



武汉大学

WUHAN UNIVERSITY

实变函数论

数学与统计学院

弘毅
求是
拓新

本课件根据以下教材制作：

侯友良, 王茂发, 实变函数论, 武汉大学出版社,
2017



武汉大学

WUHAN UNIVERSITY



引言

在数学分析中我们熟知的 Riemann 积分在处理连续函数和几何、物理中的计算问题时是很成功的和有效的.

但 Riemann 积分存在一些理论上的缺陷. 下面在几个主要方面作一简要分析.



Riemann积分理论的局限性

1. 可积函数类过于狭小

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的有界实值函数. 又设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 的一个分划. 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是

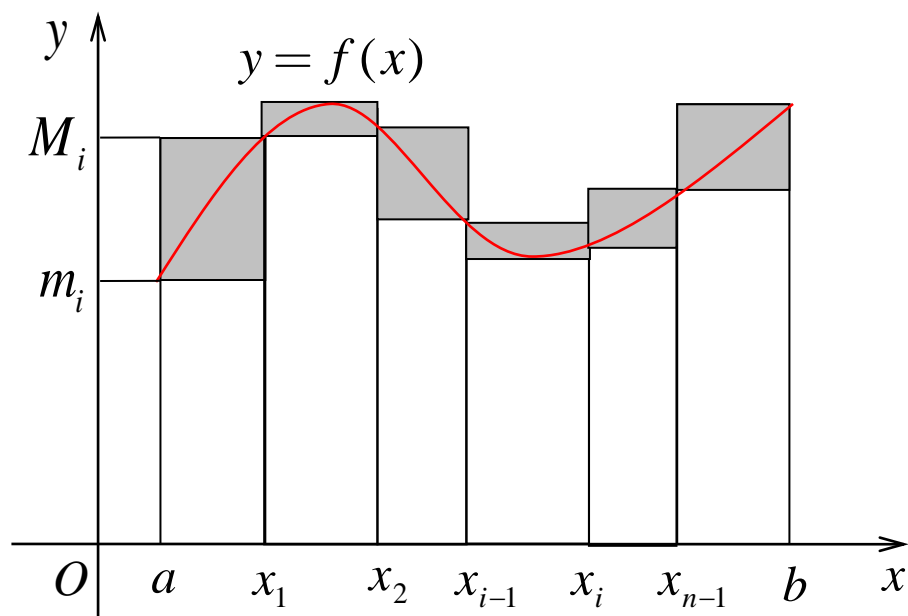
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = 0 \quad (1)$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, m_i 和 M_i 分别是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的下确界和上确界.



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = 0 \quad (1)$$

其几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形(曲边梯形的
外接阶梯形与内接阶梯形的面积之差趋于零.



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = 0 \quad (1)$$

由于在包含 $f(x)$ 的间断点的区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时函数的振幅 $M_i - m_i$ 不趋于零, 为使得 (1) 式成立, 包含间断点的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的总长必须趋于零.

因此为保证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的间断点不能太多. 这使得很多连续性不好的函数不可积了.

这导致了 **Riemann** 积分的可积函数类过于狭小, 而且这进一步导致了下面要说明的缺陷.



2. 积分与极限运算交换顺序不便

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的可积函数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ($x \in [a, b]$). 一般情况下, 未必成立有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

上式成立的充分条件是每个 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

这个条件太强并且不易验证. 另外, 在累次积分交换积分顺序方面存在类似的情况.



3. 可积函数空间不是完备的

实数集 \mathbf{R}^1 有一个很重要的性质，就是每个 Cauchy 数列都是收敛的，这个性质称为实数集的**完备性**.

空间的完备性也可以引入到更一般的距离空间中来. 设 $R[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上 Riemann 可积函数的全体.

在 $R[a, b]$ 上定义距离

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (f, g \in R[a, b]).$$

在 $R[a, b]$ 上定义了距离后, 与在直线 \mathbf{R}^1 上一样, 可以在 $R[a, b]$ 上定义序列的收敛.

设 $\{f_n\}$ 是 $R[a, b]$ 中序列, $f \in R[a, b]$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$, 则称 $\{f_n\}$ **按距离收敛** 于 f .

$R[a, b]$ 中序列 $\{f_n\}$ 称为是 **Cauchy 序列**, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $m, n > N$ 时, $d(f_m, f_n) < \varepsilon$.

有例子表明, 在 $R[a, b]$ 中并非每个 Cauchy 序列都是收敛的, 即 Riemann 可积函数空间 **$R[a, b]$ 不是完备的**.

这表明 $R[a, b]$ 不是作为研究分析理论的理想空间.

新的积分—Lebesgue积分

Lebesgue 积分思想的大体描述

设 $f(x)$ (不妨设 $f(x) \geq 0$) 是 $[a, b]$ 上的有界实值函数.

Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形(曲边梯形)

$$\underline{G}(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

的面积. 除了可以用 Riemann 积分计算 $\underline{G}(f)$ 的面积外, 我们还可以用下面的方式计算 $\underline{G}(f)$ 面积.



设 m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下确界和上确界. 设

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$$

是 $f(x)$ 的值域区间 $[m, M]$ 的一个分划. 对每个 $i=1, 2, \dots, n$, 令

$$E_i = \{x \in [a, b] : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}.$$

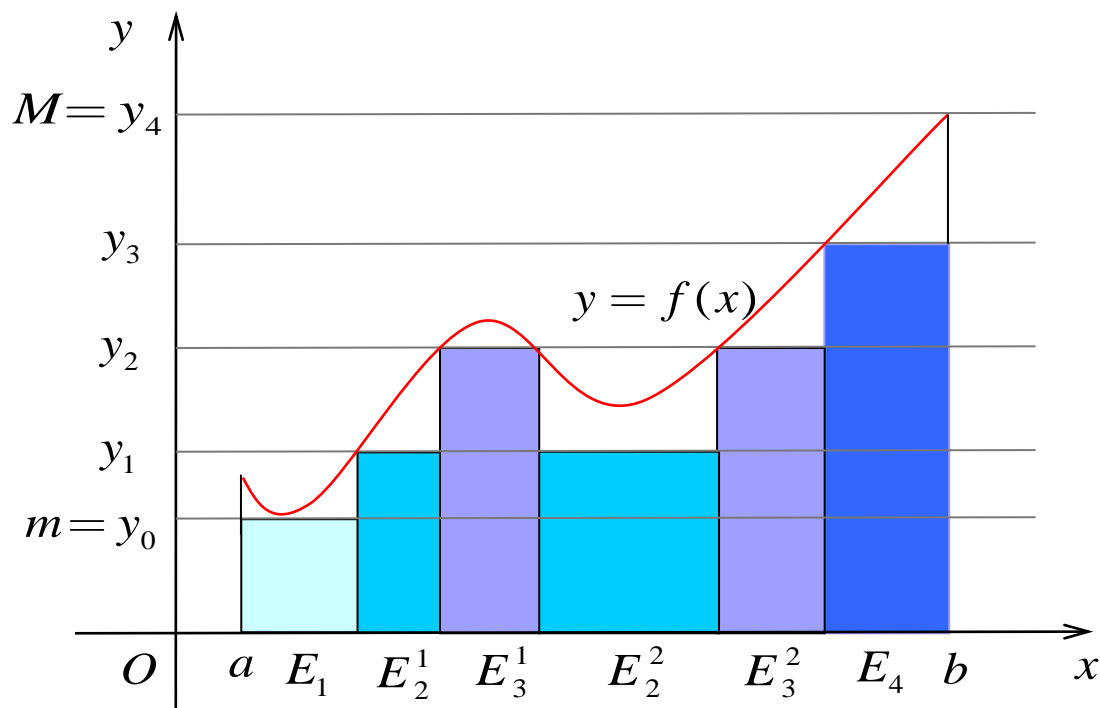
则每个 E_i 是区间 $[a, b]$ 的子集. 用 $|E_i|$ 表示 E_i 的“长度” (注意, E_i 一般是不是区间或区间的并, 所以实际上这里我们并没有给出 $|E_i|$ 的确切涵义). 作和式

$$\sum_{i=1}^n y_{i-1} |E_i|.$$



$$\sum_{i=1}^n y_{i-1} |E_i|.$$

它相当于 $\underline{G}(f)$ 面积的一个近似值.



$$E_2 = E_2^1 \cup E_2^2, \quad E_3 = E_3^1 \cup E_3^2$$



令 $\lambda = \max \{y_i - y_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$. 定义 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 **Lebesgue 积分** 为:

$$(L) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_{i-1} |E_i|.$$

这样定义的积分 $(L) \int_a^b f(x) dx$ 同样是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形 $\underline{G}(f)$ 的面积.

这样定义积分的好处在于, 不管 $f(x)$ 的连续性如何, 在每个 E_i 上 $f(x)$ 的振幅都小于 λ . 这使得很多连续性不好的函数 (例如 Dirichlet 函数) 也可积了.



Lebesgue 本人用数钱的方式打了一个形象的比喻, 说明两种不同的积分之间的区别.

按照 Lebesgue 的方式定义积分有一个很大的困难, 就是要给出 “ $|E_i|$ ” 的确切意义.

要解决这个问题并不简单. 为此, Lebesgue 建立了测度理论, 进而在测度理论的基础上建立了积分理论.

事实表明, Lebesgue 积分远比 Riemann 积分更深刻, 更强有力. Lebesgue 测度理论以及在此基础上建立的 Lebesgue 积分理论, 极大地促进了分析数学的发展, 成为现代分析的基石.

实变函数论的主要内容

实变函数论的内容就是围绕建立 Lebesgue 积分理论而展开的. 实变函数论的内容大致分为三部分:

- 集合论(第 1 章)
- 测度论(第 2, 3 章)
- 积分论(第 4, 5 章)



实变函数论是现代分析数学必不可少的理论基础.

在实变函数中, 充满了许多新的思想, 新的方法与技巧和深邃的结论. 这一方面增加了这门课程的魅力, 另一方面增加了课程的难度.

只要付出了努力, 就能学好这门课程并且获益良多, 为今后进一步的学习打下坚实的基础.



武汉大学

WUHAN UNIVERSITY

实变函数论

数学与统计学院

弘毅
求是
拓新

第1章 集合与 \mathbf{R}^n 中的点集

§ 1.1 集合与集合的运算

§ 1.2 可数集与基数

§ 1.3 集 类

§ 1.4 \mathbf{R}^n 中的点集



§ 1.1 集合与集合的运算

1.1.1 集合的基本概念

以某种方式给定的一些事物的全体称为一个**集合**(简称为集). 集中的成员称为这个集的**元素**.

通常用 A, B, C 等大写字母表示集, 用 a, b, c 等小写字母表示集的元素. 符号 $a \in A$ 表示 a 是集 A 的元素, $a \notin A$ 表示 a 不是集 A 的元素.

不含任何元素的集称为**空集**, 用 \emptyset 表示. 分别用 \mathbf{R}^1 , \mathbf{Q} , \mathbf{N} 和 \mathbf{Z} 表示实数集, 有理数集, 自然数集和整数集.



集的代表方法 表示一个集的方法一般有两种.

列举法 即列出给定集的全部元素. 例如

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$B = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}.$$

描述法 当集 A 是由具有某种性质 P 的元素的全体所构成时, 用下面的方式表示集 A :

$$A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如

$$A = \{x \in \mathbf{R}^1 : x \sin x \geq 0\}.$$



设 A 和 B 是两个集.

集的相等 如果 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

子集 如果 A 的元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集, 记为 $A \subset B$, 或 $B \supset A$.

真子集 若 $A \subset B$ 并且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集.

空集 \emptyset 是任何集的子集.

例如

$$\{x \in \mathbf{R}^1 : x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\} = \{x \in \mathbf{R}^1 : \sin x = 0\}.$$

$$\{x \in \mathbf{R}^1 : x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \subset \{x \in \mathbf{R}^1 : \sin x = 0\}.$$



由以上定义知道, (i) 空集 \emptyset 是任何集的子集.

(ii) $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 并且 $B \subset A$.

其中结论 (ii) 在证明两个集相等的时候常常用到.

幂集 设 X 是一个给定的集. 由 X 的所有子集构成的集称为 X 的幂集, 记为 $\mathcal{P}(X)$.

例如, 设 $X = \{a, b, c\}$ 是由 3 个元素构成的集, 则

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

一般地, 若 X 是由 n 个元素构成的集, 则 X 有 2^n 个不同的子集.



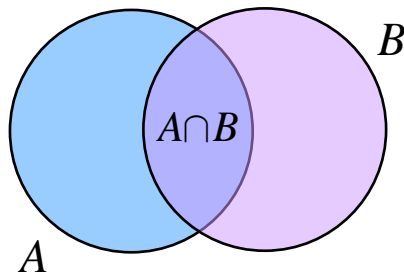
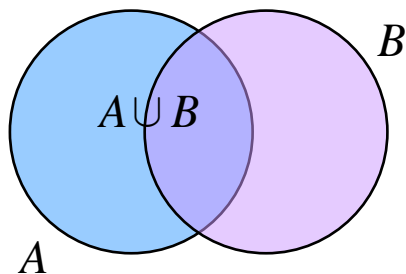
1.1.2 集合的运算

并运算 设 A 和 B 是两个集. 由 A 和 B 的所有元素所构成的集称为 A 与 B 的**并集**, 简称为并, 记为 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或者 } x \in B\}.$$

交运算 由同时属于 A 和 B 的元素所构成的集称为 A 与 B 的**交集**, 简称为交, 记为 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$



并与交的运算性质：

- 交换律： $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- 分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.



