武汉大学 2011 – 2012 学年第一学期期末考试

资源与环境学院　2009 级　地理信息系统专业

《离散数学》试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 20 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在**武汉大学试卷纸**上, 写在其他位置无效.

线

姓 名________ 学号________

订

装

一、选择题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

1. 下列推理中, 不正确的是 【　】

(A) $Q \Rightarrow P \vee Q$　(B) $Q \Rightarrow P \to Q$

(C) $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow P$　(D) $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$

2. 命题逻辑中一组公式 H_1, H_2, $\cdots$, H_n, C 存在关系 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$ 当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \to C$ 是 【　】

(A) 永真式　(B) 永假式　(C) 可满足式　(D) 矛盾式

3. 设 P, Q, R 为任意命题公式, 则 $P \Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 【　】

(A) $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$　(B) $P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$

(C) $P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$　(D) $R \to P \Leftrightarrow R \to Q$

4. 一个 8 阶群的任何子群一定不是 【　】

(A) 2 阶的　(B) 3 阶的　(C) 4 阶的　(D) 8 阶的

5. 一个无向图有 4 个节点, 其中 3 个的度数为 2, 3, 3. 则第 4 个节点的度数不可能是 【　】

(A) 4　(B) 2　(C) 1　(D) 0

二、填空题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

6. 设 $A = \{a, b, c\}$, R 是 A 上的二元关系, 且给定 $R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$, 则 R 的对称闭包 $s(R)$=________.

7. 集合 $\{\varnothing, a, \{b\}\}$ 的幂集为________.

8. 设在 100 个同学中, 有 47 位同学熟悉 C 语言, 有 35 位同学熟悉 Java 语言, 有 23 位同学熟悉这两种语言. 则其中有 ________ 位同学对这两种语言都不熟悉.

9. 具有 n 个结点的无向完全图 K_n 的结点度数的总和为________.

10. 设有 56 盏灯, 拟公用一个电源, 则至少需要有六插头的接线板数是________.

三、解答题(本题满分 80 分, 每小题 8 分)

11. 求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

12. 给出下式的推理证明:

$$(A \to B) \wedge (C \to D),\ (B \to E) \wedge (D \to F),\ \neg(E \wedge F),\ A \to C \Rightarrow \neg A.$$

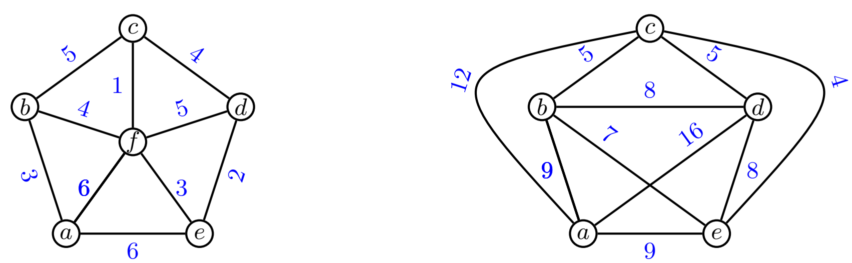
13. 写出下面推理的形式证明: 如果今天是星期一, 则要进行英语或离散数学考试. 如果今天英语老师有会, 则不考英语. 今天是星期一, 英语老师有会, 所以今天进行离散数学考试.

14. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 15, 27, 36, 45\}$ 上的整除关系 $R = \{\langle a_1,\, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in A,\ a_1$ 整除 $a_2\}$. 问 R 是否为 A 上的偏序关系? 若是, 则 (1) 画出 R 的哈斯图; (2) 求出 $\{2, 9\}$ 的最小上界和最大下界.

15. 在整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义运算: $a \circ b = a + b - 2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. 证明 $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 是一个群.

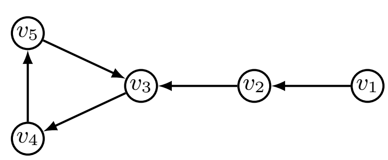
16. 已知 $R = \{\langle x,\, y\rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \equiv y \mod 5\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数集合. 证明 R 为等价关系, 并求 12 关于 R 的等价类.

17. 在下图所示的两图中, 各求一棵最小生成树, 并计算它们的权. 要求对图 (a) 使用 Kruskal 算法, 对图 (b) 使用 Prim 算法.



(a) (b)

18. 求下图 G 的邻接矩阵, 并用 Warshall 算法求可达性矩阵.



19. 设 T 是 2 叉正则树, 有 t 片树叶, i 个分支点. 证明 T 的边数 $m = 2t - 2$.

20. 请结合你所学到的离散数学知识, 举例说明离散数学的一个具体应用. 要求说明是何具体问题, 具体使用了怎样的解决方法.

参考答案 · 卷 (A)

1. C

2. A

3. A

4. B

5. C

6. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$ (或 $R\cup R^{-1}$)

7. $\{\varnothing,\,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\varnothing,a,\{b\}\}\}$.

