目录 CONTENTS

第4章　Lebesgue积分

§ 4.1 积分的定义

4.1.1 非负简单函数的积分

4.1.2 非负可测函数的积分

4.1.3 一般可测函数的积分

4.1.4 可积性

在 Lebesgue 测度理论的基础上建立的 Lebesgue 积分, 其被积函数和积分域更一般, 可以对有界函数和无界函数, 有界积分域和无界积分域, 以及不同维数空间的情形统一处理. Lebesgue 积分不仅理论上更简洁, 而且具有在很一般条件下的极限定理和累次积分交换积分顺序的定理. 这使得Lebesgue积分不仅在理论上更完善, 而且在理论推导和计算上更灵活便利. Lebesgue 积分理论已经成为现代分析数学必不可少的基础.

Lebesgue 积分有几种不同但彼此等价的定义方式. 我们将采用逐步定义非负简单函数, 非负可测函数和一般可测函数积分的方式.

4.1.1 非负简单函数的积分

以下总是设E是$\mathbf{R}^n$中的一给定的可测集.

定义 4.1 设$f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$是$E$上的非负简单函数，其中$\{A_1,\cdots,A_k\}$是$E$的一个可测分割，$a_1,\cdots,a_k$是非负实数. 定义$f$在$E$上的积分为

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i).$$

一般情况下$0\le\int_E f\,\mathrm{d}x\le\infty$. 若$\int_E f\,\mathrm{d}x<\infty$，则称$f$在$E$上是可积的.

在定义 4.1 中，$\int_E f\,\mathrm{d}x$ 的值是确定的，即不依赖于 f 的表达式的选取. 事实上，设 $f(x)=\sum_{j=1}^{l} b_j \chi_{B_j}(x)$ 是 f 的另一表达式，则

$$m(A_i)=\sum_{j=1}^{l} m(A_i \cap B_j) \quad (i=1,\cdots,k),$$

$$m(B_j)=\sum_{i=1}^{k} m(A_i \cap B_j) \quad (j=1,\cdots,l).$$

由于当 $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ 时必有 $a_i=b_j$，因此

$$m(A_i)=\sum_{j=1}^{l} m(A_i\cap B_j),\quad i=1,\cdots,k,$$

$$m(B_j)=\sum_{i=1}^{k} m(A_i\cap B_j),\quad j=1,\cdots,l.$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i m(A_i\cap B_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} b_j m(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^{l} b_j m(B_j).$$

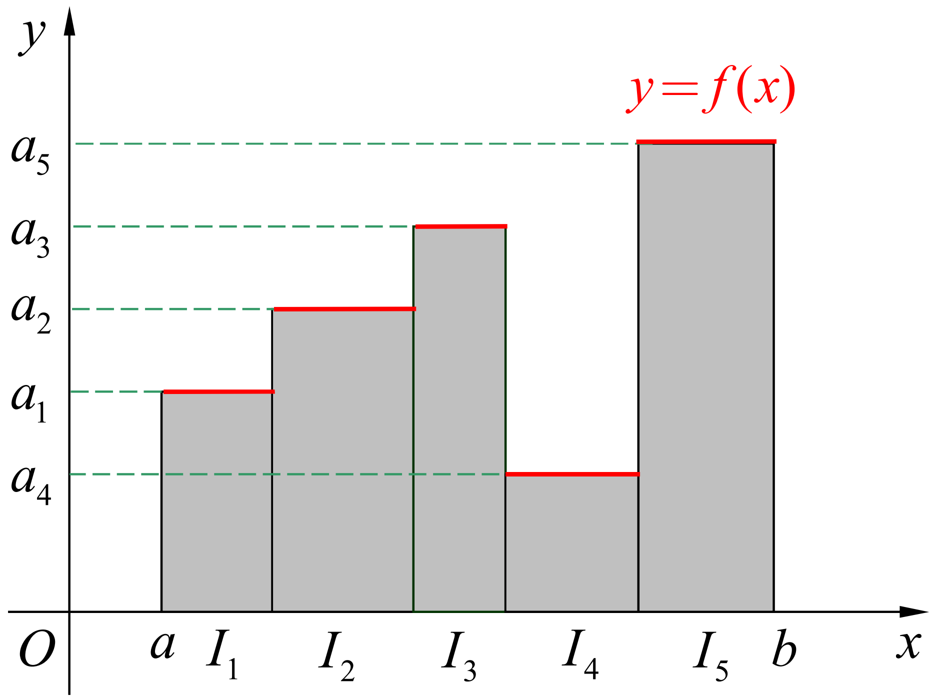
这表明的$\int_E f\mathrm{d}x$值不依赖于f的表达式的选取.