集族与集列 设 I 是一非空集 (有限集或无限集). 若对每个 $\alpha \in I$ 都对应一个集 A_α , 则称 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为**集族**.

特别地, 若指标集是自然数集 \mathbf{N} , 则称 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 为**集列**.

一般把 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 简写为 $\{A_n\}$.

一族集的并与交 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一个集族. 这一族集的并集和交集分别定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{存在 } \alpha \in I, \text{ 使得 } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{对每个 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$



特别地, 若 $\{A_n\}$ 是一个集列, 则 $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ 和 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ 可以分别

记成 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 分别称为 $\{A_n\}$ 的**可列并**和**可列交**.

分配律可以推广到一族集的并与交的情形, 即

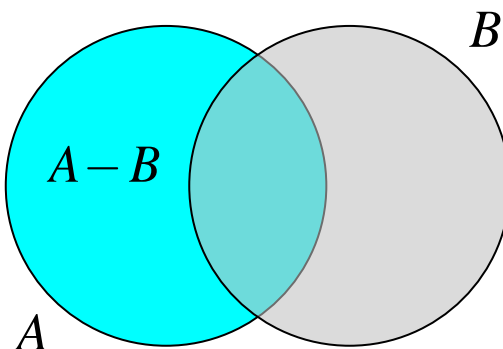
$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}),$$

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha}).$$



差运算 设 A 和 B 是两个集. 由 A 中的那些不属于 B 的元素所构成的集称为 A 与 B 的**差集**, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$.
即

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}.$$



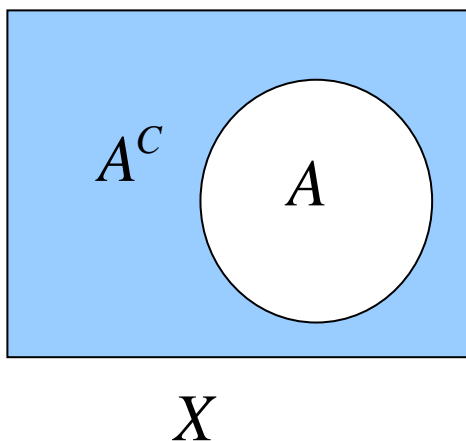
此外, 称集 $(A - B) \cup (B - A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \Delta B$.

对称差集 $A \Delta B$ 的大小反映了 A 与 B 差别的大小.



全集 通常我们所讨论的集都是某一固定集 X 的子集, X 称为**全集**(或**全空间**).

余运算 设 X 为全集, $A \subset X$. 称 X 与 A 的差集 $X - A$ 为 A 的**余集**, 记为 A^c .



关于差运算和余运算成立有以下性质：

- $A - B = A \cap B^c.$
- $(A^c)^c = A.$
- $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset.$
- $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X.$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

上述最后一个性质称为 **De Morgan 公式**.



De Morgan 公式对一族集的并与交也成立. 这个公式很重要, 今后要经常用到. 我们将其叙述为如下的定理.

定理 1.1 (DeMorgan 公式) 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族集. 则

$$(1) \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \quad (\text{并的余集等于余集的交}).$$

$$(2) \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \quad (\text{交的余集等于余集的并}).$$



证 设 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. 于是对任意 $\alpha \in I$, $x \notin A_\alpha$.

即对任意 $\alpha \in I$, $x \in A_\alpha^c$. 因此 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$. 这表明

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

上述推理可以反过来, 即从 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 可以推出 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$.

这表明

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

因此(1)成立. 类似地可以证明(2). ■



例 1 设 $\{f_n\}$ 是 \mathbf{R}^1 上的一列实值函数, 满足

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \quad (x \in \mathbf{R}^1)$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) (x \in \mathbf{R}^1)$. 则对任意实数 a 有

$$\{x: f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\}. \quad (1.1)$$

证 对给定的 $x \in \mathbf{R}^1$, 若 $x \in \{x: f(x) > a\}$, 则 $f(x) > a$.

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

因此当 n_0 充分大时, $f_{n_0}(x) > a$. 从而 $x \in \{x: f_{n_0}(x) > a\}$.

这表明

$$\{x: f(x) > a\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\}.$$



另一方面, 对任意自然数 n , 由于 $f(x) \geq f_n(x) (x \in \mathbf{R}^1)$, 因此

$$\{x: f_n(x) > a\} \subset \{x: f(x) > a\}.$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\} \subset \{x: f(x) > a\}.$$

这就证明了(1.1)式成立. ■

注意多重并与交运算的意义. 例如 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ 表示 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \right)$. 即先进行内层运算, 再进行外层运算.



例 2 设 $\{f_n\}$ 是定义在 \mathbf{R}^n 上的一系列实值函数. 令

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\}.$$

则

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}. \quad (1.2)$$

证 对给定的 $x \in \mathbf{R}^n$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ 的充要条件是, 对任意正整数 $k \geq 1$, 存在正整数 $m \geq 1$, 使得对任意正整数 $n \geq m$ 有 $|f_n(x)| < \frac{1}{k}$. 因此



$$x \in A \Leftrightarrow \forall k \geq 1, \exists m \geq 1, \text{使得 } \forall n \geq m, x \in \{x : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \geq 1, \exists m \geq 1, \text{使得 } x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \geq 1, x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}.$$

这就证明了

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}. \quad \blacksquare$$



$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}. \quad (1.2)$$

在例 2 中, 集 A 的表达式(1.2)式看起来较复杂, 但(1.2)式右端的集是通过比较简单的集 $\{x : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ 的运算得到的, 以后我们会看到集的这种表示方法是很有用的.



直积 设 A_1, \dots, A_n 是 n 个集. 由有序 n 元组的全体所成的集

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$$

称为 A_1, \dots, A_n 的**直积集**(简称为直积), 记为 $A_1 \times \dots \times A_n$.

例如, 平面 \mathbf{R}^2 可以看作是 \mathbf{R}^1 与 \mathbf{R}^1 的直积, 即

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}^1, y \in \mathbf{R}^1\} = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1.$$

而 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 是平面上以有理数为坐标的点所成的集,

$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 中的点称为**有理点**. 又例如,

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

就是平面上的长方形.



1.1.3 集列的极限

设 $\{A_n\}$ 是一个集列. 称集

$$\{x: x \text{ 属于 } \{A_n\} \text{ 中的无限多个}\}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的**上极限**, 记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 称集

$$\{x: x \text{ 至多不属于 } \{A_n\} \text{ 中的有限个}\}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的**下极限**, 记为 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

显然, 一般情况下 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.



若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则称集列 $\{A_n\}$ 存在极限, 并且称集

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$$

为集列 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

定理 1.2 设 $\{A_n\}$ 是一个集列. 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad (1.3)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.4)$$



$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

证明 我们有

$$x \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n \Leftrightarrow x \text{ 属于 } \{A_n\} \text{ 中的无限多个}$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } n \geq 1, \text{ 存在使得 } n, \quad x \in A_k$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } n \geq 1, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

因此第一个等式成立. 类似地可证明第二个等式. ■



单调集列 设 $\{A_n\}$ 是一个集列. 若对每个 $n \geq 1$, 总有 $A_n \subset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 是**单调递增的**, 记为 $A_n \uparrow$. 若对每个 $n \geq 1$, 总有 $A_n \supset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 是**单调递减的**, 记为 $A_n \downarrow$.

定理 1.3 单调集列必存在极限. 并且

(1) 若 $\{A_n\}$ 是单调递增的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 若 $\{A_n\}$ 是单调递减的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.



证 (1). 因为 $\{A_n\}$ 是单调递增的, 因此对任意 $n \geq 1$, 有

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n, \quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

于是利用定理 1.2 得到

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

所以 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ 类似可证明结论(2). } \blacksquare$$



例 3 设 $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}]$, $B_n = (0, 1 + \frac{1}{n}]$. 则 $\{A_n\}$ 是单调递增的, $\{B_n\}$ 是单调递减的. 根据定理 1.3, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = (0, 1].$$

例 4 设 $\{f_n\}$ 和 f 如例 1. 令 $A_n = \{x : f_n(x) > a\}$ ($n \geq 1$). 则 $\{A_n\}$ 是单调递增的. 根据定理 1.3 并且利用(1.1)式, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : f(x) > a\}.$$



习 题

1. (2), (3), (4)

2, 3, 5.



§ 1.2 映射 可数集与基数

1.2.1 映 射

1.2.2 可列集

1.2.3 基 数



1.2.1 映射

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个非空集. 若 f 是某一法则, 使得对每个 $x \in X$ 有唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**, 记为

$$f : X \rightarrow Y.$$

当 y 与 x 对应时, 称 y 为 x 在映射 f 下的**像**, 记为 $y = f(x)$. 称 x 为 y 的一个**原像**. 称 X 为 f 的**定义域**.

若 f 的值域 Y 是实数集或复数集, 习惯上仍称 f 为**函数**.



像与原像 设 $f : X \rightarrow Y$ 是从 X 到 Y 的映射.

(i) 设 A 是 X 的子集. 称 Y 的子集

$$\{f(x) : x \in A\}$$

为 A 在映射 f 下的**像**, 记为 $f(A)$.

(ii) 设 B 是 Y 的子集, 称 X 的子集

$$\{x \in X : f(x) \in B\}$$

为集 B 关于映射 f 的**原像**, 记为 $f^{-1}(B)$.



由原像的定义可以直接验证以下事实: 设 f 是 X 到 Y 的映射, 则

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_{\alpha}) \quad (B_{\alpha} \subset Y).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_{\alpha}) \quad (B_{\alpha} \subset Y).$$

$$f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \quad (B \subset Y).$$



定义 1.2 设 $f : X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 的映射.

- 如果当 $x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是**单射**.
- 如果 $f(X) = Y$, 则称 f 是**满射**.
- 如果 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是**双射**.

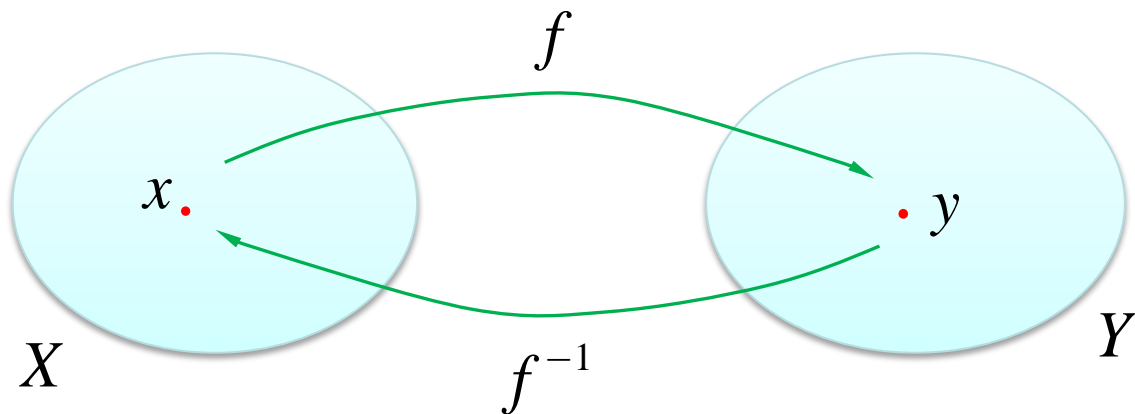


定义 1.3 设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个双射. 定义映射

$$g : Y \rightarrow X,$$

$$y \mapsto x,$$

其中 $x \in X$ 并且满足 $f(x) = y$ (由于 f 是双射, 这样的 x 存在并且唯一). 称 g 为 f 的**逆映射**, 记为 f^{-1} .



特征函数 设 A 是 X 的子集. 令

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

则 $\chi_A(x)$ 是定义在 X 上的函数, 称为 A 的**特征函数**.

以后会经常用到这个函数.



关于特征函数成立以下简单性质:

$$(1) \quad A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x).$$

$$(2) \quad \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x).$$

$$(3) \quad \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

$$(4) \quad \chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)),$$

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

$$(5) \quad \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) \quad (A \subset X, B \subset Y).$$

$$(6) \quad \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \quad \left(A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_m \cap A_n = \emptyset (m \neq n) \right).$$



特征函数为函数的表示带来方便.

例如, 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 X 的互不相交的子集, $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

若 $f_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ 是定义在 A_i 上的函数, 则

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1, \\ f_2(x), & x \in A_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x), & x \in A_n, \end{cases}$$

是定义在 X 上的函数, 并且 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \chi_{A_i}(x).$$



1.2.2 可列集

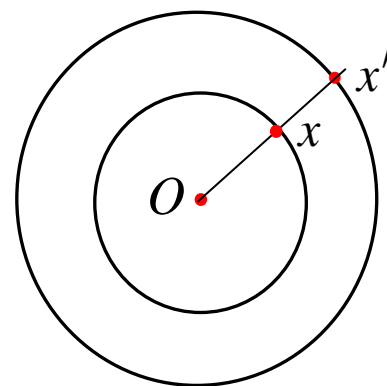
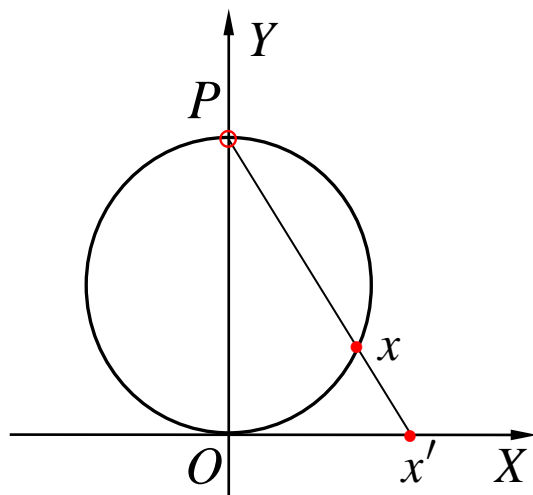
给定两个非空集 A 和 B . 若存在一个从 A 到 B 的双射, 则该映射建立了这两个集的元素之间的一一对应. 因此我们有如下的定义.

