热力学与统计物理期中考试

吴远清-2018300001031

2020 年 5 月 12 日

一. 概念题

1. 试述等概率原理及你对等概率原理的理解.

Answer:

For an isolated system, if it's in equilibrium, it will be equally likely to be in any of its accessible states.

等概率原理是统计物理的基础假设. 从力学角度出发, 如果各态历经假说/准各态历经假说成立, 则刘维尔定理可以演化为等概率原理, 但事实上这两个假说均不成立, 各态历经是通过统计系统特有的物理性质而实现的, 这就使得等概率原理成为统计物理最基础的原理.

2. 试述热力学第零、第一、第二、第三定律并简述其物理意义

Answer:

Zeroth law: There are three system A,B,C, if A and B are in equilibrium, B and C are also in equilibrium, then A and C are in equilibrium

第零定律是温度的定义与测量, 温标的建立的基础

First law:$\Delta\bar{E} = -W + Q$

第一定律反应了统计系统最重要的几个热力学量之间的关系, 并且是能量守恒在统计系统中的表现.

Second law: For any process done in a isolated system: $\Delta S \geq 0$

For a quasi-static process:$dS = \frac{dQ}{T}$

第二定律说明了孤立系统总是趋向于无序, 否决了第二类永动机的可能, 准静态过程的表达式使得我们可以将不完全微分 dQ 转换为完全微分 TdS(不用考虑过程量, 只考虑有势函数, 使得热力学态与态之间的计算大大简化).

Third law: The entropy of a system has the limiting property:$T \to 0_+ \quad \text{or} \quad E \to E_0, \qquad S \to S_0$.

第三定律描述了熵的极限行为, 并且注意到了核自旋导致的绝对零度下熵取一有限值

3. 试述相空间及其物理意义

Answer:

相空间就是可以完全描述一个系统的微观态的物理量所构成的空间.

相空间依赖于广义坐标和独立热力学量的选取, 使得我们可以任意的选取想要研究的物理量, 并使得每个微观态都对应于相空间内一个点.

4. 试述什么是平衡态、孤立系统、弛豫时间

Answer:

平衡态: 系统处于各微观态的概率不随时间变化, 系统的各宏观热力学量也保持不变.

孤立系统: 与外界既没有物质交换, 也没有能量交换的系统.

弛豫时间: 系统从非平衡态转变为平衡态所需的时间.

5. 试述什么是熵？并写出熵的几种计算式并说明其物理意义.

Answer:

Definition:

$$S = k\, ln\Omega$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

物理意义: 代替系统的状态数, 描述了统计系统的无序程度.

二. 推导题、计算题

6. 对于 1 维格子上的随机行走，格子步长为 l，向右的概率为 p，向左的概率为 q，N 步随机行走后，试推导距离原点为 m 的概率 P(m)。这里 p+q=1，N»1，且 0<p q<1。

Answer:

Since $N >> 1$, we can use the Gaussian approximation:

$$W(n_1) = (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}} exp[-\frac{(n_1 - Np)^2}{2Npq}] \tag{1.1}$$

and we have:

$$m = |n_1 - n_2| = |2n_1 - N| \tag{1.2}$$

Then for a specific m, we have:

$$P(m) = W(\frac{N+m}{2}) + W(\frac{N-m}{2})$$

$$= (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}}\{exp[-\frac{(\frac{N+m}{2}-Np)^2}{2Npq}]+exp[-\frac{(\frac{N-m}{2}-Np)^2}{2Npq}]\} \tag{1.3}$$

Finally:

$$P(m)dm \approx (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}}\{exp[-\frac{(\frac{N+m}{2}-Np)^2}{2Npq}]+exp[-\frac{(\frac{N-m}{2}-Np)^2}{2Npq}]\}dm \tag{1.4}$$

7.

(1) 试推导平衡态单原子理想气体系统状态数 Ω 与体系体积 V 和内能 E 的关系表达式

(2) 进一步推导单原子理想气体状态方程

(3) 并导出单原子理想气体内能 E 与温度 T 的关系

Answer:

(1)

Generally:

$$\Omega(E) \propto \int_{E}^{E+\delta E} \dots \int d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p_1 \dots d^3p_N dQ_1 \dots dQ_M dP_1 \dots dP_M \tag{2.1}$$

Which equal to:

$$\Omega(E) \propto V^N \chi(E) \tag{2.2}$$

For ideal gas:

$$\Phi \propto R^f = (2mE)^{f/2} \tag{2.3}$$

Then:

$$\Omega(E) \propto E^{(f/2)-1} \tag{2.4}$$

For monatomic molecule:

$$f = 3N \tag{2.5}$$

So:

$$\Omega(E) \propto E^{(3N/2)-1} \tag{2.6}$$

From (2.2):

$$\Omega = BV^{\mathrm{N}}E^{3N/2} \tag{2.7}$$

(2)

From (2.7):

$$ln\Omega = NlnV + \frac{3}{2}NlnE + lnB \tag{2.8}$$

The general force of volume is:

$$\bar{P} = \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{\partial ln\Omega}{\partial V} kT = \frac{N}{V} kT \tag{2.9}$$

So:

$$PV = NkT \tag{2.10}$$

(3)

$$\beta = \frac{\partial ln\Omega}{\partial E} = \frac{3}{2} N \frac{1}{E} = \frac{1}{kT} \tag{2.11}$$

So:

$$E = \frac{3}{2} NkT \tag{2.12}$$

8. 一系统 A 与一温度为 T 的热库 A’ 处于热平衡 (A’ » A)

(1). 试问系统 A 处于微观状态 r 的概率 Pr? 这里微观状态 r 的内能为 Er

(2). 试基于等概率原理推导此概率 Pr

Answer:

(1)

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \tag{3.1}$$

(2)

$$E_r + E' = E^{(0)} \tag{3.2}$$

So, the probability to find A in state r is:

$$P_r = C'\Omega' \left(E^{(0)} - E_r \right) \tag{3.3}$$

Since $A << A'$, expand Ω at $E' = E$:

$$\ln \Omega' \left(E^{(0)} - E_r \right) = \ln \Omega' \left(E^{(0)} \right) - \left[\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \right]_0 E_r \ldots \tag{3.4}$$

Neglect terms of higher order:

$$\Omega' \left(E^{(0)} - E_r \right) = \Omega' \left(E^{(0)} \right) e^{-\beta E} \tag{3.5}$$

So:

$$P_r = Ce^{-\beta E_r} \tag{3.6}$$

Since C is a integration factor:

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \tag{3.7}$$

9. 以系统温度和体积（T，V）作为独立自变量

(1) 试写出 Helmholtz 自由能 F 的微元表达式 dF

(2) 试推导 Maxwell 关系式：$(\partial S/\partial V)_T = (\partial p/\partial T)_V$

Answer:

(1)

Definition:

$$F = E - TS \tag{4.1}$$

So:

$$dF = -SdT - pdV \tag{4.2}$$

(2)

Mathematically:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \tag{4.3}$$

Compare with (4.2):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{V}}\right)_T = -p \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \tag{4.5}$$

And we have:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \tag{4.6}$$

So:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \tag{4.7}$$

10.

(1) 什么是热机?

(2) 一热机在高温热源吸热 Q，在低温热源放热，并同时对外做功 W，如果整个过程为准静态，试计算其效率 η

Answer:

(1)

热机是将体系的内能转化为对外做功的机器

(2)
We have:

$$\eta = \frac{W}{Q} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{5.1}$$

(5.1) is a equation when $\Delta S = 0$, which means undergoes a quasi-static process.
So:

$$\eta = \frac{W}{Q} \tag{5.2}$$