

武汉大学数学与统计学院

2015—2016 学年第一学期《离散数学》考试试卷 B 卷

学号：

姓名：

成绩：

注意：所有答案均写在答题纸上。

一、填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 某班有学生 80 人，其中 30 人参加日语考试，42 人参加法语考试，25 人两门考试均没参加，则有 _____ 人参加了两门考试。
2. 设 $|A| = n$ ，则 A 上不同的二元关系有 _____ 个，其中有 _____ 个不同的自反关系。
3. n 个结点的有向完全图有 _____ 条边，无向完全二分图 $K_{n,m}$ 有 _____ 条边。
4. 若设 $T(x) : x$ 是火车， $C(y) : y$ 是汽车， $F(x, y) : x$ 比 y 快，则“所有火车都比某些汽车快”可符号化为：_____。
5. 实数集 \mathbf{R} 上的运算 $*$ 定义为

$$x * y = 6 - 2x - 2y + xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

则运算 $*$ 的单位元是 _____， $*$ 的零元是 _____。

二、简答题（共 36 分，每小题 6 分）

1. 下图 1 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上关系 R 的关系图，它是一个偏序关系，试画出它所对应的 Hasse 图， (A, R) 是否为格，说明理由。

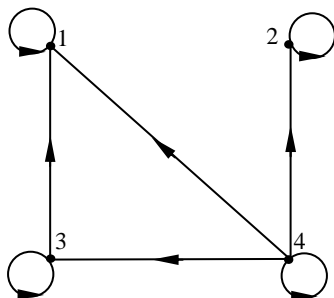


图 1

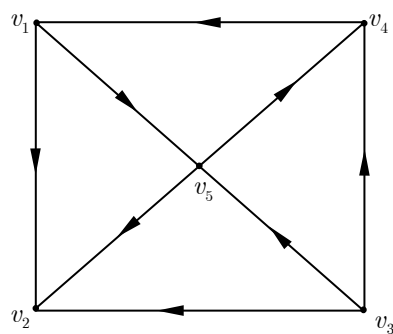


图 2

2. 设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 如上图 2 所示，求 G 的邻接矩阵 A 和可达性矩阵 P 。

3. 设集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle \}$, 说明 R 所具有的性质 (自反、反自反、对称、反对称、传递), 写出 R 的关系矩阵, 并给出 R 的自反闭包 $r(R)$, 对称闭包 $s(R)$, 传递闭包 $t(R)$ 。

4. 写出无向树的至少三种不同定义。

5. 用等值演算法证明下式为重言式:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

6. 利用 CP 规则证明:

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

三、(共 8 分) 设 R 是非空集合 A 上的关系, 证明:

$$R \text{ 传递的充分必要条件是: } R^2 \subseteq R.$$

四、(共 8 分) 设 $f: X \rightarrow Y$, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, 下列各式是否成立, 若成立, 则给出证明, 若不成立, 请举反例:

$$(1) f(f^{-1}(Y')) = Y';$$

$$(2) f^{-1}(Y - Y') = X - f^{-1}(Y').$$

五、(共 8 分) 设简单平面图 G 中顶点数 $n = 7$, 边数 $m = 15$, 证明:

(1) G 是连通的;

(2) G 的每个面均由 3 条边围成。

六、(共 10 分) 设整数集 \mathbf{Z} 上的二元运算 $*$ 定义为:

$$a * b = a + b - 2, \quad \forall a, b \in \mathbf{Z}$$

试证明: $\langle \mathbf{Z}, * \rangle$ 是群。

七、(共 10 分) 求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主合取范式和主析取范式。

2015—2016 学年第一学期《离散数学》考试试卷 B 卷

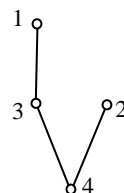
答 案

一、填空题

1. 17 2. 2^{n^2} 2^{n^2-n} 3. $\frac{n(n-1)}{2}$ $\frac{nm}{2}$
4. $\forall x(T(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge H(x, y)))$ 5. 3 2

二、简答题：

1. 其 Hasse 图如右所示， (A, R) 不是格，因为 1,2 两元素没有最大下界。



$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. R 不自反，不反自反，不对称、反对称、不传递

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle \}$$

$$s(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle d, c \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$t(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle \}$$

4. (1) 连通没有回路的简单图为树
(2) 连通且 $m = n - 1$ 的简单图为树
(3) $m = n - 1$ 且没有回路的简单图为树
(4) 若图是连通的，且任意两结点间存在惟一的基本通路，则为树
(5) 若在图中任意两结点间加上一条边，则图存在惟一一条基本回路，称为树。

$$\begin{aligned} 5. \quad & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \\ & \Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \\ & \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)) \vee \neg P \vee R \\ & \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee R) \\ & \Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee (Q \vee R) \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

故原式为重言式。

6. ① $\exists x \neg P(x)$ 附加前提
 ② $\neg P(c)$ ①ES
 ③ $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 前提
 ④ $P(c) \vee Q(c)$ ③US
 ⑤ $Q(c)$ ②④析取三断论
 ⑥ $\exists x Q(x)$ ⑤EG
 ⑦ $\exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ CP 规则

三、证：若 R 传递，则 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ ，因 R 传递，有，即 $R^2 \subseteq R$ 。

若 $R^2 \subseteq R$ ，对任意 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ ，则。

四、(1) 错误。如： $X = \{1, 2, 3\}$ ， $Y = \{a, b, c\}$ ， $Y' = \{a, b\}$ ， $f(x) = a$ ， $\forall x \in X$ ，
 则 $f(f^{-1}(Y')) = f(X) = \{a\} \neq Y'$

(2) 正确。 证明如下：

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y - Y') &\Leftrightarrow f(x) \in Y - Y' \Leftrightarrow f(x) \in Y, f(x) \notin Y' \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y') \Leftrightarrow x \in X - f^{-1}(Y') \end{aligned}$$

五、(1) 若 G 不连通，设有 k 个连通分支，则在 k 个连通分支之间添加 $k - 1$ 条边，从而新的图为一个连通的简单平面图，则平面图的性质有： $m + k - 1 \leq 3n - 6$ ，代入得 $k \leq 1$ ，从而原图 G 是连通的。

(2) 由于 G 是简单图，每个面至少由 3 条边构成，若存在一个面的次数超过 3，则有 $m < 3n - 6$ ，与 $m = 15$ ， $n = 7$ 矛盾。故所有面均由 3 条边构成。

六、显然运算是封闭的。

可以证明运算 $*$ 满足结合律，即： $\forall a, b, c \in Z$ ，有 $a * (b * c) = (a * b) * c$

2 为运算 $*$ 的单位元，事实上，有 $a * 2 = a + 2 - 2 = a = 2 * a$

对任意元素 a ， $4 - a$ 为其逆元，事实上，

$$a * (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2, \text{ 且 } (4 - a) * a = 2$$

故 $\langle \mathbf{Z}, * \rangle$ 是群。

七、主析取范式：

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

主合取范式：

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$