现在大致看一下非负简单函数的积分几何意义.

若 $f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{I_i}(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负阶梯函数, 则

$$\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}a_im(I_i)=\sum_{i=1}^{k}a_i|I_i|$$

就是函数 $y=f(x)$ 的下方图形的面积(如图).



在 § 4. 6 中我们将证明，若 $f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$ 是 $[a,b]$ 上一般的非负简单函数，则 $\int_{[a,b]} f \mathrm{d}x$ 就是函数 $y=f(x)$ 的下方图形的测度.

例 1 设 A 是 E 的可测子集，则 A 的特征函数 χ_A 是非负简单函数，并且

$$\int_E \chi_A \mathrm{d}x = 1 \cdot m(A) = m(A).$$

特别地，$\int_E 1 \mathrm{d}x = \int_E \chi_E \mathrm{d}x = m(E)$. 这个简单事实以后会经常用到.

为进一步定义可测函数的积分，需要先证明非负简单函数积分的几个简单性质.

定理 4.1 设 f, g 是 E 上的非负简单函数. 则

(1) $\int_E cf\,\mathrm{d}x = c\int_E f\,\mathrm{d}x$ （$c \geq 0$ 是常数）;

(2) $\int_E (f+g)\mathrm{d}x = \int_E f\,\mathrm{d}x + \int_E g\,\mathrm{d}x$;

(3) 若 $f \leq g$ a.e., 则 $\int_E f\,\mathrm{d}x \leq \int_E g\,\mathrm{d}x$.

证 (1). 显然. (2).不妨设(参见 § 3.1 中注 1)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x),\ g(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{E_i}(x). \tag{4.1}$$

于是 $f(x)+g(x)=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)\chi_{E_i}(x)$. 因此

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)m(E_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}a_i m(E_i)+\sum_{i=1}^{k}b_i m(E_i)$$

$$=\int_E f\mathrm{d}x+\int_E g\mathrm{d}x.$$

(3).仍不妨设 f,g 的表达式为(4.1)式. 由于 $f\le g$ a.e., 对任意 $i=1,\cdots,k$, 当 $m(E_i)>0$ 时 $a_i\le b_i$. 于是

$$\int_E f\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}a_i m(E_i)\le\sum_{i=1}^{k}b_i m(E_i)=\int_E g\mathrm{d}x.$$ ■

4.1.2 非负可测函数的积分

引理 4.1 设$\{f_n\}$是E上单调递增的非负简单函数列.

(1) 若g是E上的非负简单函数，并且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$ $(x \in E)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x \geq \int_E g \mathrm{d}x. \qquad (4.2)$$

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x\in E)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x = \sup\left\{\int_E g \mathrm{d}x : g \in S^+(E), \text{并且 } g \leq f\right\}. \qquad (4.3)$$

(其中$S^+(E)$表示E上的非负简单函数的全体).

证 (1). 由于$\{f_n\}$是单调递增的, 由定理 4.1(3)知道数列$\left\{\int_E f_n \mathrm{d}x\right\}$是单调递增的, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x$存在.

设ε是任意给定的, 满足$0<\varepsilon<1$. 令

$$E_n=\{x\in E: f_n(x)\geq \varepsilon g(x)\}\ \ (n=1,2,\cdots).$$

则$\{E_n\}$是单调递增的可测集列. 由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\geq g(x)\ \ (x\in E),$$

因此$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

若 $g(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)$, 则对每个 $n=1,2,\cdots$, 有

$$g(x)\chi_{E_n}(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)\chi_{E_n}(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i\cap E_n}(x).$$

对每个 $i=1,\cdots,k$, 集列 $\{A_i\cap E_n\}_{n\geq 1}$ 是单调递增的, 并且 $A_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i\cap E_n)$. 利用积分的定义和测度的下连续性, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E g\cdot\chi_{E_n}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i\cap E_n)\\&=\sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i)=\int_E g\mathrm{d}x.\end{aligned}\qquad(4.4)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g\cdot\chi_{E_n}\mathrm{d}x=\int_E g\mathrm{d}x.\quad(4.4)$$

由 E_n 的定义知道当 $x\in E$ 时 $f_n(x)\chi_{E_n}(x)\geq\varepsilon g(x)\chi_{E_n}(x)$.

