(3) 证明p为奇素数时，只有在$p=6n+1$的情况下，-3才是p的平方剩余，因而$x^2+3\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

由于p是奇素数，因此$p=6n+1$、$6n+3$、$6n+5$

若a是模p的平方剩余，即$x^2\equiv a(mod\quad p)$有解，根据勒让德符号$(\dfrac{a}{p})=1, a=-3$

$(\dfrac{-3}{p})$，对$p=6n+1$、$6n+3$、$6n+5$分类讨论：

$$(\frac{-3}{p})=(\frac{-1}{p})(-1)^{1*\frac{p-1}{2}}(\frac{p}{3})=(-1)^{p-1}(\frac{p}{3})=(\frac{p}{3})$$

(1) $p=6n+1$时.

$$(\frac{p}{3})=(\frac{1}{3})=1$$

(2) $p=6n+3$时.

$$(\frac{p}{3})=0$$

(3) $p=6n+5$时.

$$(\frac{p}{3})=(\frac{2}{3})=(-1)^{\frac{9-1}{8}}=-1$$

所以，在p是奇素数时，-3为平方剩余当且仅当p为$6k+1$的形式时成立

(6) 1）求解同余式$x^2\equiv 17(\mathrm{mod}\ 64)$的解；

2）求解同余式$x^2\equiv 24(\mathrm{mod}\ 125)$的解；

(1)

$$64=2^6,\alpha=6,a=17\equiv 1(mod\quad 8),(a,2)=(17,2)=1,$$因此方程有解

当$\alpha=3$时，$f(x)=x^2-17\equiv 0(mod\quad 2^3=8)$的解是

$$x\equiv 1,3,5,7(mod 8)=\pm(1+4t_3)$$

$$t_3\equiv\frac{17-1}{2^3}\equiv 0(mod\quad 2)$$

将t_3用$2t_4+0$替换

$x\equiv\pm(1+8t_4)$是适合方程$f(x)=x^2-17\equiv 0(mod\quad 2^4=16)$的解

$$t_4\equiv\frac{17-1}{2^4}=1(mod\quad 2)$$

将t_4用$2t_5+1$替换

$x\equiv\pm(9+16t_5)$是适合方程$f(x)=x^2-17\equiv 0(mod\quad 2^5=32)$的解

$$t_5\equiv\frac{17-9^2}{2^5}\equiv -2\equiv 0(mod\quad 2)$$

将t_5用$2t_6+0$替换

$x\equiv\pm(9+32t_6)$是适合方程$f(x)=x^2-17\equiv 0(mod\quad 2^6=64)$的解

(2)

$p=5,$而$125=p^\alpha=p^3,(3,5)=1$

$f(x)=x^2-24\equiv 0(mod\quad 5)$的解是$x\equiv 2,3(mod\quad 5)$

考虑解$x_1\equiv 2(mod\quad 5)$,将$x=2+5t_1$代入$f(x)\equiv 0(mod\quad 5^2=25)$

等价于$f(2)+f'(2)5t_1\equiv 0(mod\quad 25)$

$$-20+20t_1\equiv 0(mod\quad 25)$$

解得$t_1\equiv 1(mod\quad 5)$

进而将$x\equiv 2+5+25t_2\equiv 7+25t_2$代入$f(x)\equiv 0(mod\quad 5^3=125)$

等价于$f(7)+f'(7)25t_2\equiv 0(mod\quad 125)$

$$25+14*25t_2\equiv 25+100t_2\equiv 0(mod\quad 125)$$

$$t_2\equiv 1(mod\quad 5)$$

因此$x\equiv 7+25+125t_3$是方程的解

考虑解$x_2\equiv 3(mod\quad 5)$,将$x=3+5t_1$代入$f(x)\equiv 0(mod\quad 5^2=25)$

等价于$f(3)+f'(3)5t_1\equiv 0(mod\quad 25)$

$$-15+30t_1\equiv 0(mod\quad 25)$$

解得$t_1\equiv 3(mod\quad 5)$

进而将$x=18+25t_2$代入$f(x)\equiv 0(mod\quad 5^3=125)$

等价于$f(18)+f'(18)25t_2\equiv 0(mod\quad 125)$

$$300+36*25t_2\equiv 0(mod\quad 125)$$

解得$t_2\equiv 3(mod\quad 5)$

因此$x\equiv 18+25*3+125t_3$是方程的解

所以，原式的解为$x\equiv 32,93(mod\quad 125)$