}}^2 = 0$ 解得 $(R - R_{\text{远}})(3R - R_{\text{远}}) = 0$

即 $R_{\text{远}} = 3R$

3-29. 小球受光滑面约束力，该力不作功。

机械能守恒：设在碗口的速度为 $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$

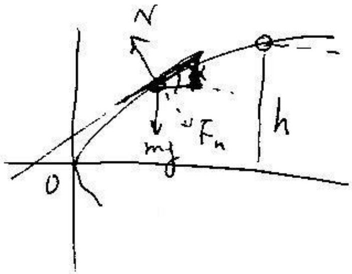


$$\frac{1}{2}mv^2+mg\,1.5a=\frac{1}{2}mv_x^2+mg(1.5a+h)$$

$$\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2=\frac{1}{2}mv_x^2+mgh$$

$$\therefore h=\frac{v_y^2}{2g}$$

3-30.



$$N=mg\cos\alpha+m\frac{v^2}{\rho}$$

$$v^2=\sqrt{2g(h-y)}$$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{y^2+x^2}$$

第三章部分习题参考解答

3-5 解：水平方向无外力，∴ 水平方向动量守恒

有 $M\frac{dx_{船}}{dt}+m\frac{dx_{人}}{dt}=(M+m)V_0=0$ （∵ $V_0=0$）

即 $M\,dx_{船}+m\,dx_{人}=0$

$$\int_{x_{船0}}^{x_{船}}M\,dx'_{船}+\int_{x_{人0}}^{x_{人}}m\,dx'_{人}=0$$

即 $M(x_{船}-x_{船0})+m(x_{人}-x_{人0})=0$

∵ $x_{人}-x_{人0}=\Delta x_{人}=l+\Delta x_{船}$ （$\Delta x_{船}=x_{船}-x_{船0}$）

∴ $(M+m)\Delta x_{船}=-ml$ ∴ $\Delta x_{船}=-\frac{m}{M+m}l=-\frac{4}{11}$ (m)

3-7题、[解] 设子弹在 t_1 时间内穿过 m_1，受到阻力为 F，它损失动量为：Ft_1，而 m_1 和 m_2 紧贴在一起，所以子弹损失的动量转移给了木块 m_1 和 m_2，

∴ m_1 的速度为： $v_1 = \frac{Ft_1}{m_1 + m_2}$

子弹穿过 m_2 的时间是 t_2，动量损失为 Ft_2，它全部由 m_2 接收，所以

$$V_2 = v_1 + \frac{Ft_2}{m_2} = F\left(\frac{t_1}{m_1+m_2} + \frac{t_2}{m_2}\right)$$

3-8题[解] 爆炸瞬间，重力可忽略，其动量守恒。

水平方向： $2mV_0\cos\theta = mV_2\cos\alpha$ （V_2 为第二块弹片的速率）

垂直方向： $mV_1 = mV_2\sin\alpha$ （V_1 为……）

∴ $V_2 = \sqrt{V_1^2 + 4V_0^2\cos^2\theta}$ ， $\alpha = tg^{-1}\frac{V_1}{2V_0\cos\theta}$

3-9. 解：设 $m = kar^3$ ， $\frac{dr}{dt} = a$ ， $r = (r_0 + at)$ ，

已知 $t=0$ ， $r = r_0$ ， $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -v_0$ ， $y = h_0$

则有： $\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg$ $\quad d(m\dot{y}) = -mg\,dt$

积分得： $\dot{y} = v = -\frac{r_0^3}{r^3}v_0 + \frac{g}{4ar^3}(r_0^4 - r^4)$

$$y = h_0 - \frac{g}{8a^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right) + \frac{v_0}{2a}\left(\frac{r_0^3}{r^3} - r_0\right)$$

3-10 解： $m = m_0 + \lambda x$ ， 当 $t=0$ 时， $m = m_0$ ， $x = 0$ ， $\dot{x} = 0$

$dm = \lambda dx$ ， $u = -v$

定有： $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - v\frac{dm}{dt}$ or $\frac{d(mv)}{dt} = mg\sin\theta$

$d(mv) = mg\sin\theta\,dt$ ；两边乘 mv 有

$mv\,d(mv) = m^2 g\sin\theta\,dx$ 即 $\frac{1}{2}d(mv)^2 = (m_0+\lambda x)^2 g\sin\theta\,dx$

积分得 $\frac{1}{2}(mv)^2 = \frac{g\sin\theta}{\lambda}\cdot\frac{1}{3}(m_0+\lambda x)^3 + c$

代入当 $t=0$， $x=0$， $\dot{x} = v = 0$ ∴ $c = -\frac{g m_0^3\sin\theta}{3\lambda}$

$$∴ \quad v = \left[\frac{2g\sin\theta}{3\lambda}\cdot\frac{(m_0+\lambda x)^3 - m_0^3}{(m_0+\lambda x)^2}\right]^{1/2}$$

