扫码关注微信公众号

课堂：DL087（理论力学-弘毅）

课堂：DL085（理论力学-物理学与材料）

Mechanics

- 四大力学的最基础课程

  理论力学;

  统计力学

  电动力学

  量子力学

经典力学

牛顿力学：矢量力学

数学工具：矢量，微积分

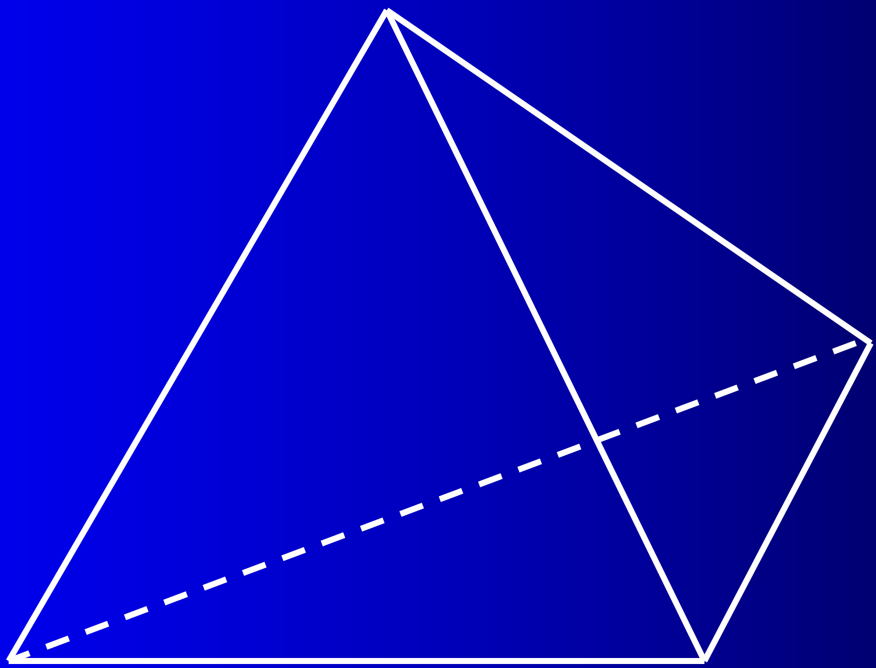
分析力学：标量力学

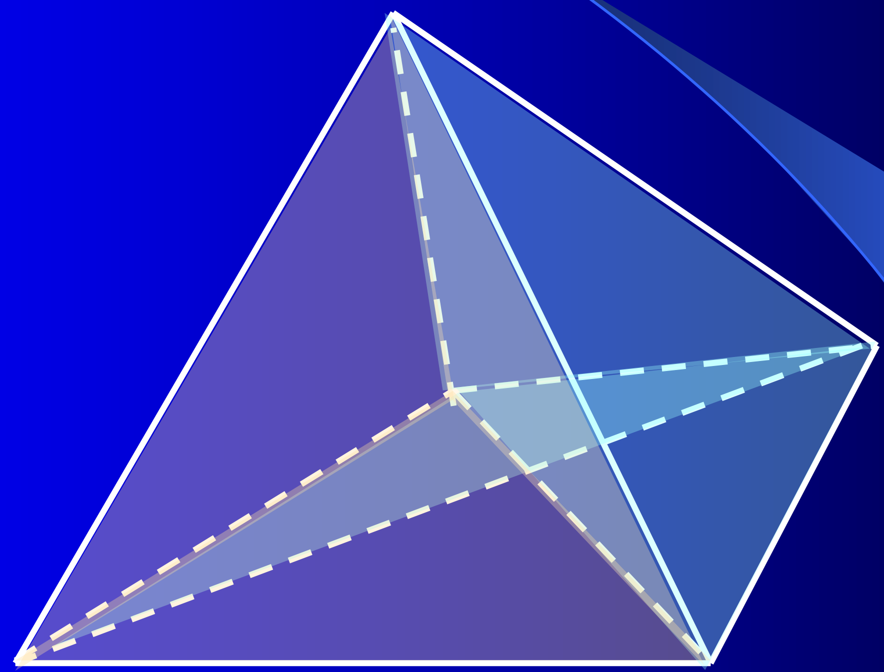
数学工具：微积分，变分，线代，矩阵

连续介质力学：标量力学

牛顿力学：牛顿定律

分析力学研究力学系统的出发点？基本原理是什么？





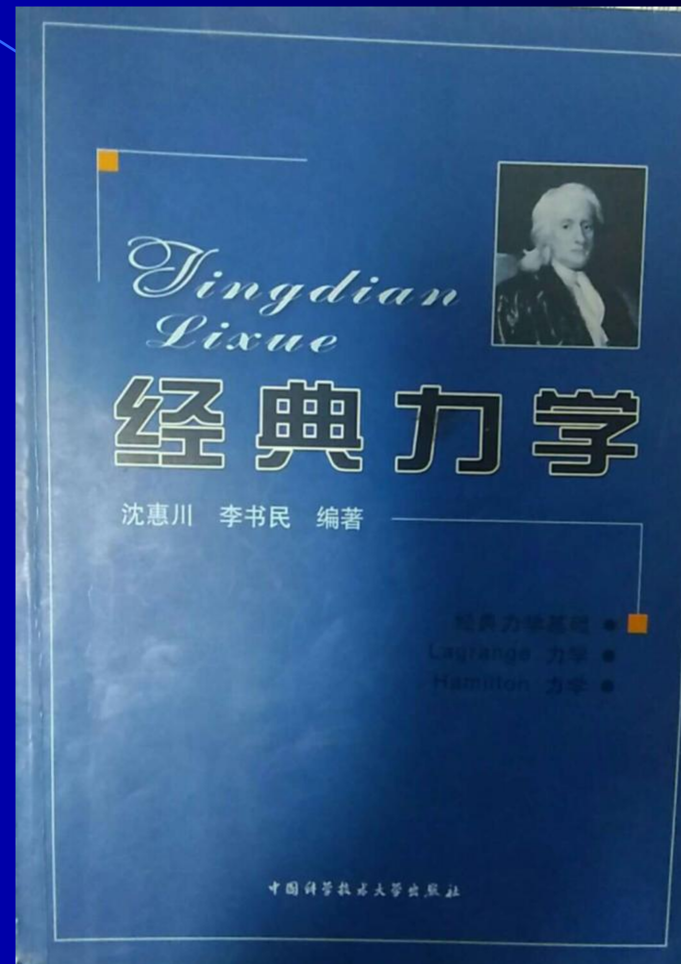
Content of this semester:

- Rotation of Rigid Body about a Fixed Point
- Analytical Mechanics
- Central Force Field
- Scattering Problem
- Small Oscillations
- Canonical Transformation

参考书目-弘毅

- 教 材：
- 《经典力学》（上，下）许定安等主编；
- 主要参考书：
- Classical Mechanics》(3rd Ed.,2005) by Herbert Goldstein and Charles Poole.
- 《 Structure and Interpretation of Classical Mechanics》(2001) by Gerald Jay Sussman and Jack Wisdom.
- 《力学》(第五版) （理论物理学教程 第一卷) L.D.朗道，E.M.栗弗席兹著，李俊峰，鞠国兴译校。
- 《朗道<力学>解读》，鞠国兴编著。
- 《力学》(第四版) （下册 理论力学）梁昆淼原著， 鞠国兴，施毅修订；
- 《理论力学学习指导与习题解析》 （第二版，理科用），鞠国兴编著。科学出版社，2018。
- 《经典力学》， 沈慧川，李书明编著；
- 《经典力学题谱》沈慧川，沈励著；


力学（第四版）
下册 理论力学
理论力学学习指导
与习题解析
（理科用）
（第二版）
鞠国兴／编著
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I
МЕХАНИКА
朗道
理论物理学教程 第一卷
力 学 （第五版）
《理论物理学教程》解读丛书
朗道《力学》解读
鞠国兴 编著


Jingdian
Lixue
经典力学
沈惠川 李书民 编著
中国科学技术大学出版社

参考书目-物理学与材料

- 教 材：
- 《经典力学》（上，下）许定安等主编；
- 主要参考书：
- 《理论力学学习指导与习题解析》（第二版，理科用），鞠国兴编著。科学出版社，2018；
- 《经典力学题谱》沈慧川，沈励著；
- 《力学》(第四版)（下册 理论力学）梁昆淼原著， 鞠国兴，施毅修订；
- 《经典力学》， 沈慧川，李书明编著；

Why Physics？

兴趣、探究、解释、发现：
自然现象、日常生活、科研问题等。

How？

1、基本数学工具：矢量、矩阵、微积分；
变分原理，矩阵，线性代数
2、基本物理原理、定律、定理和方法。
3、知识应用、基本训练：作业，讨论，问题解决，PPT展示等

Score?

1、基本作业、讨论问题解决，PPT展示；
2、期中
3、期末

思维训练、能力提高！

Questions?

hecq@whu.edu.cn

0. Review:
Vector, coordinate systems

0. 1 vector

一、矢量合成解析法：

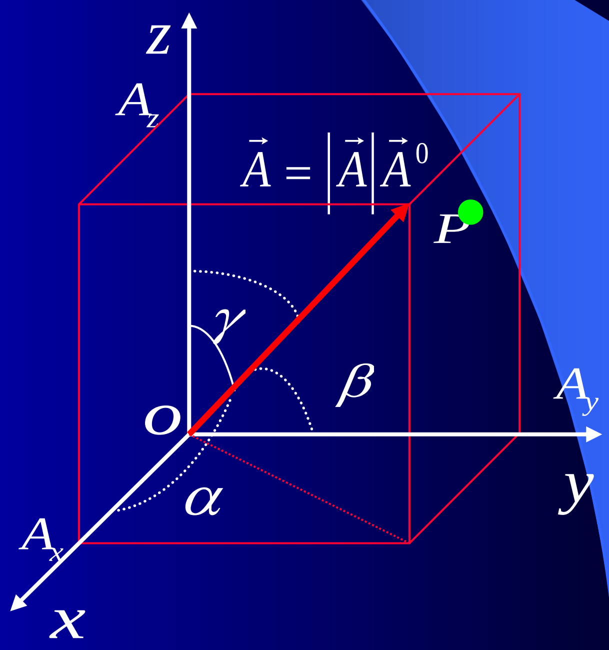
1、矢量在rt中的分量表示：

$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\vec{A}^{0} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \qquad \left|\vec{A}^{0}\right| = 1$$

$$\boxed{\vec{A}^{0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{A_x} = \frac{\cos\beta}{A_y} = \frac{\cos\gamma}{A_z} = \frac{1}{\left|\vec{A}\right|}$$



章首页

2、矢量合成解析法：

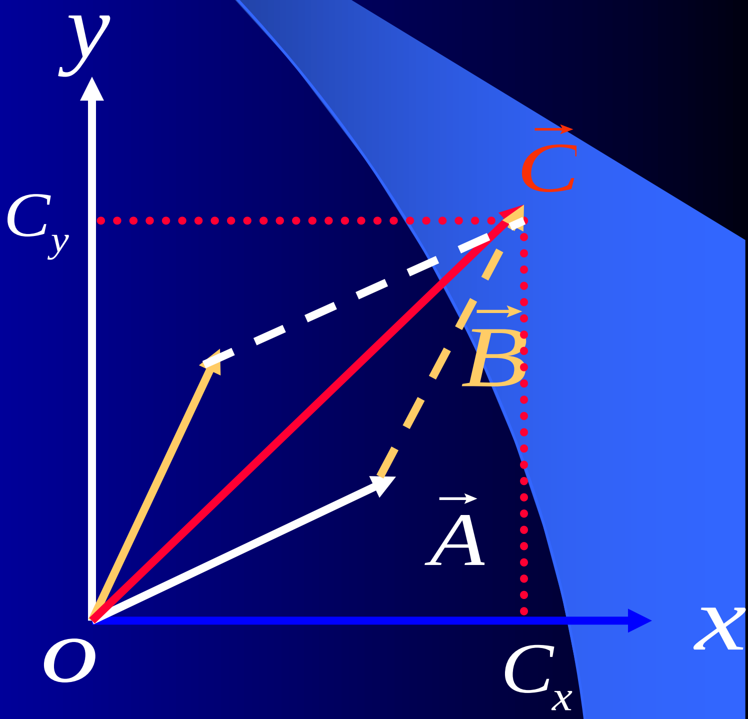
设 $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$，$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$，

则

$$\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B}$$

$$= (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j}$$

$$= C_x\vec{i} \pm C_y\vec{j}$$



二、矢量的点积和叉积

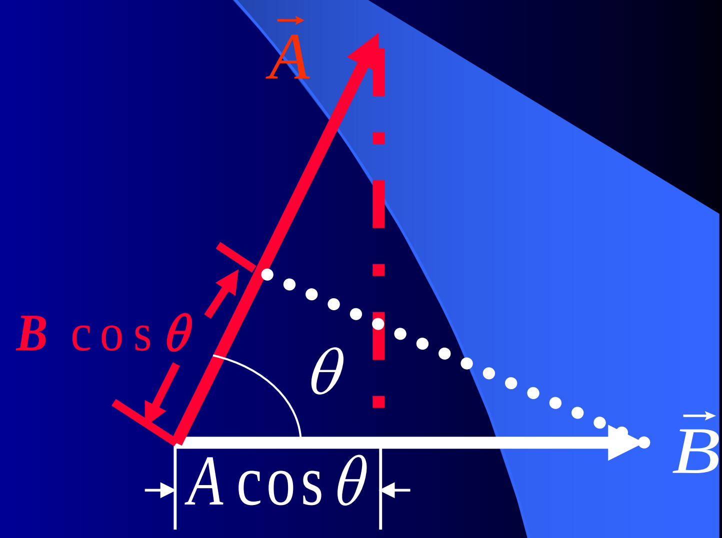
（设 $\left|\vec{A}\right| = A$，$\left|\vec{B}\right| = B$，夹角 $(\vec{A},\vec{B}) = \theta < \pi$）：

（1）定义： $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$；

a．$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$；

b．$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$；

（2）几何意义



例1-1 已知 $\vec{A} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$；$\vec{B} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$，求 $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

解：$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(3\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}\right)$

$$= 3\vec{i}\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}\right) + 5\vec{j}\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}\right)$$

$$= 15 - 15 = 0, \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$$

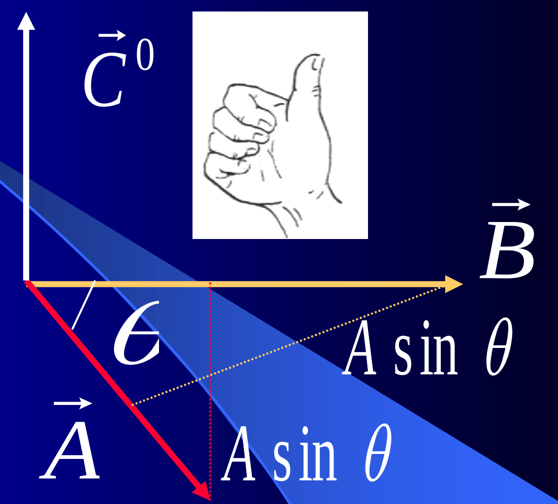
2、矢量的叉积

（1）定义：$\vec{A}\times\vec{B}=(AB\sin\theta)\vec{C}^{0}$ ；

式中 $\vec{C}^{0}$ 为垂直于 $\vec{A}$ 、$\vec{B}$ 的单位矢，

方向服从右手螺旋法则。

（2）几何意义：（如图）



a．$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ ；

b．$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ ．顺序不变

例1-2 $\vec{A}=5\vec{i}-6\vec{j}$ ，$\vec{B}=-10\vec{i}+12\vec{j}$.

