§ 4.2　积分的初等性质

4.2.1 积分的初等性质

以下设E是$\mathbf{R}^n$中的一给定的可测集.

定理 4.5 （积分的线性性） 若$f, g \in L(E)$, c是常数, 则cf, $f+g \in L(E)$, 并且

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x = c\int_E f\,\mathrm{d}x, \tag{4.12}$$

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}x = \int_E f\,\mathrm{d}x + \int_E g\,\mathrm{d}x. \tag{4.13}$$

证 由于$f \in L(E)$, 故$|f| \in L(E)$. 由定理 4.2, 有

$$\int_E |cf|\mathrm{d}x = \int_E |c||f|\mathrm{d}x = |c|\int_E |f|\mathrm{d}x < \infty.$$

这说明$|cf| \in L(E)$, 从而$cf \in L(E)$.

类似地由$|f+g|\le|f|+|g|$推出$f+g\in L(E)$.

当$c\ge 0$时, $(cf)^+=cf^+$, $(cf)^-=cf^-$. 利用定理 4.2 得到

$$\int_E cf\,\mathrm{d}x=\int_E (cf)^+\mathrm{d}x-\int_E (cf)^-\mathrm{d}x$$

$$=c\int_E f^+\mathrm{d}x-c\int_E f^-\mathrm{d}x=c\int_E f\,\mathrm{d}x.$$

当$c<0$时, $(cf)^+=-cf^-$, $(cf)^-=-cf^+$. 此时同样可证(4.12)式成立. 再证明(4.13)式成立. 由于

$$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=f^+-f^-+g^+-g^-.$$

因此

$$(f+g)^++f^-+g^-=f^++g^++(f+g)^-.$$

上式两边积分并利用定理 4.2 得到

$$\int_E (f+g)^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x + \int_E g^- \mathrm{d}x$$

$$= \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E g^+ \mathrm{d}x + \int_E (f+g)^- \mathrm{d}x.$$

从上式得到

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^+ \mathrm{d}x - \int_E (f+g)^- \mathrm{d}x$$

$$= \int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x + \int_E g^+ \mathrm{d}x - \int_E g^- \mathrm{d}x$$

$$= \int_E f \mathrm{d}x + \int_E g \mathrm{d}x.$$

因此(4.13)式成立. ■

推论 4.1 （积分对积分域的可加性） 设 $f \in L(E)$, A_1 和 A_2 是 E 的互不相交的可测子集, 并且 $E = A_1 \cup A_2$. 则

$$\int_E f\mathrm{d}x = \int_{A_1} f\mathrm{d}x + \int_{A_2} f\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

证 设 f 在 E 上可积. 由定理 4.4 知道 f 在 A_1 和 A_2 上都可积. 由于 $|f\chi_{A_1}| \le |f|$, $|f\chi_{A_2}| \le |f|$, 因此 $f\chi_{A_1}, f\chi_{A_2} \in L(E)$. 利用定理 4.5 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_1} f\mathrm{d}x + \int_{A_2} f\mathrm{d}x &= \int_E f\chi_{A_1} + \int_E f\chi_{A_2}\mathrm{d}x \\ &= \int_E (f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2})\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故(4.14)式成立. ■

定理 4. 6 设 f,g 在 E 上的积分存在，则

(1) 若 $f \le g$ a.e., 则 $\int_E f\mathrm{d}x \le \int_E g\mathrm{d}x$ (积分的单调性).

(2) 若 $f = g$ a.e., 则 $\int_E f\mathrm{d}x = \int_E g\mathrm{d}x$.

(3) 若 $f \ge 0$ a.e., A 和 B 是 E 的可测子集，并且 $A \subset B$, 则

$$\int_A f\mathrm{d}x \le \int_B f\mathrm{d}x.$$

证 (1). 若在 E 上, $f \le g$ a.e., 则

$$f^+ \le g^+ \text{ a.e.},\ \ f^- \ge g^- \text{ a.e.}$$

利用定理 4.2 得到

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x \le \int_E g^+ \mathrm{d}x,\ \int_E f^- \mathrm{d}x \ge \int_E g^- \mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_E f \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x$$

$$\le \int_E g^+ \mathrm{d}x - \int_E g^- \mathrm{d}x = \int_E g \mathrm{d}x.$$

结论(1)得证.

