目录 CONTENTS

第3章 可 测 函 数

§ 3.1　可测函数的性质

设 f 是定义在可测集 E 上的函数. 由这个函数可以自然地产生出各种各样的集, 例如

$$\{x\in E: f(x)>a\},\ \{x\in E: a<f(x)\le b\}.$$

为用测度论的方法研究这个函数, 自然要求这些集是可测的. 但这些集未必总是可测的. 例如, 设 A 是 $[0,1]$ 中的不可测集, $\chi_A(x)$ 是 A 的特征函数, 则

$$\{x\in[0,1]: \chi_A(x)>0\} = A$$

就不是可测集. 为了避免出现这样的情况, 就要求所讨论的函数是可测的.

对涉及$\pm\infty$的运算的规定　在积分理论中为了方便(例如可以使一些定理的叙述更简洁), 允许函数取“$+\infty$”和“$-\infty$”为值(它们别读作正无穷和负无穷).

在§2.1 中我们曾经对涉及$+\infty$的加法运算作了规定. 这里对涉及$\pm\infty$的四则运算一并作出规定.

以下设a是实数.

(1) 序关系: $-\infty < a < +\infty$.

(2) 加减法: $a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty.$

$$a-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty.$$

(3) 乘法: $x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & 0<x\leq+\infty,\\ 0, & x=0,\\ \mp\infty, & -\infty\leq x<0.\end{cases}$

(4) 除法: $\dfrac{a}{\pm\infty}=0.$

(5) 绝对值: $|\pm\infty|=+\infty.$

注　象 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 和 $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 等未定义的运算是无意义的, 在运算中要注意避免这种情况出现.

以后若无特别申明, “函数”一词总是指可以取 $\pm\infty$ 为值的广义实值函数. 取值于 $\mathbf{R}^1$ (即不取 $\pm\infty$ 为值)的函数仍称为实值函数.

3.1.1　可测函数的定义与例

定义 3.1　设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. f 是定义在 E 上的函数. 若对任意实数 a,

$$\{x\in E: f(x)>a\}$$

是可测集, 则称 f 为 E 上的 **Lebesgue 可测函数(简称为可测函数)**, 或称 f 在 E 上可测.

以下总是设E是$\mathbf{R}^n$中的一给定的可测集.

例 1　若$f(x)\equiv c$是E上的常值函数. 则f在E上可测.

这是因为对任意实数a, 有

$$\{x\in E: f(x)>a\}=\begin{cases} E, & a<c, \\ \varnothing, & a\geq c. \end{cases}$$

因此对任意实数a, $\{x\in E: f(x)>a\}$是可测集, 从而f是可测的.

例 2 设 $A\subset\mathbf{R}^n$, χ_A 是 A 的特征函数. 则对任意实数 a, 有

$$\{x\in\mathbf{R}^n:\chi_A(x)>a\}=\begin{cases}\mathbf{R}^n, & a<0,\\ A, & 0\le a<1,\\ \varnothing, & a\ge 1.\end{cases}$$

由上式知道 χ_A 是可测函数当且仅当 A 为可测集.

特别地, 设 $D(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的 Dirichlet 函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{若}x\text{是有理数},\\ 0, & \text{若}x\text{是无理数}.\end{cases}$$

即 $D(x)=\chi_{\mathbf{Q}}(x)$, 其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集. 由于 $\mathbf{Q}$ 是可测集, 故 $D(x)$ 是可测的.

例 3 设 f 是 E 上的连续函数. 则 f 在 E 上可测. 这是因为根据§1.4 例 3, 对任意实数 a, 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 G, 使得

$$\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G.$$

而开集是可测集, 因而 f 是可测的.

例 4 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数. 则 f 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

事实上, 对任意实数 c, 由于 f 是单调的, 容易知道集 $\{x \in [a,b] : f(x) > c\}$ 是区间, 单点集或者空集.

总之, $\{x \in [a,b] : f(x) > c\}$ 是可测集. 因此 f 是可测的.

例 5 (1) 若 f 在 E 上可测, E_1 是 E 的可测子集, 则 f 在 E_1 上可测.

