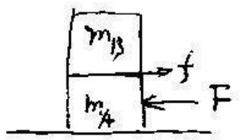
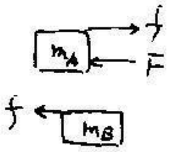
第 章

2-1. A受力 $F-f=m_A a_A$. $f=\mu m_B g$



B在水平方向受力是A的摩擦力，大小等于 f 方向相反.



$f=\mu m_B g = m_B a_B$. $a_B=\mu g$.

A.B间出现相对运动应有 $a_A \geq a_B$.

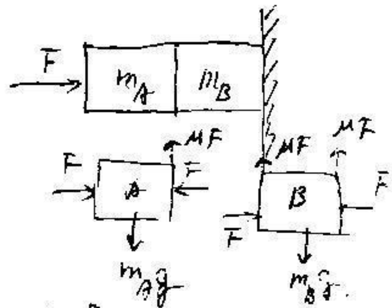
∴ $F-f = F-\mu m_B g = m_A a_A \geq m_A a_B \geq m_A \mu g$

$F-\mu m_B g > m_A \mu g$ $F > \mu(m_A+m_B)g$

2-2. 水平方向 A.B受力平衡 $F-F=0$

在垂直方向：A不滑下有 $\mu F = m_A g$.

B不滑下 $2\mu F = m_B g$



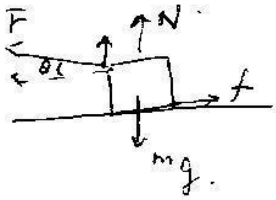
两式相加： $3\mu F=(m_A+m_B)g$

此时A.B均不滑下，若

$F > \frac{1}{3\mu}(m_A+m_B)g$ 则也不会滑下。

2-3 水平 $F\cos\theta - f = ma$.

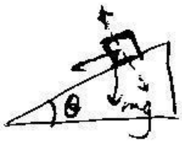
垂直： $F\sin\theta + N = mg$. $f=\mu N$.



$F\cos\theta - \mu(mg-F\sin\theta) = ma$.

$\frac{dF}{d\theta}\cos\theta - F\sin\theta + \mu F\cos\theta + \mu\frac{dF}{d\theta}\sin\theta = 0$. $\frac{dF}{d\theta} = \frac{F(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{\cos\theta+\mu\sin\theta} = 0$

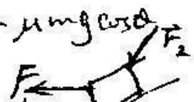
∴ $\mu = \mathrm{tg}\,\theta$ $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\mu$.



2-4 ① 重力mg 沿斜面的分力是 $mg\sin\theta$. 有向下滑的趋势

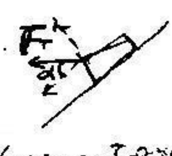
摩擦力 f 与上力相反 $f=N\mu=\mu mg\cos\theta$.

当没有力作用时：下滑的力是 $mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta$ 若使向下运动时需加力.



② 若作用一力 $\vec{F}$. 有两种方式如图：

显然，当向下运动时，F_2要大于F_1，所以采用F_1的方式加力.



$\vec{F}$分解为 向斜面：$F\cos\alpha$，竖直向上 $F\sin\alpha$.

向下的力共有 $F\cos\alpha + mg\sin\alpha$，而向上的摩擦力，$\mu(mg\cos\theta - F\sin\alpha)$

当 $(F\cos\alpha + mg\sin\theta) > (\mu mg\cos\theta - \mu F\sin\alpha)$ 时才运动

$$F > \frac{\mu mg\cos\theta - mg\sin\theta}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

因无α时静止，∴必有 $\mu mg\cos\theta > mg\sin\theta$

$\alpha = 0$，$F = \mu mg\cos\theta - mg\sin\theta$，但不一定最小。

$\alpha = \frac{\pi}{2}$，不合理。

求F最小：$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{(\mu mg\cos\theta - mg\sin\theta)(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2} = 0$

$\alpha = 45°$，

$F = \frac{1}{2}(\mu mg\cos\theta - mg\sin\theta)$，最小值

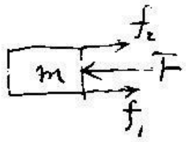
2-5.

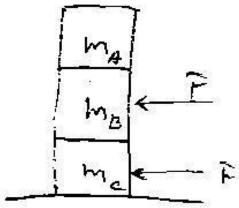
① 最下是一块C

C与地之间摩擦力为 f_1，

B与C之间 —— f_2

A与B —— f_3





若C与(AB)之间有相对运动趋势：

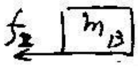
$f_1 = 3\mu mg$，$f_2 = 2\mu mg$

则 $F - f_1 - f_2 = ma_c$，$F - 5\mu mg = ma_c$

(i) 若A、B之间不出现相对运动 $a_A = a_B$

当用F推C时，一种可能是 m_B 跟着一起走，m_B 受力是 f_2

$f_2 = 2ma_B = 2\mu mg$，即有 $a_B = \mu g$



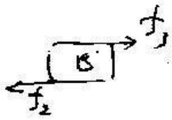
要使C抽出，一定要 $a_c > a_B$，即 $a_c > \mu g$

$\therefore F - 5\mu mg = ma_c > m\mu g$

于是 $F > 6\mu mg$

(ii) 若A、B间出现相对运动 $a_A \neq a_B$

$f_3 = \mu mg$，对B：$f_2 - f_3 = \mu mg = ma_B$



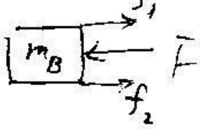
$a_B = \mu g$，而对A $f_3 = \mu mg = ma_A$，$a_A = \mu g$

$\therefore a_A = a_B$，即A、B之间不可能出现相对运动

② $F - f_1 - f_2 = ma_B$ ①

$f_1 = ma_A$ ②

$f_2 - f_3 = ma_c$ ③



$f_1 = \mu mg$ ④, $f_2 = 2\mu mg$ ⑤, $f_3 \le 3\mu mg$ ⑥.

