§ 4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

为区别 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分和 Lebesgue 积分，以下将它们分别暂记为 $(\mathrm{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ 和 $(\mathrm{L})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

先回顾 Riemann 可积的充要条件. 设$[a,b]$是一个有界闭区间. 由$[a,b]$上的有限个点构成的序列$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$称为是$[a,b]$的一个分割, 若

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

若 $\{P_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一列分割, 使得 $P_n\subset P_{n+1}\,(n\geq 1)$, 则称 $\{P_n\}$是单调加细的.

设 f 是定义在$[a,b]$上的有界实值函数, $P=\{x_i\}_{i=0}^{n}$是$[a,b]$的一个分割. 对每个$i=1,\cdots,n$, 记

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_i - x_{i-1},\\ m_i &= \inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\},\\ M_i &= \sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\},\end{aligned}\qquad (4.31)$$

此外称$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$为分割$P$的细度. 令

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\sup_P\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i,\quad \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\inf_P\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,$$

其中上确界和下确界是关于$[a,b]$的所有分割P取的.

分别称$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$和$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$为$f$在$[a,b]$上的下积分和上积分.

在数学分析中熟知，f在$[a,b]$上 Riemann 可积的充要条件是$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$, 并且当$f$在$[a,b]$上 Riemann 可积时

$$(\mathrm{R})\int_a^b f\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

现在设 $P_n=\{x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\}(n\geq 1)$是$[a,b]$的一列单调加细的分割，并且$P_n$的细度$\lambda_n\to 0.$

对每个自然数n, 设$\Delta x_i^{(n)},m_i^{(n)},M_i^{(n)}$是关于分割$P_n$按照(4.31)式所定义. 根据数学分析中的结果, 有

$$\underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)},$$

$$\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}. \tag{4.32}$$

对于上述的分割序列$\{P_n\}$, 定义函数列$\{u_n\}$和$\{U_n\}$如下:

$$u_n(a)=m_1^{(n)},\ u_n(x)=m_i^{(n)},\ x\in(x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}],$$

$$U_n(a)=M_1^{(n)},\ U_n(x)=M_i^{(n)},\ x\in(x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}].$$

则u_n和U_n都是阶梯函数(图 4-1), 并且$\{u_n\}$单调递增, $\{U_n\}$单调递减. 令m和M分别是f在$[a,b]$上的下确界和上确界, 则

$$m\le u_n\le f\le U_n\le M\quad(n\ge 1).$$

再令$u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n, U=\lim\limits_{n\to\infty}U_n$. 则$u$和$U$是有界可测函数, 并且

