

武汉大学 2010–2011 学年第一学期期末考试

资源与环境学院 2008 级 地理信息系统专业

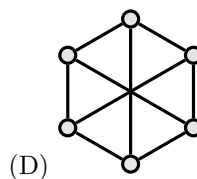
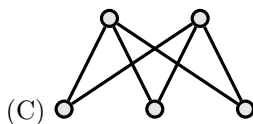
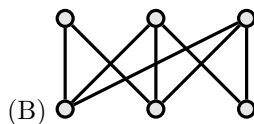
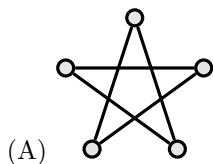
《离散数学》试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 20 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在武汉大学试卷纸上, 写在其他位置无效.

一、选择题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

1. 设 P 和 Q 都是命题, 则 $P \rightarrow Q$ 的真值为假, 当且仅当 【 】
 (A) P 为假, Q 为真 (B) P 为假, Q 也为假
 (C) P 为真, Q 也为真 (D) P 为真, Q 为假
2. 下列集合运算正确的是 【 】
 (A) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \emptyset$ (B) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$
 (C) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (D) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset = \{\{\emptyset\}\}$
3. 下列 $X = \{a, b, c\}$ 上的关系中, 不具备传递性的是 【 】
 (A) $R_1 = \{\langle a, b \rangle\}$ (B) $R_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$
 (C) $R_3 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle\}$ (D) $R_4 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$
4. 设 \mathbb{N} 为自然数集合, $+$, \times 分别是普通的加法和乘法. $\langle \mathbb{N}, * \rangle$ 在下列运算中不构成代数系统的是 【 】
 (A) $a * b = a + b - 2 \times a \times b$ (B) $a * b = a + b$
 (C) $a * b = a \times b$ (D) $a * b = |a + b|$
5. 下列各图中, 不是平面图的是 【 】



二、填空题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

6. 设 P : 天下大雨; Q : 我骑自行车上班. 命题“除非天下大雨, 否则我骑自行车上班”的符号化形式为_____.
7. 设 A, B 为集合. 命题 “ $A - B = \emptyset \iff A = B$ ” 的真值为_____.
8. 设集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 $C = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ 是 S 的一个划分, 则 C 所对应的等价关系 $R =$ _____.
9. 设 G 是具有 6 个结点的无向完全图, 则图 G 的边数为_____.

10. 一棵树有 2 个 4 度结点, 3 个 3 度结点, 其余是树叶. 则该树中共有_____片树叶.

三、解答题(本题满分 80 分)

11. (6 分) 设 P 表示“今天天气很好”, Q 表示“我们去郊游”. 试化简下面的公式, 并用简单明了的汉语描述该公式所表达的含义:

$$((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)) \vee \neg(\neg Q \rightarrow \neg P).$$

12. (6 分) 公司打算派小李或小张出差. 若派小李去, 则小赵要加班. 若派小张去, 则小王也得去. 小赵没加班, 问公司是如何派遣的? (要求写出命题公式, 再进行相关讨论.)
13. (6 分) 用 L 和 D 分别表示集合 $\{1, 2, 3, 6\}$ 上普通的小于关系和整除关系, 试用序偶列出 L , D 以及 $L \cap D$, 并指明它们的基数.
14. (6 分) 一个连通平面图有 9 个结点, 它们的度数分别是: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. 问此图一共有多少个面?
15. (6 分) 试说明: 对完全 m 叉树, 若已知树叶数 l 、分枝点数(即内点数) i 、结点总数 n 这三个中的任意一个, 则其余两个必定可求.
16. (10 分) 用推理规则证明: $P \rightarrow Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \implies \neg S$.
17. (12 分) 设集合 $S = \{a, b, c, d\}$, S 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle\},$$

$$R_2 = \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle\}.$$

- (1) 试分别写出 R_1 和 R_2 所对应的关系矩阵以及关系图;
- (2) 试求出 R_1^2 , $R_1 \circ R_2$, 以及传递闭包 R_2^+ .
18. (12 分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15\}$, 用 “|” 表示 A 中元素之间的整除关系.
- (1) 证明 “|” 是 A 上的偏序关系;
- (2) 画出该偏序关系的哈斯图;
- (3) 对 $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = A$, 分别求 B_1 , B_2 的最大元、最小元、极大元、极小元、最小上界、最大下界(请列表说明).
19. (8 分) 某市拟在六个小镇之间架设互联网, 其网点间的距离由下面的矩阵给出. 数字 0 表示两个小镇之间不能架设直接的线路. 试设计架设线路的最优方案使得总距离最小(请画出图并计算出线路长度).

