武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 B1 期末试题 A

1、（6 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

2、（6 分）　求极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-x}{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}}$

3、（9 分）计算反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

4、（6 分）设函数$y=y(x)$有方程$xy^2+\sin\dfrac{\pi}{2}=ye^x$所确定，求$y'(0)$.

5、（10 分）（1）求齐次线性微分方程$y'''-y'=0$的通解；

（2）给出非齐次线性微分方程$y'''-y'=x\mathrm{e}^x+\sin x$的特解形式。

6、（10 分）函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\ge 0\end{cases}$可导，其中$a,b$为常数，求$a^2+b^2$.

7、（9 分）考虑参数方程$\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\cos t\end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

8、（12 分）设函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$在$x=1$和$x=2$处取得极值.

（1）试确定a与b的值；

（2）求出函数的拐点；

（3）证明$f(2)$是极小值。

9、（9 分）设$f(x)=\int_{x^2}^1 e^{-t^2}dt$，计算定积分$\int_0^1 xf(x)dx$.

10、（9 分）已知曲线$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt\ (0\le x\le\pi)$. 求该曲线的弧长.

11、（9 分）求由曲线$y=x^2, y=x, y=2x$所围成的图形的面积.

12、（5 分）设函数$f(x)$在区间$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$f(2)=0$. 证明：至少存在一点$\xi\in(1,2)$使得

$$\xi\ln(\xi)f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 B1 期末试题 A 解答

1、（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sqrt{n^2+1}\ln(1+\sin\frac{1}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}=\mathrm{e}$ 6 分

2、（6 分） 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-x}{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-x}{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}-1}{\mathrm{e}^{\cos x}\sin x}=-\mathrm{e}^{-1}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x-x^2}{1+x+x^2}}{x}=-\mathrm{e}^{-1}$ 6 分

另解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{\left(\mathrm{e}^{\cos x-1}-1\right)\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{\cos x-1}$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{-\dfrac{x^2}{2}}$$ 3 分

$$=-\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}-1}{x}=-\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x-x^2}{1+x+x^2}}{x}=-\mathrm{e}^{-1}$$ 6 分

3、（9 分）计算反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

解：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}dx$ 5 分

$$=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}d(x^{-2})=-\sqrt{1+x^{-2}}\Big|_1^{+\infty}=\sqrt{2}-1$$

9 分

另解：令 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ 5 分

$$=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$ 9 分

4、（6 分）设函数 $y=y(x)$ 有方程 $xy^2+\sin\dfrac{\pi}{2}=ye^x$ 所确定，求 $y'(0)$.

解：方程两边关于 x 求导得 $2xyy'+y^2=e^x(y+y')$ （1） 4 分

由方程知 $x=0\Rightarrow y(0)=1$ 由（1）得 $y'(0)=0$ 6 分

5、（10 分）（1）求齐次线性微分方程 $y'''-y'=0$ 的通解;

（2）给出非齐次线性微分方程 $y'''-y'=x\,\mathrm{e}^x+\sin x$ 的特解形式。

解：（1）由 $y'''-y'=0$ 得其特征方程为 $r^3-r=0$，有特征根：$r_1=0,r_2=1,r_3=-1$，故方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$ 6 分

（2）由于 $\lambda=1$ 是齐次方程的特征根，而 $\lambda=\pm\mathrm{i}$ 不是齐次方程的特征根，因此，非齐次方程的特解可令为：$y^*=x(Ax+B)\,\mathrm{e}^x+C\sin x+D\cos x$ 10 分

6、（10 分）函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,\ x<0 \\ ax+b & ,\ x\ge 0 \end{cases}$ 可导，其中 a,b 为常数，求 a^2+b^2.

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 首先须在 $x=0$ 连续即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=b$

即 $b=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$， 4 分

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 须 $f'_-(0)=f'_+(0)$，

即 $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a,$$

则 $a=b=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 从而处处可导，故 $a^2+b^2=0$. 9 分

7、（9 分）考虑参数方程 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\cos t \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解：由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-t\sin t,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t$ 故有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\cos t}=1-t\tan t$ 5 分

此外， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t\tan t)=-\tan t-t\sec^2 t$ 所以有

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\tan t-t\sec^2 t}{\cos t}$，代入 $t=0$ 得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$. 9 分

8、（12 分）设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得极值.

（1）试确定 a 与 b 的值；

（2）求出函数的拐点；

（3）证明 $f(2)$ 是极小值。

解（1）函数 $f(x)$ 处处可导，有导函数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$. 由设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得极值可知 $f'(1)=f'(2)=0$，

即 $f'(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6=3x^2+2ax+b$，因此 $a=-\dfrac{9}{2}, b=6$. 4 分

（2） $f''(x)=6x-9$，得 $f''(\frac{3}{2})=0$

当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$f'''(x)<0$，当 $x>\frac{3}{2}$ 时，$f''(x)>0$，（或 $f'''(\frac{3}{2})=6\neq 0$）

故曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(\frac{3}{2},f(\frac{3}{2}))$（或 $(\frac{3}{2},\frac{17}{4})$）改变符号 8 分

（3）因为 $f'(2)=0$，且 $f''(2)=3>0$（或当 $x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$）， 因此， $f(2)$ 是极小值. 12 分

9、（9 分）设 $f(x)=\int_{x^2}^{1}e^{-t^2}dt$，计算定积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解： $\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\dfrac{1}{2}x^2\int_{x^2}^{1}e^{-t^2}dt\,\Big|_0^1+\dfrac{1}{2}\int_0^1 2x^3e^{-x^4}dx$ 6 分

$=-\dfrac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=-\dfrac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}(1-e^{-1})$ 9 分

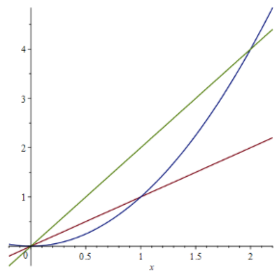
10、（9 分）已知曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt\ (0\le x\le \pi)$. 求该曲线的弧长.

解 由弧长公式知该曲线的弧长为

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x \quad 6\text{ 分}$$

$$\int_0^{\pi}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\,\mathrm{d}\,x=2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi}=4 \qquad 9\text{ 分}$$

11、（9 分）求由曲线 $y=x^2,\ y=x,\ y=2x$ 所围成的图形的面积.



解：易求得三条曲线有三个焦点 $(0,0),\ (1,1),\ (2,2)$，如图. 由此可的图形面积的积分表示： 2 分

$$S=\int_0^1(2x-x)\,\mathrm{d}\,x+\int_1^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}\,x \qquad 6\text{ 分}$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{7}{6} \qquad 9\text{ 分}$$

12、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(1,2)$ 使得

$$\xi\ln(\xi)f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

证明：做辅助函数 $\varphi(x)=\ln x\, f(x)$，显然 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且有 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$. 由罗尔定理， 至少存在一点 $\xi\in(1,2)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$\ln(\xi)f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0\Leftrightarrow\xi\ln(\xi)f'(\xi)+f(\xi)=0.$$