(2). 由结论(1)立即得到.

(3). 设在 E 上 $f \geq 0$ a.e. 若 $A \subset B$. 则 $f\chi_A \leq f\chi_B$ a.e. 由结论(1)得到

$$\int_A f\,\mathrm{d}x = \int_E f\chi_A\,\mathrm{d}x \leq \int_E f\chi_B\,\mathrm{d}x = \int_B f\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

注　由定理4.6(2)知道, 在一个零测度集上改变一个函数的函数值, 不改变该函数的可积性和积分值. 因此, 在讨论可测函数积分的性质的时候, 可测函数所要满足的条件通常只需要几乎处处成立就可以了.

推论 4.2 (1). 若在 E 上 $f=0$ a.e., 则 $\int_E f\,\mathrm{d}x=0$.

(2). 若 $m(E)=0$, 则对 E 上的任意可测函数 f, $\int_E f\,\mathrm{d}x=0$.

证 由定理 4.6(2)得到结论(1). 若 $m(E)=0$, 则对 E 上的任意可测函数 f, 有 $f=0$ a.e. 由结论(1)得到 $\int_E f\,\mathrm{d}x=0$. ■

推论 4.3 若 $f\in L(E)$, 则 $\left|\int_E f\,\mathrm{d}x\right|\le\int_E|f|\,\mathrm{d}x$.

证 由于 $-|f|\le f\le|f|$, 由定理 4.6 得到

$$-\int_E|f|\,\mathrm{d}x\le\int_E f\,\mathrm{d}x\le\int_E|f|\,\mathrm{d}x$$

这表明 $\left|\int_E f\,\mathrm{d}x\right|\le\int_E|f|\,\mathrm{d}x$. ■

例1 设$m(E)<\infty, f$是E上的有界可测函数, $c\le f(x)<d$ $(x\in E)$. 对每个自然数n, 设

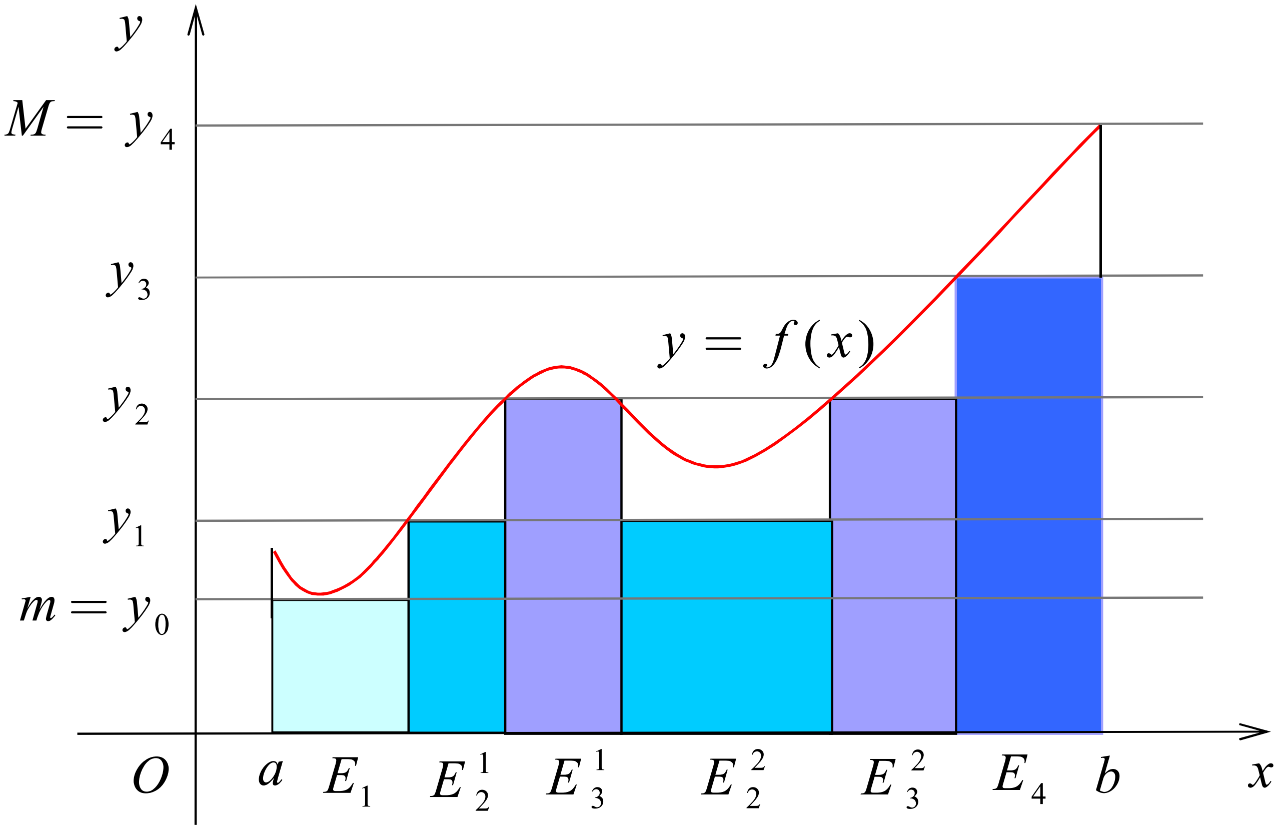
$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d$$