利用定理 4.1, 我们有

$$\int_E f_n\mathrm{d}x\geq\int_E f_n\chi_{E_n}\mathrm{d}x\geq\int_E\varepsilon g\chi_{E_n}\mathrm{d}x=\varepsilon\int_E g\chi_{E_n}\mathrm{d}x.\quad(4.5)$$

在(4.5)式中取极限, 利用(4.4)式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x\geq\lim_{n\to\infty}\varepsilon\int_E g\chi_{E_n}\mathrm{d}x=\varepsilon\int_E g\mathrm{d}x.$$

令 $\varepsilon\to1$ 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x\geq\int_E g\mathrm{d}x.$ 结论(1)得证.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x=\sup\left\{\int_E g\mathrm{d}x: g\in S^{+}(E),\text{并且}\, g\le f\right\}. \quad (4.3)$$

(2). 将(4.3)式的右边的上确界记为a. 由于每个$f_n\in S^{+}(E)$,

并且$f_n\le f$, 因此$\int_E f_n \mathrm{d}x\le a$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x\le a$.

反过来, 对任意$g\in S^{+}(E)$, $g\le f$, 由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ge g(x)\,(x\in E),$$

由结论(1)得到$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x\ge\int_E g\mathrm{d}x$. 这说明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x$是

(4.3)式右端的数集的一个上界, 因此$a\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x$.

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x=a$, 即(4.3)式得证.■

定义 4.2 设 f 是 E 上的非负可测函数. 定义 f 在 E 上的积分为

$$\int_E f\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x.$$

其中 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负简单函数列并且 $f_n \uparrow f$.

一般情况下 $0 \le \int_E f\mathrm{d}x \le \infty$. 若 $\int_E f\mathrm{d}x < \infty$, 则称 f 在 E 上是**可积的.**

由定理 3.6, 上述的 $\{f_n\}$ 是存在的. 由引理 4.1(2) 知道 $\int_E f\mathrm{d}x$ 的值不依赖于 $\{f_n\}$ 的选取. 因此 $\int_E f\mathrm{d}x$ 的定义是确定的.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}x=\sup\left\{\int_E g\,\mathrm{d}x: g\in S^+(E),\text{并且}\, g\le f\right\}. \quad (4.3)$$

注 1 也可以用(4.3)式的右端的上确界作为 $\int_E f\,\mathrm{d}x$ 的定义. 这两种定义是等价的.

定理 4.2 设 f 和 g 是 E 上的非负可测函数. 则

(1) $\int_E cf\,\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x$ ($c\ge 0$是常数);

(2) $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}x=\int_E f\,\mathrm{d}x+\int_E g\,\mathrm{d}x$;

(3) 若在 E 上 $f\le g$ a.e., 则 $\int_E f\,\mathrm{d}x\le\int_E g\,\mathrm{d}x$.

证 (1).显然. (2).设$\{f_n\}$和$\{g_n\}$是非负简单函数列使得$f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$. 则$\{f_n + g_n\}$也是非负简单函数列并且$f_n + g_n \uparrow f + g$. 利用定理 4.1(2), 得到

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E (f_n+g_n)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}x \\ &= \int_E f\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

结论(2)得证.

(3). 设在 E 上 $f \le g$ a.e. 我们可适当选取上述的 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 使得 $f_n \le g_n$ a.e. $(n \ge 1)$ (例如, 按照定理 3.6 的证明中的方法选取 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$). 利用定理 4.1 的结论 (3), 我们有

$$\int_E f \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \mathrm{d}x = \int_E g \mathrm{d}x.$$

结论(3)得证. ■

4.1.3　一般可测函数的积分

定义 4.3　设 f 是 E 上的可测函数. 若 $\int_E f^+ \mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^- \mathrm{d}x$ 至少有一个是有限值，则称 f 在 E 上的**积分存在**，并且定义 f 在 E 上的积分为

$$\int_E f \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x.$$

当 $\int_E f \mathrm{d}x$ 是有限值时(即当 $\int_E f^+ \mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^- \mathrm{d}x$ 都是有限值时)，称 f 在 E 上是**可积的**.

