§ 4.5　可积函数的逼近性质

以下设E是$\mathbf{R}^n$的一给定的可测集.

设$\mathcal{C}$是$L(E)$的一个子集. 若对任意$f \in L(E)$和$\varepsilon > 0$, 存在$g \in \mathcal{C}$ 使得 $\int_E |f - g| \mathrm{d}x < \varepsilon$. 则称可积函数可以用$\mathcal{C}$中的函数在$L(E)$中逼近. 这等价于对任意$f \in L(E)$, 存在$\mathcal{C}$中的序列$\{g_k\}$使得

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f - g_k| \mathrm{d}x = 0.$$

我们将看到可积函数可以用比较简单的函数, 特别是用连续函数在$L(E)$中逼近.

定理 4.16 设 $f \in L(E)$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可积的简单函数 g, 使得

$$\int_E |f - g| \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{4.44}$$

证 由推论3.1, 存在一个简单函数列 $\{f_k\}$ 使得 $\{f_k\}$ 在 E 上处处收敛于 f, 并且 $|f_k| \leq |f| (k \geq 1)$. 于是 $f_k \in L(E)$, 并且

$$|f - f_k| \leq |f| + |f_k| \leq 2|f|.$$

对函数列 $\{f - f_k\}$ 应用控制收敛定理得到

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f - f_k| \mathrm{d}x = \int_E 0 \mathrm{d}x = 0.$$

取 k_0 足够大使 $\int_E |f - f_{k_0}| \mathrm{d}x < \varepsilon$. 令 $g = f_{k_0}$, 则 (4.44)式成立. ■

定义在$\mathbf{R}^n$上的实值函数f称为是**具有紧支集的**，若存在一个有界集A，使得当$x \in A^C$时，$f(x)=0$.

定理 4.17 设$f \in L(E)$. 则对任意$\varepsilon>0$，存在$\mathbf{R}^n$上具有紧支集的连续函数g，使得

$$\int_E |f-g|\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{4.45}$$

证 设$\varepsilon>0$. 根据定理 4.16，存在$L(E)$中的简单函数φ，使得

$$\int_E |f-\varphi|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.46}$$

记$M=\sup\limits_{x\in E}|\varphi(x)|$. 根据 Lusin 定理，存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数$h$，

使得
$$m\{x\in E: h(x)\neq\varphi(x)\}<\frac{\varepsilon}{6M},$$
并且$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}|h(x)|\le M$. 我们有
$$\int_E|\varphi-h|\mathrm{d}x=\int_{E(h\neq\varphi)}|\varphi-h|\mathrm{d}x\le 2MmE(h\neq\varphi)<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.47)$$
这表明$h-\varphi\in L(E)$, 于是$h=(h-\varphi)+\varphi\in L(E)$.

根据引理 3.3, 对每个正整数k, 存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数$\lambda_k(x)$, 满足则$0\le\lambda_k(x)\le 1$, 并且
$$\lambda_k\big|_{\overline{U(0,k)}}=1,\qquad \lambda_k\big|_{U(0,k+1)^C}=0.$$
令$h_k(x)=h(x)\lambda_k(x)(k\ge 1)$. 则每个$h_k$是具有紧支集的连续函数, $h_k(x)\to h(x)(x\in E)$, 并且$|h_k|\le|h|(k\ge 1)$.

利用控制收敛定理得到,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |h-h_k|\mathrm{d}x=0.$$

因此对充分大的k_0, 有 $\int_E |h-h_{k_0}|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$. 令$g=h_{k_0}$, 则$g$

是具有紧支集的连续函数. 并且

$$\int_E |h-g|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.48}$$

利用(4.46)-(4.8)式得到

$$\int_E |f-g|\mathrm{d}x\le\int_E |f-\varphi|\mathrm{d}x+\int_E |\varphi-h|\mathrm{d}x+\int_E |h-g|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$ ■

可积函数也可以用具有紧支集的阶梯函数逼近. 称形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{I_i}(x)$$

的函数为 $\mathbf{R}^1$ 上的阶梯函数, 其中 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的互不相交的区间.