3-11题【解】 用变质量问题方法解. 由 $m\frac{dv}{dt} = F + u\frac{dm}{dt}$

$\because$ $v = c$. $\therefore$ $\frac{dv}{dt} = 0$

主体：传送带上的沙、 质量为 $m = q\,t = q\frac{L}{v}$

附体：流入部份： $\frac{dm}{dt} = q$, $u = -v$

流出部份： $\frac{dm}{dt} = -q$, $u = 0$

主体受力： $F = mg\sin\theta$ （忽略摩擦力）

$\therefore$ 有： $0 = mg\sin\theta - vq$ 即 $\sin\theta = \frac{vq}{mg} = \frac{vq}{q\frac{L}{v}g} = \frac{v^2}{Lg}$

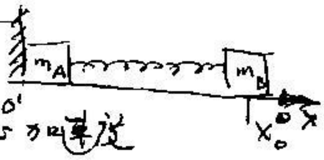
3-12题【解】. 推力 $\vec{f} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$

而 吸进部分： -200×50 (kg) ，喷出部分： -400×-52.0

$\therefore$ $f = -200\times 50 + 52.0\times 400 = -10000 + 20800 = 10800$ N（推力）

$= 1.08\times 10^4$ (N)

3-17 解：当外力撤除后，系统的外力只有 $N_{墙} = Kx_0$



$\therefore$ $(m_A+m_B)\ddot{x}_c = Kx_0$ 即 $\ddot{x}_c = \frac{Kx_0}{m_A+m_B}$ 此为最大质心加速度

离开墙后的瞬时， m_B 获得一个冲击力而获得最大速度

即 $\frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}m_B V_B^2$ $\therefore$ $V_B = \sqrt{\frac{K}{m_B}}\,x_0$

而质心的动量等于质点组的总动量 但 $V_A = 0$

$\therefore$ $(m_A+m_B)V_c = m_B V_B$

$\therefore$ $V_{c\,max} = \frac{m_B}{m_A+m_B}\sqrt{\frac{K}{m_B}}\,x_0$

3-19 解： 系统角动量守恒 $\therefore$ $m r_1 v_1 = m r_2 v_2$

即 $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$ $\therefore$ $\omega_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2^2}$

$A = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{1}{2}m v_1^2\left[\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right]$

3-22 解：①分析，以地面为参照系。

对M：重力 $M\vec{g}$ 和地面支撑力不作功，但m对M的作用力 $\vec{N}'$ 的水平分量 $N'\sin\theta$ 对M作正功 $A_M = \frac{1}{2}MV_M^2$

对m：重力 $m\vec{g}$ 及M的约束反力 $\vec{N}$ 对m的运动都作功，其中 $\vec{N}$ 对m的作功为 A_m

于是在m，M相对地面运动过程中，$\vec{N}'$ 和 $\vec{N}$ 作功之和是 $A_m' = A_m + A_M$

但把m，M看作一个系统，$\vec{N}$ 与 $\vec{N}'$ 是一对内力，它们作功与参照系选择无关。

② 以M为参照系，计算 A_m'，显然 A_m' 是m相对M运动时 $\vec{N}$ 作的功，而∵ $\vec{N}$ 与m相对M的运动方向垂直，所以 $A_m' = A_m + A_M = 0$ ∴ $A_m = -A_M$

③ 以地面为参照系计算 A_m

此时，M的运动是由于有 $\vec{N}'$ ∴ $A_m = -A_M = -\frac{1}{2}MV_M^2$

由系统机械能守恒，有：$mgh = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{1}{2}MV_M^2 = \frac{1}{2}mV_{mx}^2 + \frac{1}{2}mV_{my}^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$ ①

水平方向动量守恒 有：$mV_{mx} + MV_M = 0$ 得 $V_{mx} = -\frac{M}{m}V_M$ ②

约束条件：$tg\theta = \frac{h-y'}{x'} \Rightarrow \frac{-\dot{y}'}{\dot{x}'} = \frac{-V_{my}}{V_m - V_M}$

得 $V_{my} = -tg\theta(V_m - V_M) = \frac{M+m}{m}tg\theta\, V_M$ ③

由①，②，③联立解得 $V_M^2 = \frac{2m^2gh}{M^2 + Mm + (m+M)^2 tg\theta}$

∴ $A_m = -A_M = -\frac{1}{2}MV_M^2 = -\frac{m^2Mgh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}$

3-23 题：解：开始，子弹射入 m_1 过程，忽略弹性力，动量守恒

得 $mv_0 = (m+m_1)v'$ （v' 是子弹进入 m_1 后与 m_1 的共同速度）

得 $v' = \frac{m}{m+m_1}v_0$ （此时 m_2 尚无速度）

以后弹簧压缩，对于 m，m_1 和 m_2 系统，弹性力是内力，

∴ 水平方向动量守恒，当压缩量最大时，m，m_1 和 m_2 具有共同的速度 v_c

$mv_0 = (m+m_1)v' = (m+m_1+m_2)v_c \rightarrow v_c = \frac{m}{m_1+m_2+m}v_0$

且机械能守恒。

$$\frac{1}{2}(m_1+m)(v')^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m)v_c^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