是区间$[c,d]$的一个分割, 令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(y_i-y_{i-1})$. 则

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\cdot mE(y_{i-1}\le f<y_i). \qquad (4.15)$$

$$\int_E f\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} mE_i.$$

其中 $E_i = E(y_{i-1} \le f < y_i),\ i = 1,2,\cdots,n.$



$$E_2 = E_2^1 \cup E_2^2,\ E_3 = E_3^1 \cup E_3^2$$

证 由于 f 是有限测度集上的有界可测函数. 根据定理 4.3, f 在 E 上可积. 令

$$E_i = E(y_{i-1} \le f < y_i),\ i = 1,2,\cdots,n.$$

则 $E_1,\cdots,E_n$ 互不相交, 并且 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. 利用积分的单调性和对积分域的可加性得到

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} y_{i-1} \mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x.$$

类似可以得到 $\int_E f \mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i)$.

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) \le \int_E f\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i).$$

既然 $m(E)<\infty$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 有

$$0 \le \int_E f\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) \le \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i) - \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) m(E_i) \le \lambda m(E) \to 0.$$

这就证明了 $\int_E f\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i)$, 即(4.15)式成立.■

例 1 的结果可以与 Riemann 积分的定义作比较.

在继续讨论积分的性质之前,先证明一个有用的不等式.

引理4.2 (Chebyshev不等式) 设 f 是 E 上的可测函数. 则对任意 $\lambda>0$ 有

$$mE(|f|\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}\int_E|f|\mathrm{d}x.$$

证 当 $x\in E(|f|\geq\lambda)$ 时, $\frac{1}{\lambda}|f(x)|\geq 1$. 由定理 4.6 得到

$$mE(|f|\geq\lambda)=\int_{E(|f|\geq\lambda)}1\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\lambda}\int_{E(|f|\geq\lambda)}|f|\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\lambda}\int_E|f|\mathrm{d}x.$$

引理证毕.■

定理 4.7 若 $f\in L(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限.

证 若 $f\in L(E)$, 则 $|f|\in L(E)$. 令

$$A=E(|f|=\infty),\ A_k=E(|f|\geq k)\ (k=1,2,\cdots).$$

则 $A\subset A_k(k\geq 1)$. 利用由 Chebyshev 不等式得到

$$0\leq m(A)\leq m(A_k)\leq \frac{1}{k}\int_E |f|\mathrm{d}x\to 0\ (k\to\infty).$$

因此 $m(A)=0$. 这就证明了 f 在 E 上几乎处处有限.■

定理4.8 若在E上$f \geq 0$ a.e., 并且$\int_E f \mathrm{d}x = 0$, 则$f = 0$ a.e.

