

武汉大学 2015-2016 第一学期《离散数学》考试题

1. (8 分) 设集合 A, B, C 满足 $A \cup B = A \cup C$, $A \cap B = A \cap C$, 求证: $B = C$ 。

2. (8 分) 给出集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 的例子, 使它分别具有以下性质:

- (1) R 同时是自反的和反对称的;
- (2) R 既不是对称的也不是反对称的;
- (3) R 是传递的, 但 $R \cup \tilde{R}$ 不是传递的。

3. (10 分) $A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$, A 上关系 R 定义为:

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \text{ 当且仅当 } |x - y| = |u - v|,$$

证明 R 是等价关系, 并求由 R 确定的 A 的划分。

4. (10 分) 有理数集 Q 中的 $*$ 定义如下: $x * y = 6 - 2x - 2y + xy$, $\forall x, y \in Q$ 。

- (1) $(Q, *)$ 是半群吗? 是可交换的吗?
- (2) 求单位元;
- (3) $*$ 中是否有可逆元? 若有, 指出哪些是可逆元? 并指出逆元是什么?

5. (8 分) 设 R 是全体实数集, $M = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in R, a \neq 0\}$ 。定义 $\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle$ 。

这时 M 对运算 \circ 构成群吗? 试验证之。

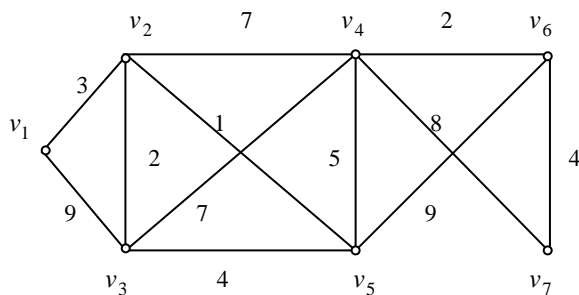
6. (8 分) 设 $S = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, 设 D 是 S 上的整除关系: $\langle x, y \rangle \in D$ 当且仅当 y 是 x 的倍数

- (1) 证明 D 是一个偏序关系;
- (2) 试画出关系 D 的哈斯图, 并由此说明 (S, D) 是一个格;
- (3) D 是一个分配格吗? 为什么?
- (4) 写出 (S, D) 中至少八个 5 个元素的子格。

7. (8 分) 已知 n 阶简单图 G 有 m 条边, 各结点的度数均为 3。

- (1) 若 $m = 3n - 6$, 证明: 在同构意义下 G 唯一, 并求 m, n ;
- (2) 若 $n = 6$, 证明在同构意义下 G 不唯一。

8. (8 分) 对如下给出的赋权图 G , 求出结点 v_1 到其余各个结点的最短路径。



9. (8 分) 在通讯中要传输八进制数字 0, 1, 2, ..., 7。这些数字出现的频率为

0: 30%; 1: 20%; 2: 15%; 3: 10%; 4: 10%; 5: 6%; 6: 5%; 7: 4%。

编一个最佳前缀码, 使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下:

- (1) 画出相应的二元树;
- (2) 写出每个数字对应的前缀码;
- (3) 传输按上述比例出现的数字 10000 个时, 至少要用多少个二进制数字?

10. (8 分) 求公式 $p \wedge (p \rightarrow q) \vee r$ 的主析取范式与主合取范式。

11. (8 分) 用谓词和量词将下列命题符号化:

- (1) 没有不犯错误的人;
- (2) 并不是外语学得好的学生都是三好生, 但外语学得不好的学生一定不是三好生。

12. (8 分) 将下列推理形式化, 并对正确的推理给出推理过程, 要求指明所设命题或谓词的含义。

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车, 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车, 并非每个人都喜欢骑自行车, 因而有人不喜欢步行。