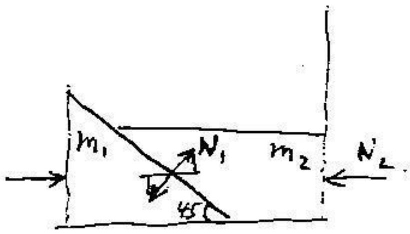
由③、⑥可知 $a_C = 0$，$f_3 = f_2 = 2\mu mg$.

为使B抽出应有 $a_B > a_A$.

即 $F - \mu mg - 2\mu mg = m a_B > m a_A = \mu mg$

$\therefore F \ge 4\mu mg$.

2-6. m_1 向右运动 水平方向.



受力：F，$-N_1\cos45°$

水平方向运动方程：$F - N_1\cos45° = m_1 a_1$

m_2 竖直向上运动，

受力 $N_1\sin45°$ 向上，$m_2 g$ 向下.

竖直方向运动方程：$N_1\sin45° - m_2 g = m_2 a_2$.

约束：m_1 向右移动的距离与 m_2 向上升的距离相等.

因为夹角为 45°.

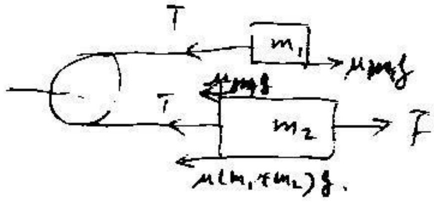
$\therefore a_1 = a_2 = a$.

$\therefore F - m_2 g = (m_1 + m_2) a$

$$a = \frac{280 - 20\times 9.8}{(20+15)} = 2.4\text{米/秒}^2 \quad a_1 \rightarrow, \ a_2 \uparrow$$

$$N_1 = \frac{m_2(a+g)}{\sin45} = 345\,N.$$

2-7. m_1: $T - \mu m_1 g = m_1 a$.



m_2: $F - T - \mu m_1 g - (m_1+m_2)g = m_2 a$.

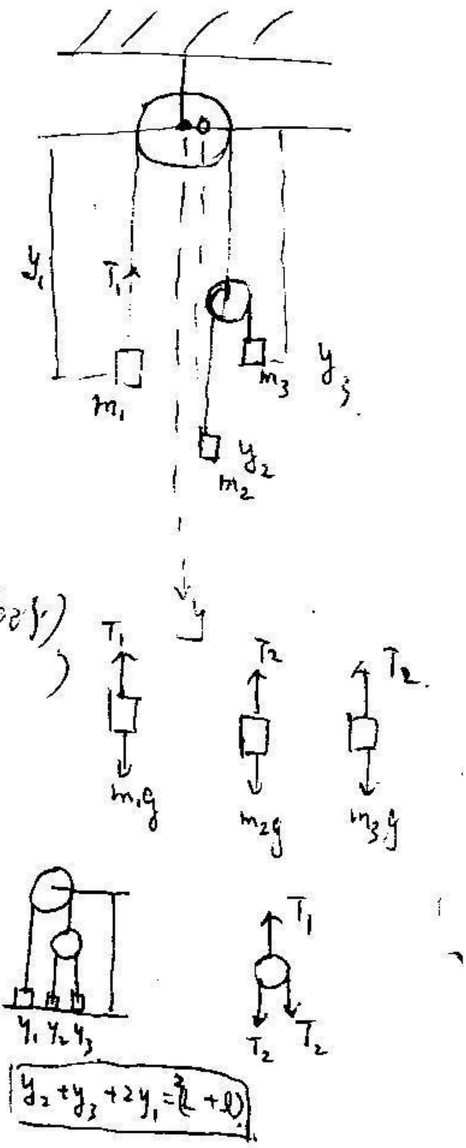
$$a = \frac{F - 2\mu m_1 g}{(m_1+m_2)} - \mu g$$

$$T = \frac{m_1(F - 2\mu m_1 g)}{m_1+m_2}.$$

2-8. 取定滑轮为参考点 O. y 向下为正.

m_1, m_2, m_3 的坐标分别为 y_1, y_2, y_3

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \qquad ①$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad ②$$
$$m_3 g - T_2 = m_3 a_3 \qquad ③$$
$$T_1 = 2T_2 \qquad ④$$



a_1, a_2, a_3, T_1, T_2 共5个未知数, 4个方程,

约束: 定滑轮绳长为 L (除去与轮接触部分)

动滑轮绳长为 l (———)

则约束 $y_2+y_3+2y_1=2(L+l)$.

$$\therefore \ddot{y}_2+\ddot{y}_3=-2\ddot{y}_1$$

$$\therefore 2a_1+a_2+a_3=0 \qquad ⑤$$

已知 $m_1=3\,kg$, $m_2=2\,kg$, $m_3=1\,kg$

联立解方程 ①——⑤ 得.

