

武汉大学计算机学院2016-2017学年第一学期

《离散数学》(计算机类)期末考试(A)卷

学号：_____ 姓名：_____ 成绩：_____

注意：所有答案写在答题纸上并注明题号，计算题要有计算过程。

一. (12分) 求下列公式的主析取范式和主合取范式：

$$(\neg A \rightarrow (B \wedge C)) \wedge (A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$$

二. (12分) 已知下列两个前提：院团委的每个成员既是学生又是班干部；有些院团委成员来自北京。完成下列各题：(2+5+5=12分)

(1) 结论：有院团委成员来自北京并且是班干部。是否成立？

(2) 将上述前提和结论符号化。(要求：论域为全总个体域。原子符号为： $M(x)$: x 是院团委的成员； $S(x)$: x 是学生； $G(x)$: x 是班干部； $B(x)$: x 来自北京。)

(3) 写出上述结论（或结论的否定）为前提的有效结论的证明序列。

三. (16分) 已知函数 $f: X \rightarrow Y$ ，完成下列各题：(5+3+5+3=16分)

(1) 设 $A \subseteq X$ ，试证明： $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(2) 若 $X = Y = \{1, 2\}$ ，试举出 f 和 A 的例子证明： $A \neq f^{-1}(f(A))$

(3) $\forall A \subseteq X$ ， $A = f^{-1}(f(A))$ 成立的充要条件是什么？并加以证明；

(4) 设集合 $X = \{0, \dots, m-1\}$ ， $Y = \{0, \dots, n-1\}$ ，(其中 $m, n \in \mathbb{N}$ ， $0 < m \leq n$)。函数 $f: X \rightarrow Y$ ， $f(x) = x$ 。试求：集合 $\{g \mid g: Y \rightarrow X \wedge g \circ f = 1_X\}$ 的基数。(1_X 是 X 上的恒等函数。)

四. (12分) 已知集合 $X, Y (X \neq \emptyset)$ ，函数集合 $Y^X = \{f \mid X \rightarrow Y\}$ 。设 $\langle Y, S \rangle$ 是偏序集，且 Y^X 上的二元关系 R 定义如下：

$$\forall f, g \in Y^X, \langle f, g \rangle \in R \Leftrightarrow \langle f(x), g(x) \rangle \in S \quad (\forall x \in X)$$

完成下列各题：（4+4+4=12分）

- (1) 试证明： R 为 Y^X 上的偏序关系；
- (2) 设 b^* 是偏序集 $\langle Y, S \rangle$ 的最大元，试证明：最大元 b^* 是唯一的；
- (3) 试给出偏序集 $\langle Y^X, R \rangle$ 存在最大元的充要条件，并求出最大元。

五.（12分）设集合 $A = \{a, b, c\}$ ，集合 A 上的二元运算 \circ 的定义如下表所示，完成下列各题：（4+4+4=12分）

\circ	a	b	c
a	a	b	b
b	a	b	c
c	a	b	a

- (1) 运算 \circ 是否存在左、右单位元？是否存在单位元？并说明原因；
- (2) 运算 \circ 是否存在左、右零元？是否存在零元？并说明原因。
- (3) A 上的二元运算中有多少个运算满足交换律？有多少个运算有单位元？

六.（12分）设 $\langle G, \circ \rangle$ 是一个群， $r \in G$ ，定义 G 上的二元运算 Δ 如下：

$$\forall x, y \in G, x \Delta y = x \circ r^{-1} \circ y$$

试证明： $\langle G, \Delta \rangle$ 是一个群。

七.（12分）已知无向连通图 G 有 k 个奇度数的结点，完成下列各题：
（4+8=12分）

- (1) 在图 G 中至少要添加多少条边才能使其称为欧拉图？
- (2) 证明上述结论。

八.（12分）已知连通的简单平面图 $G = \langle V, E \rangle$ ， $|V| = n$ ， $|E| = m$ ， $\forall v \in V, \deg(v) = 3$ 。试画出同构意义下所有的图 G ，并计算 n, m 的值。