§ 4.6　Fubini 定理

在 Riemann 积分理论中, 关于重积分与累次积分, 不同顺序的累次积分的关系, 有如下结果, 如果 $f(x,y)$ 在矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这节我们对 Lebesgue 积分考虑同样的问题, 即在什么条件下重积分与两个不同顺序的累次积分相等.

设 p,q 是正整数, 定义在 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上的函数记为 $f(x,y)$, 其中 $x\in\mathbf{R}^p, y\in\mathbf{R}^q$. 设对几乎处处固定的 $x\in\mathbf{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbf{R}^q$ 上的积分存在. 令

$$g(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(可能对于一个零测度集中的 x, 上式右边的积分不存在. 此时 $g(x)$ 在这个零测度集上没有定义, 在这个零测度集上令 $g(x)=0$). 若 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可测并且积分存在, 则称 $\int_{\mathbf{R}^p} g(x)\mathrm{d}x$ 为 f 的累次积分, 记为

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \text{ 或 } \int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

类似可以定义另一个顺序的累次积分 $\int_{\mathbf{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$

称 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上的积分为**重积分**, 记为

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

下面将要证明的 Fubini 定理表明, 在很一般的条件下, 重积分和两个不同顺序的累次积分是相等的. 为此, 需要作一些准备.

我们知道$\mathbf{R}^{p+q}$可以看成是$\mathbf{R}^p$与$\mathbf{R}^q$直积. 设$A\subset\mathbf{R}^p$, $B\subset\mathbf{R}^q$. 称集

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}$$

为$\mathbf{R}^{p+q}$中的矩形(补充定义$A\times\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\times B=\varnothing$).

若A和B都是可测集, 则称$A\times B$是可测矩形.

当A和B是直线上的有界区间时, $A\times B$就是平面上的通常意义下的矩形.

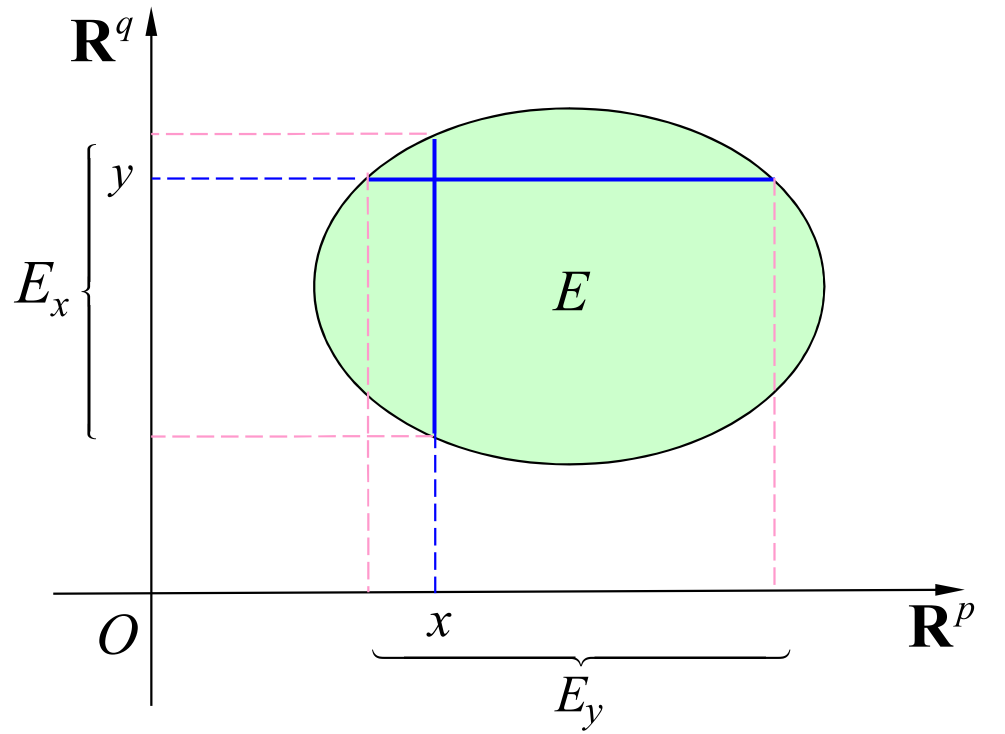
设 $E\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$. 对于 $x\in\mathbf{R}^p$, 称集