定义 1.5 设 A 和 B 是两个非空集. 若存在一个从 A 到 B 的双射, 则称 A 与 B 是**对等的**, 记为 $A \sim B$. 此外补充定义 $\emptyset \sim \emptyset$.



例如, 数集 $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ 与自然数集 \mathbf{N} 是对等的.

又如, 作为平面上的点集, 圆周去掉一点后与直线对等. 两个半径不同的圆作是对等的.



显然,集的对等关系具有如下性质:

- (1) $A \sim A$ (反身性);
- (2) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$ (对称性);
- (3) 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$ (传递性).

利用对等的概念,可以给出有限集和无限集严格定义.

设 A 是一非空集. 若存在一个自然数 n , 使得 A 与集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 对等, 则称 A 为有限集. 规定空集是有限集.

若 A 不是有限集, 则称 A 为无限集.



自然数集 \mathbf{N} 是无限集. 它有一个重要的特点, 就是它的元素可以编号排序成为一个无穷序列 (稍后我们将会举例说明, **并非每个无限集都可以做到这一点!**).

具有这种性质的集就是下面要讨论的可列集.

定义 1.6 与自然数集 \mathbf{N} 对等的集称为**可列集**.

有限集和可列集统称为**可数集**. 注意, 有的作者将这里的可列集称为可数集. 此时可数集不包括有限集.

由对等关系的传递性知道, **若 A 是可列集, B 与 A 对等, 则 B 也是可列集.**



定理 1.4 集 A 是可列集的充要条件是 A 的元素可以编号排序成为一个无穷序列

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}. \quad (1.5)$$

证 设 A 是可列集, 则存在一个 A 到 \mathbf{N} 的双射, 记为 φ .

对任意 $a \in A$, 若 $\varphi(a) = n$, 则将 a 记为 a_n . 这样, A 的元素就编号排序成为如(1.5)式的无穷序列.

反过来, 若 A 的元素可以编号排序成为如(1.4)的无穷序列, 令 $f(a_n) = n$, 则 f 是 A 到 \mathbf{N} 的双射. 因此 A 是可列集. ■

注意, 编号排序必须**既无遗漏, 也无重复**.



例5 自然数集当然是可列集. 以下几个集都可以编号排序, 因此都是可列集:

奇自然数集: $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$.

整数集 \mathbf{Z} : $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}$.

三角函数系:

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$

在上面的例子中, 奇自然数集是自然数集的真子集, 但却与自然数集对等. 这表明无限集可以与其真子集对等. 这与有限集的情形是不同的.



下面给出一个不可列的无限集的例子.

定理 1.5 区间 $(0,1)$ 不是可列集.

证 首先注意到, 区间 $(0,1)$ 中的每个实数都可以唯一地表示为十进制无限小数:

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots,$$

其中 a_i 是 $0, 1, \dots, 9$ 中的数字, 并且有无限多个 a_i 不为零. 例如 0.5 表示为 $0.499\dots$, 不表示为 $0.500\dots$. (本节后面马上要讨论 p 进制小数表示法, 将证明这种表示法的存在性和唯一性).

下面我们证明区间 $(0,1)$ 不是可列集.



用反证法. 若 $(0, 1)$ 是可列集, 则 $(0, 1)$ 中的实数可以编号排序成为一个无穷序列:

$$(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, \quad (1.6)$$

设 $x_i (i = 1, 2, \dots)$ 的十进制无限小数表示为

$$x_1 = 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots,$$

$$x_2 = 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots,$$

$$x_3 = 0.a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots,$$

.....



$$(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, \quad (1.6)$$

现在考虑小数

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots,$$

其中

$$a_i = \begin{cases} 1 & a_i^{(i)} \neq 1, \\ 2, & a_i^{(i)} = 1. \end{cases}$$

则 $x \in (0, 1)$. 但是 $x \neq x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ (因为 x 与 x_i 的第 i 位数字不同). 这样 x 就不在(1.6)式右端的序列中, 这与假设矛盾! 因此区间 $(0, 1)$ 不是可列集. ■



例 6 若 A 是可列集, B 是有限集, 则 $A \cup B$ 是可列集.

证 由于 A 是可列集, 因此可以设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. 又设 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A \cup B$ 的元素可以编号排序为

$$A \cup B = \{b_1, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots\}.$$

此时 $A \cup B$ 是可列集. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 注意到

$$A \cup B = A \cup (B - A),$$

这表明 $A \cup B$ 可以表示为可列集与有限集的不相交并, 此时 $A \cup B$ 也是可列集. ■



定理 1.6 可列集的任何无限子集还是可列集.

证 设 A 是一可列集, 则 A 的元素可以编号排序成为一个无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

设 B 是 A 的一个无限子集. 则 B 中的元素是上述序列的一个子列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots.$$

因此 B 是可列集. ■

结合定理 1.5 和定理 1.6 知道, 实数集 \mathbf{R}^1 不是可列集.



定理 1.7 任何无限集必包含一个可列的子集.

证 设 A 是无限集. 在 A 中任取一个元, 记为 a_1 .

假定 a_1, \cdots, a_{n-1} 已经取定. 由于 A 是无限集, 故

$$A - \{a_1, \cdots, a_{n-1}\} \neq \emptyset.$$

在 $A - \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 中任取一个元, 记为 a_n .

这样一直作下去, 就得到 A 中的一个无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

令 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}$, 则 A_1 是 A 的一个可列的子集. ■



定理 1.8 若 $\{A_i\}$ 是一列可列集, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列集. 即可列集的有限并和可列并还是可列集.

证 设 $\{A_i\}$ 是一列可列集, 则每个 A_i 的元素可以编号排序. 设

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots\} \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

先考虑可列并的情形. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 的元素可按如下方式编号排序:



$$\begin{array}{rcl}
 A_1 : & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 A_2 : & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\
 A_3 : & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\
 & \nearrow & \nearrow & & & \\
 A_4 : & a_{41} & a_{42} & \cdots & & \\
 & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
 \end{array}$$

在编号排序时,若碰到前面已编号的重复元素,则跳过去不再编号.



于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 的全部元素可以按上述方式编号排序成为

一无穷序列. 所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集.

对于集 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 也可以用同样的方法编号排序, 因此 $\bigcup_{i=1}^n A_i$

也是可列集. ■



定理 1.9 若 $\{A_i\}$ 是一列有限集, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是有限集或可列集.

证 记 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 我们只需证明, 当 A 不是有限集时,

A 是可列集. 事实上, 可以先排 A_1 的元素, 排完 A_1 的元素后再排 A_2 的元素, 这样一直排下去. 若碰到重复元素则跳过去不排. 这样, A 的元素可以编号排序成为一无穷序列. 因此 A 是可列集. ■

定理 1.8 和定理 1.9 可以合并叙述为: **可数个可数集的并还是可数集.**



定理 1.10 若 A_1, A_2, \dots, A_n 都是可列集, 则它们的直积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 也是可列集.

证 为简单计不放只证 $n=2$ 的情形. 一般情况可以用数学归纳法证明. 设

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}, A_2 = \{b_1, b_2, \dots\}.$$

对每个正整数 $k \geq 1$, 令

$$E_k = A_1 \times \{b_k\} = \{(a_i, b_k) : a_i \in A_1\}.$$

则 $A_1 \times A_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 将 (a_i, b_k) 与 a_i 对应即知 E_k 与 A_1 对等. 故

每个 E_k 是可列集. 根据定理 1.8 知道 $A_1 \times A_2$ 是可列集. ■



推论 1.1 设 I_1, \dots, I_n 是 n 个可列集, A 是以 $I_1 \times \dots \times I_n$ 中的元为下标的元的全体, 即

$$A = \{ a_{i_1, \dots, i_n} : i_1 \in I_1, \dots, i_n \in I_n \}$$

则 A 是可列集.

证 将 a_{i_1, \dots, i_n} 与 (i_1, \dots, i_n) 对应即知 A 与 $I_1 \times \dots \times I_n$ 对等.

由定理 1.10, $I_1 \times \dots \times I_n$ 是可列集, 因此 A 也是可列集. ■

例如, 集 $A = \{ a_{ij} : i, j \in \mathbf{N} \}$ 是可列集.



例 7 有理数集 \mathbf{Q} 是可列集.

证 对每个 $n = 1, 2, 3, \dots$, 令

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \right\}.$$

则每个 A_n 是可列集.

由于正有理数集 $\mathbf{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 由定理 1.8 知道 \mathbf{Q}^+ 是可列集.

由于负有理数集 \mathbf{Q}^- 与 \mathbf{Q}^+ 对等, \mathbf{Q}^- 也是可列集. 从而

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{0\}$ 是可列集. ■

有理数集是可列集, 这个事实很重要, 以后会经常用到.



例 8 设 $\mathbf{Q}^n = \underbrace{\mathbf{Q} \times \cdots \times \mathbf{Q}}_n$ 是 n 个有理数集的直积. \mathbf{Q}^n 中的元称为是 \mathbf{R}^n 中的有理点(即坐标全为有理数的点).
由例 7 和定理 1.10 知道 \mathbf{Q}^n 是可列集.



例 9 整系数多项式的全体是可列集.

证 设 $P_n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 是 n 次整系数多项式的全体.

则 $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ 就是整系数多项式的全体. 由对应关系

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \leftrightarrow (a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

即知 $P_n \sim \mathbf{Z}_0 \times \mathbf{Z}_1 \times \cdots \times \mathbf{Z}_n$ (其中 $\mathbf{Z}_0, \cdots, \mathbf{Z}_{n-1} = \mathbf{Z}$ 是整数集,

$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z} - \{0\}$). 由于 $\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \cdots, \mathbf{Z}_n$ 都是可列集, 根据定理 1.10

$\mathbf{Z}_0 \times \mathbf{Z}_1 \times \cdots \times \mathbf{Z}_n$ 是可列集, 因此每个 P_n 都是可列集.

再由定理 1.8 知道 $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ 是可列集. ■



设 x 是一个实数. 若 x 是某个整系数多项式的零点, 则称 x 为**代数数**. 若 x 不是代数数, 则称 x 为**超越数**.

显然每个有理数是代数数.

由于 $\sqrt{2}$ 是方程 $x^2 - 2 = 0$ 的根, 因此 $\sqrt{2}$ 是代数数.

这表明有些无理数也是代数数. 因此代数数集比有理数集大. 那么代数数集还是可列集吗?

结论是肯定的.



例 10 代数数集是可列集.

证 将代数数集记为 A . 根据例 9 的结论, 可设整系数多项式的全体为 $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$. 又设

$$A_n = \{x : x \text{ 是 } p_n \text{ 的实零点}\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

则每个 A_n 是有限集, 并且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 显然 A 是无限集,

根据定理 1.9 知道, A 是可列集. ■

由于代数数集是可列集, 而实数集 \mathbf{R}^1 不是可列集, 这说明超越数是存在的.



例 11 若 $A = \{I_\alpha\}$ 是直线上一族互不相交的开区间所成的集, 则 A 是可数集.

证 对每个 $I_\alpha \in A$, 在其中任取一个有理数记为 r_α . 作映射

$$f : A \rightarrow \mathbf{Q},$$

$$I_\alpha \mapsto r_\alpha.$$

由于当 $I_{\alpha_1} \neq I_{\alpha_2}$ 时 $I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2} = \emptyset$, 因此 $r_{\alpha_1} \neq r_{\alpha_2}$. 这说明 f 是单射. 令 $B = f(A)$, 则 f 是 A 到 B 的双射, 从而 $A \sim B$.

由于 \mathbf{Q} 是可列集, $B \subset \mathbf{Q}$, 由定理 1.6 知道 B 是可数集. 因此 A 也是可数集. ■



例 12 单调函数的间断点的全体是可数集.

证 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数. 不妨设 $f(x)$ 是单调增加的.