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

20. (8 分) 画出结点数 $v \leq 5$ 的所有不同构的无向树.

参考答案 · 卷 (A)

1. D
2. B
3. B
4. A
5. D
6. $\neg P \rightarrow Q$ (或者 $\neg Q \rightarrow P$)
7. F (或 0)
8. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\} \cup I_S$
9. 15
10. 9
11. 对公式化简:

$$\begin{aligned}
 & ((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)) \vee \neg(\neg Q \rightarrow \neg P) \\
 \Leftrightarrow & (\neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee \neg(\neg\neg Q \vee \neg P) \\
 \Leftrightarrow & ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg Q \wedge P) \\
 \Leftrightarrow & P \wedge \neg Q.
 \end{aligned}$$

即该公式的含义是: 今天天气很好, 但我们没有去郊游.

12. 令 P : 派小李出差; Q : 派小张出差; R : 小赵加班; S : 派小王出差. 则

$$A = (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow \neg R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge \neg R.$$

化简得 $A = \neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S$. 即派遣方案为: 派小张和小王出差.

13. $L = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\};$
 $D = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 6 \rangle\};$
 $L \cap D = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}.$
 基数分别为 6, 9, 5.

14. 结点总数为: $2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 28$, 所以边的数目为 14. 由欧拉公式, 面的数目为: $14 - 9 + 2 = 7$.

15. 对完全 m 叉树,

- (1) 若结点总数 n 为已知, 则分枝点数为 $i = (n-1)/m$, 树叶数为 $l = n - i = n - (n-1)/m$.
- (2) 若分支点数 i 为已知, 则结点总数为 $n = mi + 1$, 树叶数为 $l = n - i = (m-1)i + 1$.
- (3) 若树叶数 l 为已知, 则结点总数为 $n = (ml-1)/(m-1)$, 分枝点数为 $i = (l-1)/(m-1)$.

16. 证明:

(1)	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	P
(2)	$\neg Q \vee R$	T(1) I
(3)	$Q \rightarrow R$	T(2) E
(4)	$P \rightarrow Q$	P
(5)	$P \rightarrow R$	T(3),(4) I
(6)	$\neg R$	T(1) I
(7)	$\neg P$	T(5),(6) I(I_{12})
(8)	$\neg(\neg P \wedge S)$	P
(9)	$P \vee \neg S$	T(8) E
(10)	$\neg S$	T(7),(9) I

17. (1) R_1 和 R_2 的关系矩阵分别为

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$M_{R_1^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R_1^2 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\}$.

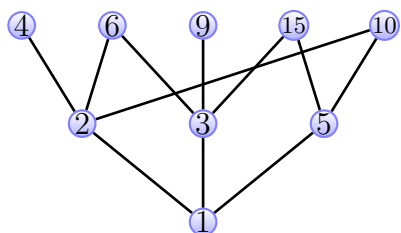
同理, $R_1 \circ R_2 = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\}$.

由 Warshall 算法得

$$M_{R_2}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

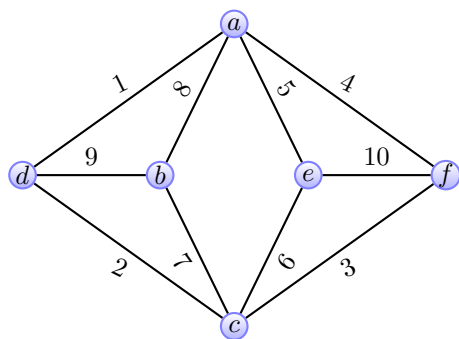
18. (1) 验证满足自反性、反对称性、传递性, 所以是偏序关系.

(2) 哈斯图(形式不唯一):



	最大元	最小元	极大元	极小元	最小上界	最大下界
(3) B_1	无	1	2,3	1	6	1
B_2	无	1	4,6,9,10,15	1	无	1

19. (1) 图形可以表达如下(形式不唯一):



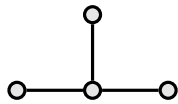
(2) 依次选择 $\omega_{ab} = 1$, $\omega_{dc} = 2$, $\omega_{cf} = 3$, $\omega_{ae} = 5$, $\omega_{cb} = 7$, 得到最小生成树. 其线路长度为 18.

20. $v = 1$:

$v = 2$:

$v = 3$:

$v = 4$:



$v = 5$:

