# 第3章　递归

林 海

Lin.hai@whu.edu.cn

# 3.1 递归

## 例1 阶乘函数

阶乘函数可递归地定义为：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

边界条件

递归方程

边界条件与递归方程是递归函数的二个要素，递归函数只有具备了这两个要素，才能在有限次计算后得出结果。

# 3.1 递归

## 例1 阶乘函数

阶乘函数可递归地定义为：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

边界条件

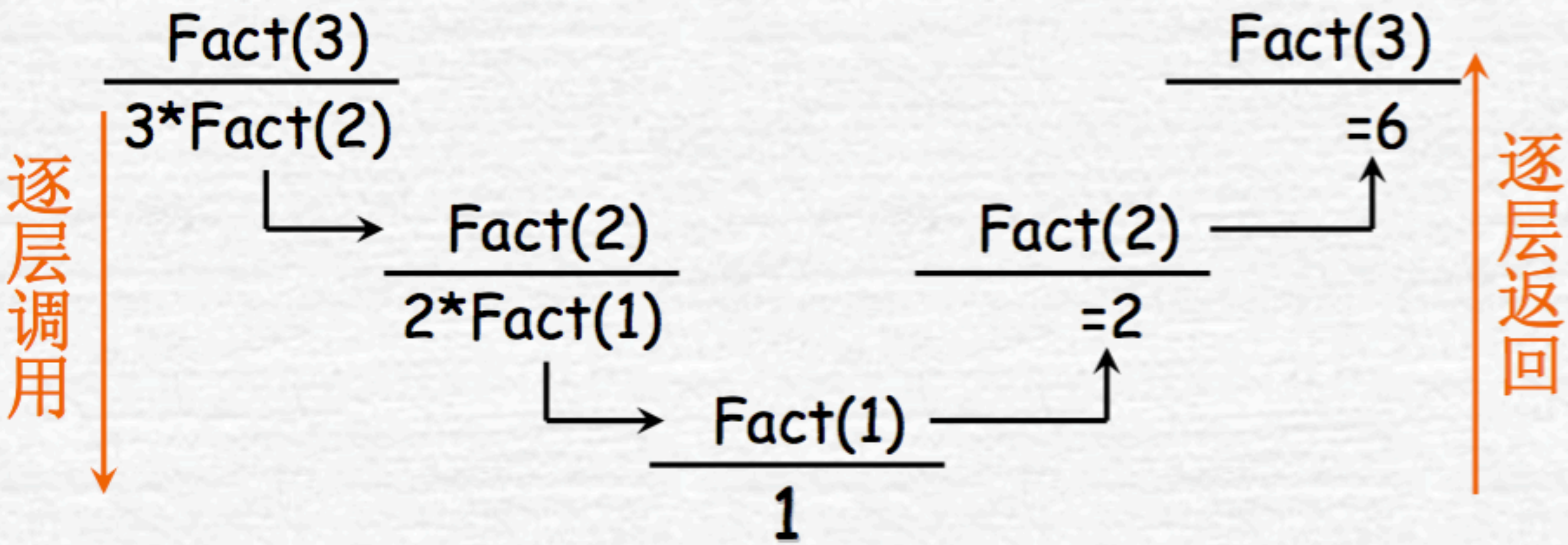
递归方程

```
Factorial(n)
    If n==0
        return 1
    Return n*Factorial(n-1)
```

# 3. 1 递归

- n阶乘的定义： $n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n*(n-1)! & n > 0 \end{cases}$

- 以求3！为例的计算过程



# 3.1 递归

## 例2 Fibonacci数列

无穷数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…，被称为Fibonacci数列。它可以递归地定义为：

$$F(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n>1\end{cases}$$

边界条件

递归方程

第n个Fibonacci数可递归地计算如下：

```
Fibonacci(n)
    if (n <= 1) return 1;
    return Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2);
```

# 3.1 递归

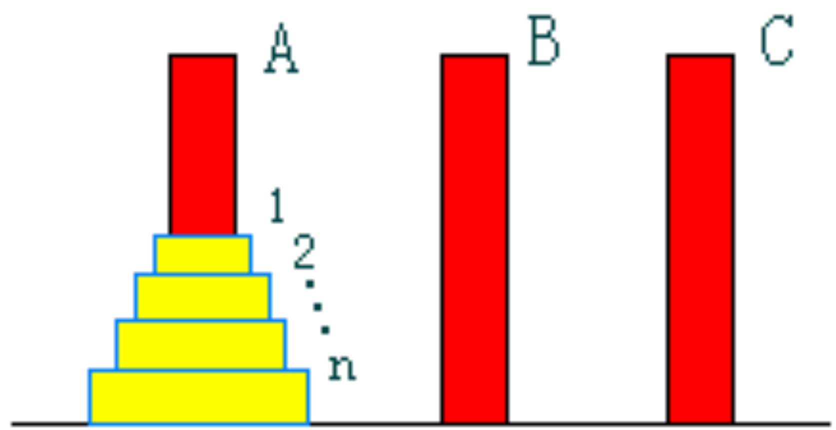
## 例 Hanoi塔问题

设a,b,c是3个塔座。开始时，在塔座a上有一叠共n个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠在一起。各圆盘从小到大编号为1,2,...,n,现要求将塔座a上的这一叠圆盘移到塔座b上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：