(2) 设 E_1 和 E_2 是 E 的可测子集, 并且 $E=E_1\cup E_2$. 若 f 在 E_1 和 E_2 上可测, 则 f 在 E 上可测.

事实上, 由于对任意实数 a, 有

$$\{x\in E_1 : f(x)>a\}=\{x\in E : f(x)>a\}\cap E_1.$$

$$\{x\in E : f(x)>a\}=\{x\in E_1 : f(x)>a\}\cup\{x\in E_2 : f(x)>a\}.$$

由假设条件知道上式右边集都是可测集, 因此结论(2)和结论(2)成立.

为简单计，以后我们将集$\{x\in E: f(x)>a\}$简记为$E(f>a)$，将$\{x\in E: f(x)\le g(x)\}$简记为$E(f\le g)$等等.

定理 3.1 设f是定义在E上的函数. 则以下(1)～(5)是等价的:

(1) f是E上的可测函数;

(2) 对任意实数a, $E(f\ge a)$是可测集;

(3) 对任意实数a, $E(f<a)$是可测集;

(4) 对任意实数a, $E(f\le a)$是可测集.

(5) 对任意$A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$, $f^{-1}(A)$是可测集. 并且$E(f=+\infty)$是可测集.

证 (1)⇒(2). 对任意实数 a, 有

$$E(f \geq a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{k}).$$

由于 f 在 E 上可测, 对任意 k, $E(f > a - \frac{1}{k})$ 是可测集,

因而 $E(f \geq a)$ 是可测集.

(2)⇒(3). 由等式 $E(f < a) = E - E(f \geq a)$ 即知.

(3)⇒(4). 由等式 $E(f \leq a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{k})$ 即知.

(4)⇒(1). 由等式 $E(f > a) = E - E(f \leq a)$ 即知.

因此, (1)～(4)是等价的.

(1)⇒(5). 令$\mathcal{F}=\{A\subset\mathbf{R}^1: f^{-1}(A)$是可测集$\}$.由原像的性质

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n),\ f^{-1}(A^C)=(f^{-1}(A))^C.$$

易见$\mathcal{F}$是σ-代数. 令$\mathcal{C}$是直线上半开区间的全体. 对任意$(a,b]\in\mathcal{C}$, 我们有

$$f^{-1}((a,b])=E(a<f\le b)=E(f>a)-E(f>b).$$

由上式和假设条件知道$f^{-1}((a,b])$是可测集, 因此$\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$, 从而$\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$. 由习题 1, A 类第 37 题的结论, $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$. 因此$\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)\subset\mathcal{F}$. 这表明对任意$A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$, $f^{-1}(A)$是可测集.

由于

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k),$$

故 $E(f=+\infty)$ 是可测集.

(5)⇒(1). 由于

$$E(f>a)=E(a<f\leq\infty)=f^{-1}((a,\infty))\cup E(f=+\infty),$$

而区间 (a,∞) 是 Borel 集, 由假设条件知道 $E(f>a)$ 是可测集. ■

例 6 设 f 是 E 上的可测函数. 由于单点集 $\{a\}$ (a 是实数)是 Borel 集, 由定理 3.1 知道 $E(f=a)=f^{-1}(\{a\})$ 是可测集. 同理, 以下几个集也是可测的:

$$E(a<f<b),\quad E(a\le f\le b),$$

$$E(a<f\le b),\quad E(a\le f<b).$$

此外, 由于

$$E(f=-\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f<-k),$$

故 $E(f=-\infty)$ 是可测集.

3.1.2 可测函数的运算封闭性

关于函数相加的补充规定　设 f 和 g 是定义在 E 上的函数. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一点 x 处取异号的 ∞ 为值, 由于异号 ∞ 相加没有意义, 故此时 $f(x)+g(x)$ 无意义. 我们规定此时 $f(x)+g(x)=0$.

定理 3.2 设 f 和 g 在 E 上可测. 则函数 cf (c 是实数), $f+g$, fg 和 $|f|$ 都在 E 上可测.

证 (1). 若 $c=0$, 则 $cf \equiv 0$. 由例 1 知道此时 cf 是可测的. 当 $c \neq 0$ 时,对任意实数 a, 有

$$E(cf > a) = \begin{cases} E(f > \dfrac{a}{c}), & c > 0, \\ E(f < \dfrac{a}{c}), & c < 0. \end{cases}$$

上式右边的集都是可测集, 因此 cf 是可测的.