$$u(x)\le f(x)\le U(x)\ (x\in[a,b]).\qquad(4.34)$$

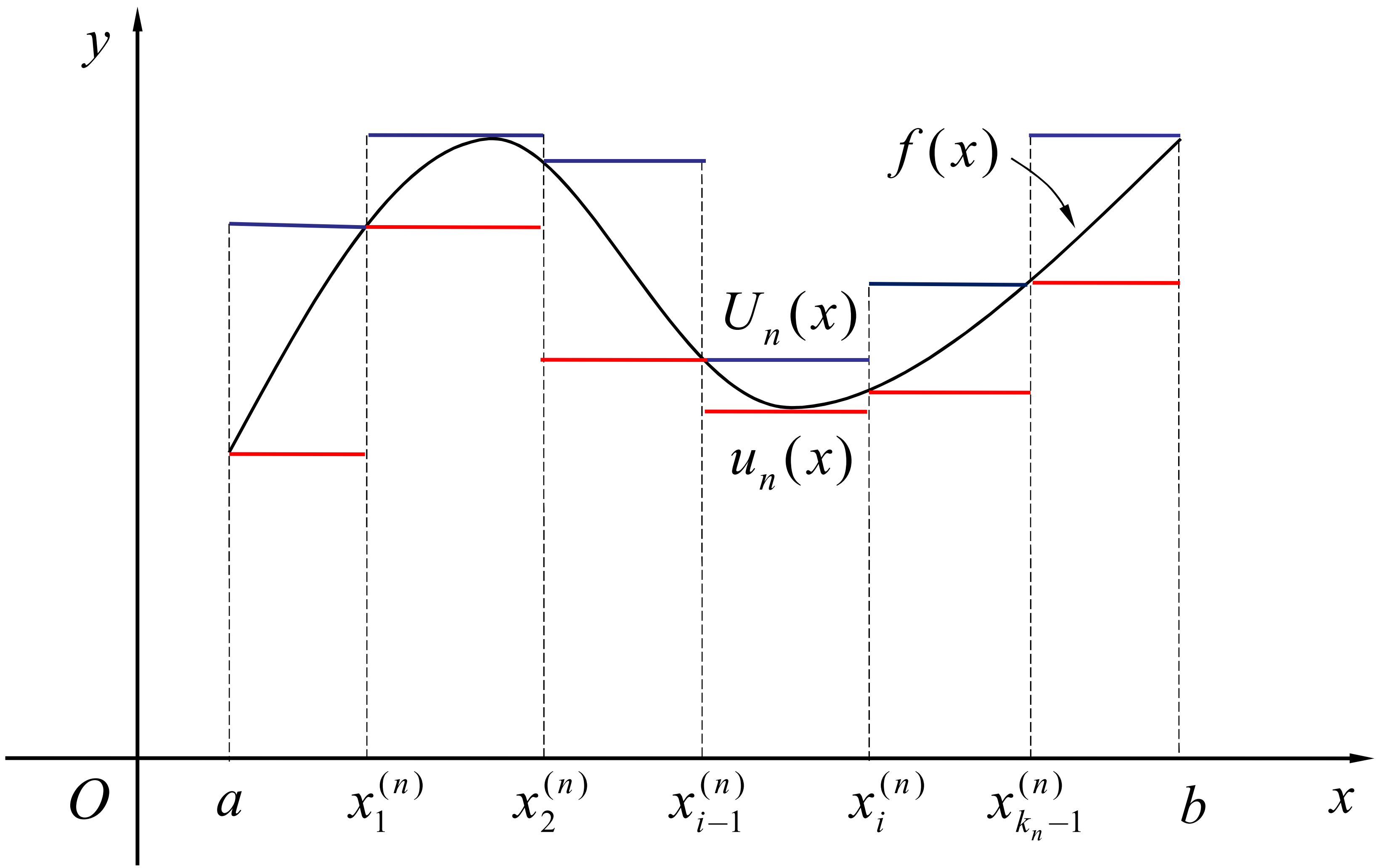

图 4-1

以下的引理 4.3 和定理 4.14 均采用上述记号.

引理 4.3 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界实值函数，$\{P_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一列单调加细的分割，并且 $\lambda_n \to 0$. 若 $x_0 \in [a,b]$ 并且 x_0 不是任何 P_n 的分点，则 $u(x_0)=U(x_0)$ 的充要条件是 f 在 x_0 处连续.

证 **充分性:** 设 f 在 x_0 处连续. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时,

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon. \qquad (4.35)$$

取充分大的 n 使得 $\lambda_n<\delta$. 设 $x_0\in(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$, 则

$$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]\subset(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

因此当 $x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时 (4.35) 式成立. 于是

$$f(x_0)-\varepsilon\leq m_i^{(n)}\leq M_i^{(n)}\leq f(x_0)+\varepsilon.$$

从而有 $$U_n(x_0)-u_n(x_0)=M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\leq 2\varepsilon.$$

令 $n\to\infty$ 得到 $U(x_0)-u(x_0)\leq 2\varepsilon$. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性得到 $u(x_0)=U(x_0)$.

必要性： 设 $u(x_0)=U(x_0)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_n(x_0)-u_n(x_0)\right)=U(x_0)-u(x_0)=0.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取充分大的 n_0 使得 $U_{n_0}(x_0)-u_{n_0}(x_0)<\varepsilon.$

则 当 x 和 x_0 属 于 关 于 分 割 P_{n_0} 的 同 一 个 小 区 间 $(x_{i-1}^{(n_0)},\ x_i^{(n_0)})$ 时,

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\le U_{n_0}(x_0)-u_{n_0}(x_0)<\varepsilon.$$

因此 f 在 x_0 处连续.■

定理 4.14 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界实值函数. 则

(1) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续(即 f 的间断点的全体是零测度集).

(2) 若 f 是 Riemann 可积的, 则 f 是 Lebesgue 可积的, 并且

$$(\mathrm{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

$$\underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)},\quad \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}. \quad (32)$$

证 (1). 设 $P_n = \{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}(n \geq 1)$ 是 $[a, b]$ 的一列单调加细的分割, 并且 $\lambda_n \to 0.$ 由有界收敛定理以及 u_n 和 U_n 的定义, 我们有

$$(\mathrm{L})\int_a^b U\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b U_n\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}. \quad (4.36)$$

$$(\mathrm{L})\int_a^b u\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b u_n\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}. \quad (4.37)$$

两式相减, 并且利用(4.32)式得到

$$(\mathrm{L})\int_a^b (U-u)\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}x - \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}x. \quad (4.38)$$

$$(L)\int_a^b (U-u)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x. \quad (4.38)$$

因此f在$[a,b]$上 Riemann 可积当且仅当

$$(L)\int_a^b (U-u)\mathrm{d}x = 0,$$

这等价于$U=u$ a.e.（注意$U-u\geq 0$）.

设A是分割序列$\{P_n\}$的分点的全体，则$m(A)=0$. 根据引理 4. 3，当$x\notin A$时，$U(x)=u(x)$等价于f在点x处连续. 因此$U=u$ a.e.等价于f在$[a,b]$上几乎处处连续.

从而f在$[a,b]$上 Riemann 可积当且仅当f在$[a,b]$上几乎处处连续.

$$u(x) \le f(x) \le U(x)\ (x \in [a,b]) \qquad (4.34)$$

(2). 设 f 在 $[a,b]$ 上是 R 可积的. 上面已证 $U = u$ a.e., 结合 (4.34) 式知道 $f = u$ a.e. 根据 §3.2 例 3 知道 f 是可测的.