求 $\vec{A}\times\vec{B}$ ；

解： $\because\ \vec{B}=-2\vec{A}$ ，

$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times(-2\vec{A})=0$ ，表明 $\vec{A}//\vec{B}$

章首页

三、矢量的导数和积分

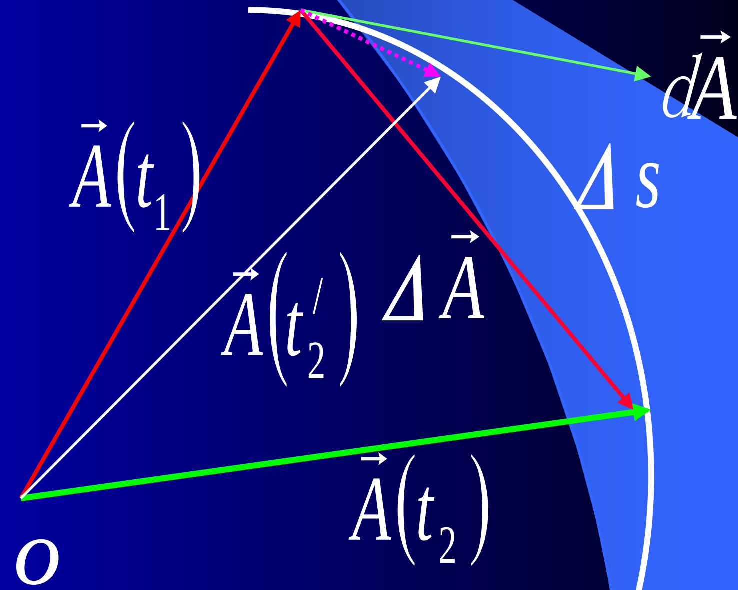
1、矢量的导数

（设 $\vec{A}=\vec{A}(t)$，$\vec{B}=\vec{B}(t)$ 为矢性函数）

（1）定义：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}$；

（2）几何意义（如图）$\vec{A}_1=\vec{A}(t_1)$

$\vec{A}_2=\vec{A}(t_2)$



当 $\vec{A}_2\to\vec{A}_1$ $\left|\Delta\vec{A}\right|\to\Delta s$，

的方向$\to\vec{A}_1(t_1)$的切向$\vec{\tau}^0$；

当$\Delta t\to 0$的极限情况下，$d\vec{A}=ds\,\vec{\tau}^0$

章首页

(3) 性质：

a． $\dfrac{d\vec{c}}{dt}=0$ ，$\vec{c}$为常数；

b． $\dfrac{d}{dt}(k\vec{A})=k\dfrac{d\vec{A}}{dt}$， k为常数；

c． $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}+\dfrac{d\vec{B}}{dt}$；

d． $\dfrac{d\vec{A}}{dt}[u(t)\vec{A}]=\dfrac{du}{dt}\vec{A}+u\dfrac{d\vec{A}}{dt}$， u为数性函数；

e． $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{dt}$，顺序可变；

f． $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}$，顺序不可变；

g． $\dfrac{d\vec{A}}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$，式中 $\vec{A}=\vec{A}(s)$，$s=\varphi(t)$为中间变量。

例1-4 、试写出 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 在直角坐标系中的表示：

解 $\because \quad \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} \quad .$$

证明: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

证: 设 $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j}$, $\vec{B}(t) = B_x(t)\vec{i} + B_y(t)\vec{j}$

则 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$

原式左边 $= \dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \dfrac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y)$

原式右第一项 $= (\dfrac{dA_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dA_y}{dt}\vec{j})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}) = B_x\dfrac{dA_x}{dt} + B_y\dfrac{dA_y}{dt}$;

原式右第二项 $= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j})\cdot(\dfrac{dB_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dB_y}{dt}\vec{j}) = A_x\dfrac{dB_x}{dt} + A_y\dfrac{dB_y}{dt}$

原式右边 $= A_x\dfrac{dB_x}{dt} + A_y\dfrac{dB_y}{dt} + B_x\dfrac{dA_x}{dt} + B_y\dfrac{dA_y}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y)$$

左边=右边

证毕

补1、设在直角坐标系中

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}\ ,\quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}\ ;$$

试证：

$$(1)\ \vec{A}\cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y\ ;$$

$$(2)\ \vec{A}\times \vec{B} = (B_y A_x - B_x A_y)\vec{k}\ .$$

补2、设在直角坐标系中

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j}\ ,\quad \vec{B}(t) = B_x(t)\vec{i} + B_y(t)\vec{j}\ ;$$

试证：

$$\frac{d}{d\,t}(\vec{A}\times \vec{B}) = \vec{A}\times \frac{d\,\vec{B}}{d\,t} + \frac{d\,\vec{A}}{d\,t}\times \vec{B}\,.$$

2、矢量的积分

$$\vec{A} = \vec{A}(t)\ ,\ \vec{B} = \vec{B}(t)$$

为矢性函数，且 $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = \vec{A}$

（1）不定积分 $\int \vec{A}(t)\,dt = \vec{B}(t) + \vec{C}$　式中 $\vec{C}$ 为常矢

定积分　$\int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(t)\,dt = \vec{B}(t_1) - \vec{B}(t_0)$；

特别强调

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$　不要写为　$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$.

即：分量一般用分量大小与单位矢的乘积表示。

例1-3、设在平面上有两相互垂直的单位矢 $\vec{\tau}^o$ 和 $\vec{n}^o$ 逆时针转动，

试求 $d\vec{\tau}^o$ 和 $d\vec{n}^o$ 的大小和方向。

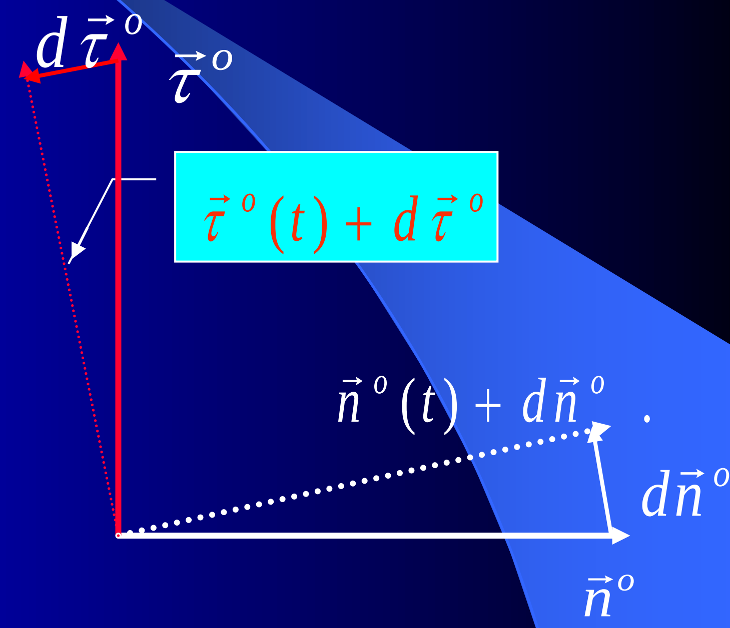
解： 设 $t \to t + dt$ 时，$\vec{\tau}^o(t)$和 $\vec{n}^o(t)$

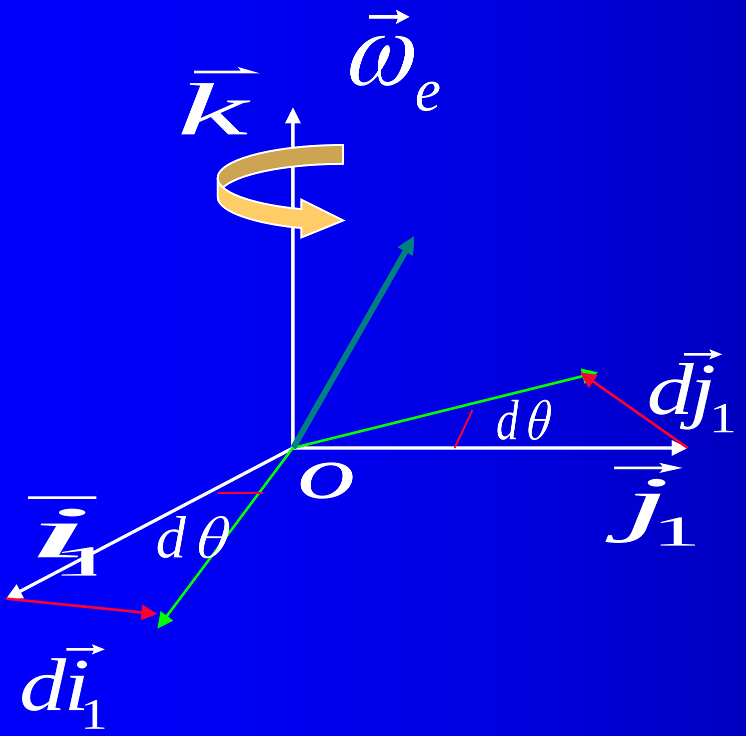
$$\vec{\tau}^0(t) \to \vec{\tau}^0(t) + d\vec{\tau}^0$$

$$\vec{n}^0(t) \to \vec{n}^0(t) + d\vec{n}^0$$

$$\therefore \quad d\vec{n}^0 = \mathrm{d}\theta\,\vec{\tau}^0$$

$$d\vec{\tau}^0 = d\theta(-\vec{n}^0)$$





提示： $\dot{\vec{i}}_1=\dfrac{d\vec{i}_1}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j}_1$

$$=\omega_e(\vec{k}\times\vec{i}_1)=\vec{\omega}_e\times\vec{i}_1$$

2、 对速度的研究

$$\because\quad \vec{v}_e=x_1\dot{\vec{i}}_1+y_1\dot{\vec{j}}_1$$

而 $\dot{\vec{i}}_1=\vec{\omega}_e\times\vec{i}_1,\quad \dot{\vec{j}}_1=\vec{\omega}_e\times\vec{j}_1$

$$\vec{v}_e=x_1(\vec{\omega}_e\times\vec{i}_1)+y_1(\vec{\omega}_e\times\vec{j}_1)$$

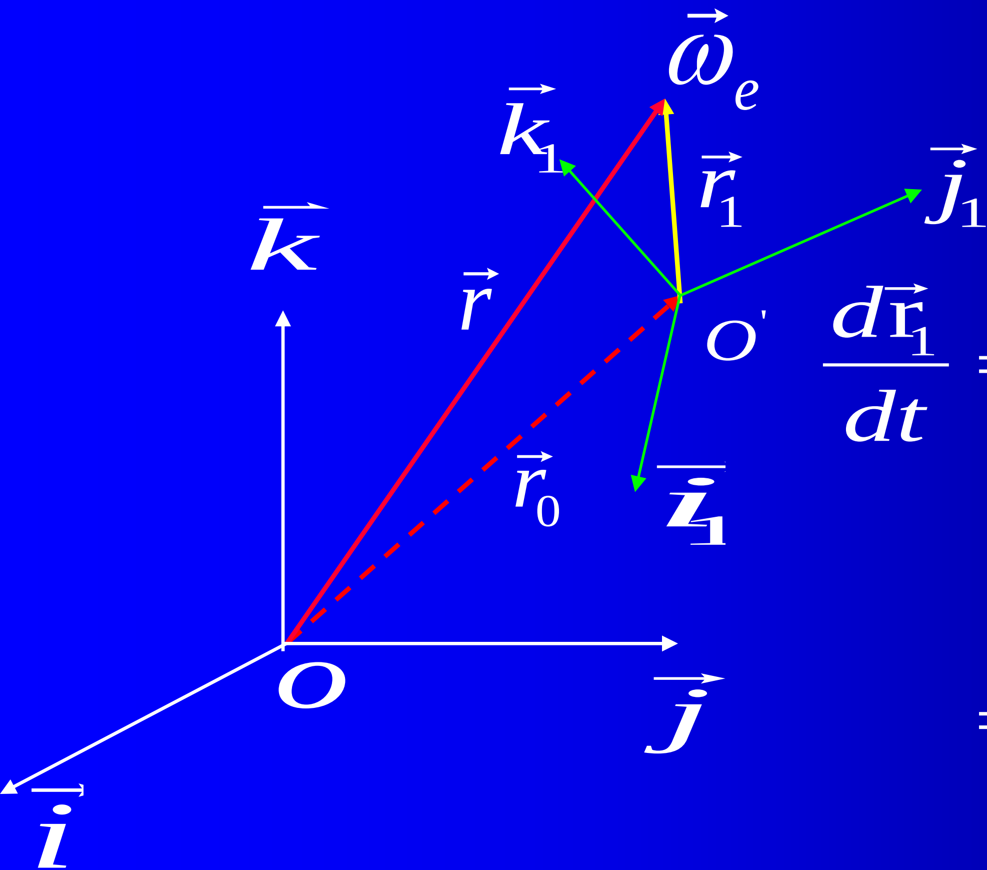
$$=\vec{\omega}_e\times(x_1\vec{i}_1+y_1\vec{j}_1+z_1\vec{k})$$

$$=\vec{\omega}_e\times\vec{r}_1$$

$$\therefore\quad \vec{v}=\vec{\omega}_e\times\vec{r}_1+\vec{v}_r$$

静、动坐标系中矢量微商

绝对微商和相对微商



$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}_0 + \vec{\mathrm{r}}_1 , \ \dot{\vec{\mathrm{r}}} = \dot{\vec{\mathrm{r}}}_0 + \dot{\vec{\mathrm{r}}}_1$$

$$\vec{\mathrm{r}}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{r}}_1}{dt} = \dot{\vec{\mathrm{r}}}_1 = (\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1)$$

$$+ (x_1 \dot{\vec{i}}_1 + y_1 \dot{\vec{j}}_1 + z_1 \dot{\vec{k}}_1)$$

$$= \frac{\tilde{d}\vec{\mathrm{r}}_1}{dt} + (\vec{\omega}_e \times x_1 \vec{i}_1 +$$

$$\vec{\omega}_e \times y_1 \vec{j}_1 + \vec{\omega}_e \times z_1 \vec{k}_1)$$

$$= \frac{\tilde{d}\vec{\mathrm{r}}_1}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\mathrm{r}}_1$$

二、速度$\vec{v}$和加速度 $\vec{a}$

1、速度矢量 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=v\vec{\tau}^{o}$

(1) 在 rt 中的表示

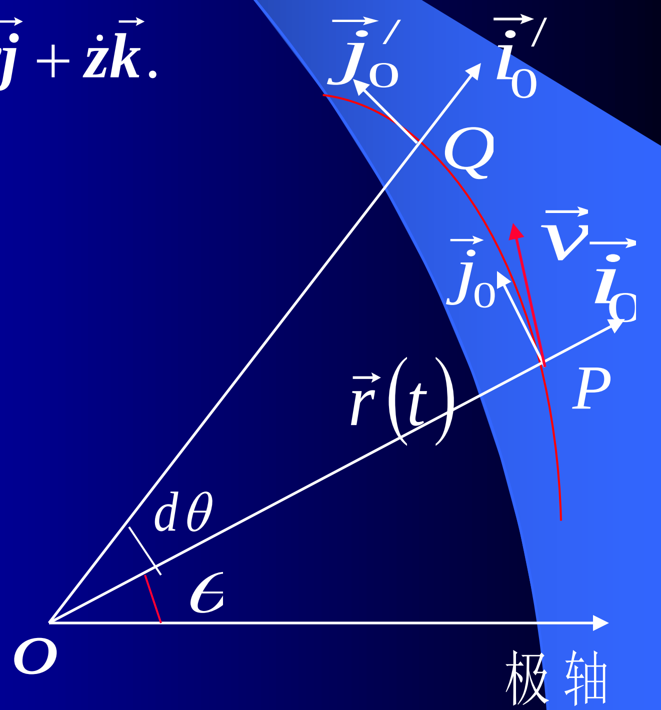
$$\because\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\qquad \therefore\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}.$$