得 $\frac{1}{2}(m_1+m)\frac{m^2}{(m+m_1)^2}v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m)\frac{m^2}{(m_1+m_2+m)^2}v_0^2 + \frac{1}{2}kx^2$

解得：$x = \sqrt{\frac{m_2}{k(m_1+m)(m_1+m_2+m)}}\, mv_0$

3-25 解：质量主体：提起的绳子(长y)，其受力为：$F-\lambda y g$

① $v=v_0$ 向上，$\dfrac{dv}{dt}=0$，$\dfrac{dm}{dt}=\lambda\dfrac{dy}{dt}=\lambda v_0$

$u=-v_0$ ∴ $0=F-\lambda y g-v_0^2\lambda$ ∴ $F=\lambda v_0^2+\lambda y g$

② $E_{机}=E_{动}+E_{势}=\frac{1}{2}\lambda y v_0^2+\frac{1}{2}\lambda g y^2$

$$\frac{dE_{机}}{dt}=\frac{1}{2}\lambda\frac{dy}{dt}v_0^2+\lambda g v_0 y=\frac{1}{2}\lambda v_0^3+\lambda g v_0 y$$

$P=Fv_0=\lambda v_0^3+\lambda g y v_0$ 而 $Fv_0-\frac{d}{dt}E_{机}=\frac{1}{2}\lambda v_0^3$ 转化为热能.

3-32 解：① 发射过程：沿圆周切向 外力$=0$ ∴ 切向动量守恒.

有 $m v_0=(m-m_1)v+m_1v_1$ ①

(其中 v_0：发射前空间站在P点时速度，v：发射后空间站$(m-m_1)$在发射点P的速度

v_1：发射体 m_1 的速度.)

∵ 空间站作圆周运动 ∴ $m\dfrac{v_0^2}{R}=G\dfrac{mM}{R^2}$ ②

亦即 $v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ ②'

② 发射后 空间站$(m-m_1)$与月球系统，月球的引力，是保守力，且向心.

∴ $M_{外}$(力矩)$=0$ ∴ 空间站动量矩守恒

有 $(m-m_1)Rv=(m-m_1)R_M v_M$ ③

(R_M 是月球的半径，v_M 为空间站登陆时的速度.

则有 $v_M=\dfrac{R}{R_M}v$ ③'

③ 空间站−月球系统，$F_{外}=0$，∴ 机械能守恒

有 $\frac{1}{2}(m-m_1)v^2-\dfrac{GM(m-m_1)}{R}=\frac{1}{2}(m-m_1)v_M^2-\dfrac{GM(m-m_1)}{R_M}$ ④

将③'代入④：可得到 $v=\sqrt{\dfrac{2GM\,R_M}{R(R_M+R)}}$ ⑤

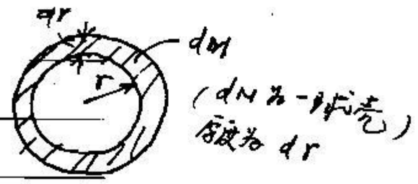
⑤代入①

可得：$v_1=\dfrac{1}{m_1}\left\{m\sqrt{\dfrac{GM}{R}}-(m-m_1)\sqrt{\dfrac{2GMR_M}{(R+R_M)R}}\right\}$ ⑥

考虑到 $m\gg m_1$ 则 $m-m_1\simeq m$

则 $v_1=\dfrac{m}{m_1}\left\{\sqrt{\dfrac{GM}{R}}\left(1-\sqrt{\dfrac{2R_M}{R(R_M+R)}}\right)\right\}$ ⑦

3-14 当球体为 r 时，设想从无穷远处搬质元



$$dm=\rho\cdot 4\pi r^2\,dr$$

它是包围 r 半径的球的一球壳，厚度为 dr

半径为 r 的球体： $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$

对球壳 dm 的引力为 $f=-\frac{Gm\,dm}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

外力作功为：

$$dA=\int_{\infty}^{r}-\frac{Gm\,dm}{r^2}\vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{r}=\int_{\infty}^{r}\frac{Gm\,dm}{r^2}\,dr \quad (\because\ \vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{r}=-dr$$

$$=-G\frac{m\,dm}{r}=-\frac{G\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot\rho 4\pi r^2\,dr}{r}=-\frac{16}{3}\pi^2G\rho^2r^4\,dr$$

此即外力反引力作的功，，球体在整个聚集过程中外力作功的总和，即对 r 从 0 → R 积累起来.

$$E_p=A=\int dA=\int_0^R-\frac{16}{3}\pi^2G\rho^2r^4\,dr=-\frac{16}{3\times5}\pi^2G\rho^2R^5=-\frac{3}{5}\frac{G}{R}\left(-\frac{4\pi\rho}{3}R^3\right)^2$$

$$=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}=-2.4\times10^{28}(J)$$