(2). 先设 f 和 g 不取异号 ∞ 为值. 设 $\{r_n\}$ 是有理数的全体. 对任意固定的 $x \in E$, $f(x)+g(x)>a$ 当且仅当存在 r_n 使得 $f(x)>r_n$ 并且 $g(x)>a-r_n$. 因此

$$E(f+g>a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(E(f>r_n)\cap E(g>a-r_n)\big).$$

由上式知道 $E(f+g>a)$ 是可测集. 因此 $f+g$ 可测.

再考虑一般情形. 令

$$A=[E(f=+\infty)\cap E(g=-\infty)]\cup[E(f=-\infty)\cap E(g=+\infty)]$$

则 A 是可测集. 我们有

$$\{x\in E: f(x)+g(x)>a\}$$
$$=\{x\in E-A: f(x)+g(x)>a\}\cup\{x\in A: f(x)+g(x)>a\}. \tag{3.1}$$

由例 5 的结论 (1) 知道 f 和 g 在 $E-A$ 上可测. 既然在 $E-A$ 上 f 和 g 不取异号的 ∞ 为值, 由上面所证的结果知道 $f+g$ 在 $E-A$ 上可测.

由于在 A 上 $f+g\equiv 0$, 因此 $f+g$ 在 A 上可测.

于是(3.1)式右端的两个集都是可测集, 从而 $f+g$ 在 E 上可测.

(3). 先证 f^2 可测. 由于

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E, & a<0,\\ E(f>\sqrt{a})\cup E(f<-\sqrt{a}), & a\geq 0.\end{cases}$$

由上式知道 $E(f^2>a)$ 是可测集, 故 f^2 可测. 再由等式

$$fg=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

即知 fg 可测.

(4). 由于 $E(|f|>a)=\begin{cases}E, & a<0,\\ E(f>a)\cup E(f<-a), & a\geq 0.\end{cases}$

由此知道 $|f|$ 在 E 上可测.■

正部和负部　设 f 是定义在 E 上的函数. 令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

或者写成

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0, \\ 0, & f(x)<0. \end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\geq 0, \\ -f(x), & f(x)<0. \end{cases}$$

分别称 f^+ 和 f^- 为 f 的**正部**和**负部**. f^+ 和 f^- 都是非负值函数, 并且对任意 $x\in E$ 有

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad |f(x)|=f^+(x)+f^-(x).$$

$$f^{+}(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0, \\ 0, & f(x)<0. \end{cases} \quad f^{-}(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\geq 0, \\ -f(x), & f(x)<0. \end{cases}$$

定理 3.3 若 f 在 E 上可测, 则 f^{+} 和 f^{-} 都在 E 上可测.

证 对任意实数 a, 我们有

$$E(f^{+}>a)=\begin{cases} E(f>a), & a\geq 0, \\ E, & a<0. \end{cases}$$

$$E(f^{-}>a)=\begin{cases} E(f<-a), & a\geq 0, \\ E, & a<0. \end{cases}$$

由此知道 f^{+} 和 f^{-} 都在 E 上可测.

定理 3.4 设$\{f_n\}$是E上的可测函数列. 则函数$\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$和$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$都在$E$上可测.

特别地, 若对每个$x\in E$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在(有限或$\pm\infty$), 则$\lim\limits_{n\to\infty} f_n$在$E$上可测.

证 对任意固定的 $x\in E$ 和实数 a, 由于 $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)>a$ 当且仅当存在 n 使得 $f_n(x)>a$, 而 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)<a$ 当且仅当存在 n, 使得 $f_n(x)<a$, 因此

$$E\left(\sup_{n\geq 1} f_n > a\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n>a),\ E\left(\inf_{n\geq 1} f_n < a\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n<a).$$

由此知道 $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$ 和 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$ 都在 E 上可测. 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k(x),\ \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)=\sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} f_k(x),$$

由此知道 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 都在 E 上可测.■

3.1.3 可测函数用简单函数逼近

下面讨论一类特别简单的可测函数—简单函数. 简单函数在可测函数中具有特殊的作用.