(2) 在 pp 中的表示 $\because\quad \vec{r}(t)=r(t)\vec{i}_0(t),$

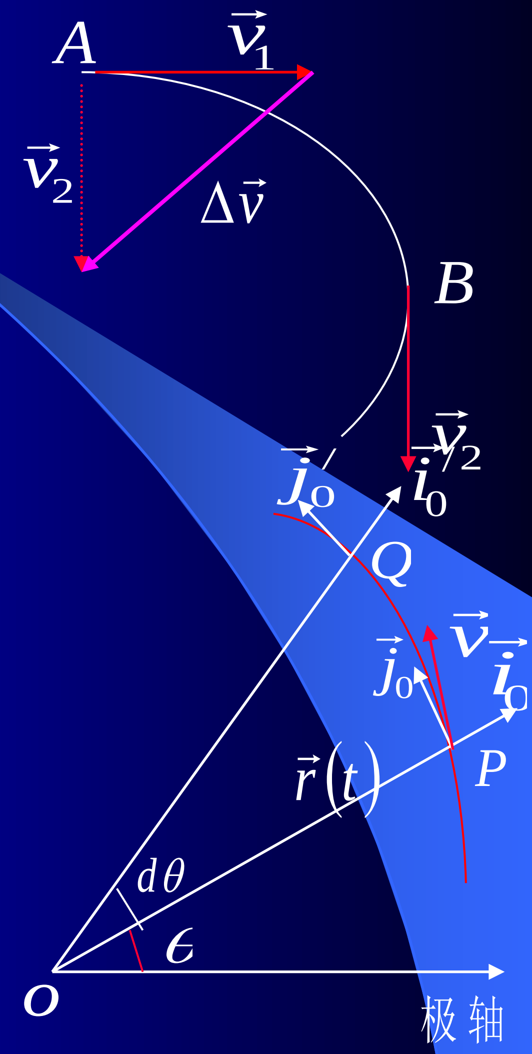
$$\therefore\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{i}_0+r\frac{d\vec{i}_0}{dt},$$

又 $\because\quad d\vec{i}_0=d\theta\vec{j}_0,\quad d\vec{j}_0=d\theta(-\vec{i}_0),$

则 $\vec{v}=\dfrac{dr}{dt}\vec{i}_0+r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j}_0=v_r\vec{i}_0+v_\theta\vec{j}_0.$



2、加速度矢量 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$



$\vec{a}$ 与 $d\vec{v}$ 同方向，指向曲线凹侧

(1) 在 直角坐标系rt 中的表示

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

(2) 在 极坐标系pp 中的表示

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{i}_0\right)+\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{j}_0\right)$$

$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}_0+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}_0$$

$$=a_r\vec{i}_0+a_\theta\vec{j}_0$$

科里奥利加速度

（3）在 自然坐标系pn 中的表示

$$\vec{a}_\tau = \ddot{S}\vec{\tau}_0,$$

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{n}_0 = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0$$

$\because$ 在 pn 中 $S = S(t)$

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}_0(t)$$

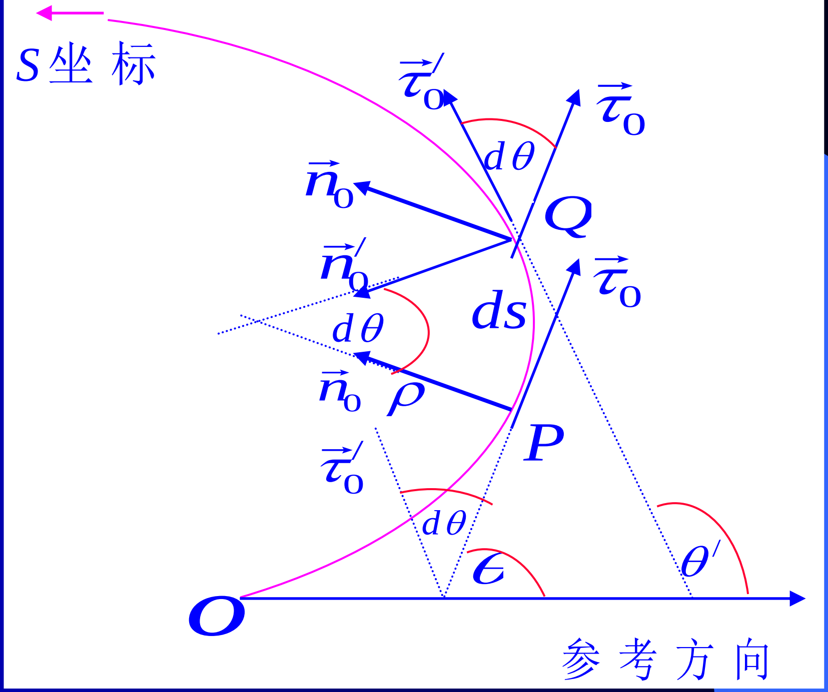
$$\therefore\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{S}\vec{\tau}_0 + \dot{S}\dot{\vec{\tau}}_0$$

$$= \ddot{S}\vec{\tau}_0 + \dot{S}\dot{\theta}\vec{n}_0$$

$$= \ddot{S}\vec{\tau}_0 + (\dot{S})^2\frac{d\theta}{dS}\vec{n}_0$$

$$= \ddot{S}\vec{\tau}_0 + \frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{n}_0$$

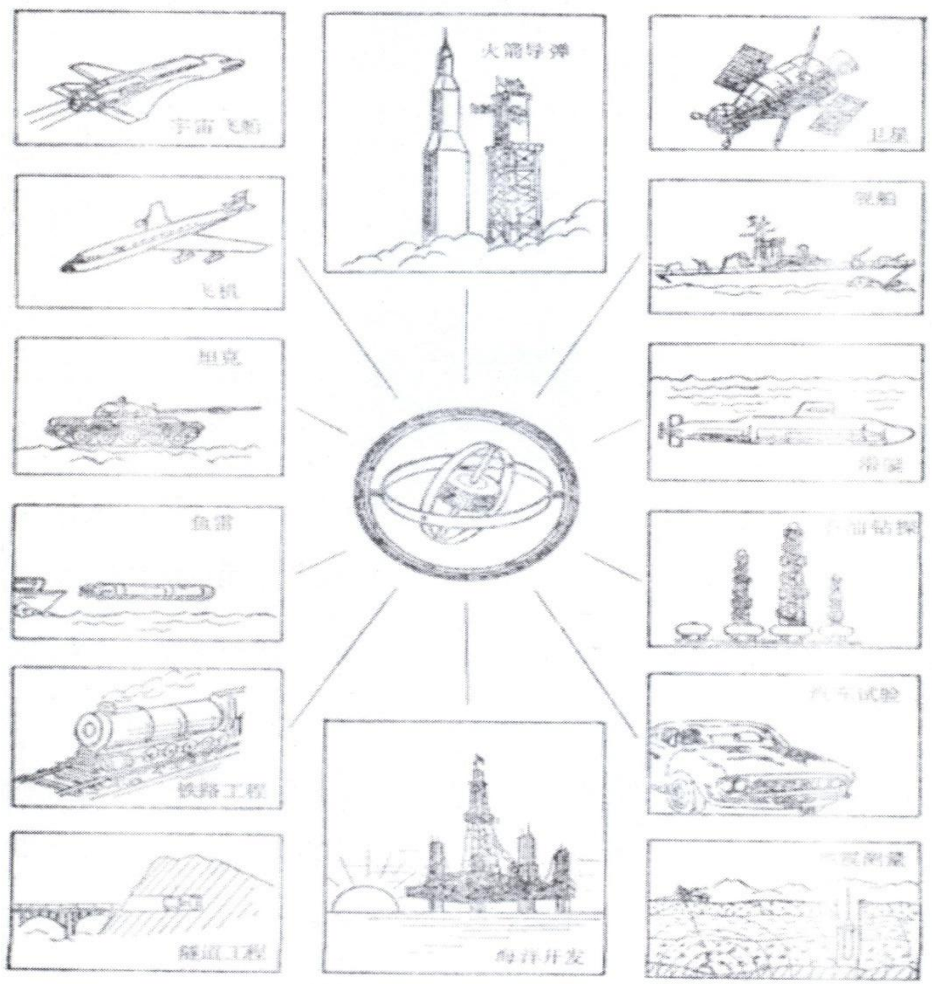
$$= a_\tau\vec{\tau}_0 + a_n\vec{n}_0$$



章首页

第一章 定点转动

(Rotation of Rigid Body about a Fixed Point)



陀螺的广泛用途

demonstration1

demonstration

demonstration

基本内容

- 运动学
  - 定点转动
  - 一般运动
- 动力学
  - 定点转动角动量和转动动能
  - 惯量张量. 惯量椭球. 惯量主轴
  - 欧拉动力学方程
  - 重刚体定点转动

§1.定点转动运动学(Kinematics)

转动与平动的区别

demonstration

demonstration

转动和定点转动定义

1. 定点转动自由度(Freedom of Degree)

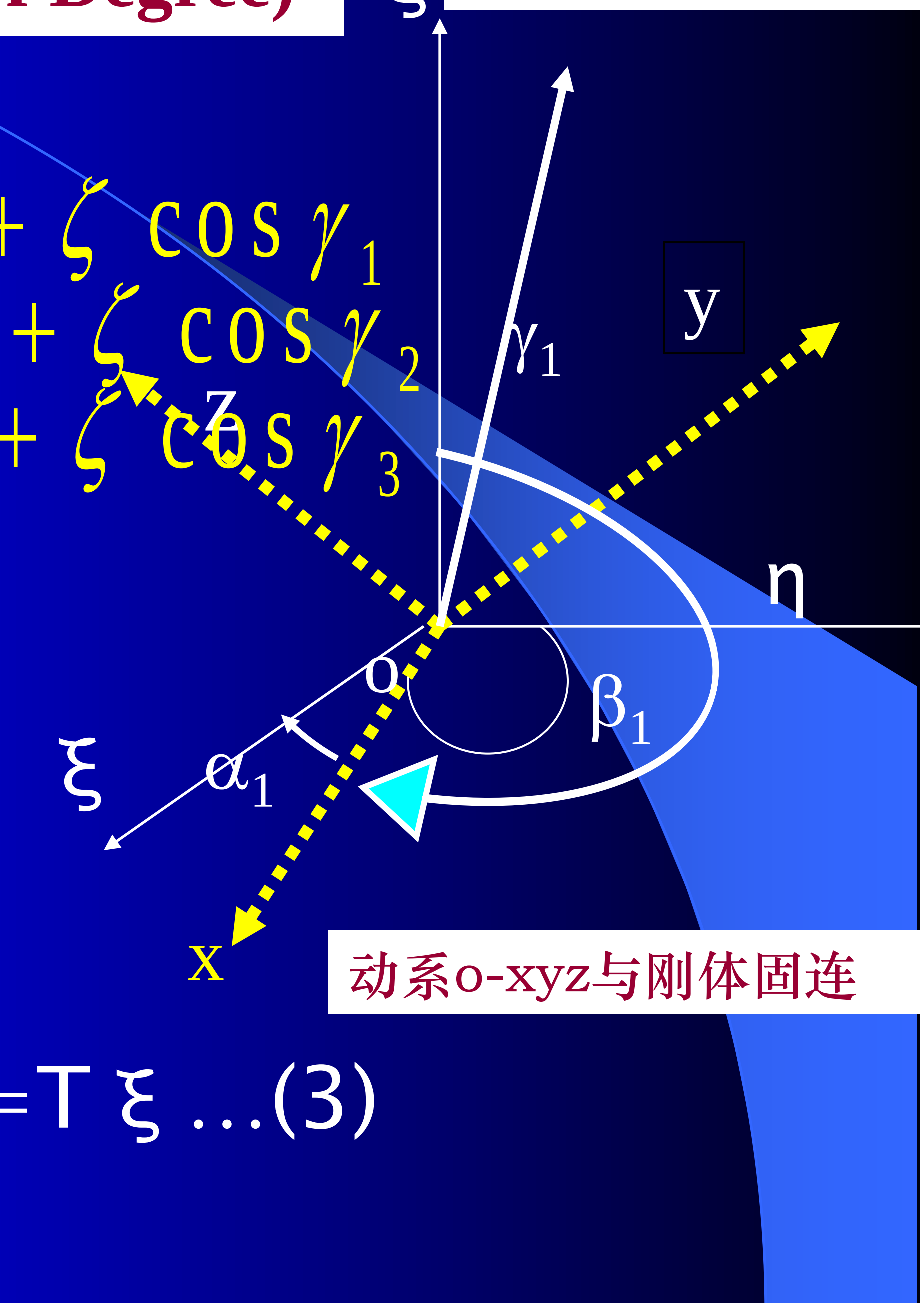
静系o–

$$x_i = t_{ij}\xi_j \quad (j=1.2.3) \quad \ldots(1)$$

$$x = \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1$$
$$y = \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2$$
$$z = \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3$$

$$t_{ij} = \cos(x_i, \xi_j) \quad \ldots(2)$$

方向余弦



动系o-xyz与刚体固连

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$X = T\xi \quad \ldots(3)$$

$$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1 \\ y = \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2 \\ z = \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3 \end{cases}$$

$$x_i = t_{ij}\xi_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

爱因斯坦求和约定

$$
\left.
\begin{array}{lll}
t_{11} = \cos(\vec{i}\,\vec{\xi}\,) & t_{12} = \cos(\vec{i}\,\vec{\eta}\,) & t_{13} = \cos(\vec{i}\,\vec{\zeta}\,) \\
t_{21} = \cos(\vec{j}\,\vec{\xi}\,) & t_{22} = \cos(\vec{j}\,\vec{\eta}\,) & t_{23} = \cos(\vec{j}\,\vec{\zeta}\,) \\
t_{31} = \cos(\vec{k}\,\vec{\xi}\,) & t_{32} = \cos(\vec{k}\,\vec{\eta}\,) & t_{33} = \cos(\vec{k}\,\vec{\zeta}\,)
\end{array}
\right\}
$$

任一矢量$\vec{R}$在两种坐标系中的分量表示：

…(4)

矢量$\vec{R}$的模不随坐标系变化

$$
\left\{
\begin{array}{l}
R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x_i x_i \,(\, i = 1,2,3) \\
R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_i \xi_i \,(\, i = 1,2,3)
\end{array}
\right. \quad \ldots(5)
$$

将(1)代入(5)式中则有:

$$x_i = t_{ij}\xi_j$$

$$R^2 = x_i x_i = t_{ij}\xi_j\ t_{ik}\xi_k \qquad = \underline{\xi_k \xi_k}$$

$\Downarrow$

$t_{ij}\, t_{ik} = \delta_{jk}$ $\Rightarrow$ 正交归一化条件

(Orthogonal transformation) ….(6)

(6)式包括6个方程:

$$\begin{cases} j = k & 3 \\ j \neq k & 3 \end{cases}$$

Conclusion:

- 9个方向余弦中只有3个是独立变化，即定点转动自由度为3 !!!
- 从坐标变换的观点看，定点转动可以视为从恒等变换开始的连续的正交变换(变换序列)

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$t_{11} = \cos(\vec{i}\,\vec{\xi}\,) \quad t_{12} = \cos(\vec{i}\,\vec{\eta}\,) \quad t_{13} = \cos(\vec{i}\,\vec{\varsigma}\,)$$

$$t_{21} = \cos(\vec{j}\,\vec{\xi}\,) \quad t_{22} = \cos(\vec{j}\,\vec{\eta}\,) \quad t_{23} = \cos(\vec{j}\,\vec{\varsigma}\,)$$