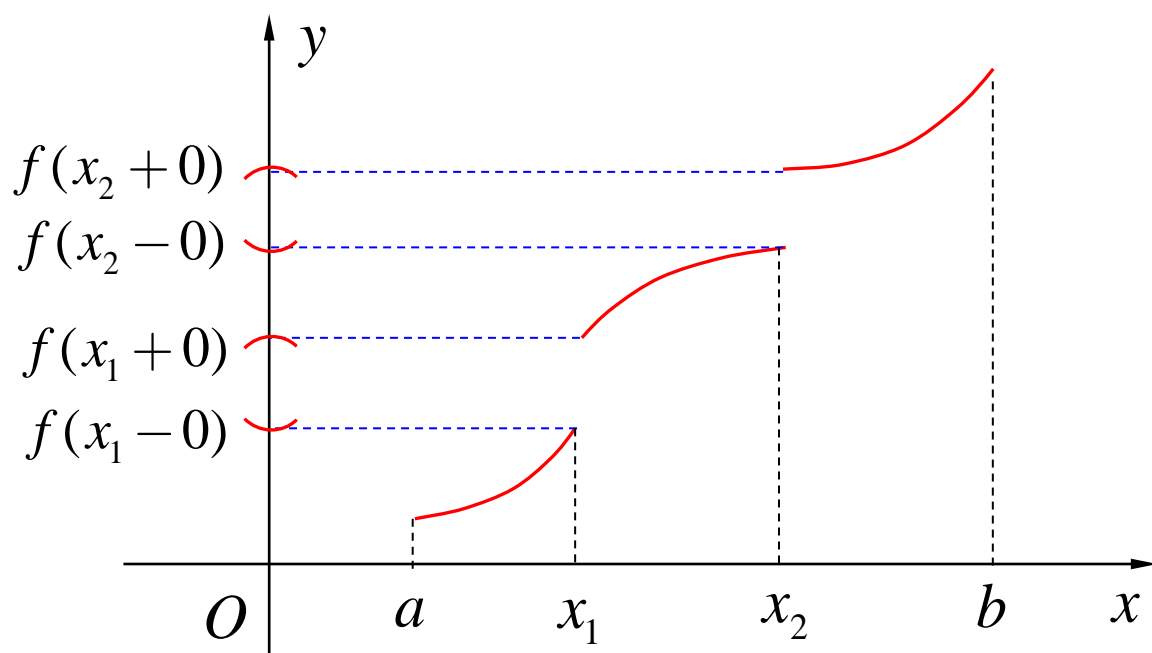
于是对任意 $x \in I$, $f(x)$ 在 x 处的左右单侧极限 $f(x-0)$ 和 $f(x+0)$ 都存在, 并且 $f(x-0) \leq f(x+0)$.

若 x 是 $f(x)$ 的间断点, 则 $f(x-0) < f(x+0)$.

这样 $f(x)$ 的每个间断点 x 就对应一个开区间
 $(f(x-0), f(x+0))$.



由于当 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$, 因此不同的间断点对应的开区间不相交(如图所示). 这样 $f(x)$ 的间断点的全体就对应于直线上的一族互不相交的开区间. 由例 11 的结果即知 $f(x)$ 的间断点的全体是可数集. ■



1.2.3 基数

两个有限集可以比较它们的元素的多与少.

对于两个无限集,可以通过元素对应的方法,在某种意义下也可以比较它们的元素的多与少.

定义 1.7 设 A 和 B 是两个集,如果 $A \sim B$, 则称 A 和 B 具有相同的**基数**(或**势**). 集 A 的基数记为 \overline{A} .

根据基数的定义,所有相互对等的集具有同样的基数. 因此,集的基数是所有相互对等的集的一种共同属性,是有限集元素个数这个属性的推广.



几个特定集的基数

规定集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的基数用 n 表示, 空集 \emptyset 的基数用 0 表示. 即有限集的基数等于该集中元素的个数.

自然数集 \mathbf{N} 的基数用符号 \aleph_0 (读作“阿列夫零”)表示.

实数集 \mathbf{R}^1 的基数用 c 表示, 称之为连续基数.

基数的比较

对于两个有限集, 我们可以比较它们的元素的个数的多与少. 对于无限集而言, 元素的个数已经没有意义, 但是可以比较它们的基数的大小.



定义 1.8 设 A 和 B 是两个集. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 A 的基数 **小于或等于** B 的基数, 记为 $\overline{A} \leq \overline{B}$.

若 A 与 B 的一个真子集对等, 但与 B 不对等, 则称 A 的基数 **小于** B 的基数, 记为 $\overline{A} < \overline{B}$.

注 1 对于无限集而言, 当 A 与 B 的一个真子集对等时, A 还可能与 B 本身对等. 例如前面已经提到奇自然数集与自然数集对等. 因此在定义 1.8 中, 只有当 A 与 B 的一个真子集对等, 但与 B 不对等时, 才说 A 的基数小于 B 的基数.



例 13 若 A 是无限集, 则 $\aleph_0 \leq \overline{\overline{A}}$. 换言之, 可列集的基数是无限集基数中的最小的一个.

事实上, 根据定理 1.7, A 包含一个可列的子集. 设这个可列的子集为 A_1 . 则自然数集 \mathbf{N} 与 A_1 对等. 因此 $\overline{\overline{\mathbf{N}}} \leq \overline{\overline{A}}$, 即 $\aleph_0 \leq \overline{\overline{A}}$.

此外, 由于 \mathbf{N} 是 \mathbf{R}^1 的真子集, 但 \mathbf{N} 与 \mathbf{R}^1 不对等, 因此 $\overline{\overline{\mathbf{N}}} < \overline{\overline{\mathbf{R}^1}}$, 即 $\aleph_0 < c$.



定理 1.11 若 A 是无限集, B 是有限集或可列集, 则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}.$$

证 只需证明 $A \cup B \sim A$. 下面只考虑 B 是可列集的情形. B 是有限集的情形可以类似地证明.

不妨设 $A \cap B = \emptyset$, 否则用 $B - A$ 代替 B . 设

$$B = \{b_1, b_2, \dots\}.$$

因为 A 为无限集, 由定理 1.7 知道 A 包含一个可列的子集, 记为 A_1 . 设

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}.$$



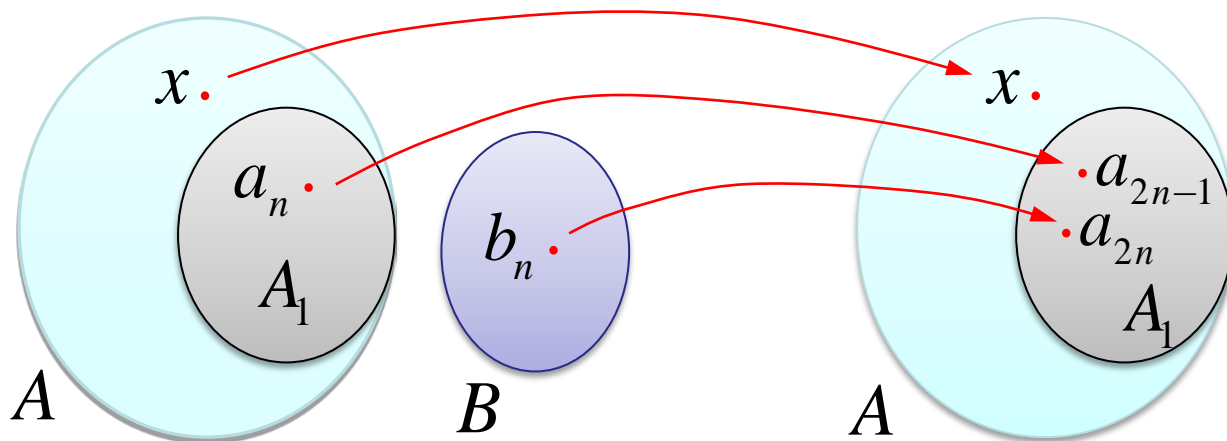
作映射 $f : A \cup B \rightarrow A$, 使得

当 $a_n \in A_1$ ($n = 1, 2, \dots$) 时, $f(a_n) = a_{2n-1}$,

当 $b_n \in B$ ($n = 1, 2, \dots$) 时, $f(b_n) = a_{2n}$,

当 $x \in A - A_1$ 时, $f(x) = x$.

显然 f 是 $A \cup B$ 到 A 的双射. 因此 $A \cup B \sim A$, 于是 $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.



例 14 无理数集的基数是 c .

证 记无理数集为 A , 有理数集为 \mathbf{Q} . 由于 A 是无限集, \mathbf{Q} 是可列集, 根据定理 1.11, 我们有

$$\overline{A} = \overline{A \cup \mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{R}^1} = c.$$

因此无理数集的基数是 c . ■

例 14 表明在实数集中, 无理数比有理数多得多.



类似于例 14 可以证明,超越数的全体具有基数 c . 而代数数集的基数是 \aleph_0 , 这表明**超越数是存在的, 而且要比代数数多得多.**

在 Cantor 创立集合论之前, 曾有一些数学家努力去证明超越数是存在的. 后来终于证明了 e (自然对数的底) 是超越数.

然而用基数理论不仅证明了超越数是存在的, 而且还很多. 不过这种方法只是证明了超越数的存在性, 却不能告诉我们那些数是超越数. 尽管如此, 这仍然显示出基数理论的应用价值.



例 15 区间 $(0, 1)$ 和区间 $[0, 1]$ 的基数都是 c .

证明 作函数

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad f(x) = \tan(x - \frac{1}{2})\pi.$$

则 f 是一个双射. 因此 $(0, 1)$ 与 \mathbf{R}^1 对等, 从而 $(0, 1)$ 的基数是 c . 由于 $[0, 1] = (0, 1) \cup \{0, 1\}$, 根据定理 1.11 知道,

$$\overline{\overline{[0, 1]}} = \overline{\overline{(0, 1)}} = c. \quad \blacksquare$$

一般地, 可以证明**直线上任何区间的基数都是 c** .



证明 $[0, 1] \sim (0, 1)$ 的另一方法.

在上面在证明 $[0, 1] \sim (0, 1)$ 时, 我们利用了定理 1.11.

实际上也可以直接作出一个 $[0, 1]$ 到 $(0, 1)$ 的双射.

例如, 作映射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ 使得

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = \frac{1}{3}, \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

$$\varphi(x) = x \quad \left(x \neq 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

则 φ 是 $[0, 1]$ 到 $(0, 1)$ 的双射. 因此 $[0, 1] \sim (0, 1)$.



p 进制小数 设 $p \geq 2$ 是一自然数, $\{a_n\}$ 是一个数列, 其中 a_n 只取 $0, 1, \dots, p-1$ 为值. 则级数

$$\frac{a_1}{p^1} + \frac{a_2}{p^2} + \dots + \frac{a_n}{p^n} + \dots \quad (1.7)$$

收敛, 并且其和 $x \in [0, 1]$. 把级数(1.7)的和记为

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \quad (1.8)$$

称上式的右边为 **p 进制小数**. 在 p 进制小数(1.8)中, 若有无限多个 $a_n \neq 0$, 则称之为 **p 进制无限小数**, 否则称之为 **p 进制有限小数**. 这样, 一个 p 进制无限小数表示区间 $(0, 1]$ 中的一个实数. 反过来, 我们有下面的定理:



定理 1.12 区间 $(0, 1]$ 中的任一实数都可以唯一地表示为一个 p 进制无限小数.

证 以 $p = 2$ 为例. 一般情形是类似的. 设 $x \in (0, 1]$.

将区间 $(0, 1]$ 分割为两个等长的区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 和 $(\frac{1}{2}, 1]$.

若 x 落入在第一个区间, 则令 $a_1 = 0$. 若 x 落入在第二个区间, 则令 $a_1 = 1$. 设 a_1 已经确定.

将 x 落入的那个区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 或 $(\frac{1}{2}, 1]$ 分割为两个等长的区间

$$\left(0, \frac{1}{2^2}\right], \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\right] \quad \left(\text{或} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right], \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, 1\right]\right).$$



若 x 落入在第一个区间, 则令 $a_2 = 0$. 若 x 落入在第二个区间, 则令 $a_2 = 1$.

这样一直作下去, 得到一个数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_n = 0$ 或 1 , 并且有无限多个 a_n 不为零.

由这样的数列 $\{a_n\}$ 构成的级数(1.7)的部分和 s_n 满足

$$0 < x - s_n < \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 1).$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. 这表明 x 是级数(1.7)的和. 于

是 x 可以唯一地表示成二进制无限小数

$$x = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots.$$



设 $a = (a_1, a_2, \dots)$ 是一数列. 若每个 a_n 只取 0 或 1 两个可能的值, 则称 $\{a_n\}$ 为**二元数列**.

定理 1.13 (1). 二元数列的全体所成的集具有基数 c .

(2). 若 X 是一可列集, 则 X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 具有基数 c .

证 (1). 证明的基本思路是利用区间 $(0, 1]$ 中实数的二进制无限小数表示法.

将二元数列的全体记为 A . 令

$$B = \{a \in A : a = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots), n = 1, 2, \dots\}.$$

即 B 是从某一项开始恒为零的二元数列的全体.



对每个 $n = 1, 2, \dots$, 令

$$B_n = \{a \in A : a = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)\}.$$

则 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 由于每个 B_n 只有 2^n 个元, 故 B 是可列集.

作映射 $f : A - B \rightarrow (0, 1]$ 使得

$$f((a_1, a_2, \dots)) = 0.a_1 a_2 \dots$$

则 f 是双射. 因此 $A - B \sim (0, 1]$, 从而

$$\overline{\overline{A - B}} = \overline{\overline{(0, 1]}} = c.$$

由定理 1.11 得到

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{(A - B) \cup B}} = \overline{\overline{A - B}} = c.$$



(2). 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. 仍设 A 是二元数列的全体.