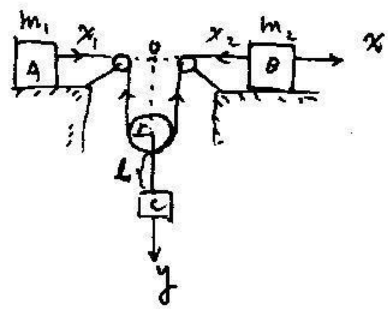
$$a_1=\frac{1}{17}g,\quad a_2=\frac{5}{17}g,\quad a_3=\frac{-7}{17}g.$$

$$T_1=\frac{48}{17}N.\quad T_2=\frac{24}{17}N.$$

2-9. A(m_1) 坐标 $-(r+x_1)$

B.(m_2) .. $(r+x_2)$

C.(m_3) ... $y=\frac{1}{2}(l-\pi r-x_1-x_2)+l_0$.



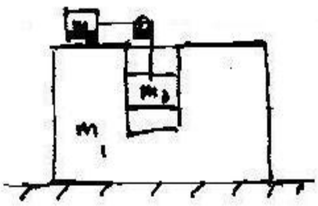
$$\therefore a_1=-\ddot{x}_1,\quad a_2=\ddot{x}_2\quad a_3=\ddot{y}=-\frac{1}{2}(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2).$$

$$T-\mu m_1 g=m_1 a_1=-m_1\ddot{x}_1$$
$$\mu m_2 g-T=m_2 a_2=m_2\ddot{x}_2$$
$$m_3 g-2T=m_3\ddot{y}=-\frac{1}{2}m_3(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2).$$

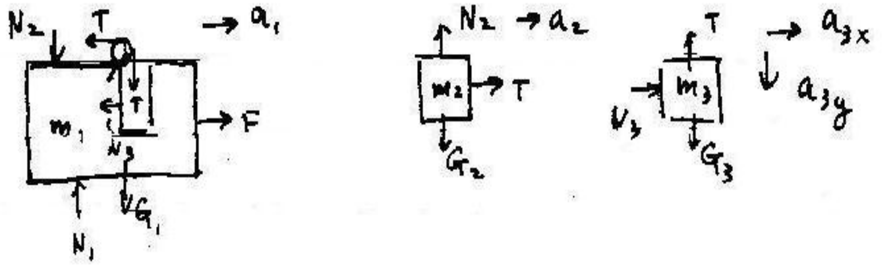
解方程组即可得出结果

2-10题、解：

(1)



各物体受力如图示



∵ m_2、m_3 相对 m_1 静止，∴ m_2 的加速度 a_2 和 m_3 的水平加速度 a_{3x} 与 m_1 的加速度 a_1 相同。

各物体运动方程为：m_1：$F - T - N_3 = m_1 a_1$

m_2：$T = m_2 a_2 = m_2 a_1$

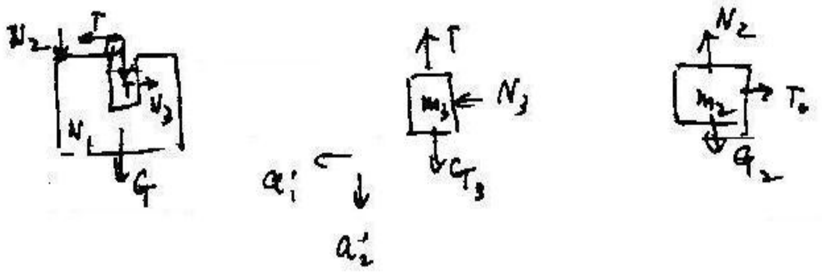
m_3：$N = m_3 a_{3x} = m_3 a_1$ ， $m_3 g - T = m_3 a_{3y} = 0$

联立解得 $F = m_3 g + \frac{m_3}{m_2}(m_1+m_2)g = (m_1+m_2+m_3)\frac{m_3}{m_2}g$

(2) 若 $F=0$ ， m_1、m_2、m_3 在系统水平方向的合外力 $=0$。

此时 a_2、a_3 与 a_1 不相等，此时，m_2 向右运动，m_1 向左运动，

此时受力： N_3 反向。



各物体运动方程：

m_1：$T - N_3 = m_1 a_1$

m_2：$T = m_2 a_2$

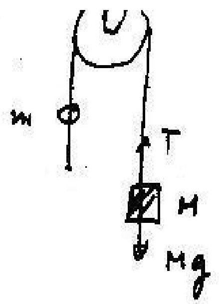
m_3：$N_3 = m_3 a_{3x}$ ， $m_3 g - T = m_3 a_{3y}$

又∵ $a_{3x} = a_1$ $a_{3y} = a_2 - a_1$

即有 $T - N_3 = m_1 a_1$ ， $T = m_2 a_2$ ， $N_3 = m_3 a_1$ ， $m_3 g - T = m_3(a_2 - a_1)$

联立解得： $a_1 = \frac{m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 2 m_2 m_3 + m_3^2}$

2-11. 解：以M为参考系，小环受力：重力 mg 向下，



摩擦力 f 向上，惯性力 $F_0 = m a_M$ 向下.