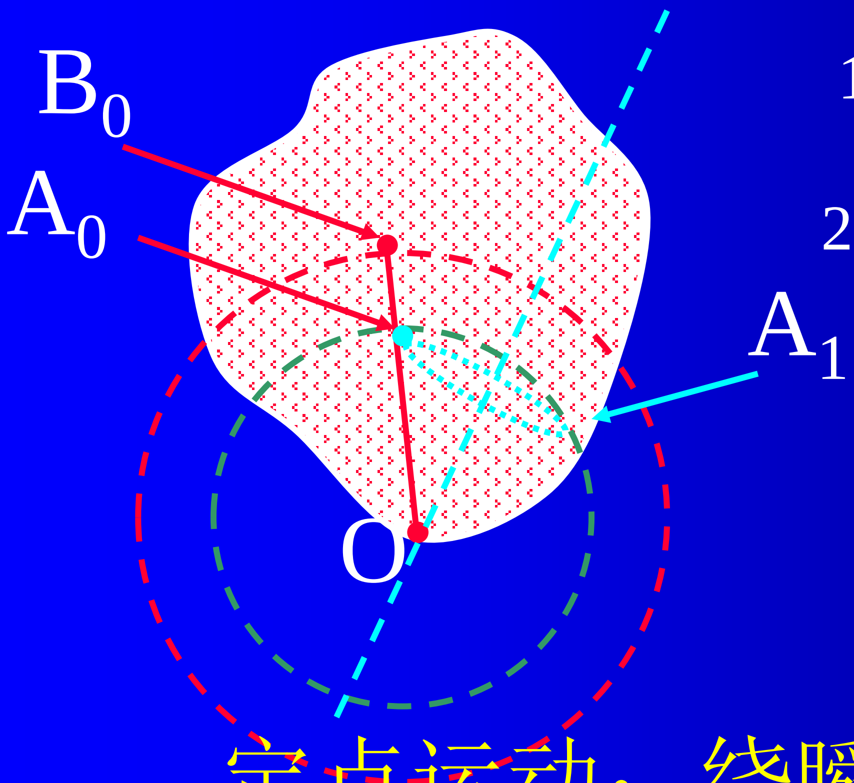
$$t_{31} = \cos(\vec{k}\,\vec{\xi}\,) \quad t_{32} = \cos(\vec{k}\,\vec{\eta}\,) \quad t_{33} = \cos(\vec{k}\,\vec{\varsigma}\,)$$

$$\begin{cases} j = k = 1 & t_{11}t_{11} + t_{21}t_{21} + t_{31}t_{31} = 1 \\ j = k = 2 & t_{12}t_{12} + t_{22}t_{22} + t_{32}t_{32} = 1 \\ j = k = 3 & t_{13}t_{13} + t_{23}t_{23} + t_{33}t_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{\xi} \bullet \vec{i}\,)^2 + (\vec{\xi} \bullet \vec{j}\,)^2 + (\vec{\xi} \bullet \vec{k}\,)^2 = 1 \\ (\vec{\eta} \bullet \vec{i}\,)^2 + (\vec{\eta} \bullet \vec{j}\,)^2 + (\vec{\eta} \bullet \vec{k}\,)^2 = 1 \\ (\vec{\zeta} \bullet \vec{i}\,)^2 + (\vec{\zeta} \bullet \vec{j}\,)^2 + (\vec{\zeta} \bullet \vec{k}\,)^2 = 1 \end{cases}$$

补遗：位移定理

- 刚体定点运动的任一位移，可由它绕过定点的某轴作转动而得到！



1.任意点运动：球面上

2. 过固定点直线上各点运动轨迹：

相似同心球面曲线

3.定点运动研究：

某球面上各点运动

定点运动：绕瞬时轴的连续转动

（连续正交变换！⇨Eulerian Angles描述）

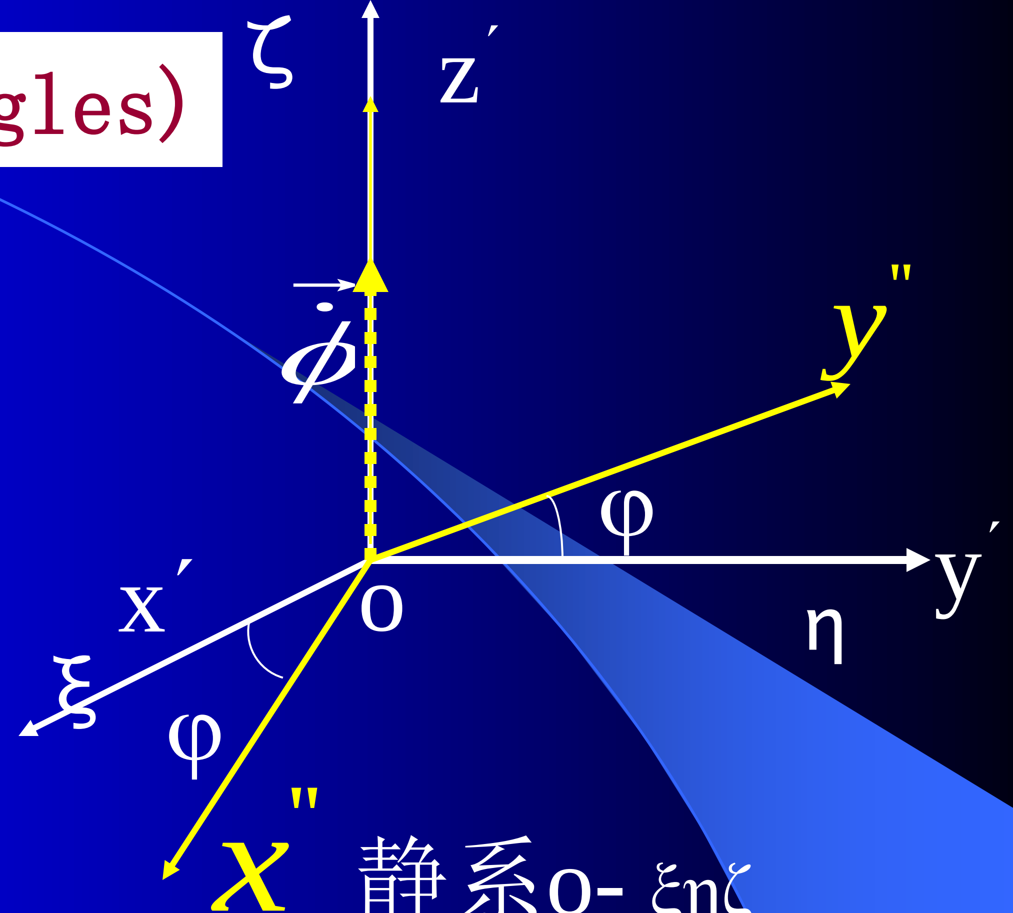
2.欧拉角(Eulerian Angles)

第一步: 动系 $x'y'$

绕静系ζ轴 转 φ角

$$\begin{cases} x' \Rightarrow x'' \\ y' \Rightarrow y'' \end{cases}$$

$\varphi \Rightarrow$ 进动角

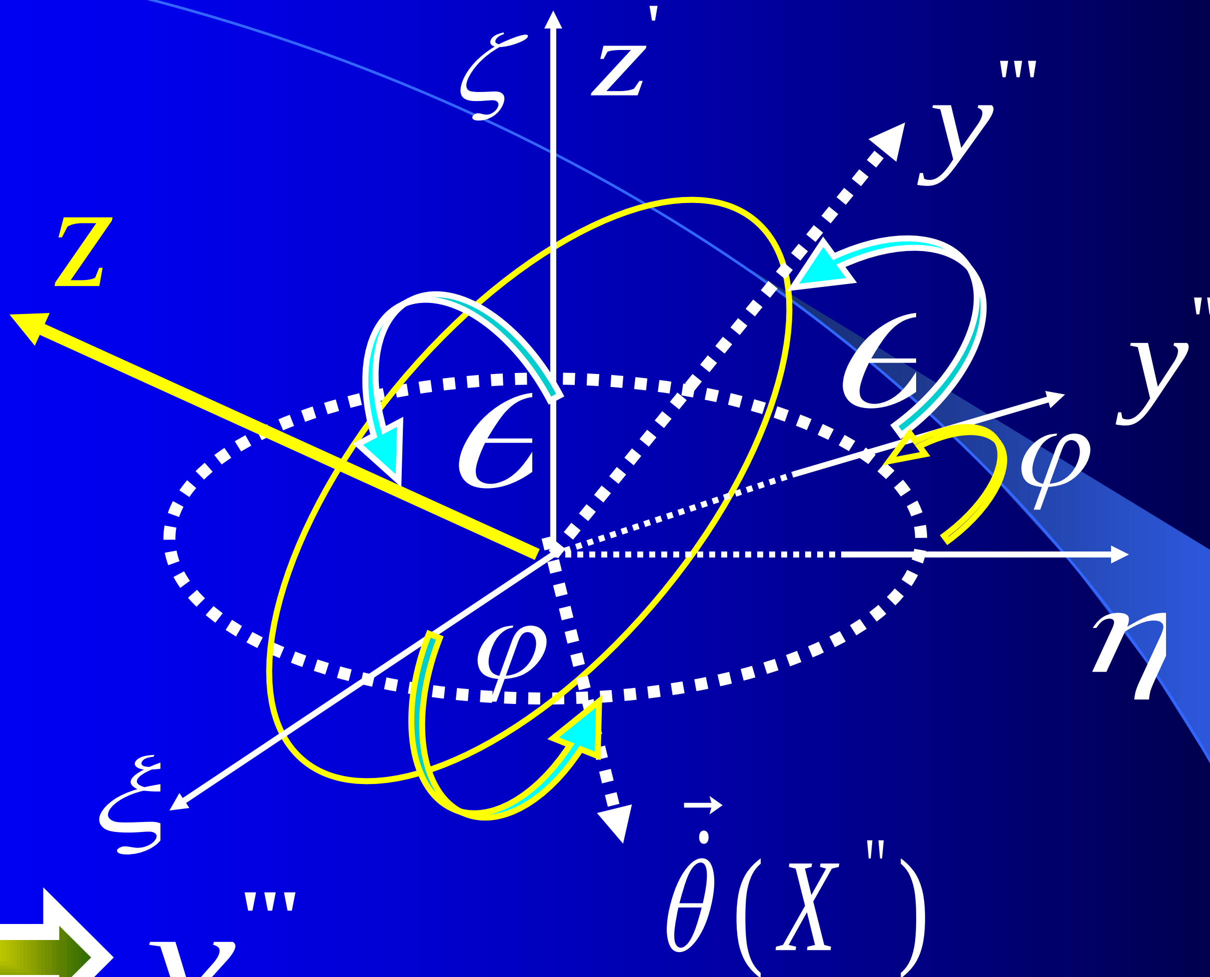


静系o- ξηζ

动系o−x′y′z′与刚体固连

Precession angle

第二步:

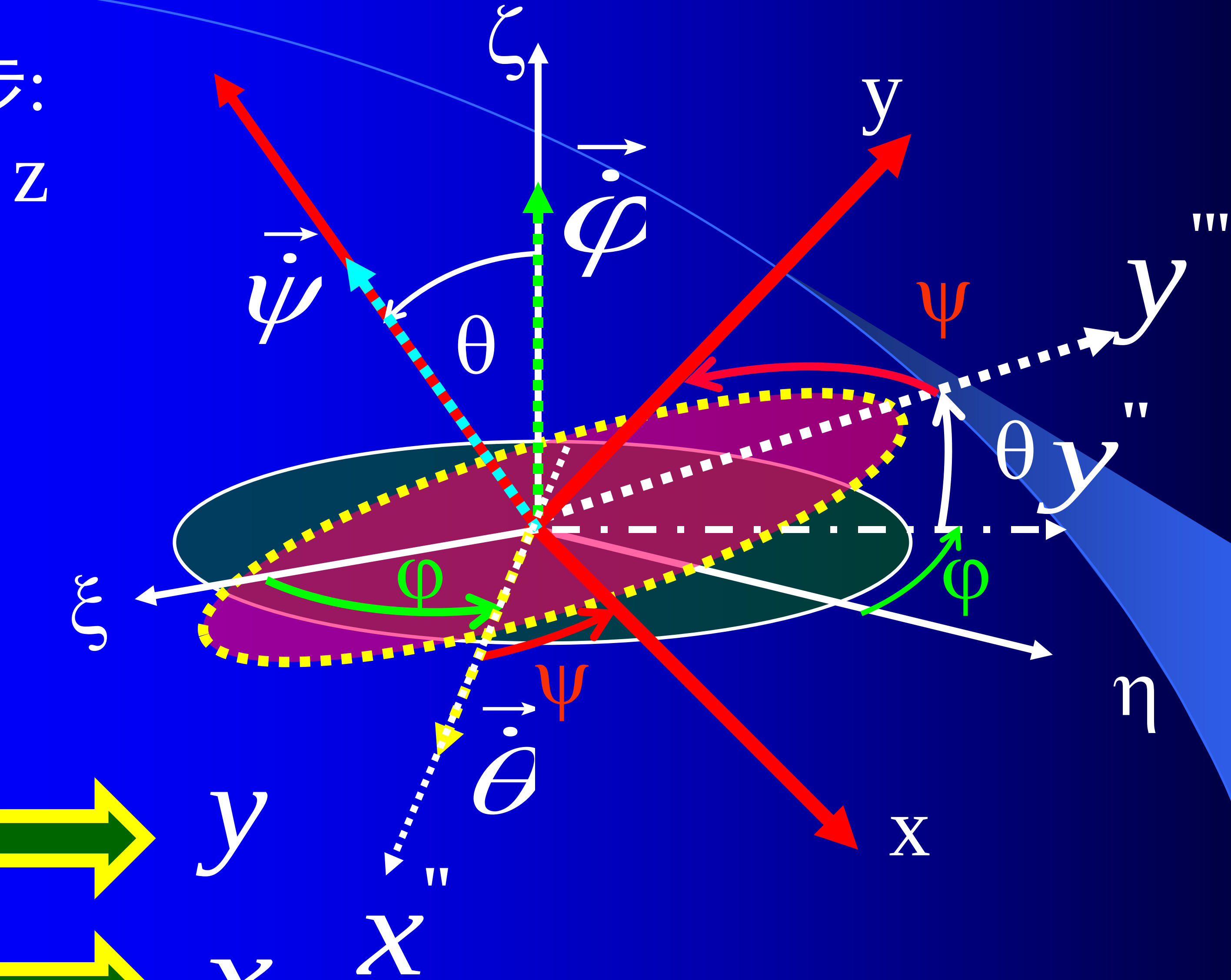


$y'' \Rightarrow y'''$

$z' \Rightarrow Z$

$\epsilon \Rightarrow$ 章动角

第三步:



$y''' \Rightarrow y$

$x'' \Rightarrow x$

$\psi \Rightarrow$ 自转角

欧拉角形成

3. 欧拉运动学方程

(Eulerian Kinematic equation)

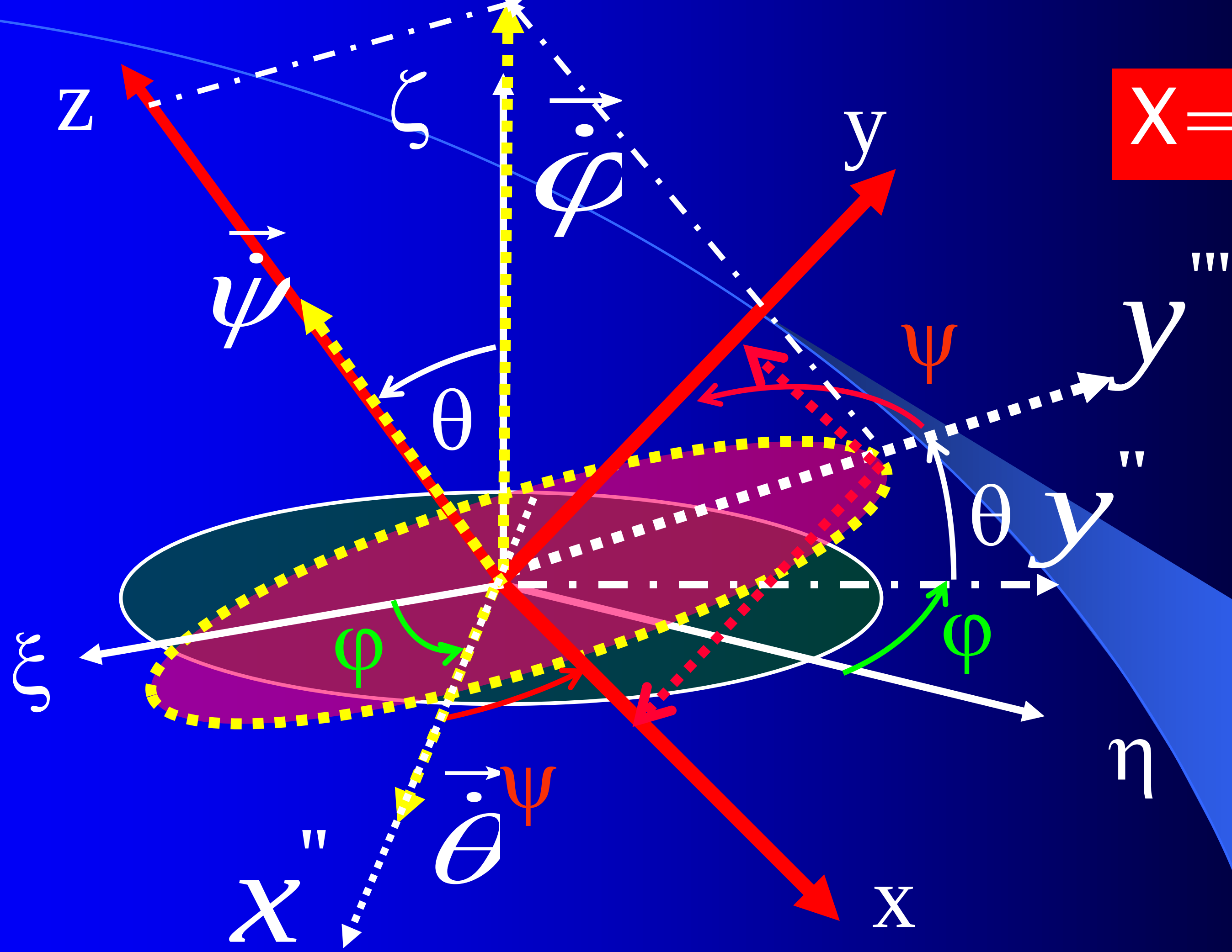
动系中的表示!!!