作映射 $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow A$, 使得

$$\varphi(C) = (a_1, a_2, \dots) \quad (C \in \mathcal{P}(X))$$

其中

$$a_n = \begin{cases} 1, & x_n \in C, \\ 0, & x_n \notin C. \end{cases}$$

则 φ 是一个双射. 因此 $\mathcal{P}(X) \sim A$, 从而

$$\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = \overline{\overline{A}} = c.$$



特别地, 自然数集 \mathbf{N} 的子集的全体所成的集具有基数 c .



对于两个实数 a 和 b , 若 $a \leq b$ 并且 $b \leq a$, 则 $a = b$. 下面的 Bernstein 定理表明, 对于基数成立类似的结果.

定理 1.14* (F. Bernstein) 设 A 和 B 是两个集. 若 A 与 B 的一个子集对等, 并且 B 与 A 的一个子集对等, 则 A 与 B 对等.

用基数表示就是, 若 $\overline{A} \leq \overline{B}$ 并且 $\overline{B} \leq \overline{A}$, 则 $\overline{A} = \overline{B}$.

证明 略(不作要求).

Bernstein 定理是证明两个集对等的一个有力工具. 下面举几个例子说明 Bernstein 定理的应用.



例 16 设 \mathbf{R}^∞ 是实数列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 的全体. 则
$$\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = c.$$

证明 设

$$(0, 1)^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots) : 0 < x_i < 1\}.$$

则 $(0, 1)^\infty \subset \mathbf{R}^\infty$. 作映射 $f : (0, 1)^\infty \rightarrow \mathbf{R}^\infty$ 使得

$$f(x_1, x_2, \dots) = \left(\tan(x_1 - \frac{1}{2})\pi, \tan(x_2 - \frac{1}{2})\pi, \dots \right),$$

则 f 是 $(0, 1)^\infty$ 到 \mathbf{R}^∞ 的双射, 从而 $(0, 1)^\infty \sim \mathbf{R}^\infty$. 因此

我们只需证明 $\overline{\overline{(0, 1)^\infty}} = c$.



对任意 $x \in (0,1)$, 将 x 与 $(0,1)^\infty$ 中的元 $x = (x, x, \cdots)$ 对应, 即知 $(0,1)$ 与 $(0,1)^\infty$ 的子集 $\{(x, x, \cdots) : x \in (0,1)\}$ 对等, 从而

$$\overline{\overline{(0, 1)}} \leq \overline{\overline{(0, 1)^\infty}}. \quad (1.9)$$

反过来, 设 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in (0, 1)^\infty$, 将每个 x_i 表示为十进制无限小数:

$$x_1 = 0. x_{11} x_{12} x_{13} \cdots x_{1n} \cdots,$$

$$x_2 = 0. x_{21} x_{22} x_{23} \cdots x_{2n} \cdots,$$

$$x_3 = 0. x_{31} x_{32} x_{33} \cdots x_{3n} \cdots,$$

.....

$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn}\cdots,$$

.....



令 $g(x) = 0.x_{11} x_{21} x_{12} x_{31} x_{22} x_{13} \cdots$, 其中各小数位数字的取法顺序按照对角线方法. 则 g 是单射, 因此 $(0, 1)^\infty$ 与 $(0, 1)$ 的一个子集对等, 从而

$$\overline{\overline{(0, 1)^\infty}} \leq \overline{\overline{(0, 1)}}. \quad (1.10)$$

综合(1.9)和(1.10), 利用 Bernstein 定理即知

$$\overline{\overline{(0, 1)^\infty}} = \overline{\overline{(0, 1)}} = c,$$

从而 $\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = c$. ■



例 17 证明 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = c$.

证 由于 \mathbf{R}^1 与 \mathbf{R}^n 的子集 $\{(x, 0, \dots, 0) : x \in \mathbf{R}^1\}$ 对等, 因此 $\overline{\overline{\mathbf{R}^1}} \leq \overline{\overline{\mathbf{R}^n}}$.

另一方面, \mathbf{R}^n 与 \mathbf{R}^∞ 的子集

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n\}$$

对等, 因此 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} \leq \overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \overline{\overline{\mathbf{R}^1}}$.

根据 Bernstein 定理即知 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = \overline{\overline{\mathbf{R}^1}} = c$.



例 18 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数的全体. 则

$$\overline{\overline{C[a, b]}} = \mathbf{R}^1.$$

证 对任意 $c \in \mathbf{R}^1$, 作常数函数 $f(x) = c (x \in [a, b])$, 则 $f \in C[a, b]$. 因此 \mathbf{R}^1 与 $C[a, b]$ 的一个子集对等, 从而

$$\overline{\overline{\mathbf{R}^1}} \leq \overline{\overline{C[a, b]}}. \quad (1.11)$$

另一方面, 设 $\{r_1, r_2, \dots\}$ 是 $[a, b]$ 中的有理数的全体. 作映射 $\varphi: C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^\infty$ 使得

$$\varphi(f) = (f(r_1), f(r_2), \dots) \quad (f \in C[a, b]).$$

则 φ 是单射. 事实上, 若 $f, g \in C[a, b]$ 使得 $\varphi(f) = \varphi(g)$, 则

$$f(r_i) = g(r_i) \quad (i = 1, 2, \dots).$$



对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\{r_n\}$ 的一个子列 $\{r_{n_k}\}$ 使得 $r_{n_k} \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$). 由于 f 和 g 的连续性得到

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(r_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(r_{n_k}) = g(x).$$

所以 $f = g$. 这表明 φ 是单射, 因此 $C[a, b]$ 与 \mathbf{R}^∞ 的一个子集对等. 于是

$$\overline{\overline{C[a, b]}} \leq \overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \overline{\overline{\mathbf{R}^1}}. \quad (1.12)$$

综合(1.11)和(1.12), 利用 Bernstein 定理即知

$$\overline{\overline{C[a, b]}} = \overline{\overline{\mathbf{R}^1}} = c. \quad \blacksquare$$



注 2 根据定理 1.13(2)的结论, 若 X 的基数是 \aleph_0 , 则 $\mathcal{P}(X)$ 的基数是 c . 在例 13 中的已经知道 $\aleph_0 < c$. 因此若 X 是一可列集, 则 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$.

一般地可以证明对任何一个非空集 A , 必有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.
这说明**不存在一个具有最大基数的集.**

注 3 关于连续统假设. 集合论的创立者 Cantor 猜想不存在一个集 A 使得 $\aleph_0 < \overline{\overline{A}} < c$. Cantor 用了很大精力试图证明这个结论, 但没有成功. 但他相信这个结论是正确的. 这就是著名的“连续统假设”.



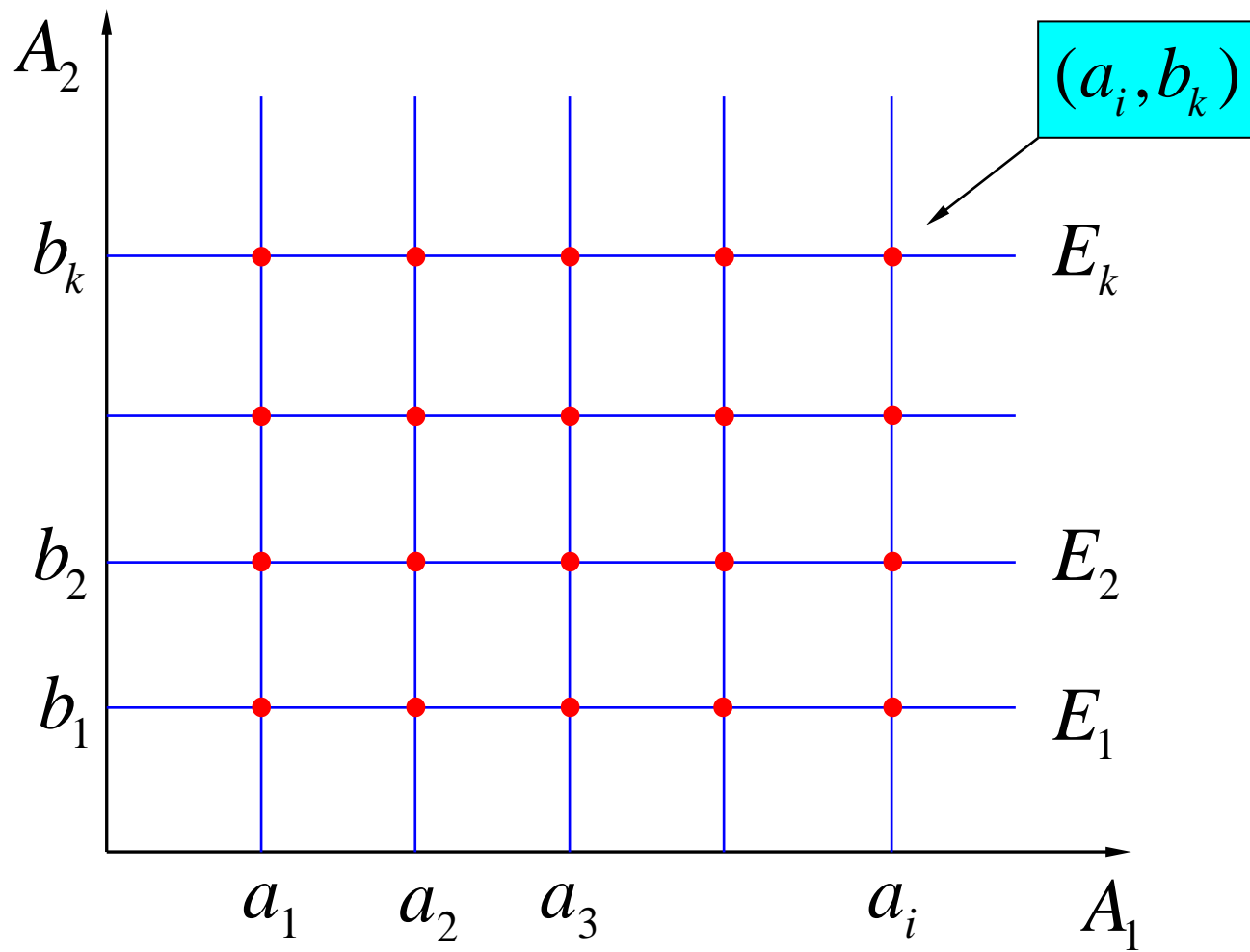
在 1900 年的国际数学家大会上,著名的数学家希尔伯特(D. Hilbert, 1862-1943)提出了在新世纪数学家应当关注的 23 个数学问题,其中第一个就是连续统假设.

连续统假设的真与假只能在给定的集合论的公理系统下才能作出结论.

在 Zermelo-Frankl 集合论公理系统的框架下,这个问题在 1938 年获得部分解决,直到 1963 年获得最终解决.

结论是,在 Zermelo-Frankl 集合论公理系统的框架下,连续统假设既不能被证明,也不能被推翻.连续统假设与集合论的其他公理是彼此独立的.





习 题

8, 9, 10, 11, 12, 15

B 类 2, 5



§ 1.3 集 类

1.3.1 代数与 σ -代数

设 X 是一固定的非空集. 以 X 的一些子集为元素的集称为 X 上的**集类**. 一般用花体字母如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 等表示集类.

例如, 由 X 的所有子集构成的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 就是 X 上的一个集类. 又如, 直线上开区间的全体是 \mathbf{R}^1 上的一个集类.



集类的运算封闭性 设 \mathcal{A} 是一非空集类.

若对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 均有 $A \cup B \in \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} **对并运算封闭**.

显然若 \mathcal{A} 对并运算封闭, 则 \mathcal{A} 对有限个集的并运算也封闭.

若对 \mathcal{A} 中的任意一列集 $\{A_n\}$ 总有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} **对可列并运算封闭**.

类似可定义集类对其它运算的封闭性.



例如, 考虑 \mathbf{R}^1 上的集类

$$\mathcal{C} = \left\{ A \subset \mathbf{R}^1 : A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i), n = 1, 2, \dots, \text{或 } A = \emptyset \right\}.$$

易知 \mathcal{C} 对并运算和交运算封闭, 但对差运算和可列并运算不封闭.

以下设 X 是一给定的非空集.

定义 1.9 设 \mathcal{A} 是 X 上的一个集类. 若 $\emptyset \in \mathcal{A}$, 并且 \mathcal{A} 对并运算和余运算封闭, 则称 \mathcal{A} 为**代数**.



例 1 设 X 是无限集. 令 $\mathcal{A} = \{A \subset X: A \text{ 或是有限集或是 } A^c \text{ 是有限集}\}$.
则 \mathcal{A} 是代数.

证 显然 $\emptyset \in \mathcal{A}$ 并且 \mathcal{A} 对余运算封闭.

设 $A, B \in \mathcal{A}$. 若 A 和 B 都是有限集, 则 $A \cup B$ 是有限集, 因而 $A \cup B \in \mathcal{A}$. 若 A 和 B 中至少有一个是无限集, 不妨设 A 是无限集. 则 A^c 是有限集. 由于

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$$

故 $(A \cup B)^c$ 是有限集, 此时也有 $A \cup B \in \mathcal{A}$. 因此 \mathcal{A} 对并运算封闭. 这就证明了 \mathcal{A} 是代数. ■



定理 1.15 设 \mathcal{A} 是 X 上的一个集类. 则

(1) 若 $\emptyset \in \mathcal{A}$, 并且 \mathcal{A} 对交运算和余运算封闭, 则 \mathcal{A} 是代数.

(2) 若 \mathcal{A} 是一个代数, 则 \mathcal{A} 对交运算和差运算封闭.