$$\therefore \quad m a' = m a_M + mg - f \qquad ①$$

而 $$M a_M = Mg - f \qquad ②$$

故 $$a_M = g - \frac{f}{M} \qquad ③ \to ①式 \quad m a' = m\left(g - \frac{f}{M}\right) + mg - f$$

$$= 2mg - \frac{mf}{M} - f = 2mg - \left(\frac{m+M}{M}\right) f$$

$$\therefore \quad \frac{(m+M)}{M} f = 2mg - ma' \qquad f = \frac{M}{(m+M)}(2mg - ma')$$

故 $$f = \frac{mM}{(m+M)}(2g - a')$$

2-12 解：

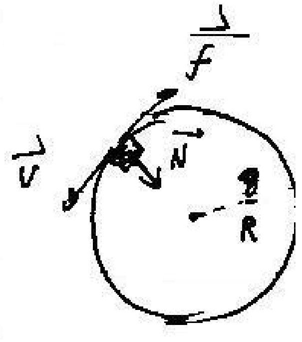
取自然坐标系，$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\therefore \quad m a_\tau = m\frac{dv}{dt} = -f \qquad 而 \quad f = \mu N \qquad \therefore \quad m\frac{dv}{dt} = -\mu N$$

$$m a_n = m\frac{v^2}{R} = N \qquad 故有 \quad m\frac{dv}{dt} = -\mu m \frac{v^2}{R}$$

整理得：
$$\frac{dv}{dt} = -\mu\frac{v^2}{R} \qquad 或 \qquad \frac{dv}{v^2} = -\mu\frac{dt}{R}$$



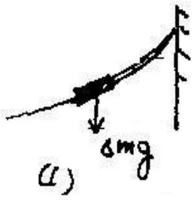
两边积分得：
$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'^2} = -\frac{\mu}{R}\int_{t=0}^{t} dt'$$

得：
$$-v^{-1}\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{\mu}{R} t \qquad 故 \qquad R\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \mu t$$

$$\therefore \quad v(t) = \frac{R v_0}{\mu v_0 t + R}$$

又 $$s = \int_{t=0}^{t} v\,dt = \int_{t=0}^{t} \frac{R v_0}{\mu v_0 t + R}\,dt = \frac{R}{\mu}\ln\left(\frac{\mu v_0}{R} t + 1\right)$$

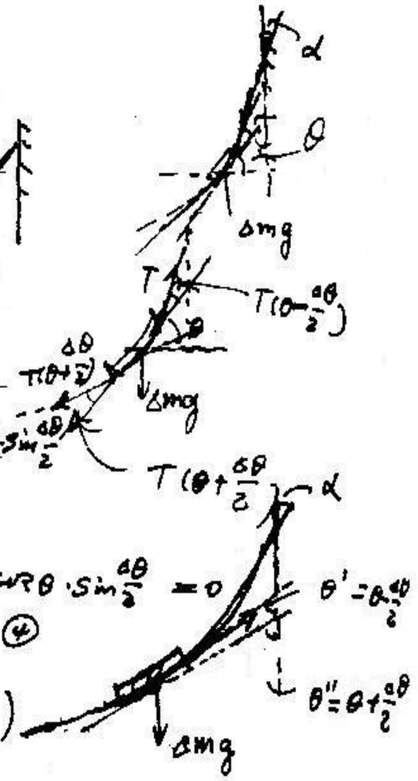
2-13 解：考虑任一绳微元，$\Delta m = \Delta l\lambda = \lambda\Delta l$



Δm 微元的平衡方程

$$T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)-T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)=\Delta mg \quad (1)$$

$$T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)-T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)=0 \quad (2)$$



①式可变为：$\left(T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)-T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)\cos\theta\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\left[T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)+T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]\sin\theta\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}$

$= \Delta mg$ ③

②式可变为：$\left[T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)-T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]\sin\theta\cdot\cos\frac{\Delta\theta}{2}-\left[T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)+T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]\cos\theta\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}=0$ ④

考虑一级近似 $\cos\frac{\Delta\theta}{2}\simeq 1 \quad \sin\frac{\Delta\theta}{2}\simeq\frac{\Delta\theta}{2}$

也有 $T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)-T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\doteq -dT$ （以 $\Delta\theta$ 增加的方向为正）

$T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)+T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\doteq 2T$

则③、④变为 $-dT\cos\theta+2T\sin\theta\cdot\frac{\Delta\theta}{2}=\Delta mg$ ⑤

$-dT\sin\theta-2T\cos\theta\frac{\Delta\theta}{2}=0$ ⑥

亦即

$-\cos\theta\, dT+\sin\theta\, T\,d\theta=dmg$

$-\sin\theta\, dT-\cos\theta\, T\,d\theta=0$ 亦即 $\frac{dT}{T}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=-\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$

两边积分得 $\ln T=\ln K\cdot\frac{1}{\sin\theta}$

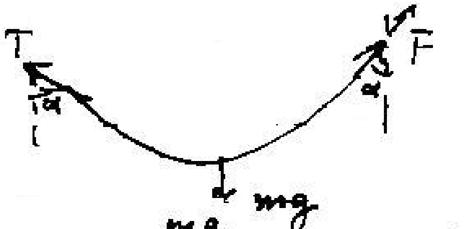
令 $T=\frac{K}{\sin\theta}$ K是积分常量

当 $\theta=\alpha$ 时 $T=\frac{mg}{2\cos\alpha}$ （端点处）

$\therefore \quad K=\frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha \quad . \quad T=\frac{m}{2\sin\theta}\operatorname{tg}\alpha$

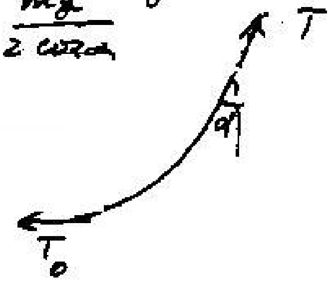
在中点处：$\theta=\frac{\pi}{2} \qquad T=\frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha$

本题也可以这样做.



