武汉大学数学与统计学院

2008—2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷

学号：　　　　　　　　姓名：　　　　　　　　成绩：

注意：所有答案均写在答题纸上，试卷与答题纸一并上交。

1．(8 分)设 $A=\{\varnothing,\{a\},\{a\}\}$。

（1）是否 $\{a\}\in P(A)$？　　　　（2）是否 $\{a\}\subseteq P(A)$？

（3）是否 $\{\{a\}\}\in P(A)$？　　　（4）是否 $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$？

2．(8 分)令 $S=\{100,101,\cdots,999\}$，$|S|=900$。

（1）在 S 中有多少个数，其中至少含有数字 3 或 7？例如：300，707，736，997。

（2）在 S 中有多少个数，其中至少含有一个数字 3 和一个数字 7？如：736，377。

3．(8 分)设 $A=\{1,2,3\}$，R 是 $P(A)$ 上的二元关系，且 $R=\{<a,b>\,|\,a\cap b\neq\varnothing\}$。则 R 不满足下列哪些性质？为什么？

（1）自反性；（2）反自反性；（3）对称性；（4）反对称性；（5）传递性。

4．(8 分) R 是集合 A 上自反和传递的关系，试证明：$R\circ R=R$。

5．(6 分)设 $A=\{1,2,3\}$，$f\in A^A$，且 $f(1)=f(2)=1$，$f(3)=2$，定义 $G:A\to P(A)$，$G(x)=f^{-1}(x)$。说明 G 有什么性质(单射、满射和双射)，计算值域 $\mathrm{Ran}\ G$。

6．(8 分)在整数集 Z 上定义：$a\circ b=a+b-2,\forall a,b\in Z$，证明 $(Z,\circ)$ 是一个群。

7．(6 分)设 $(G,*)$ 是一群，令

$$R=\{<a,b>|\ a,b\in G\text{，存在 }\theta\in G\text{，使 }b=\theta*a*\theta^{-1}\}。$$

验证 R 是 G 上的等价关系。

8．(6 分) D_{90} 表示 90 的全体因子的集合，包括 1 和 90，D_{90} 与整除 $|$ 构成格。

（1）画出格的哈斯图；

（2）计算 $6\vee 10$，$6\wedge 10$，$9\vee 30$ 和 $9\wedge 30$；

（3）求 D_{90} 的至少 8 个含 4 个元素且包含 1 和 90 的子格。

9．(8 分)已知 n 阶简单图 G 有 m 条边，各结点的度数均为 3。

（1）若 $m = 3n - 6$，证明：在同构意义下 G 惟一，并求 m, n；

（2）若 $n = 6$，证明在同构意义下 G 不惟一。

10．(6 分)对字母表 $\Sigma = \{A, B, C, D, E, F\}$，$\Sigma$ 中符号在符号串中出现的频率仍依次为 25%，10%，10%，20%，15%，20%。确定二元前缀码，使一定长度的符号串的编码长度尽可能短。

11．(8 分)证明蕴含式 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$。

12．(8 分)求下面公式的主析取范式与主合取范式，并写出相应的为真赋值。

$$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)。$$

13．(6 分)在谓词逻辑中，将下列命题符号化：

（1）并非所有的自然数都是偶数；

（2）尽管有人聪明，但未必一切人都很聪明。

14．(6 分)设 $A(x)$，$B(x)$ 均为含有自由变量 x 的任意谓词公式，证明：

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)。$$

2008－2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷

答　案

1．(1)(3)(4)正确，(2)错误。

2．(1)不含有 3 和 7 的有 $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$，故至少含有 3 或 7 的有 900 - 448 = 452。

(2)用 A 表示含有数字 3 的集合，用 B 表示含有数字 7 的集合，则 $|\bar{A}| = 8 \cdot 9 \cdot 9$ 为不含 3 的集合的基数，$|\bar{B}| = 8 \cdot 9 \cdot 9$ 为不含 7 的集合的基数，$|\bar{A} \cap \bar{B}| = 7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ 为不含 3 和 7 的集合的基数。而 $|\bar{A} \cup \bar{B}| = |\bar{A}| + |\bar{B}| - |\bar{A} \cap \bar{B}| = 648 + 648 - 448 = 848$，故由 $|A \cap B| = |U| - |\bar{A} \cup \bar{B}|$，有 $|A \cap B| = 900 - 848 = 52$。

3．(1)因 $\varnothing \in P(A)$，但 $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$，有 $<\varnothing, \varnothing> \notin R$，$R$ 不满足自反性。

(2) $\{1\} \in P(A)$ 且 $\{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \varnothing$，有 $\langle \{1\}, \{1\} \rangle \in R$。$R$ 不满足反自反性。

(3)若 $<x, y> \in R$，则 $x \cap y \neq \varnothing$，从而 $y \cap x \neq \varnothing$，有 $<y, x> \in R$，R 满足对称性。