以上定义的积分称为**Lebesgue积分**. E上Lebesgue可积函数的全体记为$L(E)$. 区间$[a, b]$上的Lebesgue积分记为$\int_a^b f\mathrm{d}x$.

注意f的积分存在与f可积之间的区别. 当f的积分存在的时候, 其积分值可能是有限的, 也可能为$\pm\infty$. 只有当f可积的时候, 其积分值才是有限的. 另外非负可测函数的积分总是存在的, 但积分值可能为$+\infty$.

之所以允许积分值为$\pm\infty$, 是因为这样处理有时会带来一些方便. 例如可以使得某些定理叙述得更简明一些.

Lebesgue 积分与我们熟悉的 Riemann 积分有什么联系和区别? 在§ 4.4 中我们将详细讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系. 这里只看一个简单的例子.

设 $D(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数, 即 $D(x)=\chi_{\mathbf{Q}_0}(x)$, 其中 $\mathbf{Q}_0$ 表示 $[0,1]$ 中的有理数的全体. 根据非负简单函数积分的定义, $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 积分

$$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \chi_{\mathbf{Q}_0}(x)\mathrm{d}x=m(\mathbf{Q}_0)=0.$$

这表明 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零. 但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

4.1.4 可积性

关于积分的性质, 在后面几节将系统讨论. 下面只给出关于函数可积性的几个结果.

定理 4.3 设 f 和 g 是 E 上的可测函数.

(1) 若 $g\in L(E)$, 并且在 E 上 $f\le g$ a.e. 或者 $f\ge g$ a.e., 则 f 在 E 上的积分存在.

(2) 若 $g\in L(E)$, 并且在 E 上 $|f|\le g$ a.e., 则 $f\in L(E)$.

(3) $f\in L(E)$ 当且仅当 $|f|\in L(E)$.

(4) 若 $m(E)<\infty$, f 是 E 上的有界可测函数, 则 $f\in L(E)$.

证 (1). 设在 E 上 $f \leq g$ a.e., 则 $f^+ \leq g^+$ a.e.

由于 $g \in L(E)$, 因此 $\int_E g^+ \mathrm{d}x < \infty$. 利用定理 4.2 得到

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x \leq \int_E g^+ \mathrm{d}x < \infty.$$

因此 f 在 E 上的积分存在. 若 $f \geq g$ a.e., 则 $f^- \leq g^-$ a.e.

类似地可证此时 f 在 E 上的积分存在.

(2). 若在 E 上 $|f| \leq g$ a.e., 则 $f^+ \leq g$ a.e., $f^- \leq g$ a.e.

由于 $g \in L(E)$, 因此

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x \leq \int_E g \mathrm{d}x < \infty, \int_E f^- \mathrm{d}x \leq \int_E g \mathrm{d}x < \infty.$$

因此 $f \in L(E)$.

(3). 由于$|f| = f^+ + f^-$, 因此

$$\int_E |f|\mathrm{d}x = \int_E f^+\mathrm{d}x + \int_E f^-\mathrm{d}x.$$

由此知道$\int_E |f|\mathrm{d}x$是有限值当且仅当$\int_E f^+\mathrm{d}x$和$\int_E f^-\mathrm{d}x$都是有限值的. 从而$|f| \in L(E)$当且仅当$f \in L(E)$.

(4). 设$m(E) < \infty$, $g(x) \equiv M\,(M \geq 0)$为$E$上的常值函数, 则

$$\int_E g\mathrm{d}x = \int_E M\mathrm{d}x = M \cdot m(E) < \infty,$$

因此$g \in L(E)$. 若 $|f(x)| \leq M\ (x \in E)$, 由 结 论 (2) 即 知 $f \in L(E)$. ■

定理 4.3(3)的结论与 Riemann 积分的性质形成对照. 我们知道对于 Riemann 积分, f 的可积与 $|f|$ 的可积不是等价的.