$$E_x=\{y\in\mathbf{R}^q:(x,y)\in E\}$$

为 E 在 x 处的**截口**. 对于 $y\in\mathbf{R}^q$, 称集

$$E_y=\{x\in\mathbf{R}^p:(x,y)\in E\}$$

为 E 在 y 处的截口. 注意 E_x 和 E_y 分别是 $\mathbf{R}^q$ 和 $\mathbf{R}^p$ 的子集.



容易验证关于x的截口成立如下性质:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x,\quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n)_x,$$

$$(A-B)_x=A_x-B_x.$$

同样,关于y的截口也成立类似的性质.

设平面$\mathbf{R}^2$上的图形E是由连续曲线$y=y_1(x),y=y_2(x)$ $(y_1(x)\le y_2(x))$和直线$x=a,x=b\,(a<b)$所围成. 在数学分析中熟知E的面积

$$S=\int_a^b(y_2(x)-y_1(x))\mathrm{d}x=\int_a^b|E_x|\mathrm{d}x.$$

其中$|E_x|$表示截口线段E_x的长度.

下面的定理表明,高维空间可测集的测度与其在低维空间截口的测度,有类似的关系.

定理 4.20 设 E 是 $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ 中的可测集. 则

(1) 对几乎处处的 $x \in \mathbf{R}^p$, E_x 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集.

(2) 函数 $m(E_x)(x \in \mathbf{R}^p)$ 是可测的, 并且

$$m(E) = \int_{\mathbf{R}^p} m(E_x)\mathrm{d}x. \tag{4.59}$$

证 分以下几个步骤证明.

1° 证明满足定理的结论(1)和(2)的可测集所成的集类对不相交可列并运算封闭.

设$\{E_n\}$是$\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$中的一列互不相交的可测集, 每个$E_n$满足定理的结论(1)和(2). 令$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$.

由于对几乎处处的$x\in\mathbf{R}^p$, 每个$(E_n)_x$是可测集, 因此E_x是可测集. 由于$\{(E_n)_x\}$互不相交, 因此

$$m(E_x)=\sum_{n=1}^{\infty}m((E_n)_x).$$

由上式知道函数$m(E_x)$是可测的. 利用逐项积分定理, 得到

$$m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^p}m((E_n)_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x.$$

这表明E满足定理的结论(1)和(2).

2° 设 $E=I_1\times I_2$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的方体. 则对每个 $x\in\mathbf{R}^p$,

$$E_x=\begin{cases} I_2, & x\in I_1,\\ \varnothing, & x\notin I_1.\end{cases}\qquad m(E_x)=\begin{cases} |I_2|, & x\in I_1,\\ 0, & x\notin I_1.\end{cases}$$

因此 E_x 是可测集, 函数 $m(E_x)$ 是可测的. 并且

$$m(E)=|I_1\times I_2|=|I_1|\cdot|I_2|=\int_{I_1}|I_2|\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x.$$

3° 设 E 是开集. 根据定理 1.27, 存在一列互不相交的半开方体 $\{I_n\}$ 使得 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 根据情形 2°, 每个 I_n 满足(1)和(2). 再利用情形 1° 的结论即知 E 满足(1)和(2).

4° 设 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 是有界 G_δ 型集, 其中每个 G_n 是开集.

不妨设 $G_n \downarrow$ (否则令 $\tilde{G}_1 = G_1$, $\tilde{G}_n = G_1 \cap \cdots \cap G_n\,(n \geq 2)$,

用 $\{\tilde{G}_n\}$ 代替 $\{G_n\}$). 既然 E 有界, 不妨设 G_1 有界.