(4)令 $x = \{1,2\}, y = \{1,3\}$，则 $x \cap y = y \cap x = \{1\} \neq \varnothing$，由 R 的定义易知：$<x, y> \in R$，且 $< y, x > \in R$，但 $x \neq y$，R 不满足反对称性。

(5)令 $x = \{1\}, y = \{1,2\}, z = \{2\}$，则有 $x \cap y = \{1\} \neq \varnothing$ 且 $y \cap z = \{2\} \neq \varnothing$，有 $<x, y> \in R$ 且 $< y, z > \in R$，但 $x \cap z = \varnothing$，故 $<x, z> \notin R$，R 不满足传递性。

4．$\forall <x, z> \in R \circ R$，由关系复合的定义，存在 $y \in A$，使得 $<x, y> \in R$，$<y, z> \in R$，因 R 传递，有 $<x, z> \in R$，可得 $R \circ R \subseteq R$。另一方面，$\forall <x, y> \in R$，因 R 自反，$<y, y> \in R$，由 R 传递，$<x, y> \in R \circ R$，可得 $R \subseteq R \circ R$。综合可得 $R \circ R = R$。

5．根据定义可得：$G(1) = \{1,2\}$，$G(2) = \{3\}$，$G(3) = \varnothing$，G 显然是单射，不是满射（$P(A)$ 中有 8 个元素）。其值域 $\operatorname{ran} G = \{\{1,2\}, \{3\}, \varnothing\}$。

6．显然 $\circ$ 是二元运算，根据群的定义，需证运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

$\forall a, b, c \in Z$，有 $(a \circ b) \circ c = a \circ b + c - 2 = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4 = a \circ (b \circ c)$

故 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，结合律成立。

2 是单位元，事实上，$a \circ 2 = a + 2 - 2 = a$；$2 \circ a = 2 + a - 2 = a$；$\forall a \in Z$。

$\forall a \in Z$，由 $a \circ (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2$；$(4 - a) \circ a = (4 - a) + a - 2 = 2$ 可知 $4 - a$ 是 a 的逆元。由上可知 $(Z, \circ)$ 是群。

7．需证 R 具有自反、对称、传递性。

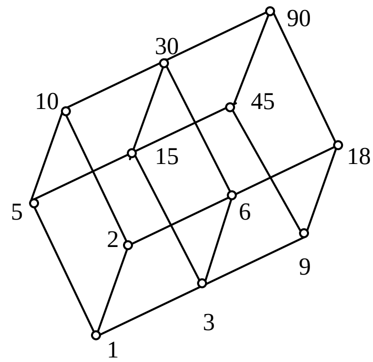
$\forall x \in G$，因为 $x = e * x * e^{-1}$，其中 e 为 G 中单位元，故 xRx。R 自反。

$\forall a,b\in G$ ，若 aRb ，即 $\exists\theta\in G$ ，使 $b=\theta*a*\theta^{-1}$ ，则 $a=\theta^{-1}*b*\theta=\theta^{-1}*b*(\theta^{-1})^{-1}$ ，因 G 为群，$\theta\in G$ ，有 $\theta^{-1}\in G$ ，故 bRa 。 R 对称。

$\forall a,b,c\in G$ ，若 aRb ，bRc ，即 $\exists\theta_1\in G$ 使 $b=\theta_1*a*\theta_1^{-1}$ ，$\exists\theta_2\in G$ ，使 $c=\theta_2*b*\theta_2^{-1}$ ，则 $c=\theta_2*\theta_1*a*\theta_1^{-1}*\theta_2^{-1}=(\theta_2*\theta_1)*a*(\theta_2*\theta_1)^{-1}$ ，因 $\theta_1,\theta_2\in G$ ，有 $\theta_1*\theta_2\in G$ ，故 aRc 。 R 传递。

得证 R 等价。

8．（1）格 $\left(D_{90},|\right)$ 所对应的哈斯图如图所示：



（2）从图中可以看出：

$6\vee 10=30;\ \ 6\wedge 10=2$ ，

$9\vee 30=90;\ \ 9\wedge 30=3$ 。

（3）通过对除去 1，90 之后的 10 个元素的二元素组合共 $C_{10}^2=45$ 个进行验证，可求出满足条件的子格共 24 个，有：

{1，2，6，90}；{1，2，10，90}；{1，2，18，90}；{1，2，30，90}；

{1，2，45，90}；{1，3，6，90}；{1，3，9，90}；{1，3，15，90}；

{1，3，18，90}；{1，3，30，90}；{1，3，45，90}；{1，5，10，90}；

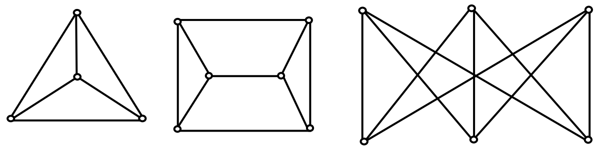
{1，5，15，90}；{1，5，18，90}；{1，5，30，90}；{1，5，45，90}；