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. 若 $A_1,\cdots,A_k$ 是 E 的互不相交的可测子集, 并且 $E=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$, 则称 $\{A_1,\cdots,A_k\}$ 是 E 的一个可测分割.

定义 3.2 设 f 是定义在 E 上函数. 若存在 E 的一个可测分割 $\{A_1,\cdots,A_k\}$ 和实数 $a_1,\cdots,a_k$, 使得当 $x\in A_i$ 时, $f(x)=a_i(i=1,\cdots,k)$, 则称 f 为 E 上的**简单函数**.

换言之, f 为简单函数当且仅当 f 可以表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x) \quad (x\in E). \tag{3.1}$$

由于可测集的特征函数是可测函数, 因此简单函数是可测函数.

称形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{I_i}(x)$$

的函数为区间$[a,b]$上的阶梯函数, 其中$I_1, I_2, \cdots, I_k$是互不相交的区间, 并且$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{k} I_i$. 显然简单函数是阶梯函数的推广.

定理 3.5 设 f 和 g 都是简单函数. 则

(1) $cf\,(c$ 是实数$)$, $f+g$ 是简单函数.

(2) 若 φ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数, 则 $\varphi(f(x))$ 是简单函数.

证 (1). 显然 cf 是简单函数. 设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x),\quad g(x)=\sum_{j=1}^{q}b_j\chi_{B_j}(x).$$

其中 $\{A_1,A_2,\cdots,A_p\}$ 和 $\{B_1,B_2,\cdots,B_q\}$ 都是 E 的可测分割. 由于 $\{A_i\cap B_j:1\le i\le p,1\le j\le q\}$ 也是 E 的一个可测分割, 并且当 $x\in A_i\cap B_j$ 时 $f(x)+g(x)=a_i+b_j$, 因此 $f+g$ 是简单函数.

(2). 设 $f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)$, 则

$$\varphi(f(x))=\sum_{i=1}^{k}\varphi(a_i)\chi_{A_i}(x)\quad(x\in E).$$

因此 $\varphi(f(x))$ 是简单函数. ■

注 1 在定理 3.5 的证明中, 如果

$$\{A_i\cap B_j:1\le i\le p,1\le j\le q\}$$

重新编号记为 $\{E_1,E_2,\cdots,E_k\}$. 则 f 和 g 可以分别表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i'\chi_{E_i}(x),\quad g(x)=\sum_{i=1}^{k}b_i'\chi_{E_i}(x).$$

因此对于给定的两个简单函数, 可以设它们的表达式中所对应的 E 的可测分割是一样的. 这个简单事实以后会用到.

设$\{f_n\}$是一列定义在E上的函数. 若对每个$x\in E$, 总有

$$f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le\cdots,$$

则称函数列$\{f_n\}$是**单调增加的**, 记为$f_n\uparrow$. 若进一步还有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(x\in E)$, 则记为$f_n\uparrow f\,(n\to\infty)$.

定理 3.6 设f是E上的非负可测函数. 则存在E上的非负简单函数列$\{f_n\}$, 使得$\{f_n\}$是单调增加的, 并且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad(x\in E).\tag{3.3}$$

若f在E上还是有界的, 则$\{f_n\}$收敛于f是一致的.