根据情形3°, 每个 $(G_n)_x$ 是可测集. 于是 $E_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$ 是

可测集. 利用测度的上连续性, 对每个 $x \in \mathbf{R}^p$,

$$m(E_x)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x\right)=\lim_{n\to\infty} m((G_n)_x). \qquad (4.60)$$

$$m(E_x)=\lim_{n\to\infty} m((G_n)_x). \qquad (4.60)$$

根据情形3°的结论, 每个$m(G_n)_x$是可测的. 于是由(4.60)式知道$m(E_x)$是可测的. 再次利用情形3°的结论, 有

$$\int_{\mathbf{R}^p} m((G_1)_x)\mathrm{d}x = m(G_1) < \infty.$$

故$m((G_1)_x)\in L(\mathbf{R}^p)$. 又$m((G_n)_x)\leq m((G_1)_x)(n\geq 1)$, 利用控制收敛定理和(4.60)式得到

$$m(E)=\lim_{n\to\infty} m(G_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} m((G_n)_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p} m(E_x)\mathrm{d}x.$$

因此结论(1)和(2)对有界G_δ型集成立.

5° 设 E 是零测度集. 此时 E 可以表示为一列有界零测度集的不相交并. 利用情形 1° 的结论, 不妨设 E 是有界零测度集.

根据定理 2.6, 存在有界 G_δ 型集 G, 使得 $G \supset E$ 并且 $m(G-E)=0$. 于是 $m(G)=0$. 利用情形 4° 的结论得到,

$$\int_{\mathbf{R}^p} m(G_x)\mathrm{d}x = m(G) = 0.$$

故 $m(G_x)=0$ a.e. 由于 $E_x \subset G_x$, 因此对几乎处处的 $x \in \mathbf{R}^p$, E_x 是可测集, 并且 $m(E_x)=0$ a.e. 于是函数 $m(E_x)$ 是可测的, 并且 $m(E)=\int_{\mathbf{R}^p} m(E_x)\mathrm{d}x$.

6° 一般情形. 设 E 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 与情形 5° 类似, 不妨设 E 有界. 根据定理 2.6, 存在有界 G_δ 型集 G, 使得 $G\supset E$ 并且 $m(G-E)=0$. 令 $A=G-E$, 则 A 是零测度集, 并且 $E=G-A$. 由于 $E_x=G_x-A_x$, 根据情形 4° 和 5° 的结论知道, 对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, E_x 是可测集. 由于

$$m(E_x)=m(G_x)-m(A_x)=m(G_x)\ \text{a.e.},$$

因此函数 $m(E_x)$ 是可测的. 最后

$$m(E)=m(G)=\int_{\mathbf{R}^p}m(G_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x.$$

至此, 定理得证. ■

定理 4.21 （Fubini） (1). 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数，则对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbf{R}^q$ 上可测，$g(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可测，并且

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \quad (4.61)$$

(2). 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的可积函数，则对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbf{R}^q$ 上可积，$g(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可积，并且(4.61)式成立.

证 (1). 先设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$ 是可测集的特征函数, 其中 E 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 则对每个固定的 $x\in\mathbf{R}^p$, 有

$$f(x,y)=\chi_{E_x}(y).$$

根据定理 4.20, 对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, E_x 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 因此对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, $f(x,y)$ 是作为 y 的函数在 $\mathbf{R}^q$ 上可测. 利用(4.59)式得到

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m(E)=\int_{\mathbf{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}\chi_{E_x}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}\chi_E(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

这表明当 f 是可测集的特征函数时, 结论成立.

由积分的线性性知道，当 f 是非负简单函数时结论成立. 一般情形，设 f 是非负可测函数. 则存在单调增加的非负简单函数列 $\{f_n\}$ 使得 $f(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)$. 根据刚刚证明的结论，对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，每个 $f_n(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^q$ 上可测，从而 $f(x,y)$ 也在 $\mathbf{R}^q$ 上可测. 令

$$g_n(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}y \quad (n\geq 1).$$

则 $\{g_n\}$ 是单调递增的非负可测函数列，并且由单调收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

因此 $g(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y$ 是非负可测函数.

再对函数列$\{g_n\}$应用单调收敛定理，得到

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

即(4.61)式成立. 因此结论(1)得证.

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x . \quad (4.61)$$

(2) 设 $f(x,y)\in L(\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q)$. 对 $f^+(x,y)$ 和 $f^-(x,y)$ 利用 (4.61)式，得到

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.62)$$

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.63)$$

因此 $\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e., $\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e.

这表明对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f^+(x,y), f^-(x,y)\in L(\mathbf{R}^q)$.

从而 $f(x,y)\in L(\mathbf{R}^q)$.

(2) 设 $f(x,y)\in L(\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q)$. 对 $f^+(x,y)$ 和 $f^-(x,y)$ 利用(4.61)式, 得到

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.62)$$

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.63)$$

因此 $\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e., $\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e.

这表明对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, $f^+(x,y), f^-(x,y)\in L(\mathbf{R}^q)$.
从而 $f(x,y)\in L(\mathbf{R}^q)$.

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.62)$$

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty. \quad (4.63)$$

由于

$$g(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y,$$

而(4.62)式和(4.63)两式表明上式右端的两个函数在 $\mathbf{R}^p$ 上都是可积的, 从而 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可积. 将(4.62)式和(4.63)两式相减即得

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \quad ■$$

由于对称性, 在定理4.21中, 交换 x 与 y 的位置, 所得结论仍然成立. 因此, 在定理 4.21 的条件下, 成立有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.64}$$

推论 4.8 设 I 和 J 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的方体. 若 $f(x,y)$ 是 $I\times J$ 上的非负可测函数或可积函数, 则

$$\int_{I\times J} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_I \mathrm{d}x\int_J f(x,y)\mathrm{d}y =\int_J \mathrm{d}y\int_I f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4.65}$$

证 在推论的条件下, $f(x,y)\chi_{I\times J}(x,y)$是非负可测函数或可积函数. 在(4.64)式中将 $f(x,y)$ 换为 $f(x,y)\chi_{I\times J}(x,y)$, 并且注意到 $\chi_{I\times J}(x,y)=\chi_I(x)\chi_J(y)$, 就得到(4.65). ■

在 Fubini 定理中, $f(x,y)$在乘积空间上可积这个条件不易验证. 下面的推论中的条件容易验证, 因而常常用到.

推论 4.9 设 I 和 J 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的方体，$f(x,y)$ 是 $I\times J$ 上的可测函数. 若以下两式中至少有一个成立

$$\int_I \mathrm{d}x\int_J |f(x,y)|\mathrm{d}y<\infty,\ \int_J \mathrm{d}y\int_I |f(x,y)|\mathrm{d}x<\infty,$$

则 (4.65) 式成立.

证 不妨设 $\int_I \mathrm{d}x\int_J |f(x,y)|\mathrm{d}y<\infty$. 由推论 4.8, 我们有

$$\int_{I\times J} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_I \mathrm{d}x\int_J |f(x,y)|\mathrm{d}y<\infty.$$

这表明 $f(x,y)$ 在 $I\times J$ 上可积. 再次应用推论 4.8 即知 (4.65)式成立.■

例 1 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\mathrm{d}x\ (0<a<b).$

解 由计算知道

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y.$$

由于

$$\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\left|\mathrm{e}^{-xy}\sin x\right|\mathrm{d}x\le\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{b}{a}<\infty,$$

由 Fubini 定理(推论 4.9), 得到

$$I=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\arctan b-\arctan a. \quad \blacksquare$$

例 2 利用 Fubini 定理计算 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解 由于 $f(x,y)=y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$ 是 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上的非负可测函数, 利用 Fubini 定理得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}y.$$

经直接计算, 我们有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{\infty} y \mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} y \mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}.$$

另一方面,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{\infty} y \mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \left(\int_0^{\infty} y \mathrm{e}^{-x^2 y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2.$$

因此 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ ■

例 3 设 $f, g \in L(\mathbf{R}^n)$. 令

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \quad (x \in \mathbf{R}^n). \qquad (4.66)$$

