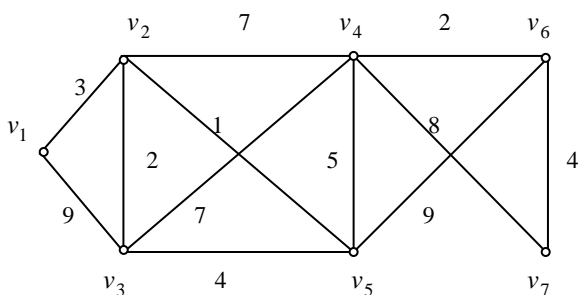


武汉大学 2013-2014 第一学期《离散数学》考试题

1. (8 分) 120 名学生参加考试, 考试有 A 、 B 和 C 共 3 道题, 其中 12 名学生 3 道题都做对了; 20 名学生做对了 A 题与 B 题; 16 名学生做对 A 题与 C 题; 28 个学生做对 B 题与 C 题; 做对 A 题的有 48 名学生; 做对 B 题的有 56 名学生; 还有 16 名学生一道题也没做对。试求做对 C 题的学生有多少个?
2. (8 分) 设 R 是集合 A 上的关系, 证明 R 传递的充分必要条件是 $R^2 \subseteq R$ 。
3. (10 分) $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, A 上关系 R 定义为:

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \text{ 当且仅当 } |x - y| = |u - v|,$$
 证明 R 是等价关系, 并求由 R 确定的 A 的划分。
4. (10 分) 有理数集 Q 中的 $*$ 定义如下: $a * b = a + b - ab$ 。
 (1) $(Q, *)$ 是半群吗? 是可交换的吗?
 (2) 求单位元;
 (3) $*$ 中是否有可逆元? 若有, 指出哪些是可逆元? 并指出逆元是什么?
5. (8 分) 设 G 是一群, H 是 G 的子群, $x \in G$ 。证明 $x \cdot H \cdot x^{-1} = \{x \cdot h \cdot x^{-1} \mid h \in H\}$ 是 G 的子群。
6. (8 分) 设 (L, \vee, \wedge) 是一个分配格, 而且是一个有界格, 若元素 x 是有补元, 证明它的补元是惟一的。
7. (8 分) 已知 n 阶简单图 G 有 m 条边, 各结点的度数均为 3。
 (1) 若 $m = 3n - 6$, 证明: 在同构意义下 G 惟一, 并求 m, n ;
 (2) 若 $n = 6$, 证明在同构意义下 G 不惟一。
8. (8 分) 对如下给出的赋权图 G , 求出结点 v_1 到其余各个结点的最短路径。



9. (8 分) 在通讯中要传输八进制数字 $0, 1, 2, \dots, 7$ 。这些数字出现的频率为
 $0: 30\%; 1: 20\%; 2: 15\%; 3: 10\%; 4: 10\%; 5: 6\%; 6: 5\%; 7: 4\%.$
 编一个最佳前缀码, 使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下:
 (1) 画出相应的二元树;
 (2) 写出每个数字对应的前缀码;
 (3) 传输按上述比例出现的数字 10000 个时, 至少要用多少个二进制数字?
10. (8 分) 求下面公式 G 的主析取范式与主合取范式, 并写出相应的为真赋值。

$$\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$
11. (8 分) 用谓词和量词将下列命题符号化:
 (1) 所有的人都学习和工作;
 (2) 没有不犯错误的人;
 (3) 尽管有人聪明, 但未必一切人都很聪明;
12. (8 分) 将下列推理形式化, 并对正确的推理给出推理过程, 要求指明所设命题或谓词的含义。
 每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车, 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车, 并非每个人都喜欢骑自行车, 因而有人不喜欢步行。

武汉大学 2013-2014 第一学期《离散数学》考试题答案

1. 解 设做对 A 题的学生构成的集合为 A, 做对 B 题的学生构成的集合为 B, 做对 C 题的学生构成的集合为 C, 由题意可知: $|A \cap B \cap C| = 12$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap C| = 16$, $|B \cap C| = 28$, $|A| = 48$, $|B| = 56$,

$|\overline{A \cup B \cup C}| = 16$, $|A \cup B \cup C| = 120 - 16 = 104$, 根据容斥原理可知:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$|C| = 20 + 16 + 28 + 104 - 12 - 48 - 56 = 52$, 故做对 C 题的学生有 52 个。

2. 证 若 R 传递, 则 $\forall \langle x, z \rangle \in R^2 = R \circ R$, 存在 $y \in A$, 使得 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 由 R 传递, 有 $\langle x, z \rangle \in R$, 从而 $R^2 \subseteq R$ 。