8. 41

9. $n(n-1)$.

10. 11.

11. 主析取范式为:

$$\begin{aligned}
&(P\to Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge Q)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge(P\vee\neg P))\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge\neg P)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q).
\end{aligned}$$

主合取范式为:

$$\begin{aligned}
&(P\to Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge Q\\
\Leftrightarrow\ &(\neg P\vee Q)\wedge((P\wedge\neg P)\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q).
\end{aligned}$$

12. 列表证明如下:

(1)	$\neg(E \wedge F)$	P
(2)	$\neg E \vee \neg F$	T(1) E
(3)	$(A \to B) \wedge (C \to D)$	P
(4)	$A \to B$	T(3) I
(5)	$(B \to E) \wedge (D \to F)$	P
(6)	$B \to E$	T(5) I
(7)	$A \to E$	T(4),(6) I
(8)	$\neg E \to \neg A$	T(7) E
(9)	$A \to C$	P
(10)	$C \to D$	T(3) I
(11)	$D \to F$	T(5) I
(12)	$A \to F$	T(9),(10),(11) I
(13)	$\neg F \to \neg A$	T(12) E
(14)	$\neg A$	T(2),(8),(13) I

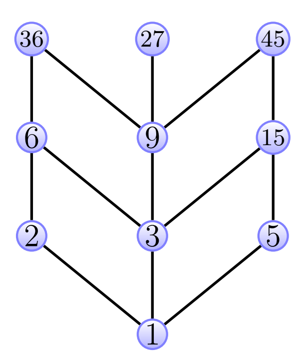
13. 设 A: 今天是星期一; B: 今天进行英语考试; C: 今天进行离散数学考试; D: 今天英语老师有会. 即要证明:

$$A \to (B \vee C),\ D \to \neg B,\ A,\ D \Rightarrow C.$$

列表证明如下:

(1)	A	P
(2)	$A \to (B \vee C)$	P
(3)	$B \vee C$	T(1),(2) I
(4)	D	P
(5)	$D \to \neg B$	P
(6)	$\neg B$	T(4),(5) I
(7)	C	T(3),(6) I

14. (1) 哈斯图为(形式不唯一):



(2) $\{2,9\}$ 的最小上界为 $\{36\}$ 和最大下界为$\{1\}$.

15. (1) 运算的结果仍然是整数, 所以运算 $\circ$ 对集合 $\mathbb{Z}$ 封闭;

(2) 对任意 $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $(a\circ b)\circ c=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4$, $a\circ(b\circ c)=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4$, 即 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$, 所以运算 $\circ$ 是可结合的;

(3) 对任意 $a\in\mathbb{Z}$, 有 $a\circ 2=a+2-2=a$, $2\circ a=2+a-2=a$, 即 2 是运算 $\circ$ 的幺元;

(4) 对任意 $a\in\mathbb{Z}$, 有 $a\circ(4-a)=a+(4-a)-2=2$, 即 $4-a$ 是 a 关于运算 $\circ$ 的逆元.

综上, 得证 $\langle\mathbb{Z},\circ\rangle$ 是一个群.

16. 证明 R 是等价关系

(1) $\forall x\in\mathbb{N}, 5|(x-x)\Rightarrow x\equiv x \mod 5\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R$. 所以, R 具有自反性.

(2) $\forall x, y\in\mathbb{N}$, 若 $\langle x,y\rangle\in R$, 则$x\equiv y(\mod 5)\Rightarrow 5|(x-y)\Rightarrow 5|(y-x)\Rightarrow y\equiv x(\mod 5)\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R$. 所以, R 具有对称性.

(3) $\forall x, y, z\in\mathbb{N}$, 若 $\langle x,y\rangle\in R$, 且 $\langle y,z\rangle\in R$. 则$x\equiv y(\mod 5)$ 且 $y\equiv z(\mod 5)\Rightarrow 5|(x-y)$ 且 $5|(y-z)\Rightarrow 5|((x-y)+(y-z))\Rightarrow 5|(x-z)\Rightarrow x\equiv z(\mod 5)\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R$.

所以, R 具有传递性.

综上所述, R 是等价关系.

12 关于 R 的等价类 $[12]=\{y \mid y=5x+2, x\in\mathbb{N}\}$.

17. $W(T_a)=13$; $W(T_b)=23$;

18. 图 G 的邻接矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$.

用 Warshall 算法计算: 逐列进行. 在第 i 列中若有 $a_{ji}=1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行.

$$M:=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}}_{i=1}:=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}}_{i=2}$$

$$:= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{i=3} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=4} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=5} = P.$$

19. 设 T 有 m 条边, 可得:

$$t + 3i - 1 = 2m \tag{1}$$

根据树的性质可得:

$$m = t + i - 1 \tag{2}$$

解由 (1), (2) 构成的方程组得: $m = 2t - 2$.

故结论成立.