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k} \\ \vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\cos\psi\vec{i} - \dot{\theta}\sin\psi\vec{j} \\ \vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\vec{k} \end{cases}$$

如何得到呢？

$X = T\xi$



$\vec{\dot{\varphi}}$ 投影xyz-系

$x-y$面：$\dot{\varphi}\sin\theta$

z轴 ：

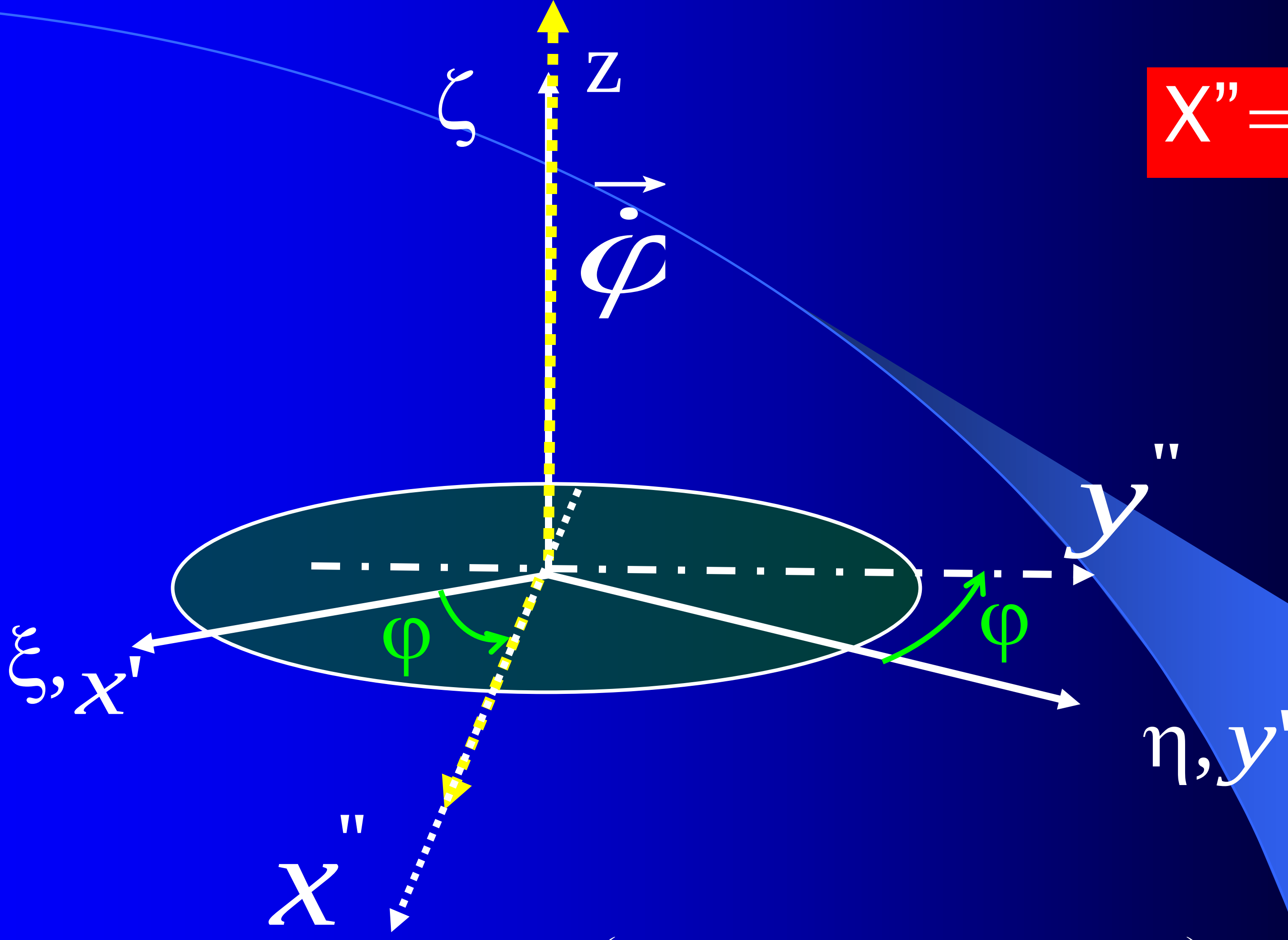
投影x，y轴

x轴 ：$\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\,\vec{i}$

y轴 ：$\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\,\vec{j}$

$\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{k}$

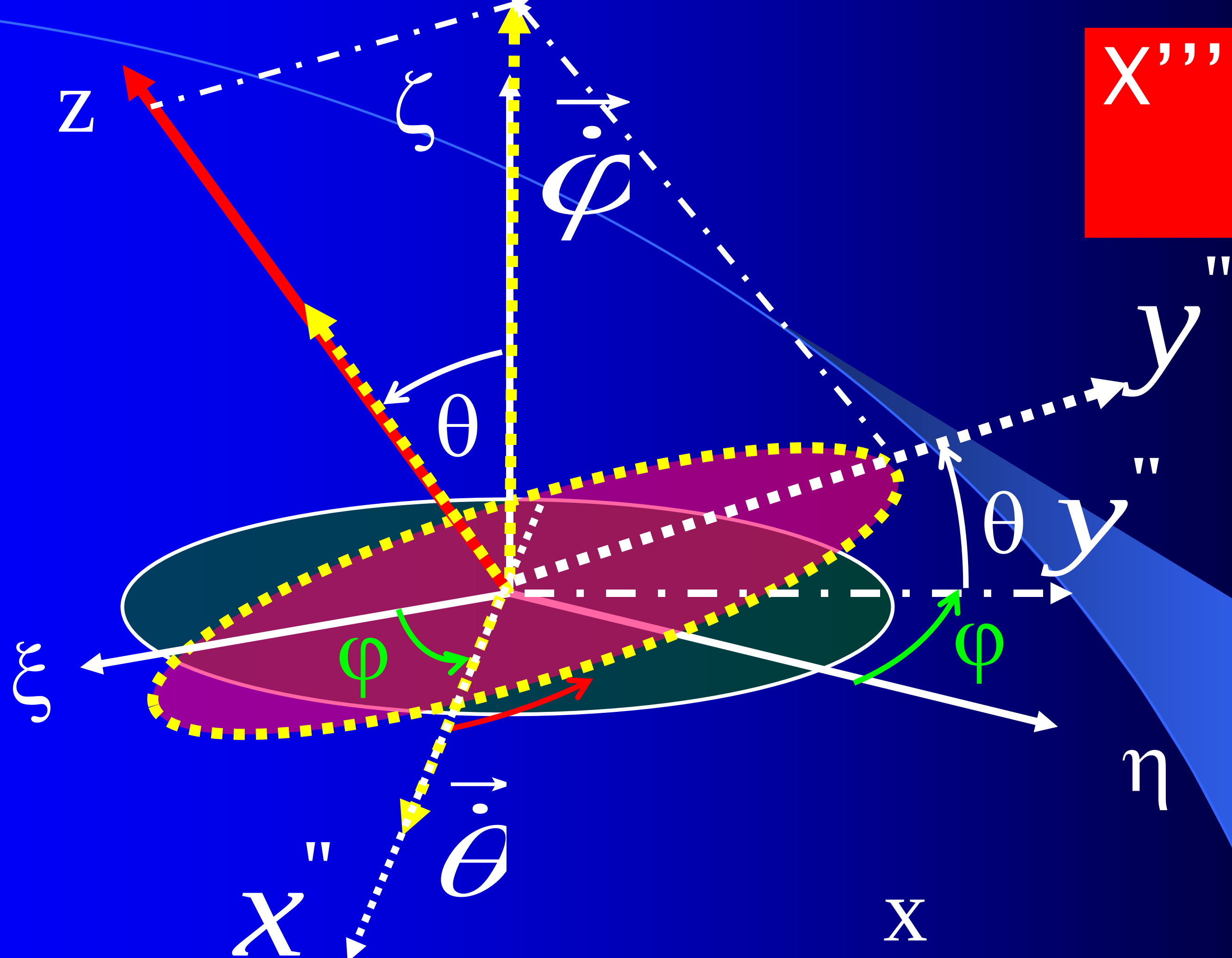
$X'' = C\xi$



$\vec{\dot{\varphi}}$:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X''' = BX'' = BC\xi$$

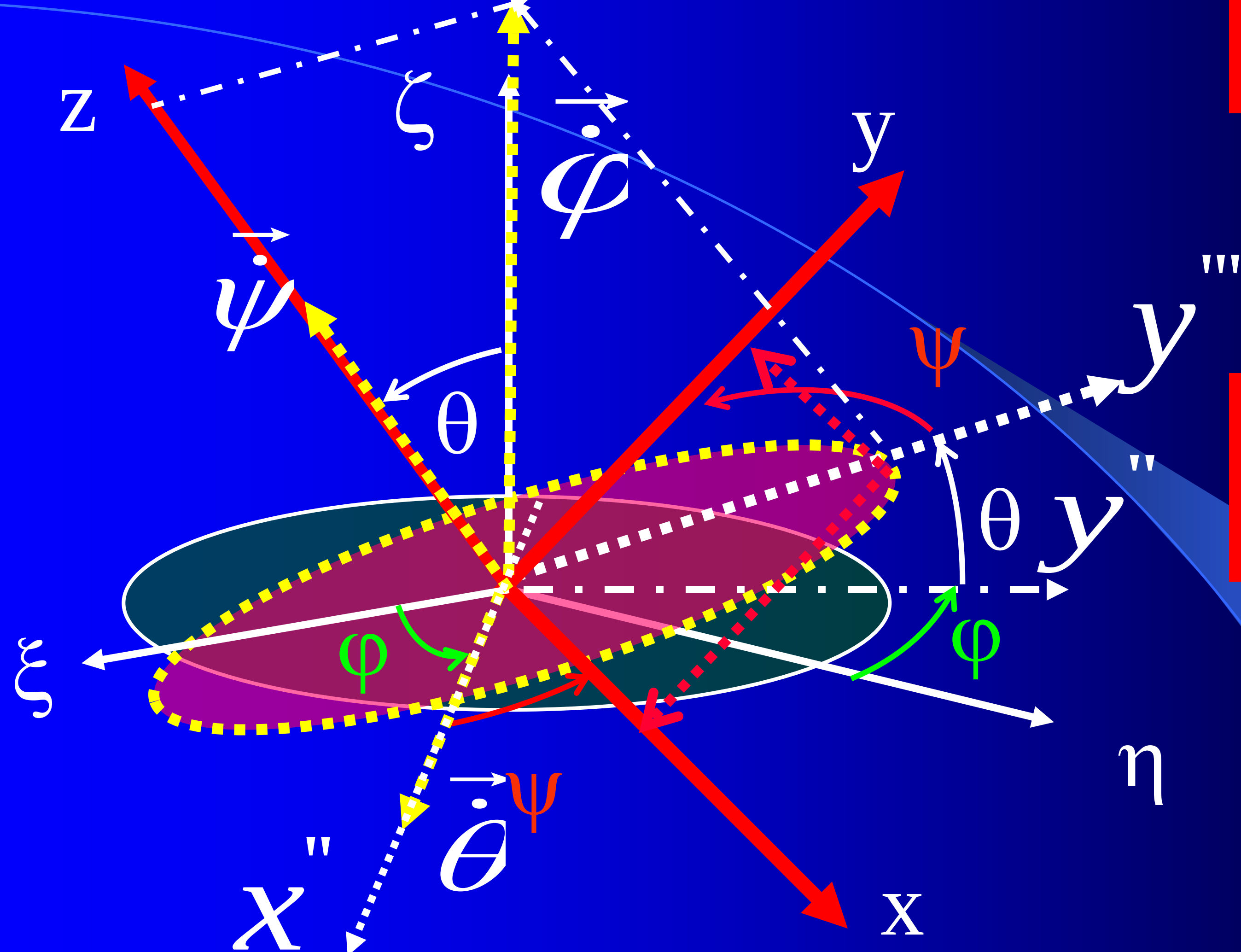


$\vec{\dot{\theta}}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$X = AX'''$

$X = ABC\xi$
$= T\xi$



$\dot{\vec{\psi}}$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X = ABCξ
= Tξ

$$T = ABC$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

T为正交矩阵:$T^{-1} = \tilde{T}$

3.欧拉运动学方程

(Eulerian Kinematic equation)

动系中的表示

$$\vec{\omega}=\vec{\dot{\varphi}}+\vec{\dot{\theta}}+\vec{\dot{\psi}}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$$

$$\begin{cases}\vec{\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j}+\dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}\\ \vec{\dot{\theta}}=\dot{\theta}\cos\psi\vec{i}-\dot{\theta}\sin\psi\vec{j}\\ \vec{\dot{\psi}}=\dot{\psi}\vec{k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{cases}$$

欧拉运动学方程

4. 刚体上任意点速度和加速度 (Velocity and Acceleration)

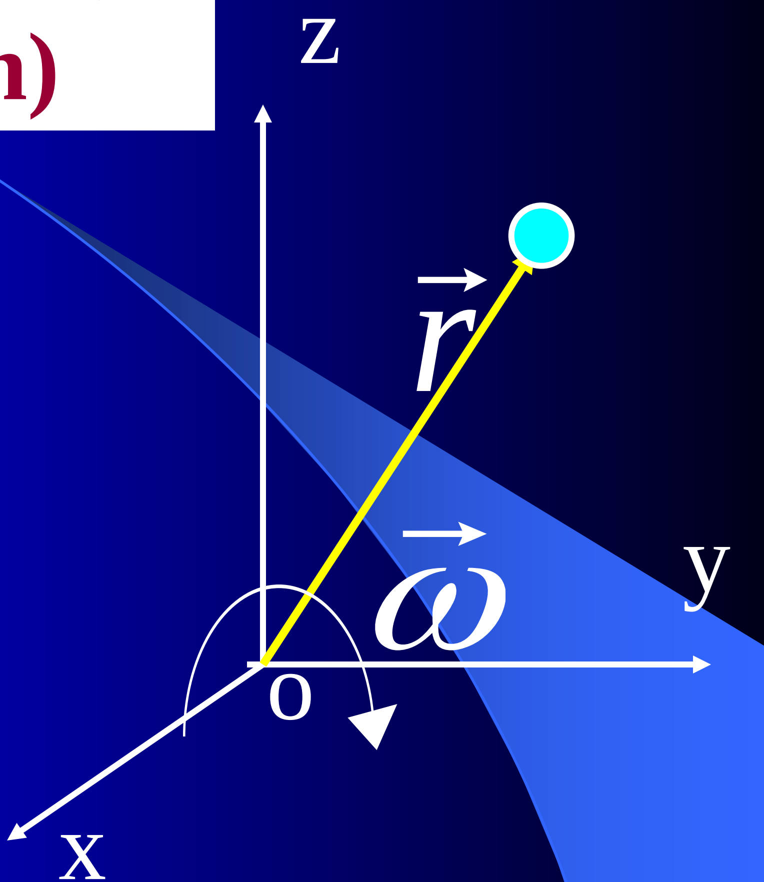
动系o-xyz与刚体固连

$\vec{r}$是动系中矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = ?$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