规则1：每次只能移动1个圆盘；

规则2：任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上；

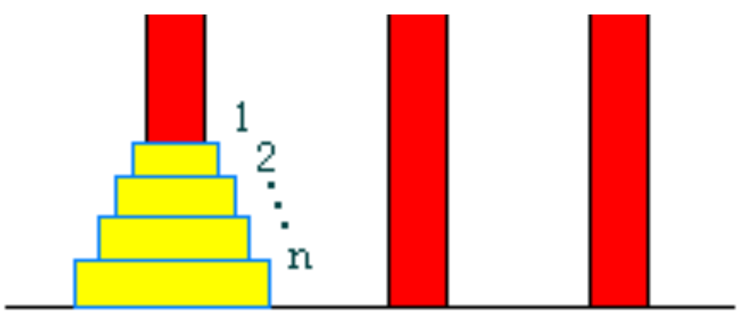
规则3：在满足移动规则1和2的前提下，可将圆盘移至a,b,c中任一塔座上。



# 3.1 递归

**例6 Hanoi塔问题**

```
public static void hanoi(int n, int a, int b, int c)
  {
     if (n > 0)
     {
       hanoi(n-1, a, c, b);
       move(a,b);
       hanoi(n-1, c, b, a);
     }
  }
```



# 递归小结

优点：结构清晰，可读性强，而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性，因此它为设计算法、调试程序带来很大方便。

缺点：递归算法的运行效率较低，无论是耗费的计算时间还是占用的存储空间都比非递归算法要多。

# 3.2 二分搜索的递归

输入：非降序排列的数组A[1...n]和元素x
输出：如果x=A[j], 1 ≤j ≤n,则输出j,否则输出0.

1. low←1; high ←n; j←0
2. while(low ≤high) and (j=0)
3. mid ← ⌊( low+high)/2⌋
4. if x=A[mid] then j ←mid
5. else if x<A[mid] then high ←mid-1
6. else low ←mid+1
7. end while
8. return j

```
binarySearch(a, x, right, left)
  {while (left <= right) {
     middle = (left + right)/2;
      if (x == a[middle]) return middle;
      if (x > a[middle]) return binarySearch(a, x, right, middle+1);
      else return binarySearch(a, x, middle+1, left);
     }
   return -1; // 未找到x
  }
```

# 3.2 二分搜索（递归）

- 算法复杂度

$$T(n)=\begin{cases}1 & if\ n=1\\ T(n/2)+1 & if\ n\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n)=T(n/2)+1=T(n/2^2)+1+1$$

$$=T(n/2^{\log n})+\log n=1+\log n=\Theta(\log n)$$

# 3.2 选择排序的递归（归纳）

**算法 1.4** SELECTIONSORT

**输入：** $n$ 个元素的数组 $A[1\cdots n]$。

**输出：** 按非降序排列的数组 $A[1\cdots n]$。

```
for i ← 1 to n − 1
    k ← i
    for j ← i + 1 to n        {查找第 i 小的元素}
        if A[j] < A[k] then k ← j
    end for
    if k ≠ i then  交换 A[i]与 A[k]
end for
```

**算法 5.1** SELECTIONSORTREC

**输入：** $n$ 个元素的数组 $A[1\cdots n]$。

**输出：** 按非降序排列的数组 $A[1\cdots n]$。

```
sort(1)
```

**过程** *sort*$(i)$ {对 $A[i\cdots n]$排序}

```
if i < n then
    k ← i
    for j ← i + 1 to n
        if A[j] < A[k] then k ← j
    end for
    if k ≠ i then 互换 A[i]和 A[k]
    sort(i + 1)
end if
```

# 3.2 选择排序的递归

复杂度函数：

$$C(n)=\begin{cases}0 & \text{若 } n=1\\ C(n-1)+(n-1) & \text{若 } n\geqslant 2\end{cases}$$