另一方面, 若 $R^2 \subseteq R$, 对任意的 $x, y, z \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle x, z \rangle \in R^2$, 由 $R^2 \subseteq R$, 有 $\langle x, z \rangle \in R$, 故 R 传递。

3. 解 首先证明 R 是等价的。

a. 对任意的 $\langle x, y \rangle \in A$, 因 $|x - y| = |x - y|$, 故 $\langle x, y \rangle R \langle x, y \rangle$, R 自反。

b. 对任意 $\langle x, y \rangle \in A$, $\langle u, v \rangle \in A$, 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, 即 $|x - y| = |u - v|$, 则 $|u - v| = |x - y|$, 从而 $\langle u, v \rangle R \langle x, y \rangle$, R 对称。

c. 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, $\langle u, v \rangle R \langle p, q \rangle$, 即 $|x - y| = |u - v|$, $|u - v| = |p - q|$, 从而 $|x - y| = |p - q|$, 得证 $\langle x, y \rangle R \langle p, q \rangle$ 。R 传递。

综上所述, R 是等价关系。

由定理知由 R 的等价类确定对集合 A 的划分。

$$[\langle 1, 1 \rangle]_R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}; [\langle 1, 2 \rangle]_R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\};$$

$$[\langle 1, 3 \rangle]_R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}; [\langle 1, 4 \rangle]_R = \{\langle 1, 4 \rangle\}。$$

即划分 $\Pi = \{[\langle 1, 1 \rangle]_R, [\langle 1, 2 \rangle]_R, [\langle 1, 3 \rangle]_R, [\langle 1, 4 \rangle]_R\}$ 。

4. (1) $\forall a, b, c \in Q$, 易证 $a * (b * c) = (a * b) * c$, 故 $(Q, *)$ 是半群。因 $a * b = b * a$, $\forall a, b \in Q$, 故 * 可交换。

(2) 设 e 为其单位元, 则应有: $\forall a \in Q$, $a * e = e * a = a$, 即 $a + e - ae = a$, 由 a 的任意性, 有 $e = 0$ 。所以单位元为 0。

(3) 设 a 有逆元 b, 则应有: $a * b = a + b - ab = 0$, 故当 $a \neq 1$ 时, 有逆元为: $a^{-1} = \frac{a}{a-1}$, 当 $a = 1$ 时, 没有逆元。

5. 由 H 非空, 知 $x \cdot H \cdot x^{-1}$ 非空。 $\forall a, b \in x \cdot H \cdot x^{-1}$, 即存在 $h_1, h_2 \in H$ 使得 $a = x \cdot h_1 \cdot x^{-1}$, $b = x \cdot h_2 \cdot x^{-1}$, 有

$$a \cdot b^{-1} = (x \cdot h_1 \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot h_2 \cdot x^{-1})^{-1} = x \cdot h_1 \cdot x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} \cdot h_2^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot (h_1 \cdot h_2^{-1}) \cdot x^{-1},$$

因 H 为子群, 有 $h_1 \cdot h_2^{-1} \triangleq h \in H$, 从而 $a \cdot b^{-1} = x \cdot h \cdot x^{-1} \in x \cdot H \cdot x^{-1}$ 。所以 $x \cdot H \cdot x^{-1}$ 为子群。

6. 证 设 x 有补元 y 和 z, 即 $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$, $x \wedge z = 0$, $x \vee z = 1$, 则

$$y = y \vee 0$$

$$= y \vee (x \wedge z)$$

$$= (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$

由条件 $x \wedge z = 0$

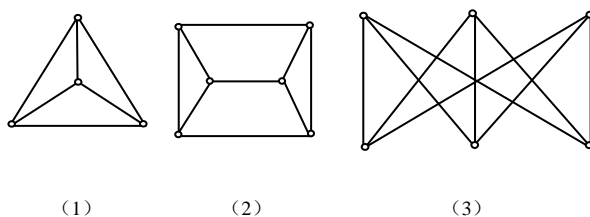
分配律

$$\begin{aligned}
&= 1 \wedge (y \vee z) && \text{由条件 } x \vee y = 1 \\
&= (x \vee z) \wedge (y \vee z) && \text{由条件 } x \vee z = 1 \\
&= z \vee (x \wedge y) && \text{分配律} \\
&= z \vee 0 && \text{由条件 } x \wedge y = 0 \\
&= z
\end{aligned}$$

7. (1) 由于各结点的度数均为 3, 现有 n 个结点, m 条边, 由握手定理知 $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 3 \times n = 2m$, 又 $m = 3n - 6$, 从而 $m = 6$, $n = 4$, 所得无向图如图 (1) 所示, 该图是 4 个结点的简单无向图中边最多的图, 即无向完全图 K_4 , 在同构意义下, 是惟一的。