切向加速度

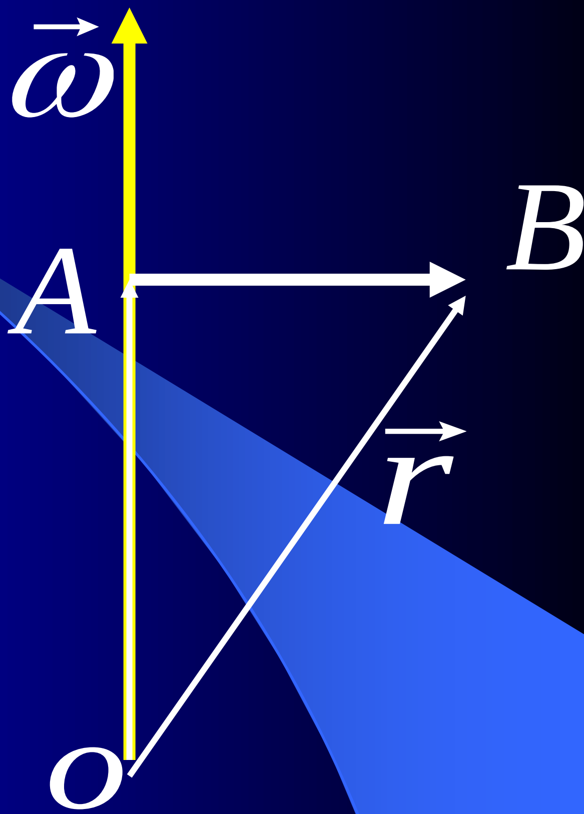
向轴加速度

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})-\omega^2\vec{r}$$

$$=\omega^2\overrightarrow{OA}-\omega^2\vec{r}$$

$$=-\omega^2\overrightarrow{AB}$$



5.瞬时轴　本体极面空间极面(Instantaneous axis, Herpolhode cone and polhode cone)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \underbrace{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 0} \qquad \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

投影到动系

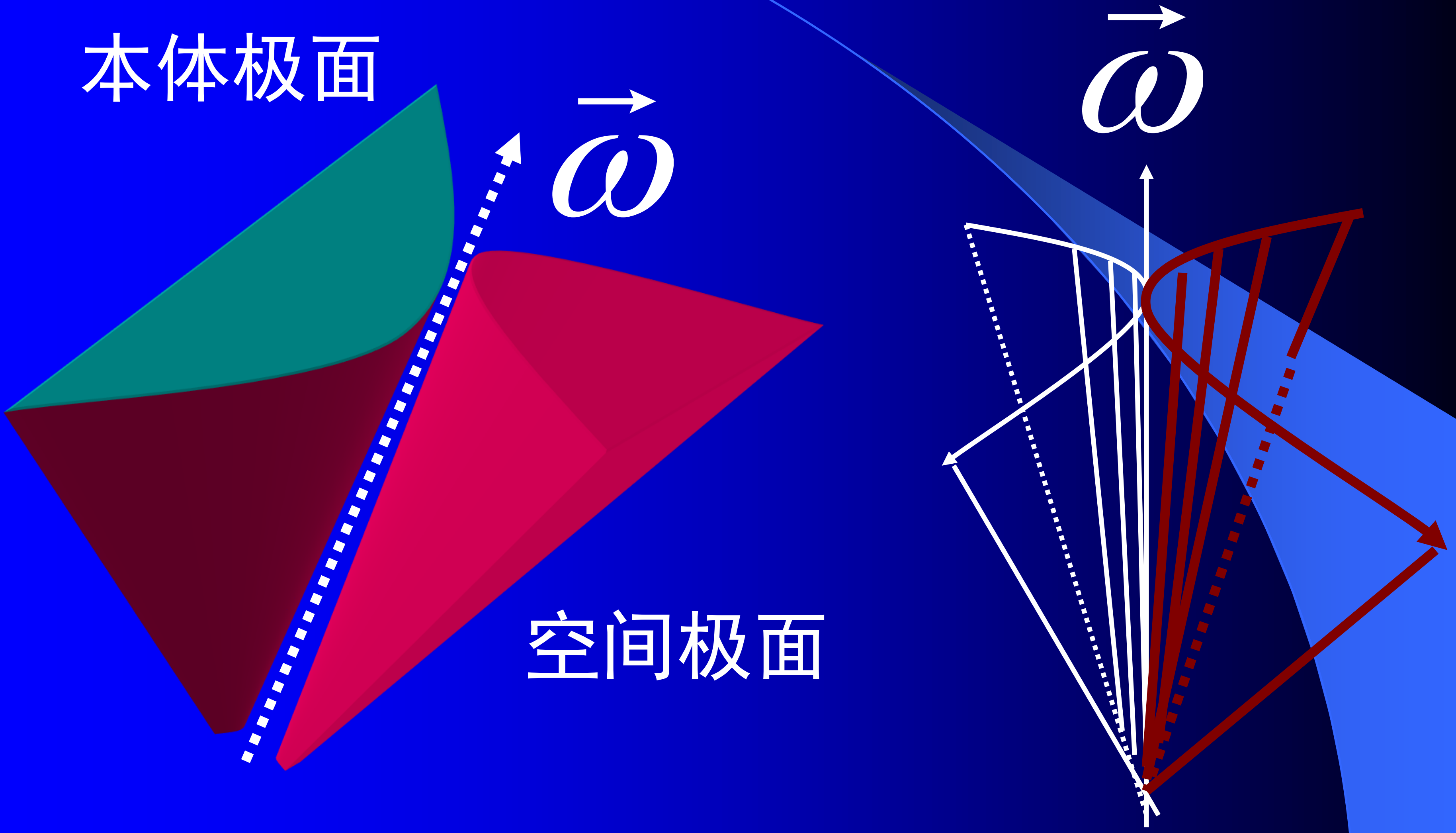
投影到静系

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

本体极面

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}$$

空间极面


本体极面
$\vec{\omega}$
空间极面
$\vec{\omega}$

§2.刚体的一般运动(General Displacement)

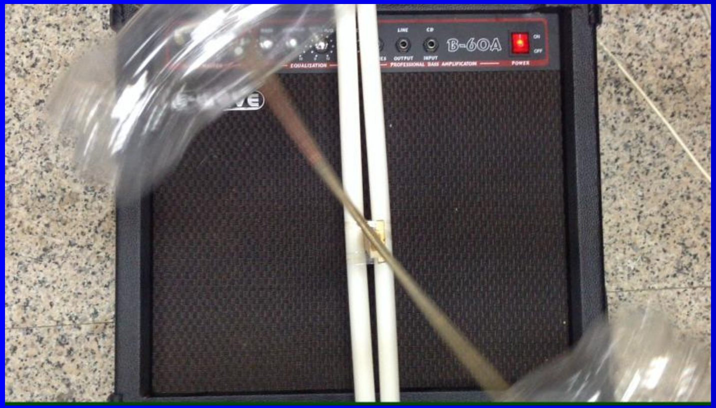
Chasles Theorem:

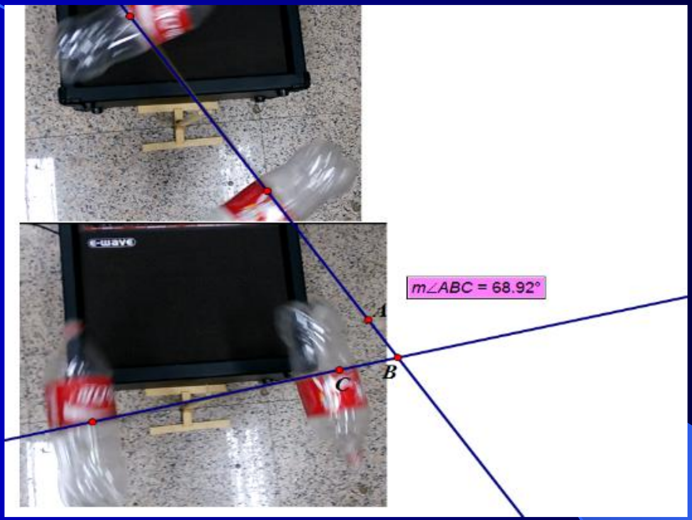
刚体的一般运动

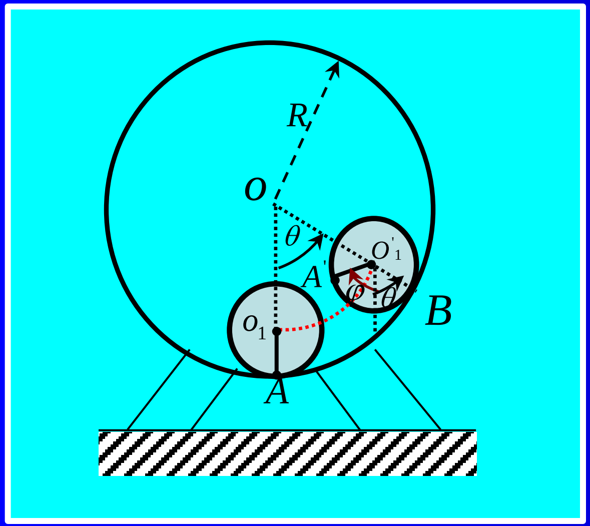
- 基点平动 ⟹ 三个自由度
- 绕基点三维定点转动 ⟹ 三个自由度

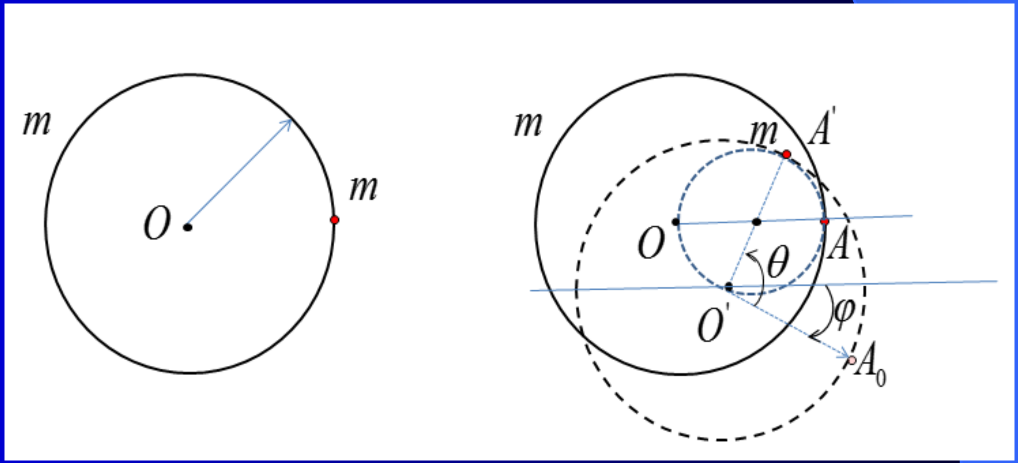
刚体转动角速度与基点选择无关

刚体转动角速度与基点,坐标系选择无关



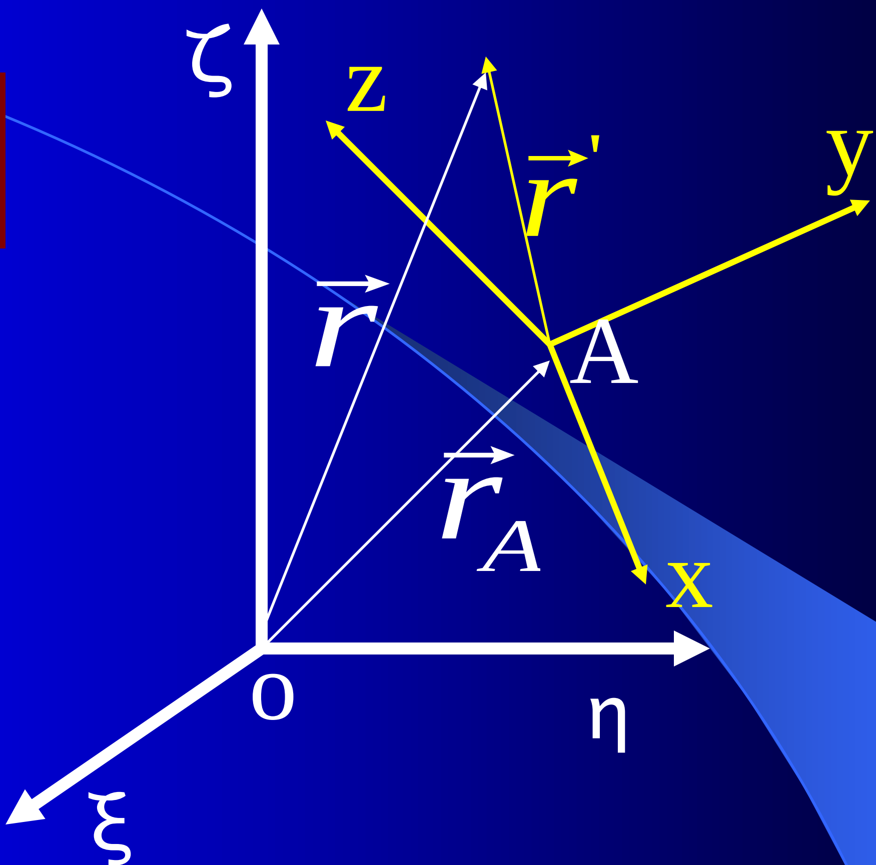






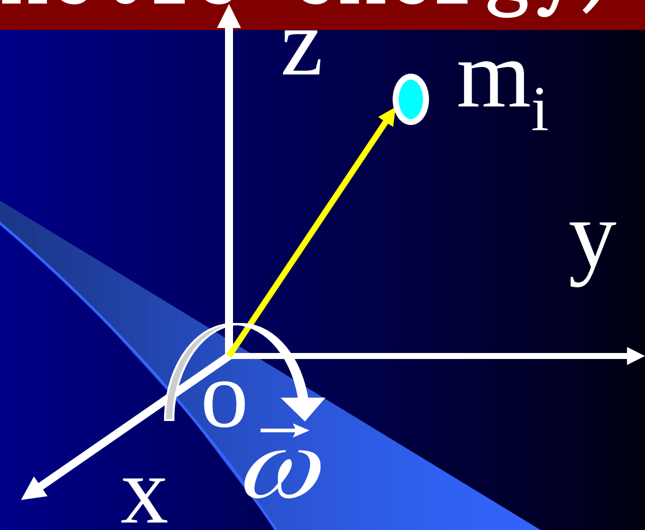
$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$$

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$



$$\vec{a} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)\right)$$

§3. 刚体转动的角动量和转动动能(Angular momentum and Rotational kinetic energy)



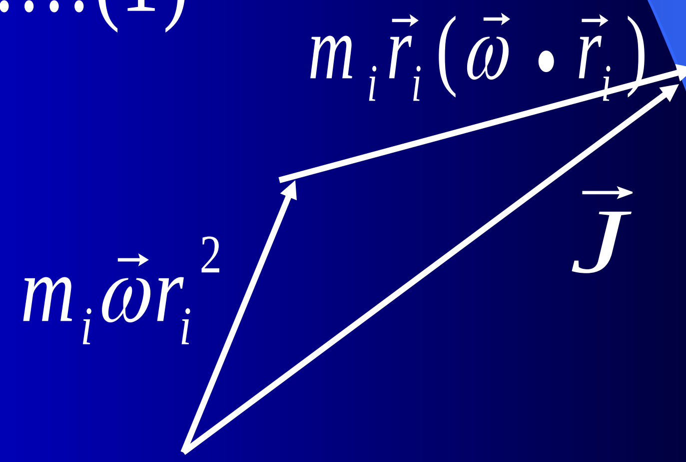
一. 对某一基点的角动量

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{J}=\vec{r}_i\times\vec{P}_i=\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times m_i\vec{r}_i)$$

$$=m_i\vec{\omega}r_i^2-m_i\vec{r}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\ldots.(1)$$

(i=1.2…….N)



Attention!!!