这个递推式的解是

$$C(n)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2}$$

由于运行时间和元素的比较次数成线性关系，所以说它是 $\Theta(n^2)$ 的。

# 3.2 插入排序的递归

**算法 1.5　INSERTIONSORT**

**输入：** $n$ 个元素的数组 $A[1\cdots n]$。

**输出：** 按非降序排列的数组 $A[1\cdots n]$。

```
for i ← 2 to n
    x ← A[i]
    j ← i − 1
    while (j > 0) and (A[j] > x)
        A[j + 1] ← A[j]
        j ← j − 1
    end while
    A[j + 1] ← x
end for
```

**算法 5.2　INSERTIONSORTREC**

**输入：** $n$ 个元素的数组 $A[1\cdots n]$。

**输出：** 按非降序排列的数组 $A[1\cdots n]$。

```
sort(n)
```

**过程**　$sort(i)$　{对 $A[1\cdots i]$排序}

```
if i > 1 then
    x ← A[i]
    sort(i − 1)
    j ← i − 1
    while j > 0 and A[j] > x
        A[j + 1] ← A[j]
        j ← j − 1
    end while
    A[j + 1] ← x
end if
```

# 3.2 插入排序的递归

复杂度（平均）：

$$C(n) = \begin{cases} 0 \quad if \quad n = 1 \\ C(n-1) + \frac{n}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \quad if \quad n > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i}{2} - \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} + \frac{n-1}{2} = \frac{n^2}{4} + \frac{3n}{4} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

# 3.6 生成排序

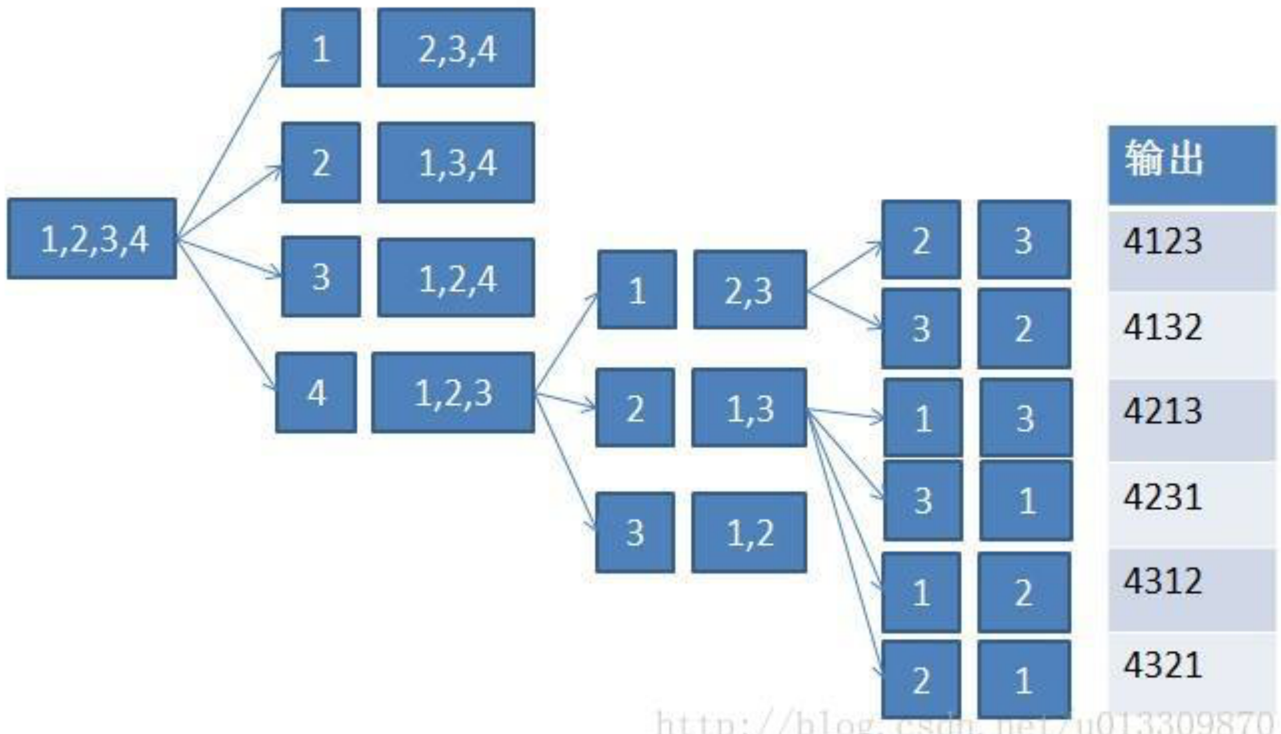
**排列问题**

设计一个递归算法生成n个元素$\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$的全排列。

设$R=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$是要进行排列的n个元素，$R_i=R-\{r_i\}$。集合X中元素的全排列记为perm(X)。$(r_i)$perm(X)表示在全排列perm(X)的每一个排列前加上前缀得到的排列。R的全排列可归纳定义如下：