定理 4.18 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集, $f\in L(E)$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbf{R}^1$ 上具有紧支集的阶梯函数 g, 使得

$$\int_E |f-g|\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{4.49}$$

证 根据定理4.17, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\mathbf{R}^1$上具有紧支集的连续函数φ, 使得

$$\int_E |f-\varphi| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.50}$$

不妨设当$x \in [a,b]^C$时$\varphi(x)=0$. 由于φ在$[a,b]$上一致连续, 故存在$\delta>0$, 使得当$x', x'' \in [a,b]$并且$|x'-x''|<\delta$时,

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

设$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$是$[a,b]$的一个分割, 使得$\max\limits_{1\le i\le k}|x_i-x_{i-1}|<\delta$. 令

$$g(x)=\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_i)\chi_{(x_{i-1},\,x_i]}(x).$$

则 g 是 $\mathbf{R}^1$ 上具有紧支集的阶梯函数, 并且

$$|\varphi(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(x\in[a,b]).$$

于是

$$\int_{\mathbf{R}^1}|\varphi-g|\mathrm{d}x=\int_a^b|\varphi-g|\mathrm{d}x<(b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}.\quad(4.51)$$

结合(4.50),(4.51)两式得到

$$\int_E|f-g|\mathrm{d}x\le\int_E|f-\varphi|\mathrm{d}x+\int_E|\varphi-g|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\quad\blacksquare$$

例 1(平均连续性) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$. 则

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x=0. \qquad (4.52)$$

证 先设 f 是具有紧支集的连续函数. 此时存在闭球 $\overline{U(0,r)}$, 使得当 $x\in\overline{U(0,r)}^C$ 时 $f(x)=0$.

容易知道 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上是一致连续的, 因此对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ (不妨设 $\delta<1$), 使得当 $x',x''\in\mathbf{R}^n$, $d(x',x'')<\delta$ 时, 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 于是当 $d(0,t)<\delta$ 时

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x=\int_{U(0,r+1)}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\varepsilon m(U(0,r+1)).$$

这表明当 f 是具有紧支集的连续函数时,(4.52)式成立.
一般情形,根据定理4.17,存在 $\mathbf{R}^n$ 上的具有紧支集的连续函数 g,使得

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \qquad (4.53)$$

由(4.53)式和§4.1 例 2,有

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t)-g(x+t)| \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \quad (4.54)$$

既然 g 是有紧支集的连续函数,由上面所证,存在 $\delta>0$,使得当 $d(0,t)<\delta$ 时,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g(x+t)-g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \qquad (4.55)$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \qquad (4.53)$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t)-g(x+t)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \qquad (4.54)$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g(x+t)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \qquad (4.55)$$

结合(4.53)~(4.55)式, 当$d(0,t)<\delta$时,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t)-g(x+t)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n} |g(x+t)-g(x)|\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)-f(x)|\mathrm{d}x<3\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了(4.52)式成立.■

例 2 (Riemann-Lebesgue 引理) 设 $f \in L[a,b]$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0. \qquad (4.56)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0. \qquad (4.57)$$

证 先设 $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$, 其中 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$. 则当 $n\to\infty$ 时

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \cos nx\mathrm{d}x = \frac{\sin n\beta - \sin n\alpha}{n} \to 0.$$

于是由积分的线性性知道对每个阶梯函数 f, (4.56)式成立. 现在设 $f \in L[a,b]$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由定理 4.18, 存在一个阶梯函数 g, 使得 $\int_a^b |f - g|\mathrm{d}x < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

根据上面证明的结果，存在$N>0$，使得当$n>N$时，

$\left|\int_a^b g(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \\
&\le\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\cos nx\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b g(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \\
&\le\int_a^b |f-g|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了(4.46)式成立. 类似地可以证明(4.57)式成立. ■