{1，6，18，90}；{1，6，30，90}；{1，9，10，90}；{1，9，18，90}；

{1，9，45，90}；{1，10，30，90}；{1，15，30，90}；{1，15，45，90}。

9．（1）由于各结点的度数均为 3，现有 n 个结点，m 条边，由握手定理知 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=3\times n=2m$ ，又 $m=3n-6$ ，从而 $m=6$ ，$n=4$ ，所得无向图如图 6-4 中（1）所示，该图是 4 个结点的简单无向图中边最多的图，即无向完全图 K_4 ，在同构意义下，是惟一的。

（2）若 $n=6$ ，易求得 $m=9$ ，因每个结点的度为 3，满足这些条件的无向图可以画出两个，如图（2）（3）所示，它们显然是不同构的，其中（2）是平面图，（3）是 $K_{3,3}$ ，不是平面图。

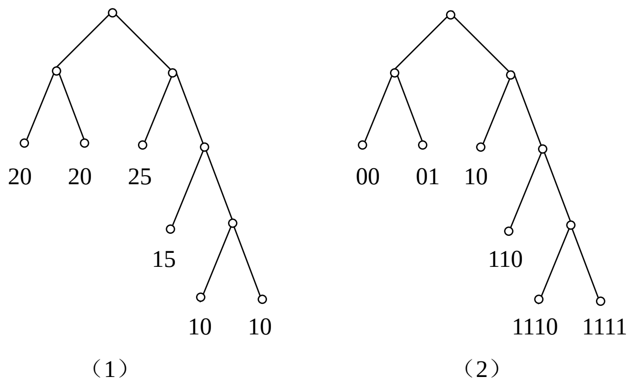


（1）　　　　（2）　　　　（3）

10．对权 10，10，15，20，20，25，图（1）是用 Huffman 算法作出的最优二元树，对该树的树叶作出二进制标记，如图（2）所示，我们就得到字母表 Σ 的最有效的二元前缀码

$\{00, 01, 10, 110, 1110, 1111\}$ ，对一个由 100 个符号组成的符号串，其编码长度是：

$$20\times 2+20\times 2+25\times 2+15\times 3+10\times 4+10\times 4=255.$$



11．$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \to (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee C))$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg A \vee C) \wedge 1)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow (A \vee B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$

所以有$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$。

12．本题可用真值表，也可通过等值演算来确定其主范式，并给出其为真赋值。

$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　　主析取范式

$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$　　主合取范式

真值表如下。

P	Q	$\neg(P \to Q)$	$P \to \neg Q$	$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1

1	1	0	0	1

其为真赋值为：10，11。

13．（1）设 $N(x):x$ 是自然数， $G(x):x$ 是偶数，则此语句表示为：

$$\neg\forall x\left(N(x)\to G(x)\right)$$

本命题也可叙述为：存在着自然数为非偶数，从而可符号化为 $\exists x\left(N(x)\wedge\neg G(x)\right)$ ，可以证明两者等值。

（2）设 $F(x)$ 表示"x 聪明"，$M(x)$ 表示"x 是人"，则此语句表示为：

$$\exists x\left(M(x)\wedge F(x)\right)\wedge\neg\forall x\left(M(x)\to F(x)\right)$$

14． $\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)\to\left(\forall xA(x)\to\forall xB(x)\right)$

$\Leftrightarrow\neg\forall x\left(\neg A(x)\vee B(x)\right)\vee\left(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\right)$ 联结词化归律

$\Leftrightarrow\neg\left(\forall x\left(\neg A(x)\vee B(x)\right)\wedge\forall xA(x)\right)\vee\forall xB(x)$ 结合律与德摩根律

$\Leftrightarrow\neg\left(\forall x\left(\left(\neg A(x)\vee B(x)\right)\wedge A(x)\right)\right)\vee\forall xB(x)$ 作用域的收缩与扩张

$\Leftrightarrow\neg\left(\forall x\left((\neg A(x)\wedge A(x))\vee(B(x)\wedge A(x))\right)\right)\vee\forall xB(x)$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg\left(\forall x\left(B(x)\wedge A(x)\right)\right)\vee\forall xB(x)$ 交换律、矛盾律

$\Leftrightarrow\neg\left(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\right)\vee\forall xB(x)$ 作用域

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg\forall xB(x)\vee\forall xB(x)$ 德摩根律

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee 1$ 排中律

$\Leftrightarrow 1$ 零律

故有 $\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)\Rightarrow\forall xA(x)\to\forall xB(x)$。