当n=1时，perm(R)=(r)，其中r是集合R中唯一的元素；
当n>1时，perm(R)由$(r_1)$perm$(R_1)$，$(r_2)$perm$(R_2)$，…，$(r_n)$perm$(R_n)$构成。

# 排列问题


1,2,3,4
1
2,3,4
2
1,3,4
3
1,2,4
4
1,2,3
1
2,3
2
1,3
3
1,2
2
3
3
2
1
3
3
1
1
2
2
1
输出
4123
4132
4213
4231
4312
4321
http://blog.csdn.net/u013309870

# 3.6 生成排序

## 排列问题

当n=1时，perm(R)=(r)，其中r是集合R中唯一的元素；
当n>1时，perm(R)由($r_1$)perm($R_1$)，($r_2$)perm($R_2$)，…，($r_n$)perm($R_n$)构成。

```
Perm(list[], k, m)
  if(k == m)
       for(i = 0; i <= m; i++)
          printf("%d ", list[i]);
   else
      for(i = k; i <= m; i++)
           swap(&list[k], &list[i]);
            Perm(list, k + 1, m);
          swap(&list[k], &list[i]);
```

# 3.6 生成排序

复杂度（迭代次数）：

$$f(n)=\begin{cases}0 & \text{若 } n=1\\ nf(n-1)+n & \text{若 } n\geqslant 2\end{cases}$$

求解得：

$$f(n)=n!h(n)=n!\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j!}<2n!$$

所以，算法的运行时间由输出语句来决定，也就是 $\Theta(nn!)$。

# 5.7 整数划分

**整数划分问题**

将正整数n表示成一系列正整数之和：$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$，$k \geq 1$。

正整数n的这种表示称为正整数n的划分。求正整数n的不同划分**个数**。

例如正整数6有如下11种不同的划分：

6；
5+1；
4+2，4+1+1；
3+3，3+2+1，3+1+1+1；
2+2+2，2+2+1+1，2+1+1+1+1；
1+1+1+1+1+1。

# 5.7 整数划分

**整数划分问题**

前面的几个例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。

在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量：将最大加数$n_1$不大于m的划分个数记作q(n,m)。可以建立q(n,m)的如下递归关系。

(1) $q(n,1)=1, n>1$

(2) $q(n,m)=q(n,n), m>n$

(3) $q(n,n)=1+q(n,n-1)$;

正整数n的划分由$n_1=n$的划分和$n_1\le n-1$的划分组成。

(4) $q(n,m)=q(n,m-1)+q(n-m,m), n>m>1$;

正整数n的最大加数$n_1$不大于m的划分由$n_1=m$的划分和$n_1\le m-1$的划分组成。

# 5.7 整数划分

**例 整数划分问题**

前面的几个例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。

在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量：将最大加数$n_1$不大于m的划分个数记作q(n,m)。可以建立q(n,m)的如下递归关系。

$$
q(n,m)=\begin{cases} 1 & n=1,m=1 \\ q(n,n) & n<m \\ 1+q(n,n-1) & n=m \\ q(n,m-1)+q(n-m,m) & n>m>1 \end{cases}
$$

正整数n的划分数p(n)=q(n,n)。

# 复杂度的递归方法求解

- **代入法**
  - 先猜测解的形式，确定它的某个界的存在
  - 再用归纳法去证明
  - 这种方法只适用于解的形式容易猜的情况.需要靠经验
- **递归树方法**
  - 通过画递归树来求解
- **主方法**
  - 对T(n)=aT(a/b)+f(n)形式的求解

# 代入法

确定下面递归式的上界：$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$

1. 猜测：nlogn
2. 归纳：假设m<n时成立，证明n成立

另m=n/2，通过定义求得n成立

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leqslant 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor))+n \leqslant cn\lg(n/2)+n \\
&= cn\lg n - cn\lg 2 + n \\
&= cn\lg n - cn + n \leqslant cn\lg n
\end{aligned}
$$

边界条件：

由 $T(1)=1$ ⇒ $T(2)=4$，$T(3)=5$

# 代入法

考虑如下递归式：

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

猜测解为 $T(n)=O(n)$

得到

$$T(n) \leqslant c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1$$

无法完成归纳

新的猜测为 $T(n) \leqslant cn-d$，$d$ 是大于等于 0 的一个常数。

$$\begin{aligned} T(n) &\leqslant (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \leqslant cn - d \end{aligned}$$

