§ 4.3 积分的极限定理

在关于积分的计算和估计过程中，经常会遇到这样的问题，在什么条件下极限运算和积分运算可以交换顺序？对于正常和广义 Riemann 积分有关这方面的定理，往往涉及到一些过强或不易验证的条件. 然而，对于 Lebesgue 积分有一些很一般条件下的极限定理. 下面将要证明三个重要的定理，即单调收敛定理，**Fatou** 引理和控制收敛定理以及一些推论. 它们是 Lebesgue 积分理论的基本定理. 在现代分析数学中经常用到.

以下设E是$\mathbf{R}^n$的一给定的可测集.

定理 4.11 (Levi 单调收敛定理) 设$\{f_n\}$是E上单调递增的非负可测函数列，f是E上的非负可测函数. 若在E上$f_n \to f$ a.e. 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x. \qquad (4.17)$$

证 不妨设$f_n(x) \to f(x)$处处成立. 由积分的单调性得到

$$\int_E f_n \mathrm{d}x \le \int_E f_{n+1} \mathrm{d}x \le \int_E f \mathrm{d}x, \quad n \ge 1.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x$存在并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x \le \int_E f \mathrm{d}x. \qquad (4.18)$$

反过来, 设$\{g_k\}$是非负简单函数列, 并且$g_k \uparrow f$. 对每个$k \geq 1$, 由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geq g_k(x) \quad (x \in E),$$

与引理 4.1(1)的证明一样(只要将那里的$\{f_n\}$改为非负可测函数列), 可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x \geq \int_E g_k \mathrm{d}x.$$

在上式中令$k\to\infty$得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x \geq \lim_{k\to\infty}\int_E g_k \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x. \qquad (4.19)$$

结合(4.18)和(4.19)两式得到(4.17)式.■

推论 4.4（逐项积分定理） 设$\{f_n\}$是E上的非负可测函数列. 则

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x.$$

证明 令

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \ (n \geq 1), \ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$

则$\{g_n\}$是E上的非负可测函数列, 并且$g_n \uparrow f$. 因此f是可测的. 应用定理 4.11 得到

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_E f_i \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i \mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

推论 4.5 (积分对积分域的可列可加性) 设 f 在 E 上的积分存在, $\{E_n\}$ 是 E 的一列互不相交的可测子集, $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 则

$$\int_E f\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\mathrm{d}x. \tag{4.20}$$

证 由推论 4.4, 我们有

$$\begin{aligned}\int_E f^+\mathrm{d}x&=\int_E\sum_{n=1}^{\infty}f^+\chi_{E_n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f^+\chi_{E_n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+ \mathrm{d}x. \qquad (4.21)$$

类似地有

$$\int_E f^- \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^- \mathrm{d}x. \qquad (4.22)$$

由于 f 的积分存在, 因此 $\int_E f^+ \mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^- \mathrm{d}x$ 至少有一个是有限的. 将(4.21)和(4.22)的两端相减即得

$$\int_E f \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

定理 4.12 (Fatou 引理) 设$\{f_n\}$是E上的非负可测函数列. 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x.$$

证 对每个$n\ge 1$, 令

$$g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x) \quad (x\in E).$$

则$\{g_n\}$是单调递增的, 并且$0\le g_n \le f_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$. 由单调收敛定理得到

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n \mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x.$$ ■

下面的例子说明 Fatou 引理中的不等号是可能成立的.

例 1 对每个自然数 n, 令

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{(0,\,1/n)}(x).$$

则 $\{f_n\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的非负可测函数列, 并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^1).$$

直接计算得到

$$\int_{\mathbf{R}^1} \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}x = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} f_n \mathrm{d}x.$$

例2 设 $f, f_n (n \geq 1)$ 是 E 上的可测函数, $f_n \to f$ a.e. 于 E. 若 $\sup\limits_{n\geq 1} \int_E |f_n| \mathrm{d}x < \infty$, 则 $f \in L(E)$.

证 利用 Fatou 引理得到

$$\int_E |f| \mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n| \mathrm{d}x$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E |f_n| \mathrm{d}x \leq \sup_{n\geq 1} \int_E |f_n| \mathrm{d}x < \infty.$$

故 $f \in L(E)$. ■

定理 4.13（控制收敛定理） 设 $f, f_n (n \geq 1)$ 是 E 上的可测函数，并且存在 $g \in L(E)$，使得

$$|f_n| \leq g \text{ a.e. } (n \geq 1).$$

若在 E 上 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $f_n, f \in L(E)$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

证 由于在 E 上 $|f_n| \leq g$ a.e. $(n \geq 1)$，当 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$ 时，都有 $|f| \leq g$ a.e. 由于 $g \in L(E)$，根据定理 4.3 知道 $f_n, f \in L(E)$. 因为

$$\left|\int_E f_n \mathrm{d}x - \int_E f \mathrm{d}x\right| = \left|\int_E (f_n - f) \mathrm{d}x\right| \leq \int_E |f_n - f| \mathrm{d}x,$$