称函数 $f*g$ 为 f 与 g 的**卷积**. 下面我们证明 $f*g(x)$ 几乎处处有定义, $f*g \in L(\mathbf{R}^n)$, 并且成立

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(f*g)(x)| \mathrm{d}x \le \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| \mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \mathrm{d}x. \qquad (4.67)$$

事实上, 利用 Fubini 定理和 §4.1 例 2, 我们有

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y,\ x\in\mathbf{R}^n. \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y \\
&=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)g(x-y)|\mathrm{d}x \\
&=\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^n}|g(x-y)|\mathrm{d}x \\
&=\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|\mathrm{d}x<\infty.
\end{aligned} \quad (4.68)$$

因此对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$, $\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y<\infty$. 这表明对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$, (4.66)式右边的积分是可积的. 因而 $(f*g)(x)$ 几乎处处有定义并且有限.

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)g(x-y)| \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| \mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.68}$$

而且利用(4.68)式，我们有

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(f*g)(x)| \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x$$
$$\leq \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)g(x-y)| \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| \mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

这表明 $f*g \in L(\mathbf{R}^n)$，并且成立(4.67)式成立. ■

若 I 和 J 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的方体, 则有 $|I\times J|=|I|\cdot|J|$.
下面的定理表明将 I 和 J 分别换为 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中一般的可测集, 有类似的结果.

定理 4.22 若 A 和 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集, 则 $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集, 并且

$$m(A\times B)=m(A)\cdot m(B).$$

证 先证可测性. 根据定理 2.6, 存在 A 中的 F_σ 型集 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 使得 $m(A-F)=0$. 故 A 可以表示为

$$A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\cup E,$$

其中每个 F_n 是闭集, $E=A-F$ 是零测度集.

由于每个闭集可以表示为一列有界闭集的并，故不妨设 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, 其中 A_i 是有界闭集或零测度集. 同样, B 也可以类似地表示为 $B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$. 于是

$$A\times B=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$$

因此只需考虑以下两种情况:

(1). A 和 B 都是闭集，此时 $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的闭集，因而是可测集.

(2). A和B中有一个是零测度集, 一个是有界闭集.

不妨设$m(A)=0$. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$\mathbf{R}^p$中的开方体列$\{I_k\}$和$\mathbf{R}^q$中的开方体列$\{J_i\}$, 使得

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon,$$

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<m(B)+\varepsilon<\infty.$$

则$\{I_k\times J_i\}$是$A\times B$的一个开方体覆盖. 于是

$$m^*(A\times B)\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_k\times J_i|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_k|\cdot|J_i|$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|.$$

由 ε 的任意性得到 $m^*(A\times B)=0$. 故此时 $A\times B$ 也是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集.

综上所证, $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 利用 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}\chi_{A\times B}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbf{R}^p}\chi_A(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbf{R}^q}\chi_B(y)\mathrm{d}y\\&=m(A)\cdot m(B).\end{aligned}$$

定理证毕. ■

下面的推论 4.10 给出了 Fubini 定理更一般的形式.

推论 4.10 设 A 和 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 若 $f(x,y)$ 是 $A\times B$ 上的非负可测函数或可积函数, 则

$$\int_{A\times B} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A \mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y = \int_B \mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4.69}$$

证 根据定理 4.22, $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 对 $f(x,y)\chi_{A\times B}(x,y)$ 应用 (4.64) 式即得 (4.69) 式. ■

设$E\subset\mathbf{R}^n$，$f(x)$是定义在E上的非负实值函数. 令

$$\underline{G}(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+1}:x\in E,0\le y\le f(x)\right\}.$$

称$\underline{G}(f)$为$y=f(x)$的**下方图形.**

定理 4.24（积分的几何意义） 设E是$\mathbf{R}^n$中的可测集，$f(x)$是定义在E上的非负实值的可测函数. 则$\underline{G}(f)$是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集，并且

$$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 略(不作要求).

本节其他的内容略，不作要求.