# 代入法

递归式：$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$

证明上界和下界类似，在此就只证明下界。

猜测 $T(n) \geq c(n+d)\lg(n+d)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\geq c(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + d)\lg(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + d) + c(\lceil \frac{n}{2} \rceil + d)\lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil + d) + dn \\
&\geq c(\frac{n}{2} - 1 + d)\lg(\frac{n}{2} - 1 + d) + c(\frac{n}{2} + d)\lg(\frac{n}{2} + d) + dn \\
&\geq 2c(\frac{n}{2} - 1 + d)\lg(\frac{n}{2} - 1 + d) + dn \\
&= c(n + d + d - 2)\lg(n + 2d - 2) - c(2d - 2) + (d - c)n
\end{aligned}
$$

要使 $c(n+d+d-2)\lg(n+2d-2) - c(2d-2) + (d-c)n \geq c(n+d)\lg(n+d)$，只需 $d \geq 2, 0 < c \leq d$ 即可。

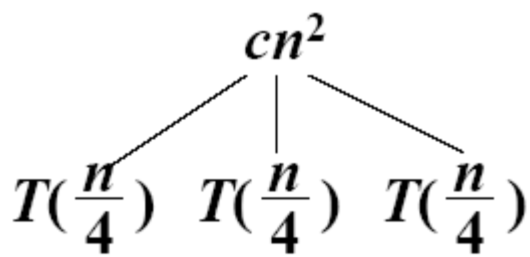