为证(4.23)式, 只需证一个更强的结论

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\mathrm{d}x = 0. \qquad (4.24)$$

先考虑 $f_n \to f$ a.e. 的情形. 令 $h_n = 2g - |f_n - f|$, 则 $h_n \geq 0$ a.e.$(n \geq 1)$. 对函数列 $\{h_n\}$ 应用 Fatou 引理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_E 2g\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty}\left(2g - |f_n - f|\right)\mathrm{d}x \\ &\leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E \left(2g - |f_n - f|\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_E 2g\mathrm{d}x - \varlimsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\mathrm{d}x = 0$. 这表明(4.24)成立.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\mathrm{d}x = 0. \quad (4.24)$$

再考虑 $f_n \xrightarrow{m} f$ 的情形. 若(4.24)不成立, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\{f_n\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得

$$\int_E |f_{n_k} - f|\mathrm{d}x \geq \varepsilon,\ k \geq 1. \qquad (4.25)$$

由 Riesz 定理, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的一个子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. $(k' \to \infty)$. 由上面所证的结果此时应有

$$\lim_{k'\to\infty}\int_E |f_{n_{k'}} - f|\mathrm{d}x = 0.$$

但这与(4.25)式矛盾. 这表明(4.24)成立. ■

注1 在定理4.13的条件下，我们实际上证明了更强的结论(4.24)式，即 $\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| \mathrm{d}x = 0$. 此时称 $\{f_n\}$ 在 L^1 中收敛于 f (或称平均收敛于 f).

推论 4.6（有界收敛定理） 设 $m(E)<\infty$, $f, f_n(n\geq 1)$ 是 E 上的可测函数，并且存在常数 $M>0$, 使得在 E 上

$$|f_n|\leq M \text{ a.e. } (n\geq 1).$$

若 $f_n \to f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则 $f_n, f\in L(E)$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x.$$

证 当 $m(E)<\infty$ 时，常值函数是可积的. 取 $g\equiv M$, 由控制收敛定理即知推论成立.■

推论 4.7（积分号下求导） 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的实值函数，使得对每个 $y\in[c,d]$, $f(x,y)\in L[a,b]$, 对每个 $(x,y)\in D$, $f_y'(x,y)$ 存在，并且存在 $g\in L[a,b]$ 使得

$$\left|f_y'(x,y)\right|\le g(x),\ (x,y)\in D. \tag{4.26}$$

则函数 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可导，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4.27}$$

证 设 $y\in[c,d]$. 任取数列 $\{h_n\}$, 使得 $\{y+h_n\}\subset[c,d]$, $h_n\to 0$ 并且 $h_n\neq 0$. 令

$$\varphi_n(x)=\frac{f(x,y+h_n)-f(x,y)}{h_n}\quad (x\in[a,b]).$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f_y'(x,y)\quad (x\in[a,b]).$$

由微分中值定理和(4.26)式, 当 $x\in[a,b]$ 时, 对每个 $n\geq 1$, 有

$$|\varphi_n(x)|=\left|\frac{f(x,y+h_n)-f(x,y)}{h_n}\right|=\left|f_y'(x,y+\theta(y_n-y))\right|\leq g(x)$$

(其中 $0<\theta<1$).

对函数列$\{\varphi_n\}$利用控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I(y+h_n)-I(y)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_a^b[f(x,y+h_n)-f(x,y)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x.$$

这表明$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$在点$y$处可导，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x. \quad ■$$

补充例 设对每个 $t>0$, $f(x,t)$ 是 E 上的可测函数. 又设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 并且

$$\lim_{t\to+\infty} f(x,t) = f(x) \quad (x\in E). \tag{1}$$

若存在 $g\in L(E)$ 使得

$$|f(x,t)| \le g(x) \text{ a.e. } (t>0). \tag{2}$$

则 $f(x,t)$, $f(x)$ 在 E 上可积, 并且

$$\lim_{t\to+\infty}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(x,t)=f(x)(x\in E).\ (1)\quad |f(x,t)|\le g(x)\ \text{a.e.}\ (t>0).\ (2)$$

证 由(2)式知道对每个$t>0$, $f(x,t)\in L(E)$. 又由(2)式得到$|f(x)|\le g(x)$ a.e. 于是$f(x)\in L(E)$.

任取数列$\{t_n\}$, 使得$t_n>0$并且$t_n\to+\infty$. 由于(1)式, 根据归结原则, 有$\lim_{n\to\infty} f(x,t_n)=f(x)\ (x\in E)$. 由于(2)式, 有

$$|f(x,t_n)|\le g(x)\ \text{a.e.}\ \ (n\ge 1).$$

对函数列$f(x,t_n)$利用控制收敛定理, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x.$$

再次利用归结原则, 这表明$\lim_{t\to+\infty}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x.$ ■