求端点处张力:

$\because\ 2T\cos\alpha = mg \qquad \therefore\ T=\dfrac{mg}{2\cos\alpha}$



求中点张力 T_0

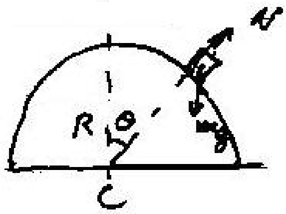
考虑半截绳, 它有.

$T\sin\alpha = T_0$

$\therefore\ T_0=\dfrac{mg}{2\cos\alpha}\cdot\sin\alpha=\dfrac{mg}{2}\,tg\alpha$

2-14. 取自然坐标系.

m受力 $\vec{F}=F_\tau\vec{\tau}+F_n\vec{n}$



$F_\tau = mg\sin\theta = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$ ①

$F_n = mg\cos\theta - N = m\dfrac{v^2}{R}$, ②

$\because\ v=R\dot\theta \qquad \therefore\ \dfrac{dv}{dt}=R\ddot\theta$

①、② 变为 $\begin{cases} g\sin\theta = R\ddot\theta \rightarrow \dfrac{g}{R}\sin\theta=\ddot\theta \\ \dfrac{g}{R}\cos\theta-\dfrac{N}{mR}=\dot\theta^2 \end{cases}$

对①两边积分得 $\dfrac{g}{R}\sin\theta=\dfrac{d\dot\theta}{dt}=\dfrac{d\dot\theta}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\dot\theta\dfrac{d\dot\theta}{d\theta}$

有 $\dfrac{g}{R}\sin\theta\,d\theta=\dfrac{1}{2}d\dot\theta^2$ 积分得到

$$\int_{\theta=0}^{\theta}\frac{g}{R}\sin\theta\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{2}\,d\dot\theta^2$$

$\theta_0=0$

有 $-\dfrac{g}{R}\cos\theta+\dfrac{g}{R}\cos\theta_0=\dfrac{g}{R}(1-\cos\theta)=\dfrac{1}{2}\dot\theta^2$

或 $$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta) \qquad ③$$

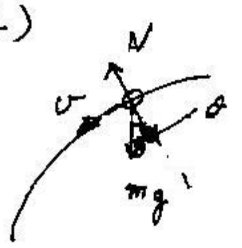
当 m 脱离圆柱时 由(2)式 $N=0$ 此时 $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\cos\theta_c$

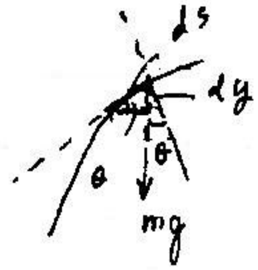
代入③式 $$\frac{g}{R}\cos\theta_c = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta_c)$$

得 $\cos\theta_c = 2 - 2\cos\theta_c$ 　即 $3\cos\theta_c = 2$ 　$\therefore \cos\theta_c = \frac{2}{3}$

或 $\theta_c = \cos^{-1}\frac{2}{3}$

2-16.解：∵是光滑曲线，∴曲线对质点的约束是光滑约束，约束力的方向沿曲线的切线的垂向。(与运动轨道的切向垂直)





质点的运动方程为（自然坐标系）

切向： $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta \qquad ①$

法向： $m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\theta - N \qquad ②$

得 $\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$ 　而 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = g\sin\theta$

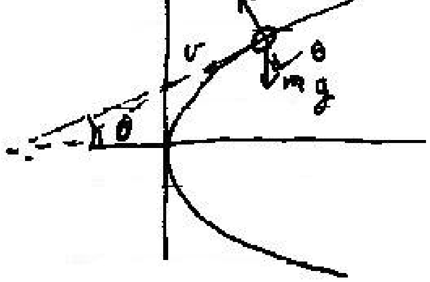
$\therefore$ $v\,dv = g\sin\theta\, ds$ 　注意到 $ds\cdot\sin\theta = -dy$

$\therefore$ 有 $v\,dv = -g\,dy$ 　两边积分得

$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = g(y+y_0)$ 　得 $v^2 = 2gy - 2gy_0 + v_0^2 = 2g(y-y_0)+v_0^2$

令 $h=(y-y_0)$ 则 $v^2 = 2gh + v_0^2 = 2gh + v_0^2$

2-18. 采用自然坐标系。



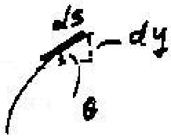
小球的运动方程为

法向： $m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\theta - N \qquad (1)$

切向： $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta \qquad (2)$

$\because \quad \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds} \qquad \therefore$ ③ $\rightarrow \; mv\frac{dv}{ds}=mg\sin\theta$