又因为 f 在 $[a,b]$ 上是有界的, 因此 $f \in L[a,b]$.

利用(4.37)式和(4.32)式, 得到

(4. 37) 式

$$(\mathrm{L})\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_a^b u\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}$$

(4. 32) 式

$$= \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

定理证毕. ■

定理 4.14(1)给出了有界函数在$[a,b]$上 Riemann 可积的一个简单明了的判别条件, 彻底搞清楚了函数的可积性与函数的连续性的关系.

定理 4.14(2)表明 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广, 并且 Lebesgue 积分的可积函数类包含 Riemann 积分的可积函数类.

例 1 设 f 是区间 $[a,b]$ 上有界的单调函数. 根据§1.2 例 12 的结果, f 的间断点的全体是可数集. 因此 f 在 $[a,b]$ 上是几乎处处连续的.

又由于 f 在 $[a,b]$ 上是有界的. 根据定理 4.14, f 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 因而也是 Lebesgue 可积的.

例2 在区间[0,1]上定义函数如下:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\text{是互质的自然数}),\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

这个函数称为 Riemann 函数. 显然 $f(x)$ 是有界的. 由于对每个自然数 q, 满足 $f(x)\ge\dfrac{1}{q}$ 的 x 只有有限个, 因此对任意 $x_0\in[0,1]$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. 从而 $f(x)$ 在有理点间断, 在无理点连续. 这说明 $f(x)$ 的间断点的全体是零测度集. 根据定理 4.14(1), $f(x)$ 在在[0,1]上是 Riemann 可积的.

下面以无界区间$[a, \infty)$的广义 Riemann 积分为例, 讨论广义 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系. 对无界函数的广义 Riemann 积分, 也有类似的结果.

定理 4.15 设对每个$b > a$, f 在$[a, b]$上有界并且几乎处处连续. 则$f \in L[a, \infty)$的充要条件是$(\mathrm{R})\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$绝对收敛. 并且当$(\mathrm{R})\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$绝对收敛时, 有

$$(\mathrm{R})\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x. \tag{4.40}$$

证 由于对每个$b>a$, f在$[a,b]$上有界并且几乎处处连续, 由定理 4.14 知道, f在$[a,b]$上是 Riemann 可积和 Lebesgue 可积的. 因而对每个$b>a$, f在$[a,b]$上可测, 从而f在$[a,\infty)$上是可测的.

对每个正整数$n\geq a$, 令

$$f_n(x)=f(x)\chi_{[a,n]}(x)(x\in[a,+\infty)).$$

则$\{f_n\}$是可测函数列, 并且$f_n(x)\to f(x)(x\in[a,\infty))$.

由于$\{|f_n|\}$是单调递增, 利用定理 4.14 和单调收敛定理得到

$$(\mathrm{R})\int_a^{\infty}|f|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_a^{n}|f|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^{n}|f|\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^{\infty}|f_n|\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^{\infty}|f|\mathrm{d}x. \qquad (4.41)$$

(上式两端的值允许为$+\infty$). 当上式的一端有限时, 另一端也有限, 因此 $f\in L[a,\infty)$ 当且仅当 $(\mathrm{R})\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 于是当 $(\mathrm{R})\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛时, $f\in L[a,\infty)$.

注意到 $|f_n|\le|f|(n\ge 1)$, 类似于(4.41)式的证明(只是此时最后一个等式利用控制收敛定理, 而不是利用单调收敛定理), 得到

$$(\mathrm{R})\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

根据定理 4.14 和定理 4.15, f 在区间上的 Lebesgue 积分包含了 Riemann 正常积分和绝对收敛的广义 Riemann 积分.

因此Lebesgue积分的性质(例如, 积分的极限定理等)对于 Riemann正常积分和绝对收敛的广义 Riemann 积分也成立.

以后记号 $\int_a^b f\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^\infty f\mathrm{d}x$ 等都表示 Lebesgue 积分(这当然也包括Riemann正常积分和绝对收敛的广义 Riemann积分).

例 3 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. 在数学分析中熟知, f 在 $[0,\infty)$ 上的广义 Riemann 积分是收敛的, 但不是绝对收敛的. 根据定理 4.15, f 在 $[0,\infty)$ 上不是 Lebesgue 可积的.

例 4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-nx}\cos nx}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 令 $f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}\cos nx}{\sqrt{x}}(n\geq 1).$ 则对每个 $n,$

$$|f_n(x)|\leq g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leq 1,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

由于广义Riemann积分 $\int_0^\infty g\mathrm{d}x$ 是收敛的, 因此 $g\in L[0,\infty).$ 当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\to 0\,(x\in(0,\infty)).$ 利用控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-nx}\cos nx}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^\infty 0\mathrm{d}x=0.$$ ■

例 5 证明 $\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证 由 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式得到

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \quad (0<x<1).$$

上式在 $[0,1]$ 上几乎处处成立(仅在 $x=0$ 和 $x=1$ 处不成立). 注意到在 $[0,1]$ 上

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x} \geq 0 \text{ a.e.},\ \ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n} \geq 0.$$

利用逐项积分定理, 得到

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \quad \blacksquare$$