证 由于在E上$f \geq 0$ a.e., 故$mE(f<0)=0$. 令

$$A = E(f>0),\ \ A_k = E\left(f \geq \frac{1}{k}\right)\ (k=1,2,\cdots).$$

则$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 利用 Chebyshev 不等式得到

$$0 \leq m(A_k) \leq k\int_E f \mathrm{d}x = 0.$$

因此$m(A_k) = 0 (k \geq 1)$. 由测度的次可列可加性得到

$m(A) = 0$. 这表明$f = 0$ a.e. ■

定理 4.9（积分的绝对连续性） 设 $f\in L(E)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使得当 $A\subset E$ 并且 $m(A)<\delta$ 时,

$$\int_A |f|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证 设 $f\in L(E)$, 则 $|f|\in L(E)$. 设 $\{g_k\}$ 是非负简单函数列使得 $g_k\uparrow|f|$. 由积分的定义,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x<\infty.$$

于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在自然数 k_0 使得

$$0\le\int_E\left(|f|-g_{k_0}\right)\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_E g_{k_0}\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int_E \left(|f|-g_{k_0}\right)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $M=\max\limits_{x\in E} g_{k_0}(x)$, 则 $0\le M<\infty$. 不妨设 $M>0$.

再令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$, 则对任意可测集 $A\subset E$, 当 $m(A)<\delta$ 时,

$$\int_A |f|\mathrm{d}x=\int_A \left(|f|-g_{k_0}\right)\mathrm{d}x+\int_A g_{k_0}\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\int_A M\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}+Mm(A)<\varepsilon. \quad ■$$

4.2.1 复值可测函数的积分

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, $f(x)$ 是 E 上的复值函数, 则 $f(x)$ 可以分解为

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x),\ x\in E,$$

其中 i 是虚数单位, f_1 和 f_2 是实值函数, 分别称之为 f 的实部和虚部. 若 f_1 和 f_2 都是可测的, 则称 f 是可测的. 若 f_1 和 f_2 都是可积的, 则称 f 是可积的, 并定义 f 在 E 上的积分为

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\int_E f_1\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_E f_2\mathrm{d}x.$$

E 上的复值可积函数的全体记为 $L(E)$.

本节关于实值可测函数积分的性质,除去那些对复值可测函数的积分没有意义的以外,对复值可测函数的积分也是成立的. §4.3 中的控制收敛定理对复值可测函数的积分也是成立的. 其证明的方法是对 f 的实部 f_1 和虚部 f_2 应用实值可测函数积分相应的的性质.

下面只举一个例子. 读者可以自行叙述和证明其它相应的的结果.

定理 4.10 设 f 是 E 上的复值可测函数. 则

(1) $f\in L(E)$ 当且仅当 $|f|\in L(E)$.

(2) 若 f 可积, 则 $\left|\int_E f\mathrm{d}x\right|\le\int_E|f|\mathrm{d}x$.

证 (1). 设 $f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ 是 E 上的复值可测函数.

由于 f_1 和 f_2 都是可测的, 故 $|f|=\sqrt{|f_1|^2+|f_2|^2}$ 是可测的.

设 $f\in L(E)$, 则 $f_1,f_2\in L(E)$, 于是 $|f_1|,|f_2|\in L(E)$. 由于

$$|f|=\sqrt{|f_1|^2+|f_2|^2}\le|f_1|+|f_2|,$$

于是 $|f|\in L(E)$.

反过来, 设 $|f|\in L(E)$. 由于 $|f_1|\le|f|$, $|f_2|\le|f|$, 因此 $f_1, f_2\in L(E)$, 从而 $f\in L(E)$.

(2). 设 f 可积, $\int_E f\mathrm{d}x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 注意到

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f)\le\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f\right|=|f|,$$

我们有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}x\right| = r = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_E f\mathrm{d}x = \int_E \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\mathrm{d}x$$

$$=\int_E \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f)\mathrm{d}x \le \int_E |f|\mathrm{d}x.$$

因此结论(2)得证.■