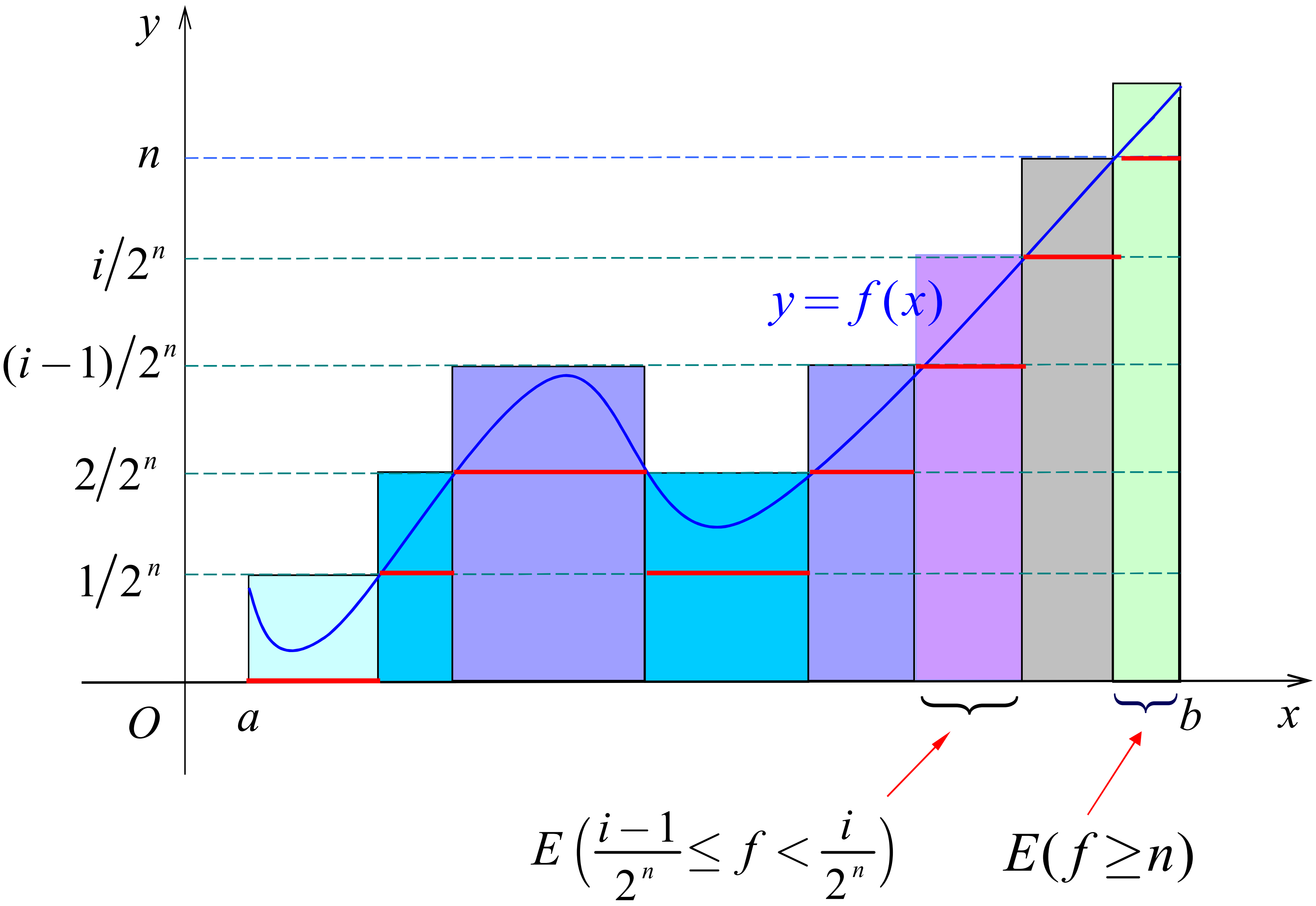
证 对每个自然数$n\geq 1$, 将区间$[0,n]$分割成$n\cdot 2^n$个长度为$\dfrac{1}{2^n}$的小区间. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & x\in E\left(\dfrac{i-1}{2^n}\leq f<\dfrac{i}{2^n}\right)\ (i=1,\cdots,n\cdot 2^n),\\ n, & x\in E(f\geq n).\end{cases}$$

由于f是可测函数, 故

$$E\left(\frac{i-1}{2^n}\leq f<\frac{i}{2^n}\right)(i=1,\cdots,n\cdot 2^n)$$

和$E(f\geq n)$都是可测集, 因而f_n是非负简单函数.



y
n
$i/2^n$
$(i-1)/2^n$
$2/2^n$
$1/2^n$
O
a
b
x
$y=f(x)$
$E\left(\frac{i-1}{2^n}\le f<\frac{i}{2^n}\right)$
$E(f\ge n)$

容易知道$\{f_n\}$是单调增加的. 下面证明对任意$x \in E$有

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

设$x \in E$. 若$f(x) < +\infty$, 则当$n > f(x)$时, 必存在正整数$i(1 \le i \le n \cdot 2^n)$, 使得$x \in E\left(\frac{i-1}{2^n} \le f < \frac{i}{2^n}\right)$. 此时

$$\frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}, \quad f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}.$$

因此

$$0 \le f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}. \tag{3.4}$$

故此时$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$$0 \le f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}. \qquad (3.4)$$

若 $f(x) = +\infty$, 则对任意 $n \ge 1$, $x \in E(f \ge n)$, 因此 $f_n(x) = n(n \ge 1)$. 此时也有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

这就证明了对任意 $x \in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

现在设 f 在 E 上还是有界的, $0 \le f(x) \le M\ (x \in E)$.