# 递归树方法

- Solve $T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$, we have

$$T(n)$$

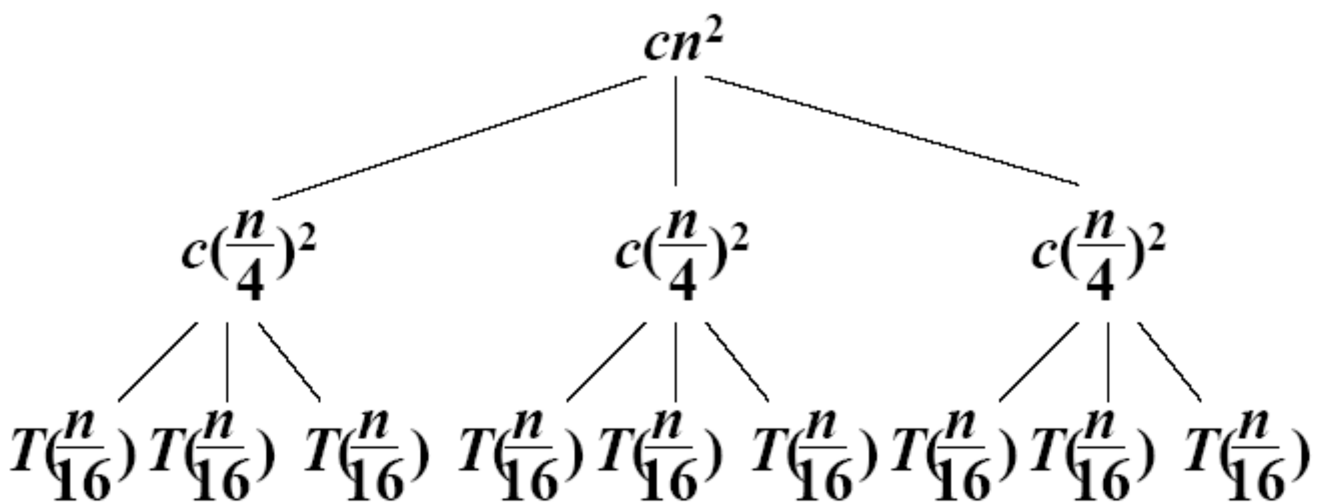
# 递归树方法

- Solve $T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$, we have

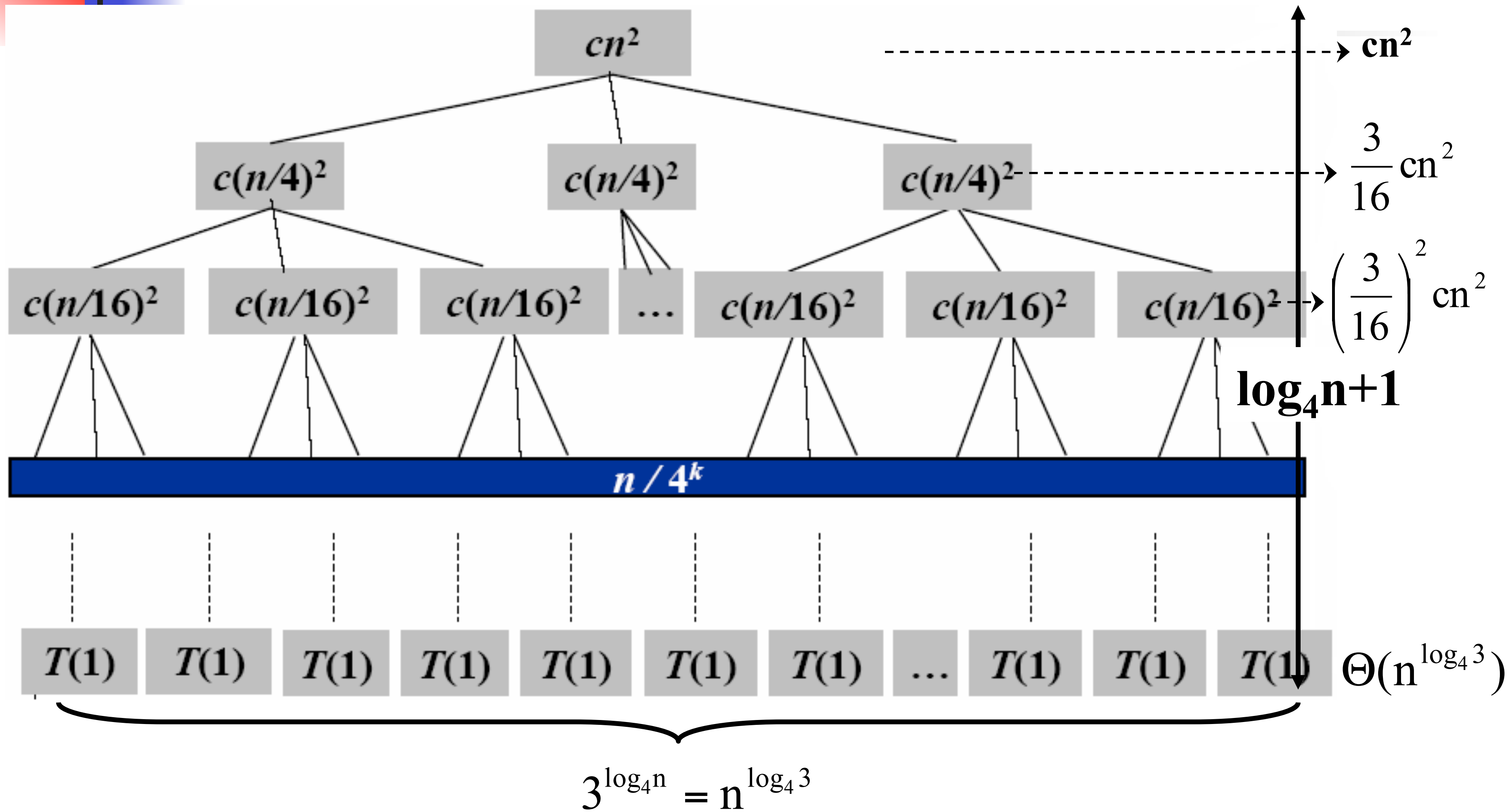


# 递归树方法

- Solve $T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$, we have



# 递归树方法




- The fully expanded tree has $\lg_4 n+1$ levels, i.e., it has height $\lg_4 n$

# 递归树方法

- 对整棵树求和

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

# 递归树方法

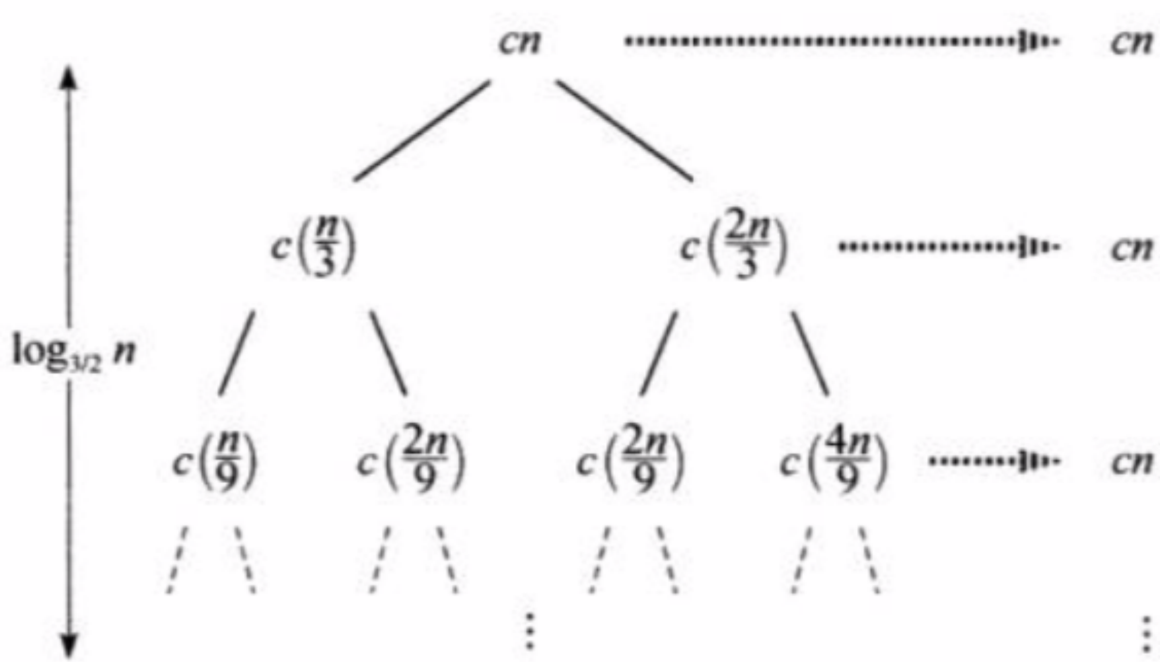
- 对整棵树求和

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1}\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) < \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{1}{1-(3/16)}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

# 递归树方法

如下递归式的递归树：