$\vec{J}$与$\vec{\omega}$不同向

$$\vec{J} = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times m_i \vec{r}_i)$$

$$= m_i \vec{\omega} r_i^2 - m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \bullet \vec{r}_i) \ldots\ldots(1)$$

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j} + J_z \vec{k} \ldots\ldots(2)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \ldots\ldots(3)$$

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \ldots(4)$$

将式(2)和(3)代入式(1)中整理

$$J_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \ldots(5)$$

$$J_y = I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x \ldots(6)$$

$$J_z = I_{zz}\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y \ldots(7)$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \ldots.(8)$$

$$\begin{cases} I_{xx} = m_i(y_i^2+z_i^2) \\ I_{yy} = m_i(x_i^2+z_i^2) \\ I_{zz} = m_i(x_i^2+y_i^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{zx} = m_i z_i x_i = I_{xz} \\ I_{xy} = m_i x_i y_i = I_{yx} \\ I_{yz} = m_i y_i z_i = I_{zy} \end{cases}$$

$(i=1,2,3\ldots\ldots N)$

说明

- 上面讨论对质心仍然成立
- 质量连续分布情形只需将求和改为积分即可

对质量连续分布情形只需将求和改为积分即可

$$\vec{J} = \iiint \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm = \iiint \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \rho dx dy dz$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\Downarrow$$

$$J_x = \iiint [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]\rho dx dy dz$$

$$J_y = \iiint [(x^2 + z^2)\omega_y - xy\omega_x - yz\omega_z]\rho dx dy dz$$

$$Jz = \iiint [(y^2 + x^2)\omega_z - xz\omega_x - yz\omega_y]\rho dx dy dz$$

二. 定点转动的转动动能

质量离散分布

$$T = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$(i = 1.2 \ldots .N) \ldots \ldots .(9)$$

$$\because \quad \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\therefore \quad T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{J} \ldots .(10)$$

$$\vec{J} = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$\therefore \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \bullet \vec{J} \quad \ldots(10)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad \ldots(7)$$

$$J_z = I_{zz}\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y$$

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\,\omega_x^2 + I_{yy}\,\omega_y^2 + I_{zz}\,\omega_z^2\right.$$

$$\left. - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{zy}\omega_z\omega_y\right)$$

$$\ldots(11)$$

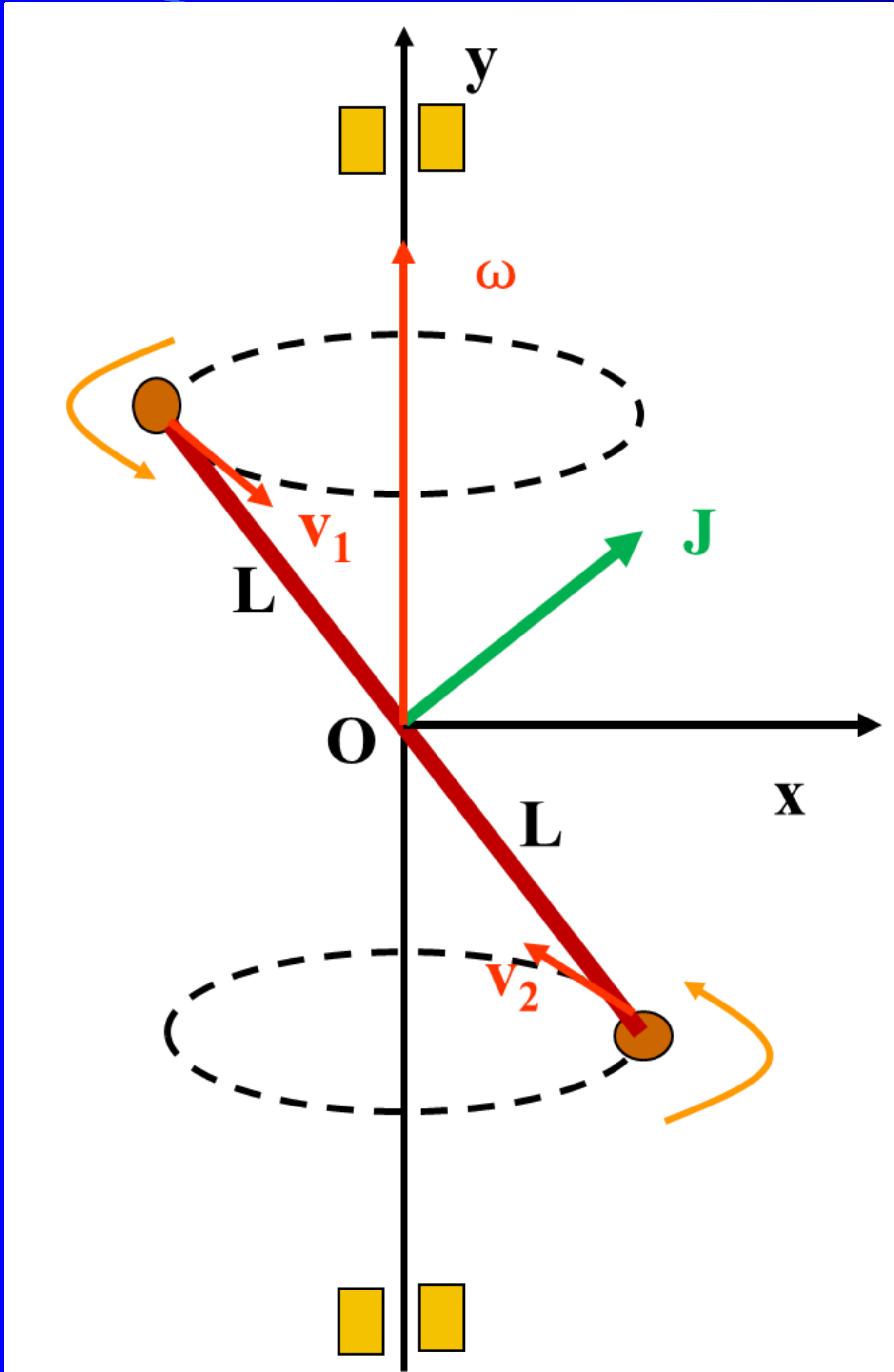
$$T=\frac{1}{2}(\omega_x\ \omega_y\ \omega_z)\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

质量连续分布情形

$$T=\iiint \tfrac{1}{2}\vec{\omega}\bullet\vec{J}\rho\, dx\, dy\, dz$$

Attention: I_{ij} plays an important role !!!

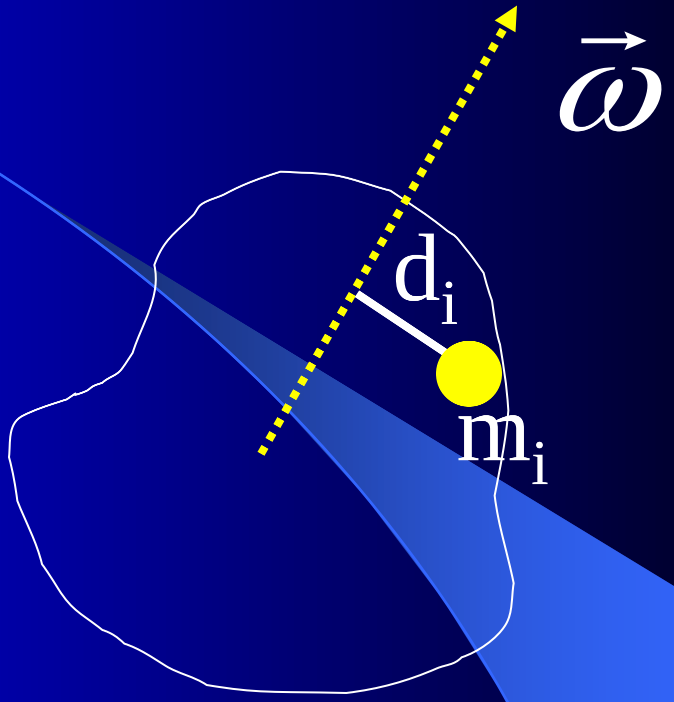
例



§4.转动惯量(Moment of Inertia

一.定义

$$I = \sum_{1}^{N} m_i d_i^2$$



二.计算

- 定义式即解析法
- 平行轴定理
- 正交轴定理

平行轴定理

$$J = J_c + m l^2$$

质心在o系坐标为 $x_c = y_c = 0, z_c = \overline{oc}$

$dm \to oz(o_1 z_1)$轴垂直距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r_1 = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$

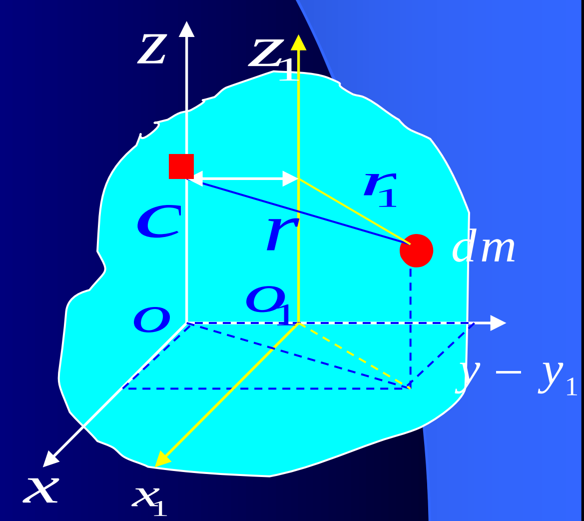
$$\therefore J_c = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm; \quad J = \int r_1^{\ 2} dm = \int \left(x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}\right) dm$$

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - l$$

$$\therefore \ J = \int \left[x^2 + (y-l)^2\right] dm$$

$$= \int \left(x^2 + y^2\right) dm - 2l \int y dm + l^2 \int dm$$

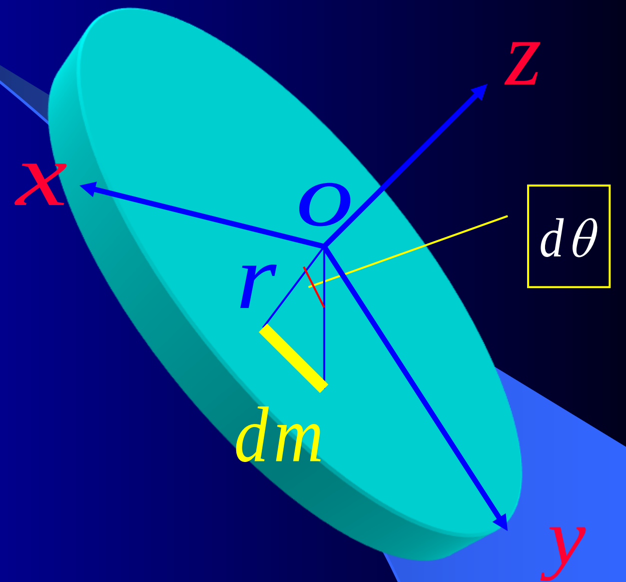
$$= J_c - 2lmy_c + ml^2 = J_c + ml^2$$



正交轴定理

$$J_z = J_x + J_y$$

适用于薄板、平面一类刚体



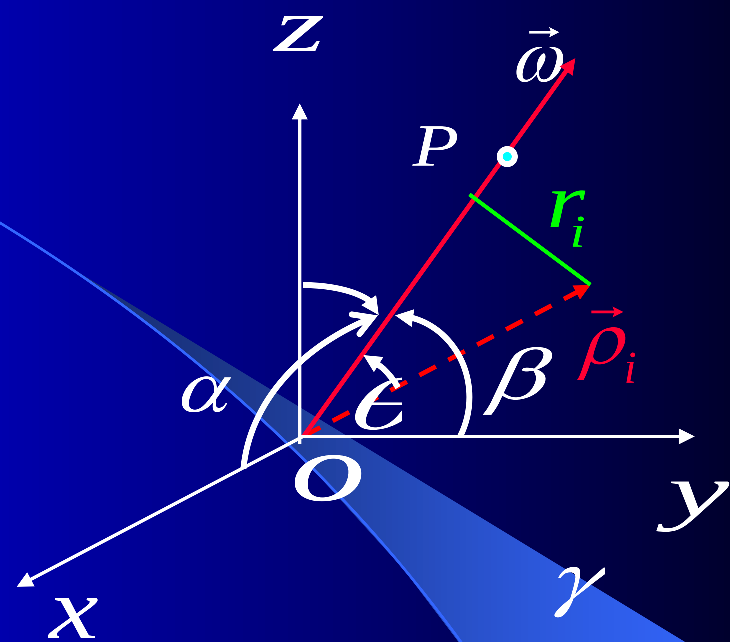
证：$J_z = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$

$= \int x^2 dm + \int y^2 dm = J_y + J_x$

例: 求一质量为 m，半径为 R 的圆盘对其直径的转动惯量。

解: $\because J_z = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma r d\theta dr = \frac{1}{2} mR^2, \quad \therefore J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{1}{4} mR^2$

三. 方向余弦定理



任意方向转动惯量:

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma$$

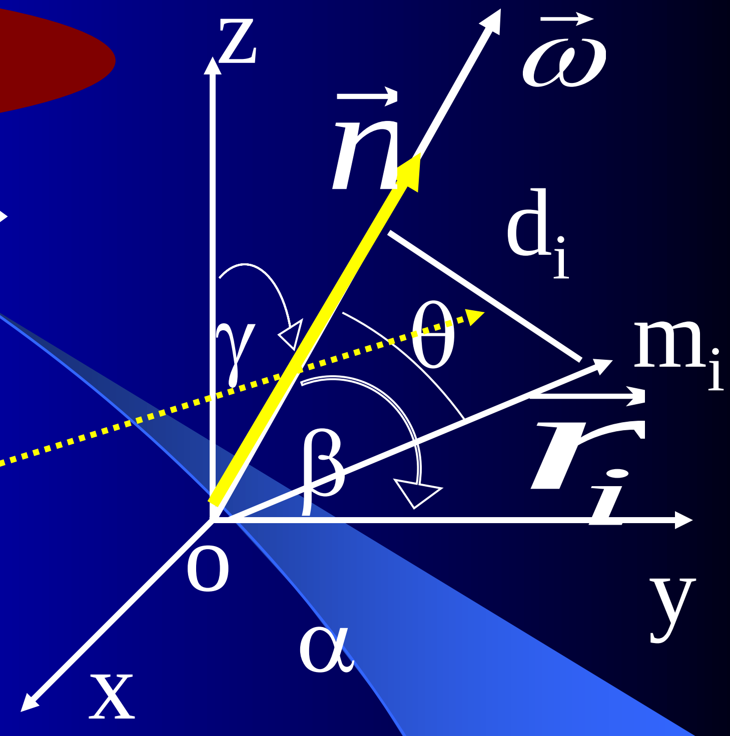
$$-2(I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + I_{yz}\cos\beta\cos\gamma)$$

方向余弦定理证明

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2 \quad \ldots\ldots(1)$$



$$\vec{n}\cdot\vec{r}_i = r\cos\theta$$

$$= (\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})\cdot(x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k})$$

$$= x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma$$

$$\ldots(2)$$

$$d_i^2 = r_i^2 - (r_i \cos\theta)^2 \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

将式(2)和(3)代入(1)

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma$$

$$-2(I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + I_{yz}\cos\beta\cos\gamma) \quad \ldots\ldots(4)$$

四. 惯量张量

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx}\vec{i}\vec{i} & -I_{xy}\vec{i}\vec{j} & -I_{xz}\vec{i}\vec{k} \\ -I_{yx}\vec{j}\vec{i} & I_{yy}\vec{j}\vec{j} & -I_{yz}\vec{j}\vec{k} \\ -I_{zx}\vec{k}\vec{i} & -I_{zy}\vec{k}\vec{j} & I_{zz}\vec{k}\vec{k} \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots(5)$$