证 (1). 设 $A, B \in \mathcal{A}$. 由于 \mathcal{A} 对余运算封闭, 故 $A^c, B^c \in \mathcal{A}$. 利用 \mathcal{A} 对交运算的封闭性得到 $A^c \cap B^c \in \mathcal{A}$.

再根据 De Morgan 公式和 \mathcal{A} 对余运算的封闭性, 得到

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}.$$

因此 \mathcal{A} 对并运算封闭, 从而 \mathcal{A} 是代数.



(2). 设 \mathcal{A} 是一个代数. 由等式

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

即知 \mathcal{A} 对交运算封闭.

再利用等式 $A - B = A \cap B^c$ 即知 \mathcal{A} 对差运算封闭. ■

结合代数的定义和定理 1.15 知道, 若 \mathcal{A} 是一个代数, 则 \mathcal{A} 对有限并、有限交、差运算和余运算封闭.



定义 1.10 设 \mathcal{F} 是 X 上的一个集类. 若 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 并且 \mathcal{F} 对可列并和余运算封闭, 则称 \mathcal{F} 为 σ -代数.

例 2 显然 $\mathcal{P}(X)$ 是 σ -代数, 这是 X 上的最大的 σ -代数.

由 \emptyset 和 X 两个集构成的集类 $\{\emptyset, X\}$ 也是一个 σ -代数.

另一方面, 若 \mathcal{F} 是 X 上的 σ -代数, 则必有 $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F}$

这是由于 $\emptyset \in \mathcal{F}$ 并且 \mathcal{F} 对余运算封闭, 故

$$X = \emptyset^c \in \mathcal{F}.$$

因此 $\{\emptyset, X\}$ 是 X 上的最小 σ -代数.

例 3 设 X 是无限集. 令 $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ 或是有限集或是 } A^c \text{ 是有限集}\}$. 则 \mathcal{A} 对可列并运算不封闭. 事实上, 由于 X 是无限集, 根据定理 1.7, X 包含一个可列子集. 设

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

是 X 的可列子集. 令 $A_n = \{a_{2n}\} (n=1, 2, \dots)$, 则每个 $A_n \in \mathcal{A}$.

但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_2, a_4, \dots\} \notin \mathcal{A}.$$

这表明 \mathcal{A} 对可列并运算不封闭, 因此 \mathcal{A} 不是 σ -代数. 若令

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \text{ 或 } A^c \text{ 是可数集}\}.$$

则 \mathcal{F} 是 X 上的 σ -代数. 这个结论的证明留作习题.



定理 1.16 设 \mathcal{F} 是一个 σ -代数. 则

- (1) \mathcal{F} 是代数.
- (2) \mathcal{F} 对并运算, 交运算, 差运算和可列交运算封闭.

证明 由于

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_n \cdots,$$

即有限并可以表示成可列并, 因此 \mathcal{F} 对有限并运算封闭, 从而 \mathcal{F} 是代数. 由定理 1.15 知道 \mathcal{F} 对有限交运算和差运算封闭.



根据 De Morgan 公式, 有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c.$$

由上式和 \mathcal{F} 对可列并运算和余运算的封闭性知道,
 \mathcal{F} 对可列交运算封闭. ■

注 结合 σ -代数的定义和定理 1.16 知道, 若 \mathcal{F} 是一个 σ -代数, 则 \mathcal{F} 对有限并和可列并、有限交和可列交、差运算和余运算都封闭. 因此 σ -代数具有很好的运算封闭性.



由集类生成的 σ -代数 设 \mathcal{C} 是一个非空集类, 则 $\mathcal{P}(X)$ 是一个包含 \mathcal{C} 的 σ -代数. 这表明至少存在一个包含 \mathcal{C} 的 σ -代数. 令 \mathcal{F} 是所有包含 \mathcal{C} 的 σ -代数的交.

容易证明 \mathcal{F} 满足以下两条性质:

- (1) \mathcal{F} 是包含 \mathcal{C} 的 σ -代数;
- (2) 若 \mathcal{F}' 是一个包含 \mathcal{C} 的 σ -代数, 则 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$

换言之, **\mathcal{F} 是包含 \mathcal{C} 的最小 σ -代数**. 这个 σ -代数称为是由集类 \mathcal{C} 生成的 σ -代数, 记为 $\sigma(\mathcal{C})$.



例 4 证明 $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}_1)$, 其中

$$\mathcal{C} = \{A \subset X : A \text{ 是有限集}\},$$

$$\mathcal{C}_1 = \{A \subset X : A \text{ 或是有限集 } \quad \}.$$

证 由于 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$, 并且 $\sigma(\mathcal{C})$ 是在包含 \mathcal{C} 的 σ -代数中最小, 因此 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$.

反过来, 先证明 $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C})$. 设 $A \in \mathcal{C}_1$, 则 A 或者 A^c 是有限集. 若 A 是有限集, 则 $A \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$. 若 A^c 是有限集, 则 $A^c \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 于是 $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{C})$. 这表明 $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C})$, 于是 $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C})$. 这就证明了 $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}_1)$. ■



例 5* 设 \mathcal{C} 是由 X 的单点子集的全体所成的集类. 则

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset X : A \text{ 或 } A^c \text{ 是可数集}\}. \quad (1.13)$$

证 将(1.13)式右边所定义的集类记为 \mathcal{F} .

显然 $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$. 不难验证 \mathcal{F} 是一个 σ -代数(参加习题 1, A 类第 17 题). 因此 \mathcal{F} 是一个包含 \mathcal{C} 的 σ -代数.

由于 $\sigma(\mathcal{C})$ 是包含 \mathcal{C} 的最小 σ -代数, 因此 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

反过来, 设 $A \in \mathcal{F}$. 若 A 是可数集, 则

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}, \text{ 或 } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\},$$



$$A = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}, \text{ 或 } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\},$$

其中 $a_i \in A$. 由于每个单点集 $\{a_i\} \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 并且 $\sigma(\mathcal{C})$ 对有限并和可列并运算封闭, 因此 $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

若 A^c 是可数集, 则 $A^c \in \sigma(\mathcal{C})$. 由于 $\sigma(\mathcal{C})$ 对余运算封闭, 于是 $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{C})$.

这说明, 当 $A \in \mathcal{F}$ 时, 在两种情况下均有 $A \in \sigma(\mathcal{C})$. 因此 $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{C})$

综上所述, 得到 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$. ■



例 6* 设 \mathcal{C} 是一非空集类. 证明对每个 $A \in \sigma(\mathcal{C})$, 都存在 \mathcal{C} 中的一列集 $\{A_n\}$, 使得 $A \in \sigma(\{A_n : n \geq 1\})$.

证 令 \mathcal{F} 是具有所述性质的子集的全体, 即

$$\mathcal{F} = \{A : \text{存在 } \{A_n\} \subset \mathcal{C}, \text{ 使得 } A \in \sigma(\{A_n, n \geq 1\})\}.$$

显然 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. 下面证明 \mathcal{F} 是 σ -代数.

显然 \mathcal{F} 对余运算封闭. 设 $\{E_k\}$ 是 \mathcal{F} 中的一列集. 则对每个 E_k , 存在 \mathcal{C} 中的一列集 $\{A_{k,n} : n \geq 1\}$, 使得

$$E_k \in \sigma(\{A_{k,n} : n \geq 1\}).$$

则 $\{A_{k,n} : k \geq 1, n \geq 1\}$ 仍是 \mathcal{C} 中的一列集, 并且



$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \{A_{k,n} : k \geq 1, n \geq 1\},$$

这说明 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$. 因此 \mathcal{F} 对可列并运算封闭. 这就证明了 \mathcal{F} 是一个包含 \mathcal{C} 的 σ -代数.

既然 \mathcal{F} 是包含 \mathcal{C} 的 σ -代数, 而 $\sigma(\mathcal{C})$ 是包含 \mathcal{C} 的最小 σ -代数, 因此 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

这说明对任意 $A \in \sigma(\mathcal{C})$, 都存在 \mathcal{C} 中的一列集 $\{A_n\}$, 使得 $A \in \sigma(\{A_n, n \geq 1\})$. ■



例 6 的证明方法是测度论中常用的一种证明方法. 叙述如下:

设 \mathcal{C} 是一个非空集类. 如果要证明 $\sigma(\mathcal{C})$ 中所有的集都具有某种性质 P . 令

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \text{ 具有性质 } P\}.$$

然后证明: (1). $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$; (2). \mathcal{F} 是一个 σ -代数.

于是由 $\sigma(\mathcal{C})$ 的最小性知道 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$. 即 $\sigma(\mathcal{C})$ 中所有的集都具有性质 P .



习 题

16, 17, 18



§ 1.4 \mathbf{R}^n 中的点集

1.4.1 \mathbf{R}^n 上的距离

1.4.2 开集与闭集

1.4.3 \mathbf{R}^n 上的连续函数

1.4.4 开集的构造

1.4.5 Borel 集

1.4.6 Cantor 集



1.4.1 \mathbf{R}^n 上的距离

设 n 是正整数. 由有序 n 元实数组的全体所成的集合 \mathbf{R}^n 称为 n 维欧氏空间, 即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^1\}.$$

其中 \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^2 和 \mathbf{R}^3 分别就是直线, 平面和三维空间. 熟知 \mathbf{R}^n 按照如下的加法和数乘运算成为一个 n 维线性空间:

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 称为 \mathbf{R}^n 中的点或向量, 称 x_i ($i = 1, \cdots, n$) 为 x 的第 i 个坐标.



对 \mathbf{R}^n 中的任意两点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_n)$,
定义这两点之间的**距离**为

$$d(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由上式定义的的距离具有以下性质:

- (1) **正定性**: $d(x, y) \geq 0$, 并且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.
- (2) **对称性**: $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) **三角不等式**: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.



利用 \mathbf{R}^n 上的距离可以定义 \mathbf{R}^n 中的点列的极限.

定义 1.11 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个点列, $x \in \mathbf{R}^n$ 若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0,$$

则称 $\{x_k\}$ 收敛于 x , 称 x 为 $\{x_k\}$ 的**极限**, 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \text{ 或 } x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty).$$

\mathbf{R}^n 中点列的按距离收敛等价于按坐标收敛. 即如果

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}), \quad x = (x_1, \cdots, x_n),$$

则

$$x^{(k)} \rightarrow x \Leftrightarrow \text{对每个 } i=1, 2, \cdots, n \text{ 有 } x_i^{(k)} \rightarrow x_i.$$



设 A 和 B 是 \mathbf{R}^n 的非空子集. 定义 A 与 B 的距离为

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, y) : x \in A, y \in B \}.$$

特别地, 若 $x \in \mathbf{R}^n$, 称

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) : y \in A \}$$

为 x 与 A 的距离.

设 A 是 \mathbf{R}^n 的非空子集. 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in A$ 有 $d(x, 0) \leq M$, 则称 A 是有界集.

1.4.2 开集与闭集

定义 1.12 设 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$. 称集

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

为点 x_0 的 ε -邻域.

利用邻域可以定义 \mathbf{R}^n 中的各种点集.

定义 1.13 设 $A \subset \mathbf{R}^n$.

- (1) 若 $x_0 \in A$, 并且存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0, \varepsilon) \subset A$, 则称 x_0 为 A 的**内点**.
- (2) 若 A 中的每个点都是 A 的内点, 则称 A 为**开集**.
- (3) 由 A 的内点的全体所成的集称为 A 的**内部**, 记为 A° .



由开集的定义知道 A 是开集当且仅当 $A^\circ = A$.

容易证明 A° 是包含在 A 中的最大的开集. 其证明留作习题.

例如, 每个开区间 (a, b) , $(-\infty, a)$ 和 (a, ∞) 都是直线 \mathbf{R}^1 上的开集.

又如, 若 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$, 则 x_0 的 r -邻域 $U(x_0, r)$ 是 \mathbf{R}^n 中的开集. 因此 $U(x_0, r)$ 又称为以 x_0 为中心, 以 r 为半径的开球.



例 1 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R}^n 上的连续函数. 则对任意实数 a , $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > a\}$ 和 $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) < a\}$ 都是开集.

证 记 $E = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > a\}$.

设 $x_0 \in E$, 则 $f(x_0) > a$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时 $f(x) > a$, 换言之 $U(x_0, \delta) \subset E$.

故 x_0 是 E 的内点. 这就证明了 E 是开集.

类似地可以证明 $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) < a\}$ 是开集. ■

例 1 中结论的逆也是成立的. 其证明留作习题.



定理 1.18 (开集的基本性质) 开集具有如下的性质:

- (1) 空集 \emptyset 和全空间 \mathbf{R}^n 是开集.
- (2) 任意个开集的并集是开集.
- (3) 有限个开集的交集是开集.

证 (1). 显然. (2). 设 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一族开集.

若 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 则存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$.

因为 A_α 是开集, 存在 x 的一个邻域 $U(x, \varepsilon)$ 使得 $U(x, \varepsilon) \subset A_\alpha$. 于是更加有 $U(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

因此 x 是 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 的内点. 这表明 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 是开集.



(3). 设 A_1, \dots, A_k 是开集. 设 $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, 则 $x \in A_i (i = 1, \dots, k)$.

因为每个 A_i 是开集, 存在 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $U(x, \varepsilon_i) \subset A_i$.

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. 则 $\varepsilon > 0$ 并且 $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^k A_i$.