则当 $n > M$ 时, 对任意 $x \in E$ 有 $n > f(x)$, 此时(3.4)式成立. 这表明 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f. ■

推论 3.1 设 f 是 E 上的可测函数. 则存在 E 上的简单函数列 $\{f_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ (x \in E),$$

并且 $|f_n| \le |f| (n \ge 1)$. 若 f 在 E 上还是有界的, 则上述收敛是一致的.

证 由于 f 可测, 故 f^+ 和 f^- 都是非负可测函数. 由定理 3.6, 存在非负简单函数列 $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$, 使得 $g_n \uparrow f^+$, $h_n \uparrow f^-$. 令 $f_n = g_n - h_n \ (n \ge 1)$. 则 $\{f_n\}$ 是简单函数列, 并且对任意 $x \in E$ 成立有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(g_n(x) - h_n(x)) = f^+(x) - f^-(x) = f(x),$$

$$|f_n(x)| \le g_n(x) + h_n(x) \le f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|.$$

若 f 是有界的, 则 f^+ 和 f^- 都是有界的. 由定理 3.6, $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 在 E 上分别一致收敛于 f^+ 和 f^-. 因此 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f. ■

由于简单函数是可测函数, 因此简单函数列的极限函数是可测函数. 结合推论 3.1 得到如下的推论:

推论 3.2 设 f 是定义在 E 上的函数. 则 f 可测的充要条件是存在简单函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 f.

利用推论 3.2 容易得到关于复合函数可测性的如下定理:

定理 3.7 设 f 是 E 上的实值可测函数, g 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 则复合函数 $h(x)=g(f(x))$ 在 E 上可测.

证 由于 f 在 E 上可测, 根据推论 3.2, 存在简单函数列 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f. 根据定理 3.5, $\{g(f_n(x))\}$ 是简单函数列. 由于 g 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续, 故

$$\lim_{n\to\infty} g(f_n(x)) = g(f(x)) \quad (x\in E).$$

即 $g(f(x))$ 是一列简单函数的极限, 再次利用推论 3.2 知道 $g(f(x))$ 在 E 上可测. ■

例 7 设 f 是 E 上的实值可测函数. 由于 $\ln(1+u^2)$ 和 $|u|^p\,(p>0)$ 都是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数, 根据定理 3.7 知道, $\ln(1+f(x)^2)$ 和 $|f(x)|^p\,(p>0)$ 都是 E 上的可测函数.

以上讨论表明, 可测函数类具有较好的运算封闭性, 特别是对极限运算封闭. 这与连续函数形成对照.

本节后面的内容略, 不作要求.

习 题　1～9, 11, 13.

定义 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列. 称 $\{x_n\}$ 的收敛子列的极限为 $\{x_n\}$ 的**子极限**. 称 $\{x_n\}$ 的子极限中的最大者为 $\{x_n\}$ 的**上极限**, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. 称 $\{x_n\}$ 的子极限中的最小者为 $\{x_n\}$ 的**下极限**, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

注意, 在上面的定义中, 上极限和下极限允许为 $\pm\infty$.

由定义知道对任意实数列 $\{x_n\}$, 总有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

在数学分析课程中我们已经知道，关于数列的上极限和下极限有以下结论：

设 $\{x_n\}$ 是一实数列，则

（1）$\{x_n\}$ 的上极限和下极限都存在，并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} x_k . \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} x_k .$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 当且仅当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a.$

（3）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n . \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n .$

（4）若 $x_n \leq y_n, n = 1, 2, \cdots,$ 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n , \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n .$$

习　题

1～9, 11, 13.