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n)$$



# 递归树方法

如下递归式的递归树：

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n)$$

The shortest path from the root to a leaf in the recursion tree is $n \to (1/3)n \to (1/3)^2 n \to \cdots \to 1$. Since $(1/3)^k n = 1$ when $k = \log_3 n$, the height of the part of the tree in which every node has two children is $\log_3 n$. Since the values at each of these levels of the tree add up to $cn$, the solution to the recurrence is at least $cn \log_3 n = \Omega(n \lg n)$.

从根到叶的

最长简单路径是 $n \to (2/3)n \to (2/3)^2 n \to \cdots \to 1$。

由于当 $k = \log_{3/2} n$ 时，$(2/3)^k n = 1$，因此树高

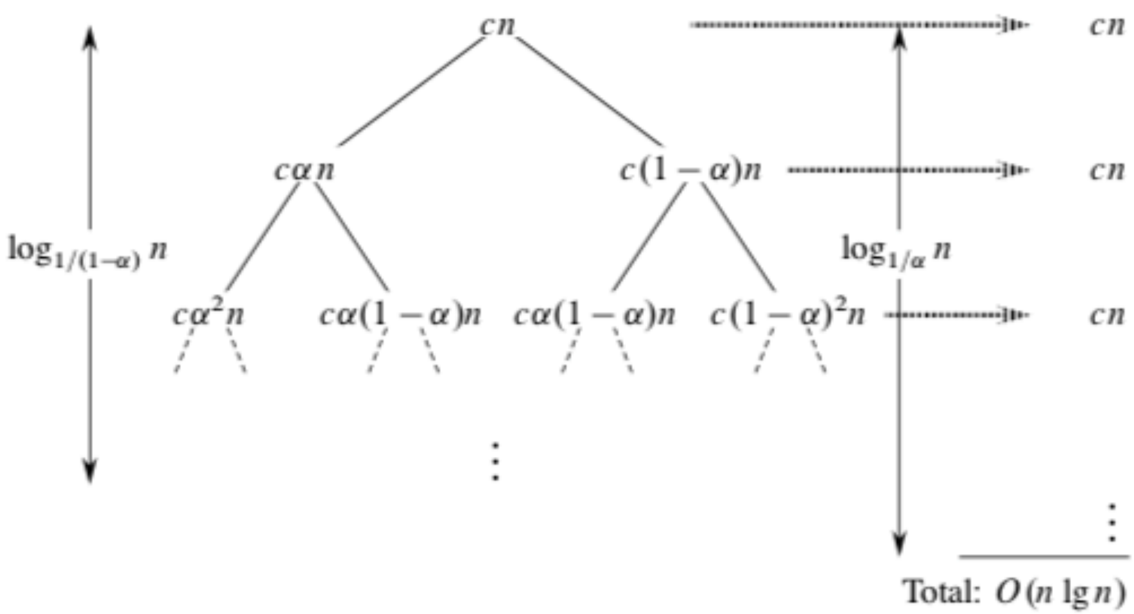
为 $\log_{3/2} n$。

即 $O(cn \log_{3/2} n) = O(n \lg n)$

# 递归树方法

对递归式 $T(n)=T(\alpha n)+T((1-\alpha)n)+cn$，利用递归树给出一个渐近紧确解，其中 $0<\alpha<1$ 和 $c>0$ 是常数。