因此 x 是 $\bigcap_{i=1}^k A_i$ 的内点. 这就证明了 $\bigcap_{i=1}^k A_i$ 是开集. ■

注意, 无限个开集的交集不一定是开集.

例如对每个自然数 n , 开区间 $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 是直线上的开集.

但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ 不是开集.



定义 1.14 设 A 是 \mathbf{R}^n 的子集.

- (1) 设 $x_0 \in \mathbf{R}^n$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, $U(x_0, \varepsilon)$ 中包含有 A 中的无限多个点, 则称 x_0 为 A 的**聚点(或极限点)**.
- (2) 由 A 的聚点的全体所成的集称为 A 的**导集**, 记为 A' .
- (3) 若 $A' \subset A$, 则称 A 为**闭集**.
- (4) 集 $A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**, 记为 \bar{A} .

由闭集的定义知道 A 是闭集当且仅当 $\bar{A} = A$.

容易证明 \bar{A} 是包含 A 的最小的闭集. 其证明留作习题.

例如,每个闭区间 $[a, b]$, $(-\infty, a]$ 和 $[a, \infty)$ 都是直线 \mathbf{R}^1 上的闭集. 若 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$, 则 $U(x_0, r)$ 的闭包

$$\overline{U(x_0, r)} = \{x : d(x, x_0) \leq r\}.$$

由于 $\overline{U(x_0, r)}$ 是 \mathbf{R}^n 中的闭集, 因此称 $\overline{U(x_0, r)}$ 为以 x_0 为中心, 以 r 为半径的**闭球**.

又显然有理数集 \mathbf{Q} 的导集 $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}^1$, \mathbf{Q} 的闭包 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^1$.

例 2 \mathbf{R}^n 中的有限集都是闭集.

这是因为若 A 是有限集, 则 A 没有聚点, 因而

$$A' = \emptyset \subset A.$$



定理 1.19 (开集与闭集的对偶性) 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 则 A 是闭集的充要条件是 A^c 是开集.

证 必要性: 设 A 是闭集, 则对任意 $x \in A^c$, x 不是 A 的聚点. 因此存在 x 的一个邻域 $U(x, \varepsilon_0)$, 使得 $U(x, \varepsilon_0)$ 中至多只包含 A 中有限个点.

设这些点为 x_1, \dots, x_k . 因为 $x \notin A$, 故 $x_i \neq x (i=1, \dots, k)$. 令

$$\varepsilon = \min\{d(x_i, x), i = 1, \dots, k\}.$$

则 $\varepsilon > 0$ 并且 $U(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, 这就是说 $U(x, \varepsilon) \subset A^c$. 因此 x 是 A^c 的内点. 这就证明了 A^c 是开集.

充分性: 设 A^c 是开集. 则对任意 $x \in A^c$, 存在 x 的一个邻域 $U(x, \varepsilon)$, 使得 $U(x, \varepsilon) \subset A^c$. 即 $U(x, \varepsilon)$ 中没有 A 中的点, 因此 x 不是 A 的聚点.

这表明 A 的聚点全部在 A 中, 即 $A' \subset A$. 因此 A 是闭集. ■

由于 A 与 A^c 互为余集, 将定理 1.19 的结论用到 A^c 上即知, **A 是开集的充要条件是 A^c 是闭集.**

例 3 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R}^n 上的连续函数. 由例 1 知道, 对任意实数 a , $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) < a\}$ 是开集, 因此其余集 $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \geq a\}$ 是闭集. 同理 $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \leq a\}$ 也是闭集. ■



由定理 1.18 和定理 1.19 并利用 De Morgan 公式, 立即可以得到闭集的基本性质如下.

定理 1.20 闭集具有如下性质:

- (1) 空集 \emptyset 和全空间 \mathbf{R}^n 是闭集.
- (2) 有限个闭集的并集是闭集.
- (3) 任意个闭集的交集是闭集.

注意, 无限个闭集的并不一定是闭集. 例如, 对每个自然数 n , 闭区间 $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ 是直线上的闭集. 但是它们的

并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$ 不是闭集.



定理 1.21 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 则以下陈述是等价的:

- (1) $x \in A'$.
- (2) 对任意 $\varepsilon > 0$, x 的去心邻域 $U(x, \varepsilon) - \{x\}$ 中包含 A 中的点.
- (3) 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 使得每个 $x_k \neq x$ 并且 $x_k \rightarrow x$.

证明 (1) \Rightarrow (2). 显然.

(2) \Rightarrow (3). 设(2)成立. 则对每个自然数 k , $U(x, \frac{1}{k}) - \{x\}$ 中包含 A 中的点. 在这些点中任取一点记为 x_k , 则 $\{x_k\}$ 是 A 中的点列并且每个 $x_k \neq x$. 由于 $d(x_k, x) < \frac{1}{k}$, 因此 $x_k \rightarrow x$.



(3) \Rightarrow (1).

设 (3) 成立. 由于每个 $x_k \neq x$ 并且 $x_k \rightarrow x$, 故 $\{x_k\}$ 中必有无限多项是彼此不同的点. 将这些彼此不同的项取出来得到 $\{x_k\}$ 的一个子列, 记为 $\{x_{k'}\}$.

由于 $x_{k'} \rightarrow x$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k_0 , 使得当 $k' > k_0$ 时 $x_{k'} \in U(x, \varepsilon)$. 这说明 $U(x, \varepsilon)$ 中包含有 A 中的无限多个点, 因此 $x \in A'$. ■



定理 1.22 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 则以下陈述是等价的:

- (1) $x \in \bar{A}$.
- (2) 对任意 $\varepsilon > 0$, $U(x, \varepsilon)$ 中包含 A 中的点.
- (3) 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$ 使得 $x_k \rightarrow x$.

证 (1) \Rightarrow (2). 显然. (2) \Rightarrow (3). 设 (2) 成立. 则对每个自然数 k , $U(x, \frac{1}{k})$ 中包含 A 中的点. 在这些点中任取一点记为 x_k , 则 $\{x_k\}$ 是 A 中的点列, 并且 $x_k \rightarrow x$.

(3) \Rightarrow (1). 设 (3) 成立. 若 $x_k \neq x$ ($k \geq 1$), 则由定理 1.21 知道 $x \in A'$. 若存在 k_0 使得 $x_{k_0} = x$, 则 $x \in A$. 在两种情况下均有 $x \in \bar{A}$. ■



定理 1.23 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 则 A 是闭集的充要条件是 A 中任意收敛点列的极限属于 A .

证 必要性: 设 A 是闭集. 若 $\{x_k\}$ 是 A 中的点列并且 $x_k \rightarrow x$, 则由定理 1.22 知道 $x \in \bar{A}$. 由于 A 是闭集, $\bar{A} = A$. 因此 $x \in A$.

充分性: 设 $x \in A'$. 由定理 1.21, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$ 使得 $x_k \rightarrow x$. 由假定条件, 此时 $x \in A$. 这表明 $A' \subset A$. 因此 A 是闭集. ■

定理 1.23 反映了闭集的本质特征, 以后会经常用到.



例 4 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 则曲线 $y = f(x)$, 即集

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, y = f(x)\}$$

是 \mathbf{R}^2 中的闭集.

证明 设 $\{(x_k, y_k)\}$ 是 A 中的点列, 并且 $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$. 则 $x_k \rightarrow x, y_k \rightarrow y$. 由于 $(x_k, y_k) \in A$, 对每个 k 有 $a \leq x_k \leq b$ 并且 $y_k = f(x_k)$. 于是 $a \leq x \leq b$. 利用 $f(x)$ 的连续性得到

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x).$$

因此 $(x, y) \in A$. 根据定理 1.23, A 是闭集. ■



定义 1.15 设 $A \subset \mathbf{R}^n$.

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若 $\bar{A} \supset E$, 则称 A 在 E 中**稠密**.

若 A 在 E 中稠密并且 $A \subset E$, 也称 A 是 E 的稠密子集.

(2) 若 $(\bar{A})^\circ = \emptyset$, 则称 A 为**疏朗集**.

例如, 由于 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^1$, 因此有理数集在 \mathbf{R}^1 中是稠密的.

又例如 $[0, 1]$ 中的有理数的全体在 $[0, 1]$ 中是稠密的.

由于 $(\bar{\mathbf{Z}})^\circ = \emptyset$, 因此整数集 \mathbf{Z} 是疏朗集.



定理 1.24 设 $A, E \subset \mathbf{R}^n$. 则以下陈述是等价的:

- (1) A 在 E 中稠密.
- (2) 对任意 $x \in E$ 和 $\varepsilon > 0$, $U(x, \varepsilon)$ 中包含 A 中的点.
- (3) 对任意 $x \in E$, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$ 使得 $x_k \rightarrow x$.

证 根据定义, A 在 E 中稠密就是说 E 中的每个点都属于 \bar{A} . 利用定理 1.22 即知(1), (2)和(3)是等价的. ■

注 1 若 A 是疏朗集, 则 \bar{A} 无内点. 因此对任意 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$, 包含关系 $\bar{A} \supset U(x, \varepsilon)$ 不成立, 即 A 在 $U(x, \varepsilon)$ 中不是稠密的. 这说明 A 在 \mathbf{R}^n 中的任意点的邻域中都不稠密. 因此疏朗集又称为**无处稠密集**.



1.4.3 \mathbf{R}^n 上的连续函数

在数学分析中, 常见的连续函数是定义在直线上的区间或 \mathbf{R}^n 中的区域上的. 在实变函数中经常要讨论定义在 \mathbf{R}^n 的任意子集 E 上的连续函数.

定义 1.16 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $f(x)$ 是定义在 E 上的实值函数.

又设 $x_0 \in E$. 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E$ 并且 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ **在 x_0 处连续**. 若 $f(x)$ 在 E 上的每一点处都连续,

则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. E 上连续函数的全体记为 $C(E)$.



容易证明, $f(x)$ 在 E 中的点 x 处连续的充要条件是, 对 E 中的任意点列 $\{x_k\}$, 若 $x_k \rightarrow x$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$.

回顾本节前面的例 1:

例 1 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R}^n 上的连续函数. 则对任意实数 a , $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > a\}$ 和 $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) < a\}$ 都是开集.

与例 1 对照, 对于定义在任意子集 E 上的连续函数, 有如下结果:



例 5 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $f(x)$ 是 E 上的连续函数. 则对任意实数 a , 存在 \mathbf{R}^n 中的开集 G 使得

$$\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G. \quad (1.18)$$

证 设 a 是实数. 记 $E_a = \{x \in E : f(x) > a\}$. 若 $x \in E_a$, 则 $x \in E$, 并且 $f(x) > a$. 由于 $f(x)$ 在点 x 处连续, 存在 x 的邻域 $U(x, \delta_x)$, 使得当 $x' \in U(x, \delta_x)$ 并且 $x' \in E$ 时, $f(x') > a$. 换言之,

$$E \cap U(x, \delta_x) \subset E_a. \quad (1.19)$$

令 $G = \bigcup_{x \in E_a} U(x, \delta_x)$, 则 G 是一族开集的并, 因而是开集.



$$\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G. \quad (1.18)$$

$$E \cap U(x, \delta_x) \subset E_a. \quad (1.19)$$

由(1.19)式知道

$$E \cap G = \bigcup_{x \in E_a} (E \cap U(x, \delta_x)) \subset E_a.$$

另一方面, 对每个 $x \in E_a$ 有 $x \in U(x, \delta_x) \subset G$, 从而 $E_a \subset G$.

又 $E_a \subset E$, 因此 $E_a \subset E \cap G$. 这就证明了(1.18)式成立. ■



设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个点列. 若存一个有界集 A 使得 $x_k \in A (k \geq 1)$, 则称 $\{x_k\}$ 是有界点列.

回顾在数学分析中熟知如下定理.

定理 1.25 (Bolzano-Weierstrass) \mathbf{R}^n 中的每个有界点列都存在收敛子列.



利用定理 1.25, 仿照数学分析课程中关于闭区间上连续函数性质的证明, 可以证明如下结论:

有界闭集上连续函数的性质 设 K 是 \mathbf{R}^n 中的有界闭集, $f(x)$ 是 K 上的连续函数. 则

- (1) $f(x)$ 在 K 上是有界的.
- (2) $f(x)$ 在 K 上取得最大值和最小值.
- (3) $f(x)$ 在 K 上是一致连续的. 即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使得对任意 $x', x'' \in K$, 当 $d(x', x'') < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.



一致收敛性 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $f(x)$ 和 $f_k(x) (k \geq 1)$ 是定义在 E 上的函数. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $k > N$ 时, 对一切 $x \in E$ 成立有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

与在区间 $[a, b]$ 上的情形一样的可以证明, 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的一列连续函数, 并且在 E 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 也在 E 上连续.



1.4.4 开集的构造

\mathbf{R}^n 中的开集可以用更简单的集表示出来. 先看直线 \mathbf{R}^1 上的情形.

设 G 是直线上的开集, (a, b) 是一个有界或无界开区间. 若 $(a, b) \subset G$, 并且区间的端点 a 和 b 不属于 G , 则称 (a, b) 为 G 的一个**构成区间**.

例如, 若 $G = (0, 2) \cup (3, 4)$, 则 $(0, 2)$ 和 $(3, 4)$ 都是 G 的构成区间, 但 $(0, 1)$ 不是.