设 f 是 E 上的可测函数, A 是 E 的可测子集, 根据 § 3.1 例 5, f 也是 A 上的可测函数. 因此同样可以定义 f 在 A 上的积分.

定理 4.4 设 f 在 E 上的积分存在, A 是 E 的可测子集, 则 f 在 A 上的积分存在, 并且

$$\int_A f\,\mathrm{d}x = \int_E f\chi_A\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

同样, 当 f 在 E 上可积时, f 在 A 上可积, 并且(4.6)式成立.

证 先设 $f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)(x\in E)$ 是非负简单函数.

注意到 $\{A\cap A_1, A\cap A_2,\cdots A\cap A_k\}$ 是 A 的一个可测分割,

将 f 限制为 A 上的函数时,其表达式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A\cap A_i}(x)\quad(x\in A).\tag{4.7}$$

另一方面,作为 E 上的函数,

$$\begin{aligned}f(x)\chi_A(x)&=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)\chi_A(x)\\&=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A\cap A_i}(x)\ \ (x\in E).\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A\cap A_i}(x)\ (x\in A) \qquad (4.7)$$

$$f(x)\chi_A(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{A\cap A_i}(x)\ (x\in E) \qquad (4.8)$$

利用(4.7),(4.8)两式, 由积分的定义得到

$$\int_A f\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}a_i m(A\cap A_i)=\int_E f\chi_A\,\mathrm{d}x. \qquad (4.9)$$

这表明当 f 是非负简单函数时, 结论成立.

当 f 是非负可测函数时, 存在一列非负简单函数 $\{f_n\}$ 使得 $f_n \uparrow f$. 显然 $\{f_n \chi_A\}$ 也是非负简单函数列, 并且 $f_n \chi_A \uparrow f \chi_A$. 利用(4.9)式和积分的定义得到

$$\int_A f \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \chi_A \mathrm{d}x = \int_E f \chi_A \mathrm{d}x. \quad (4.10)$$

因此当 f 是非负可测函数时, 结论成立.

一般情形, 当 f 在 E 上的积分存在时, 不妨设 $\int_E f^+ \mathrm{d}x < \infty$. 利用(4.10)式, 我们有

$$\int_A f^+ \mathrm{d}x = \int_E f^+ \chi_A \mathrm{d}x \le \int_E f^+ \mathrm{d}x < \infty,$$

因此 f 在 A 上的积分存在, 并且

$$\int_A f \mathrm{d}x = \int_A f^+ \mathrm{d}x - \int_A f^- \mathrm{d}x$$

$$= \int_E f^+ \chi_A \mathrm{d}x - \int_E f^- \chi_A \mathrm{d}x = \int_E f \chi_A \mathrm{d}x.$$

同样地可以证明, 当 f 在 E 上可积时, f 在 A 上可积, 并且上式成立. ■

定理 4.4 的证明方法是证明积分性质时常用的方法.

例 2 设 $f(x)\in L(\mathbf{R}^n)$, $h\in\mathbf{R}^n$. 则 $f(x+h)\in L(\mathbf{R}^n)$, 并且

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

证 由于 $f(x)\in L(\mathbf{R}^n)$, $f(x)$ 当然在 $\mathbf{R}^n$ 上是可测的.

对任意实数 a, 我们有

$$\{x\in\mathbf{R}^n: f(x+h)>a\}=\{x\in\mathbf{R}^n: f(x)>a\}-h.$$

根据定理 2.9, 可测集经过平移后仍是可测集. 由上式知道 $f(x+h)$ 是可测的. 下面证明 $f(x+h)$ 是可积的, 并且(4.11)式成立.

先设 $f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$ 是非负简单函数. 则

$$f(x+h)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x+h)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i-h}(x).$$

由测度的平移不变性, 得到

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+h)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i-h)=\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

因此当 f 是非负简单函数时, (4.11)式成立.

类似于定理 4.4 的证明, 由此推出当 f 是非负可测函数时, (4.11)式成立. 然后推出当 f 可积时, $f(x+h)$ 可积, 并且(4.11)式成立. 建议读者自己写出余下的过程. ■