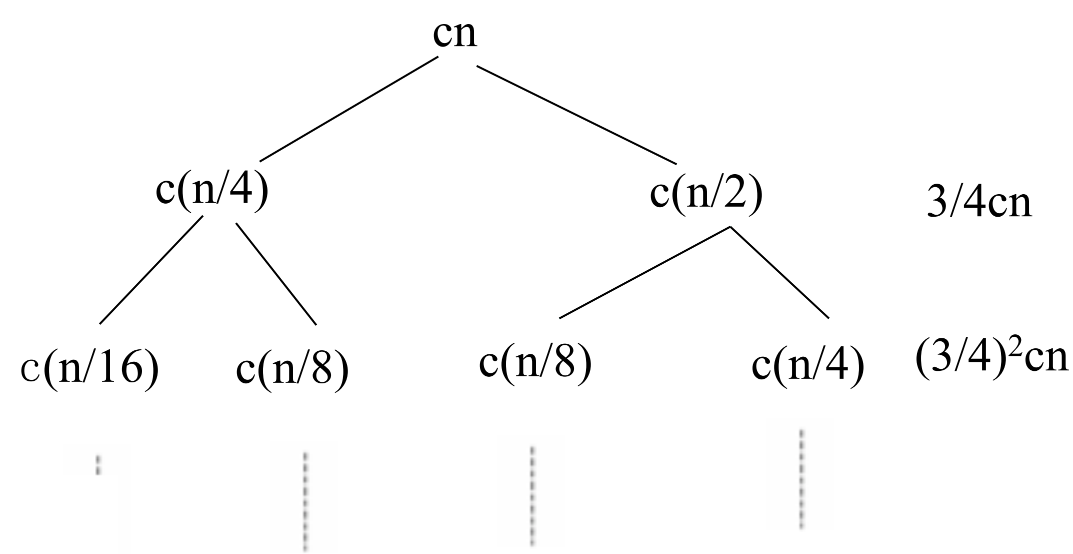
Without loss of generality, let $\alpha \geq 1-\alpha$, so that $0 < 1-\alpha \leq 1/2$ and $1/2 \leq \alpha < 1$.




The recursion tree is full for $\log_{1/(1-\alpha)} n$ levels, each contributing $cn$, so we guess $\Omega(n \log_{1/(1-\alpha)} n) = \Omega(n \lg n)$. It has $\log_{1/\alpha} n$ levels, each contributing $\leq cn$, so we guess $O(n \log_{1/\alpha} n) = O(n \lg n)$.

# 递归树方法

T(n)=T(n/4)+T(n/2)+cn




最长路径为$\log_2 n$，所以O

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i cn < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i cn = 4cn$$

最短路径为$\log_4 n$，所以Ω

$$\sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i cn = \frac{1-(3/4)^{\log_4 n}}{1-(3/4)} cn > cn$$

**T(n) = Θ(n)=》所有$T(n)=T(c_1 n)+T(c_2 n)+cn$，如果c1+c2<1，则T(n) = Θ(n)**

# 定理2.7

**定理 2.7** 设 $b, c_1, c_2$ 是非负常数，那么递推式

$$f(n)=\begin{cases}0 & 若\ n=0\\ b & 若\ n=1\\ f(\lfloor c_1 n\rfloor)+f(\lfloor c_2 n\rfloor)+bn & 若\ n\geqslant 2\end{cases}$$

的解是

$$f(n)=\begin{cases}O(n\log n) & 若\ c_1+c_2=1\\ \Theta(n) & 若\ c_1+c_2<1\end{cases}$$

# 求解递归式—主方法

设$a \geq 1$，$b > 1$为常数。$s(n)$为一给定的函数，$T(n)$递归定义如下：

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + s(n)$$

并且$T(n)$有适当的初始值。那么，当$n$充分大时，有：

(1)若存在$\varepsilon > 0$，使得$s(n) = O(n^{\log_b^a - \varepsilon})$ 成立，那么有$T(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$

(2)若$s(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$，那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \cdot \log n)$

(3)若存在$\varepsilon > 0$，使得$s(n) = \Omega(n^{\log_b^a + \varepsilon})$ 成立，并且存在$c < 1$，使得 $a \cdot s(n/b) \leq c \cdot s(n)$，那么有$T(n) = \Theta(s(n))$

# 求解递归式—主方法

**定理 4.1**（主定理） 令 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n)=aT(n/b)+n^x$$

$$T(n)=\begin{cases} \Theta(n^x) & \text{if } a<b^x \\ \Theta(n^x * \log n) & \text{if } a=b^x \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a>b^x \end{cases}$$

# 求解递归式—主方法

对下列递归式，使用主方法求出渐近紧确界

a. $T(n)=2T(n/4)+1$

b. $T(n)=2T(n/4)+\sqrt{n}$

c. $T(n)=2T(n/4)+n$

d. $T(n)=2T(n/4)+n^2$

a. Θ(n^log$_4$2)
b. Θ(n^1/2logn)
c. Θ(n)
d. Θ(n^2)