又∵ $\sin\theta=-\frac{dy}{ds}$ （注意：dy 为负，见右图）



∴ 有 $\quad v\frac{dv}{ds}=-g\frac{dy}{ds}$ 　即 $\quad v\,dv=-g\,dy$

积分可得：

$$v^2=v_0^2+2gy=v_0^2+2g(y_0-y)=2g(y_0-y)\;,\;(v_0=0)$$

又∵ 脱离点：$N=0$ （1）为 $\quad \frac{2g(y_0-y)}{\rho}=g\cos\theta$

或 $\quad 2g(y_0-y)=\rho g\cos\theta \quad$ or $\quad 2(y_0-y)=\rho\cos\theta \qquad$ ④

$\because \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\theta}} \quad$ 而 $tg\theta=\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

而 $\quad \frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$

计算：由 $y^2=2x$ ， $\quad y'=\frac{1}{y} \quad ,\; y''=-\frac{1}{y^2}y'=-\frac{1}{y^3}$

$\therefore \quad \left|\frac{1}{\rho}\right|=\frac{\left|-\frac{1}{y^3}\right|}{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} \quad , \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}}=\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}=y\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}$

代入④ $\quad 2(y_0-y)=(1+y^2)^{3/2}\cdot y\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}=y(1+y^2)=y^3+y$

代入 $y_0=2$ 得 $\qquad y^3+y=4-2y \quad$ or $\quad y^3+3y-4=0$

解 $\qquad (y-1)(y^2+y+4)=0$

$y=1$ 是一个解．由 $y^2=2x$ 得 $x_1=\frac{1}{2}$ 　故 $\begin{matrix}x_1=\frac{1}{2}\\ y=1\end{matrix}$ 是一个解

其余解不是实数解，舍去。

2-19．由公式 $\quad T_1=T_2e^{\mu\theta} \quad$ 得 $\quad T_2=T_1e^{-\mu\theta}$

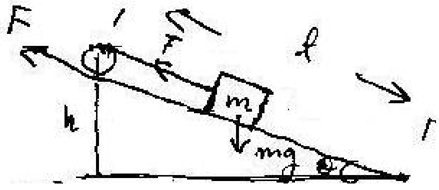
本题 $\quad T_1=mg\sin\varphi \quad ,\; \theta=2\pi\times5=10\pi \quad g(=10)\;\mu=0.25$

$\therefore \quad T_2=mg\sin\varphi\, e^{-0.25\times10\pi}=2000\times10^{3}\times\frac{1}{2}\,e^{-2.5\pi}=1000000e^{-2.5\pi}\doteq390N$

2-19题：

[解] ．绳子张力为T

则有 $T = mg\sin\theta = mg\dfrac{h}{l} = \dfrac{mg}{20}$



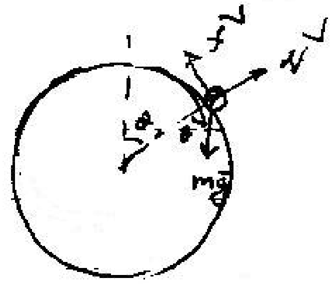
设F为拉力，它要与T平衡

则有 $F = Te^{-\mu\theta} = \dfrac{mg}{20}\cdot e^{-0.25\times 10\pi}$

2-20 本题不考虑石块对轮子运动影响．取轮心为参照系（仍平动·但是惯性系）

设石块随轮转过θ时，受力情况

重力 $m\vec{g}$，法向反力 $\vec{N}$ 和静摩擦力 $\vec{f}$



运动方程为：（在轮心参考系下）

切向： $mg\sin\theta - f = 0$ ①

法向： $mg\cos\theta - N = m\omega^2 R$ ②

当θ增大时，$mg\sin\theta$ 增加，所需摩擦增大．

当 $mg\sin\theta$ 达到最大静摩擦力时，石块开始滑动，此时

$f = \mu N = N$ ∴ $N = mg\sin\theta$

由②式 $mg\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = m\omega^2 R$ 即 $\cos\theta_0 - \sin\theta_0 = \omega^2 R$

即 $\cos\theta_0\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\theta_0\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\omega^2 R}{g}$

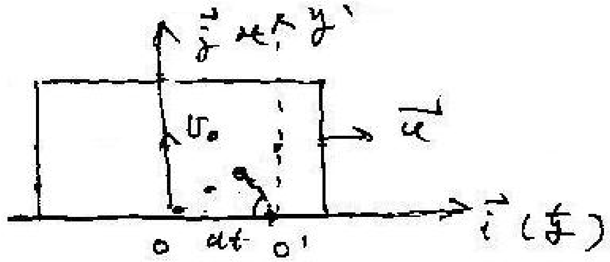
即有 $\cos(\theta_0 + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\omega^2 R}{g}$ ∵ $u = R\omega$

有 $\cos(\theta_0 + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{u}{Rg}$

or $\theta_0 = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{u^2}{Rg} - \dfrac{\pi}{4}$

滚过的距离． $s = R\theta_0 = R\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{u^2}{Rg} - \dfrac{R\pi}{4}$

2-21 题之[解]



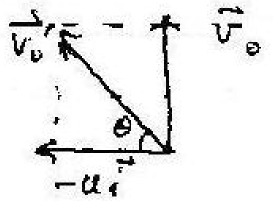
取x轴向东，y轴向北，木块射出处为原点O，xOy为静系。

取木板为动系x'O'y'，t=0时二者重合

在动坐标系：木块相对木板的速度为 $\vec{v}_0'$

木块的相对地面速度为 $\vec{v}$

木板的平动速度为 $\vec{V}_0$



已有 $\vec{v}_0' = \vec{v} - \vec{V}_0$ 而 $\vec{V}_0 = u\vec{i}$，$\vec{v} = v_0\vec{j}$