(2) 若 $n = 6$, 易求得 $m = 9$, 因每个结点的度为 3, 满足这些条件的无向图可以画出两个, 如图 (2)

(3) 所示, 它们显然是不同构的, 其中 (2) 是平面图, (3) 是 $K_{3,3}$, 不是平面图。



8. 计算过程如下表。表中有记号*的数表示相应的结点已具有 P 标号, 该数即是对应结点的 P 标号。

$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$	$d(v_6)$	$d(v_7)$
∞^*	3	9	∞	∞	∞	∞
∞^*	$3^* / v_1$	$5 / v_2$	$10 / v_2$	$4 / v_2$	∞	∞
∞^*		$5 / v_2$	$9 / v_5$	$4^* / v_2$	$13 / v_5$	∞
∞^*		$5^* / v_2$	$9 / v_5$		$13 / v_5$	∞
∞^*			$9^* / v_5$		$11 / v_4$	$17 / v_4$
∞^*					$11^* / v_4$	$15 / v_5$
∞^*						$15^* / v_6$

9. 应该用较短的符号串传输出现频率高的数字, 因而可用 100 乘各数字出现的频率作为权, 求最优二元树, 然后用这样的二元树产生前缀码传输上面给定的数字。具体做法如下: 用 100 乘各频率得权 $w_0 = 30$, $w_1 = 20$, $w_2 = 15$, $w_3 = 10$, $w_4 = 10$, $w_5 = 6$, $w_6 = 5$, $w_7 = 4$ 。将这些权由小到大排列得到 4, 5, 6, 10, 10, 15, 20, 30。求出对应的最优二元树。用所求的最优树产生二元前缀码。带权为 w_i 的树叶对应的符号串就为传输 i 的符号串。数字 i 对应的符号串为

0: 01 1: 11 2: 001 3: 100 4: 101 5: 0001 6: 00000 7: 00001

用这样的符号串传输按上述比例出现的数字最少。

$$\begin{aligned}
&10^4 \times 0.3 \times 2 + 10^4 \times 0.2 \times 2 + 10^4 \times 0.15 \times 3 + 10^4 \times 0.1 \times 3 + 10^4 \times 0.1 \times 3 + 10^4 \times 0.06 \times 4 \\
&+ 10^4 \times 0.05 \times 5 + 10^4 \times 0.04 \times 5 = 27400
\end{aligned}$$

所以传输 10000 个按上述比例出现的数字至少要用 27400 个二进制数字。

10. 本题可用真值表, 也可通过等值演算来确定其主范式, 并给出其为真赋值。

$$\begin{aligned}
\neg(P \rightarrow Q) &\leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \\
&\leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad \text{主析取范式} \\
&\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \\
&\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \quad \text{主合取范式}
\end{aligned}$$

真值表如下。

P	Q	$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

其真赋值为：10, 11。

11. (1) 设 $M(x)$ 表示“ x 是人”， $S(x)$ 表示“ x 要学习”， $W(x)$ 表示“ x 要工作”，则此语句表示为：

$$\forall x (M(x) \rightarrow (S(x) \wedge W(x)))$$

(2) 设 $F(x)$ 表示“ x 犯错误”， $N(x)$ 表示“ x 为人”，则此语句表示为： $\neg \exists x (N(x) \wedge \neg F(x))$

(3) 设 $F(x)$ 表示“ x 聪明”， $M(x)$ 表示“ x 是人”，则此语句表示为： $\exists x (M(x) \wedge F(x)) \wedge \neg \forall x (M(x) \rightarrow F(x))$

12. 论域：全体人的集合。设谓词 $A(x)$ ： x 喜欢步行； $B(x)$ ： x 喜欢坐汽车； $C(x)$ ： x 喜欢骑自行车，则推理形式化为：

前提： $\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$ ； $\forall x (B(x) \vee C(x))$ ； $\neg \forall x C(x)$ ；

结论： $\exists x \neg A(x)$

下面给出证明：

① $\neg \forall x C(x)$	前提引入
② $\exists x \neg C(x)$	①, E
③ $\neg C(c)$	②, ES
④ $\forall x (B(x) \vee C(x))$	前提引入
⑤ $B(c) \vee C(c)$	④, US
⑥ $B(c)$	③, ⑤, I
⑦ $\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$	前提引入
⑧ $A(c) \rightarrow \neg B(c)$	⑦, US
⑨ $\neg A(c)$	⑥, ⑧, T, I
⑩ $\exists x \neg A(x)$	⑨, EG