定理 1.26 (直线上开集的构造) 直线上的每个非空开集都可以表示成可数个互不相交的开区间的并 (这里也包括像 $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 这样的无界开区间).

证 分三个步骤. 设 G 是直线上的非空开集.

(1). 证明 G 中的每一点, 必属于 G 的一个构成区间.

事实上, 任意 $x \in G$, 由于 G 是开集, 故存在开区间 (α, β) 使得 $x \in (\alpha, \beta) \subset G$. 令

$$a = \inf \{ \alpha : (\alpha, x) \subset G \}, \quad b = \sup \{ \beta : (x, \beta) \subset G \}.$$



$$a = \inf \{ \alpha : (\alpha, x) \subset G \}, b = \sup \{ \beta : (x, \beta) \subset G \}.$$

(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$), 显然 $x \in (a, b)$. 现在证明 (a, b) 是 G 的构成区间.

设 $x' \in (a, b)$, 不妨设 $a < x' < x$. 由 a 的定义, 存在 α 使得 $a < \alpha < x'$, 并且 $(\alpha, x) \subset G$. 于是 $x' \in (\alpha, x) \subset G$. 这表明 $(a, b) \subset G$.

再证 $a, b \notin G$. 事实上, 若 $a \in G$, 因为 G 是开集, 必存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset G$. 于是 $(a - \varepsilon, x) \subset G$, 这与 a 的定义矛盾. 所以 $a \notin G$.

类似可证 $b \notin G$. 这就证明了 (a, b) 是 G 的构成区间.



(2). 证明 G 的构成区间只有可数个.

事实上, 设 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 是 G 的两个不同的构成区间. 若 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 相交, 则必有一个区间的端点包含在另一个区间中. 不妨设 $a_2 \in (a_1, b_1)$, 则 $a_2 \in G$. 这与 (a_2, b_2) 是 G 的构成区间矛盾. 所以 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 不相交.

由 § 1.2 例 11 知道, G 的构成区间只有可数个. 于是 G 的构成区间的全体可以编号为 (a_i, b_i) ($i = 1, \dots, k$ 或 $i = 1, 2, \dots$).



(3). 证明 $G = \bigcup_i (a_i, b_i)$.

事实上, 由于每个 $(a_i, b_i) \subset G$, 因此 $\bigcup_i (a_i, b_i) \subset G$.

另一方面, 由结论(i), 对每个 $x \in G$, 存在一个构成区间 (a_i, b_i) 使得 $x \in (a_i, b_i)$. 于是 $x \in \bigcup_i (a_i, b_i)$, 从而

$G \subset \bigcup_i (a_i, b_i)$. 这就证明了 $G = \bigcup_i (a_i, b_i)$. ■

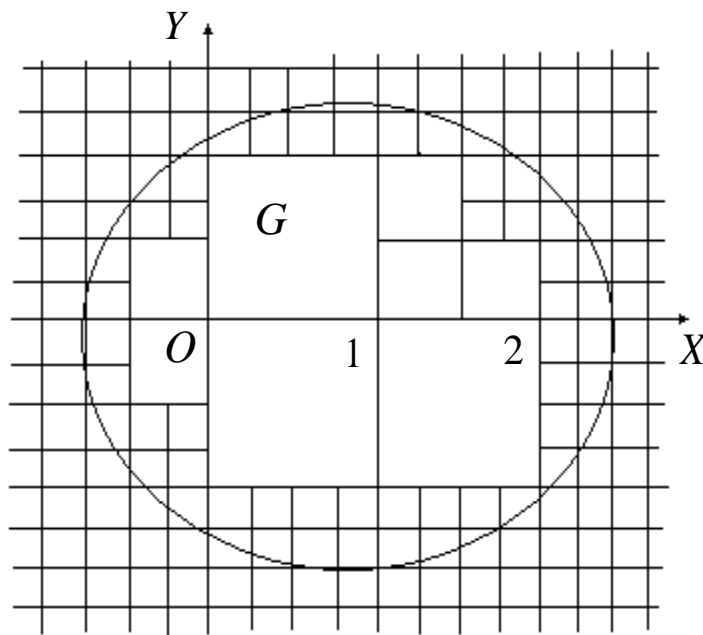
注 2 由定理 1.26 的证明可以看到, 直线上的非空开集 G 表示成可数个互不相交的开区间的并时, 这些开区间都是 G 的构成区间, 它们的端点都不属于 G .



现在看 \mathbf{R}^n 上的情形. 设 $(a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n]$ 是 n 个左开右闭区间, 称这 n 个区间的直积 $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ 为 \mathbf{R}^n 中的**半开方体**.

定理 1.27 \mathbf{R}^n 中的每个非空开集都可以表示为一列互不相交的半开方体的并.

证明 略. 详见教材.
(不作要求)



1.4.5 Borel 集

\mathbf{R}^n 中的方体 设 I_1, I_2, \dots, I_n 是直线上的(有界或无界的)区间. 称 \mathbf{R}^n 的子集

$$I_1 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n\}$$

为 \mathbf{R}^n 中的**方体**.

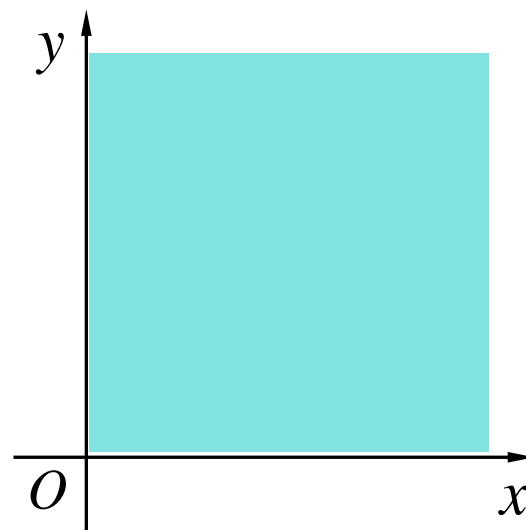
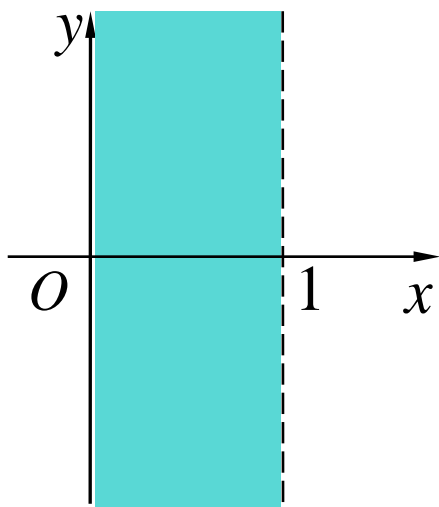
若每个 I_i 都是开区间, 则称 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 为**开方体**.

若每个 I_i 都是闭区间, 则称 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 为**闭方体**.

容易证明开方体是开集, 闭方体是闭集.



显然直线, 平面和三维空间中的方体分别就是区间, 矩形和长方体. 不过这里的方体比通常意义下的矩形, 长方体更广泛一些. 例如在 \mathbf{R}^2 中也包括像 $[0, 1) \times (-\infty, \infty)$ 和 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 这样的无界矩形.



定义 1.17 设 \mathcal{C} 是 \mathbf{R}^n 中开集的全体所成的集类. 称由 \mathcal{C} 生成的 σ -代数 $\sigma(\mathcal{C})$ 为 \mathbf{R}^n 中的 **Borel σ -代数**, 记为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. 称 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 中的集为 **Borel 集**.

简单地说, Borel 集可以看成是开集经过有限或可列并, 交, 差和余运算得到的集.



定理 1.28 \mathbf{R}^n 中的开集, 闭集, 可数集, 各种类型的方体都是 Borel 集.

证 由定义知道开集是 Borel 集. 由于 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 对余运算封闭, 而闭集是开集的余集, 故闭集是 Borel 集.

因为单点集是闭集, 所以单点集是 Borel 集. 由于可数集可以表示成单点集的有限并或可列并, 而 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 对有限并和可列并运算封闭, 所以可数集是 Borel 集. 由于开方体是开集, 闭方体是闭集, 因此开方体和闭方体是 Borel 集.



对于其他类型的方体, 它们都可以表示为一系列开方体的交. 例如 \mathbf{R}^2 中的方体 $(a, b] \times (c, d)$ 可以表示为

$$(a, b] \times (c, d) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left((a, b + \frac{1}{n}) \times (c, d) \right) .$$

既然开方体是 Borel 集, 因此其他类型的方体也是 Borel 集.

特别地, 由于有理数集是可列集, 而无理数集是有理数集的余集, 因此有理数集和无理数集都是 Borel 集.

设 $A \subset \mathbf{R}^n$.

若 A 可以表示为一列闭集的并, 则称 A 为 F_σ 型集.

若 A 可以表示为一列开集的交, 则称 A 为 G_δ 型集.

显然 F_σ 型集和 G_δ 型集都是 Borel 集.

注 定理 1.28 和上面的例子表明, \mathbf{R}^n 中一些常见的集都是 Borel 集. 但在 \mathbf{R}^n 中确实存在一些子集不是 Borel 集. 但这样的例子不是容易给出的. 在 § 3.1 例 9 中给出了一个例子.

1.4.6 Cantor 集

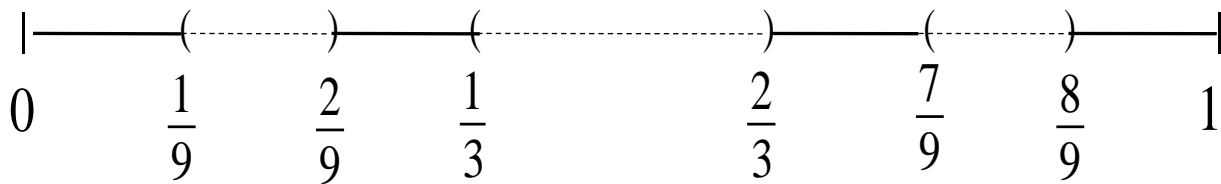
Cantor (三分) 集是用精巧的方法构造出来的一个很特别的集. Cantor 集有一些重要特性, 在构造一些重要反例时会用到这个集.

例 6 (Cantor 集) 将区间 $[0, 1]$ 三等分, 去掉中间的一个开区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 将剩下的部分 $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ 记为 F_1 .

将 F_1 中的两个闭区间都三等分, 去掉中间的开区间 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, 将剩下的部分记为 F_2 , 即

$$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$





一般地在作出 F_n 后, 将 F_n 中的每个闭区间都三等分, 去掉中间的开区间. 这样一直进行下去, 最后剩下的点所成的集称为 **Cantor 集**, 记为 K . 显然 $x \in K$ 当且仅

当 x 属于每个 F_n , 因此 $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 在构造 Cantor 集时从

$[0, 1]$ 中去掉的那些开区间称为 Cantor 集的 **邻接开区间**.

由于每个 F_n 中的那些闭区间的端点始终是不会去掉的, 因此这些点属于 K .



Cantor 集的性质

(1). **Cantor 集是闭集.** 事实上, 由于每个 F_n 都是闭集, 而 K 是一列闭集的交, 故 K 是闭集.

(2). **Cantor 集无内点.** 设 $x \in K$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 n 足够大使得 $\frac{1}{3^n} < 2\varepsilon$. 由于 F_n 是 2^n 个互不相交的的长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间的并, 故 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ 不能完全被包含在 F_n 中. 于是 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ 更加不能完全被包含在 K 中. 因此 x 不是 K 的内点. 这表明 $K^\circ = \emptyset$. (由于 K 是闭集, 这也说明 K 是疏朗集.)



(3). $K = K'$ (一般地, 若 $A' = A$, 则称 A 是**完全集**).

由于 K 是闭集, 故 $K' \subset K$. 另一方面, 设 $x \in K$, 则 $x \in F_n$ ($n = 1, 2, \dots$). 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 n 足够大使得 $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

由于 $x \in F_n$, 故 x 属于 F_n 中的某个长 $\frac{1}{3^n}$ 为的闭区间, 记其为 I , 则 $I \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. 由于 I 的两个端点属于 K , 其中至少有一个不是 x . 这表明 x 的任何去心邻域中都包含有 K 中的点. 因此 $x \in K'$. 从而 $K \subset K'$. 所以 $K = K'$.



(4). Cantor 集的邻接开区间的长度之和为 1.

事实上, 在第 n 次步骤得到 F_n 时, 去掉了 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的开区间. 因此去掉的那些开区间的长度之和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1.$$

(5). Cantor 集具有连续基数 c .

设 K_0 是所有 F_n 中的那些闭区间的左端点的全体, 则 K_0 是可列集. 由 Cantor 集的构造知道, $x \in K - K_0$ 当且仅当 x 可以表示为三进制无限小数



$$x = \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots,$$

其中 $a_i = 0$ 或 2 . 作映射

$$\varphi: K - K_0 \rightarrow (0, 1],$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \rightarrow x' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2} \frac{1}{2^i},$$

则 φ 是 $K - K_0$ 到 $(0, 1]$ 的双射. 故 $\overline{\overline{K - K_0}} = \overline{\overline{(0, 1]}} = c$.

根据定理 1.11 得到

$$\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{(K - K_0) \cup K_0}} = \overline{\overline{K - K_0}} = c. \quad \blacksquare$$

例 7 (Cantor 函数)略, 不作要求



习题

19, 20, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 37

B 类 11