即有 $\vec{v}_0' = -u\vec{i} + v_0\vec{j}$

木块相对木板运动时摩擦力总与运动方向相反：$-\dfrac{\vec{v}_0'}{|\vec{v}_0'|}$（方向）

∴ 木块所受的摩擦力为 $\vec{f} = -\mu mg\dfrac{\vec{v}_0'}{|\vec{v}_0'|} = m\vec{a}'$

$\vec{a}' = -\mu g\dfrac{\vec{v}_0'}{|\vec{v}_0'|}$ ∴ $a' = \mu g$ 即木块在木板上作匀减速直线运动

在直线情况下：木块在木板上运动的路程：

$$s = v_0' t - \frac{1}{2}a' t^2 = v_0' t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

在木板上停止的条件是：$v' = v_0' - \mu g t = 0 \to t = \dfrac{v_0'}{\mu g}$

$$\therefore\quad s = v_0'\frac{v_0'}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0'}{\mu g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0'^2}{\mu g}$$

∴ 停止在S'系中的坐标为

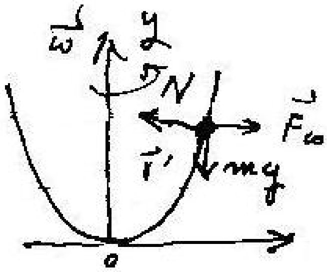
$$x' = -s\cos\theta = -\frac{v_0'^2}{2\mu g}\frac{u}{v_0'} = -\frac{v_0' u}{2\mu g}$$

$$y' = s\sin\theta = \frac{v_0'^2}{2\mu g}\frac{v_0}{v_0'} = \frac{v_0' v_0}{2\mu g}$$

在S系中的坐标：$x = x' + ut = -\dfrac{v_0' u}{2\mu g} + \dfrac{u v_0'}{\mu g} = \dfrac{u v_0'}{2\mu g} = \dfrac{u\sqrt{u^2 + v_0^2}}{2\mu g}$

$$y = y' = \frac{v_0\sqrt{u^2 + v_0^2}}{2\mu g}$$

2-22 解：以抛物线为参照系(S)建立坐标系oxy，

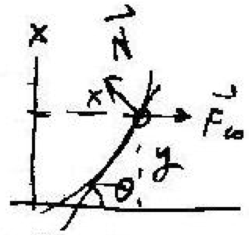


小环相对抛物线静止，则小环相对地面作匀速圆周运动，

m受力：重力 $m\vec g = -mg\vec j$

支持力：$\vec N = N_x\vec i + N_y\vec j = -N\sin\theta\,\vec i + N\cos\theta\,\vec j$

惯性力：$\vec F_\omega = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,')$



∵ $\vec\omega = \omega\vec j$，$\vec r\,' = x\vec i + y\vec j$ ∴ $\vec F_\omega = mx\omega^2\vec i$

∴有：$mx\omega^2 - N\sin\theta = 0 \Rightarrow N\sin\theta = mx\omega^2$ ①

$N\cos\theta - mg = 0$ $N\cos\theta = mg$ ②

①÷② 得 $\tan\theta = \frac{x\omega^2}{g}$ 而 $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = 2ax$

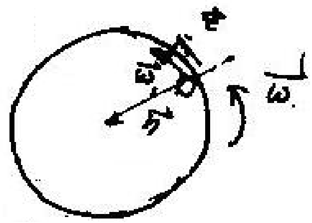
∴有 $2ax = \frac{x\omega^2}{g}$ 即 $\omega^2 = 2ag$ $\omega = \sqrt{2ag}$

2-23. 由科氏公式（以圆盘为参考系，则转动角速度 $\vec\omega = \omega\vec k$）

$\vec F_\omega = -\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec R)\cdot m = -m\omega^2 R\,\vec n$ （方向朝外）

$\vec F_{co} = -2m\vec\omega\times\vec v\,'$ 而 $\vec v\,' = R\omega_r\vec\tau$ （ω_r为质点相对圆盘的角速度）

令 $\vec v\,' = R\omega\vec\tau$ $\vec\omega = \omega\vec k$

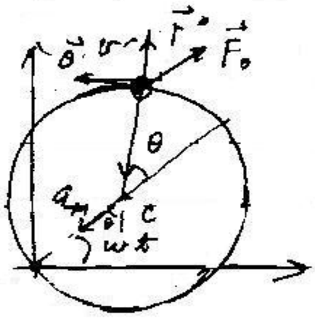


∴ $\vec F_{co} = -2m\omega\vec k\times R\omega\vec\tau = -2mR\omega^2\vec n$，向外

$\vec F_{真实} = 4R\omega^2 m$，向内.

2-25题解：

先以大环为参照系，小环沿大环圆周作圆周运动，
相对大环的速度为 v'



∵ 大环绕O点转动，即 C 点（圆心）绕O作匀速转动，
∴ C点的有加速度，$a_M = R\omega^2$ 方向是指向O点。

现以大环为参照系，极点选在 C 点，建立极坐标 $\vec{r}^0, \vec{\theta}^0$ 如图

则小环受力：支持力 $\vec{N} = N\vec{r}^0$ （∵是光滑约束）

牵连惯性力 $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_M$

而 $\vec{a}_M = -a_M\cos\theta\,\vec{r}^0 + a_M\sin\theta\,\vec{\theta}^0$

∴ $\vec{F}_0 = m a_M\cos\theta\,\vec{r}^0 - m a_M\sin\theta\,\vec{\theta}^0$

又有：$m\vec{a}'_m = m a'_{mr}\vec{r}^0 + m a'_{m\theta}\vec{\theta}^0$
$= N\vec{r}^0 + m a_M\cos\theta\,\vec{r}^0 - m a_M\sin\theta\,\vec{\theta}^0 + \vec{F}_\omega + \vec{F}_{co}$

$F_\omega = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = mR\omega^2\vec{r}^0$, $\vec{F}_{co} = 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2m\omega v'\vec{r}^0$

考虑切向($\vec{\theta}^0$)：$m a'_{m\theta} = -m a_M\sin\theta$

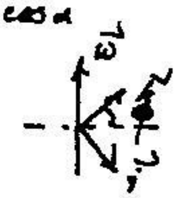
∵ $a'_{m\theta} = \frac{dv'}{dt}$, $a_M = \frac{v_0^2}{R} = R\omega^2$

∴ 有 $R\omega^2\sin\theta + \frac{dv'}{dt} = 0$

又∵ $v' = R\dot{\theta}$ ∴ $\frac{dv'}{dt} = R\ddot{\theta}$

∴ 有 $R\ddot{\theta} + R\omega^2\sin\theta = 0$ 即 $\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$

2-26. 解：由运动方程：初始条件：$t=0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0\cos\alpha$, $\dot{z}_0 = v_0\sin\alpha$



由 $\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\varphi \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\varphi \end{cases}$ 见讲义 2-5-1 式 ①

积分得：$\dot{x} - \dot{x}_0 = 2\omega(y - y_0)\sin\varphi \Rightarrow \dot{x} = 2\omega y\sin\varphi$

$\dot{y} - \dot{y}_0 = -2\omega[(z - z_0)\cos\varphi + (x - x_0)\sin\varphi] \Rightarrow \dot{y} =$

$\Rightarrow \dot{y} = -2\omega[z\cos\varphi + x\sin\varphi] + v_0\cos\alpha$

$\dot{z} - \dot{z}_0 = -gt + 2\omega(y - y_0)\cos\varphi \Rightarrow \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\varphi + v_0\sin\alpha$

②

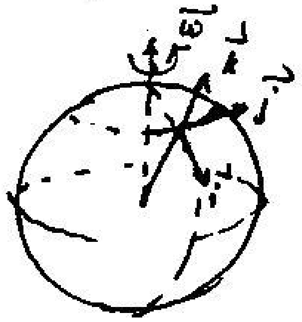
② 对④式 忽略含 ω^2 之项，可得

$$\ddot{x} = 2\omega v_0 \cos\alpha \sin\varphi$$

$$\ddot{y} = -2\omega\left[(-gt + v_0\sin\alpha)\cos\varphi\right] = 2\omega g t\cos\varphi - 2\omega v_0 \sin\alpha\cos\varphi$$

$$= 2\omega g t\cos\varphi - 2\omega v_0 \sin\alpha\cos\varphi$$

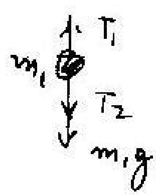
$$\ddot{z} = -g + v_0\cos\alpha\, 2\omega\cos\varphi = -g + 2\omega v_0\cos\alpha\cos\varphi$$

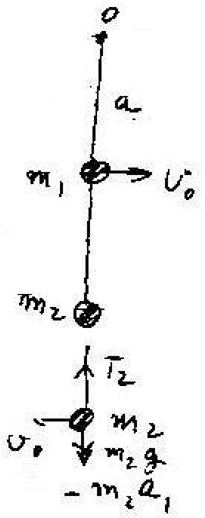


2-27题[略]：该题是直接应用 讲义 P94 的结论和方法来证

2-28题[解]：先考虑 m_1：以悬挂点O为参照

m_1获得水平速度 v_0，可视为它绕O点作圆周运动。





应有 $T_1 - T_2 - m_1 g = m_1\dfrac{v_0^2}{a} = m_1 a_1$ （a_1 方向向上）

$\therefore \quad a_1 = \dfrac{v_0^2}{a}$

考虑 m_2：在碰撞瞬时 m_2速度为0，但若以 m_1为参照

m_2则以 v_0速度向左边摆动，绕着 m_1点作圆周运动。

m_2受力：重力 $m_2 g$ 向下、T_2张力向上、惯性力 $F_0 = -m_2 a_1$ 向下

$\therefore$有 $T_2 - m_2 g - m_2 a_1 = m_2\dfrac{v_0^2}{b}$

$$T_2 = m_2\left(\frac{v_0^2}{b} + a_1 + g\right) = m_2\left(\frac{v_0^2}{b} + \frac{v_0^2}{a} + g\right)$$

$\therefore$

$$T_1 = m_1\frac{v_0^2}{a} + m_1 g + T_2$$

$$= (m_1+m_2)g + (m_1+m_2)\frac{v_0^2}{a} + m_2\frac{v_0^2}{b}$$