(4)式可写为:

$$I = \vec{n} \bullet \overset{\leftrightarrow}{I} \bullet \vec{n}$$

$$= (\cos\alpha \ \cos\beta \ \cos\gamma) \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \overset{\leftrightarrow}{I} \bullet \vec{\omega} :$$

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \overset{\leftrightarrow}{I} \bullet \vec{\omega} :$$

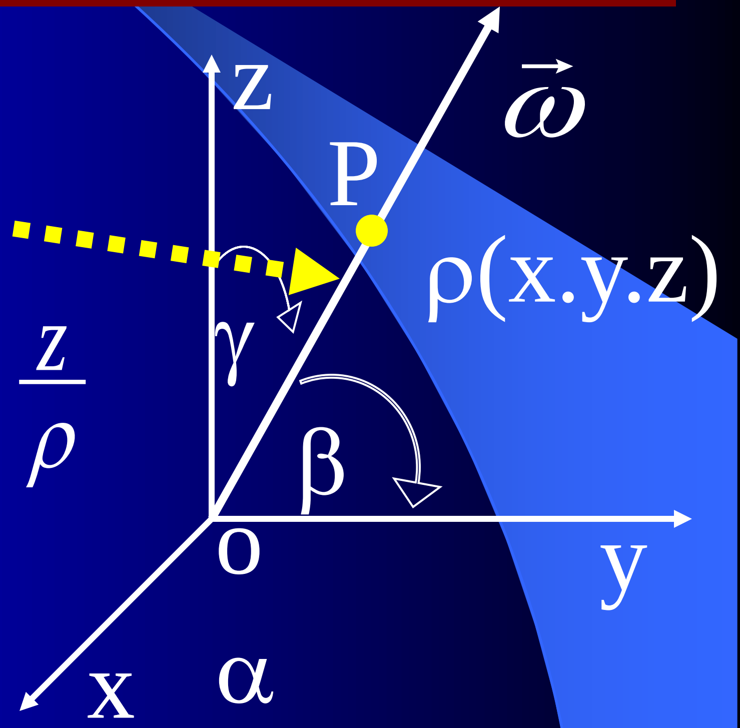
$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

惯量椭球(ellipsoid of inertia)

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma - 2(I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + I_{yz}\cos\beta\cos\gamma)$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I}} = oP$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho} \quad \cos\beta = \quad \cos\gamma = \frac{z}{\rho}$$



惯量椭

$$1 = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2(I_{xy}xy + I_{xz}xz + I_{yz}yz) \quad \ldots(6)$$

Discussion:

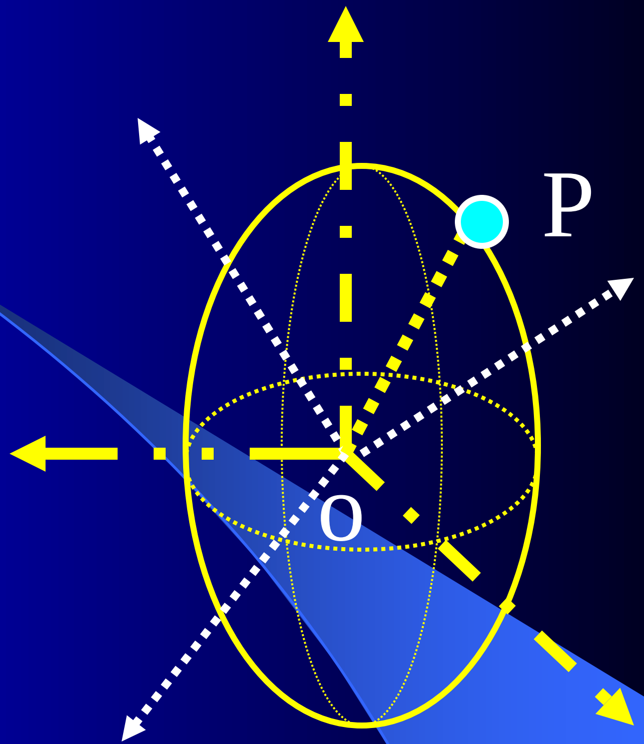
- 几何意义 → 表示椭球
- 物理意义 → 表示过基点所有轴的转动惯量
- 基点确定后惯量椭球唯一
- 转动惯量是标量不随坐标系变化

惯量椭球和刚体保持相对静止, 在动系中计算惯量系数

使惯性系数为常量 → 欧拉第一简化

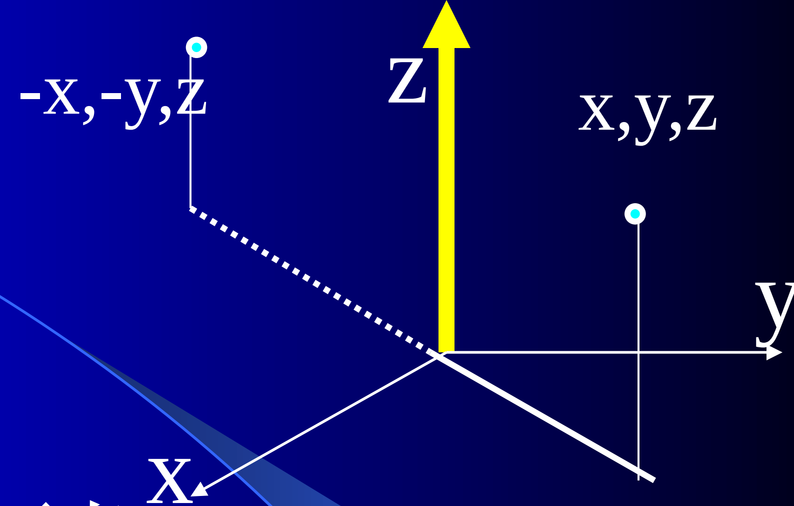
- 取惯量主轴为动系坐标轴 → 欧拉第二简化

消去交叉项



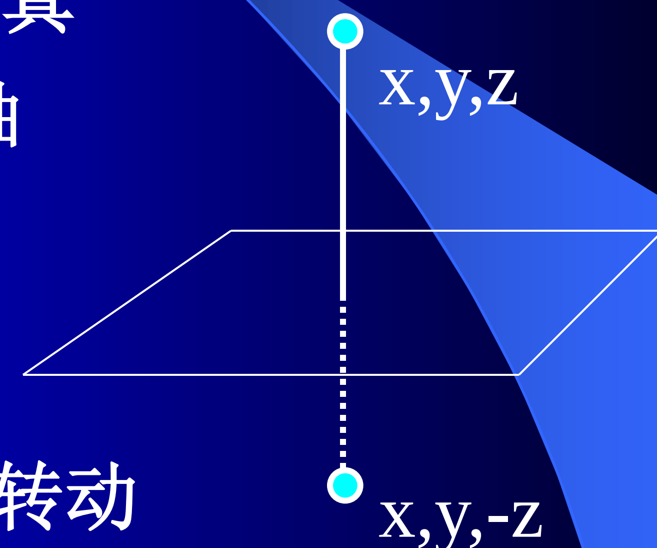
五. 惯量主轴的寻找

(principal axes of inertia)



(A)具有对称性的刚体

- 对称轴必为惯量主轴, 但反之不真
- 与对称面垂直的轴必为惯量主轴
- 旋转轴必为惯量主轴



(B) 一般情况

本征值本征矢方法(使绕主轴转动时 $\vec{J}$ 和 $\vec{\omega}$的方向相同)

$\vec{J} = \overleftrightarrow{I} \bullet \vec{\omega}$ ($\vec{J}$与 $\vec{\omega}$不同向)

$= \lambda\vec{\omega}$ ($\vec{J}$与 $\vec{\omega}$同向)

并不改变$\vec{J}$与$\vec{\omega}$的关系物理实质！

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \ldots .(1)$$

ω_i 线性齐次方程组

$$\left.\begin{aligned} (I_{xx}-\lambda)\,\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\,\omega_z &= 0 \\ -I_{yx}\,\omega_x + (I_{yy}-\lambda)\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z &= 0 \\ -I_{zx}\,\omega_x - I_{zy}\omega_y + (I_{zz}-\lambda)\,\omega_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

本征矢方程

欲得到非零 $\vec{\omega}$的解

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy}-\lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots(2)$$

本征值方程

$$f(\lambda^3) = 0$$

将求得的λ_i (i=1, 2, 3)值代入本征矢方程(1)

得到一组相应的 $\vec{\omega}_i(\omega_x^i, \omega_y^i, \omega_z^i)$

确定一个主轴方向。

三个λ_i值即可确定三个主轴方向

由此确定的λ_i值

表示刚体绕相应的惯量主轴的转动惯量

Method for obtaining the inertias around principle axis (IPA)

Inertia matrix is written as,

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Asumming I_i be IPAs,

$$\Lambda_1 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz},$$

$$\Lambda_2 = \begin{vmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xz} \\ I_{xz} & I_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{vmatrix} = I_2 I_3 + I_1 I_3 + I_1 I_2$$

$$\Lambda_3 = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} = I_1 I_2 I_3$$

We have, $I^3 - \Lambda_1 I^2 + \Lambda_2 I^1 - \Lambda_3 = 0$

Then, IPAs are the solutions of above equation

$$\Lambda_1 = I_1 + I_2 + I_3 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$$

$$\Lambda_2 = I_2 I_3 + I_3 I_1 + I_1 I_2,$$

$$\Lambda_3 = I_1 I_2 I_3,$$

Conclusion:

刚体对3个坐标轴的转动惯量之和等于此刚体对坐标原点的3个主转动惯量之和！

Attention Please !!!

- 在主轴坐标系下动能T和 $\vec{J}$ 的表达式得到最大简化
- 但并不改变 $\vec{J}$ 与 $\vec{\omega}$ 的关系
- 只有当刚体绕惯量主轴转动时 $\vec{J}$ 与 $\vec{\omega}$ 同向
- 转轴非惯量主轴时 $\vec{J}$ 与 $\vec{\omega}$ 不同向

在主轴坐标系下

$$\left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} \end{aligned}\right.$$

§5.欧拉动力学方程(Eulerian Dynamic Equation)

在采用欧拉二个简化后

与刚体固连本体主轴坐标系

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j} + J_z \vec{k}$$

$$= I_{xx}\omega_x \vec{i} + I_{yy}\omega_y \vec{j} + I_{zz}\omega_z \vec{k} \quad \ldots(1)$$

$$i.e., J_k = I_{kl}\omega_l, \quad (k = l)$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{J}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{J} \qquad \ldots(2)$$

欧拉动力学方程

$$\vec{J} = I_{xx}\omega_x \vec{i} + I_{yy}\omega_y \vec{j} + I_{zz}\omega_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y = M_z \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

欧拉运动学方程

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

§6. 重刚体的定点转动

(Rotation of Heavy Rigid With One Point fixed)

一. 重刚体的定义 → 主动力只有重力

二. 欧拉---班索情况

- 特点
- 一般情况
- 对称情况
- 稳恒转动的稳定性

A.特点

定点即重心

无外力矩

惯性转动

一般情况

几何法

解析法

$$
\begin{cases}
I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y \omega_z = 0 & \dots(1) \\
I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z \omega_x = 0 & \dots(2) \\
I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x \omega_y = 0 & \dots(3)
\end{cases}
$$

$(1)\times I_x\omega_x + (2)\times I_y\omega_y + (3)\times I_z\omega_z$ 则有:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2\right)\right] = 0 \qquad \ldots(4)$$

$$\boxed{I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = J^2} \qquad \ldots(5)$$

$(1)\times\omega_x + (2)\times\omega_y + (3)\times\omega_z$ 则有:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right)\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right)] = E_0} \qquad \ldots(6)$$

根据(5) (6)两

$I_z\dot{\omega}_z$

$$\omega_x = \pm\sqrt{\frac{J^2 - 2EI_y - I_z(I_z - I_y)\omega_z^2}{I_x(I_x - I_z)}} = f_x(\omega_z)$$

$$\omega_y = \pm\sqrt{\frac{J^2 - 2EI_x - I_z(I_z - I_x)\omega_z^2}{I_y(I_y - I_z)}} = f_y(\omega_z)$$

由此解得ω_z

ω_x ω_y

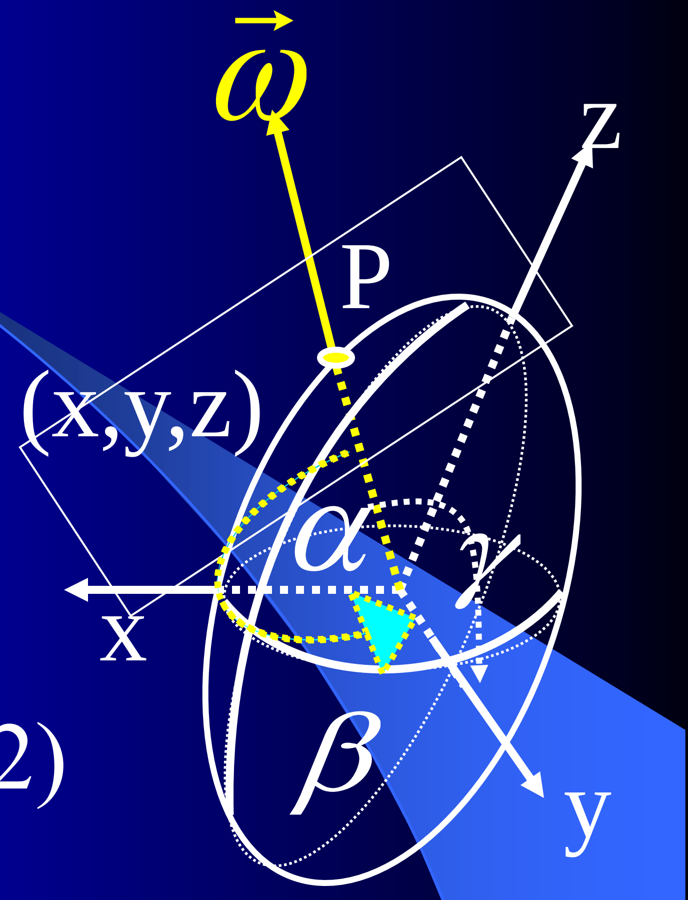
这些解不能用初等函数表示

班索几何解释

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \quad \ldots(1)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha = \rho\dfrac{\omega_x}{\omega} \\ y = \rho\cos\beta = \rho\dfrac{\omega_y}{\omega} \\ z = \rho\cos\gamma = \rho\dfrac{\omega_z}{\omega} \end{cases} \quad \ldots(2)$$

$$\boxed{\frac{\rho^2}{\omega^2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) = 1} \quad \ldots(3)$$



$$\rho = \frac{\omega}{\sqrt{2E}} \text{ 代入(2)式 } \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\alpha = \dfrac{\omega_x}{\sqrt{2E}} = \rho\dfrac{\omega_x}{\omega} \\ y = \rho\cos\beta = \dfrac{\omega_y}{\sqrt{2E}} = \rho\dfrac{\omega_y}{\omega} \\ z = \rho\cos\gamma = \dfrac{\omega_z}{\sqrt{2E}} = \rho\dfrac{\omega_z}{\omega} \end{cases} \quad (4)$$

P点的坐标

过P点切平面方程?

惯量椭球上过P点切平面方程的流动坐标为(X. Y. Z)

惯量椭球 $f(x,y,z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 1 = 0 \quad \ldots(5)$

惯量椭球上过P点切平面方程:

$$f_x' \cdot (X - x) + f_y' \cdot (Y - y) + f_z' \cdot (Z - z) = 0 \quad \ldots(6)$$

将(4)(5)两式代入(6)式中

$$\frac{I_x \omega_x}{\sqrt{2E}} X + \frac{I_y \omega_y}{\sqrt{2E}} Y + \frac{I_z \omega_z}{\sqrt{2E}} Z - 1 = 0$$

$$\frac{J_x}{\sqrt{2E}} X + \frac{J_y}{\sqrt{2E}} Y + \frac{J_z}{\sqrt{2E}} Z - 1 = 0$$

$$\boxed{\frac{J_x}{J} X + \frac{J_y}{J} Y + \frac{J_z}{J} Z - \frac{\sqrt{2E}}{J} = 0} \quad \ldots(7)$$

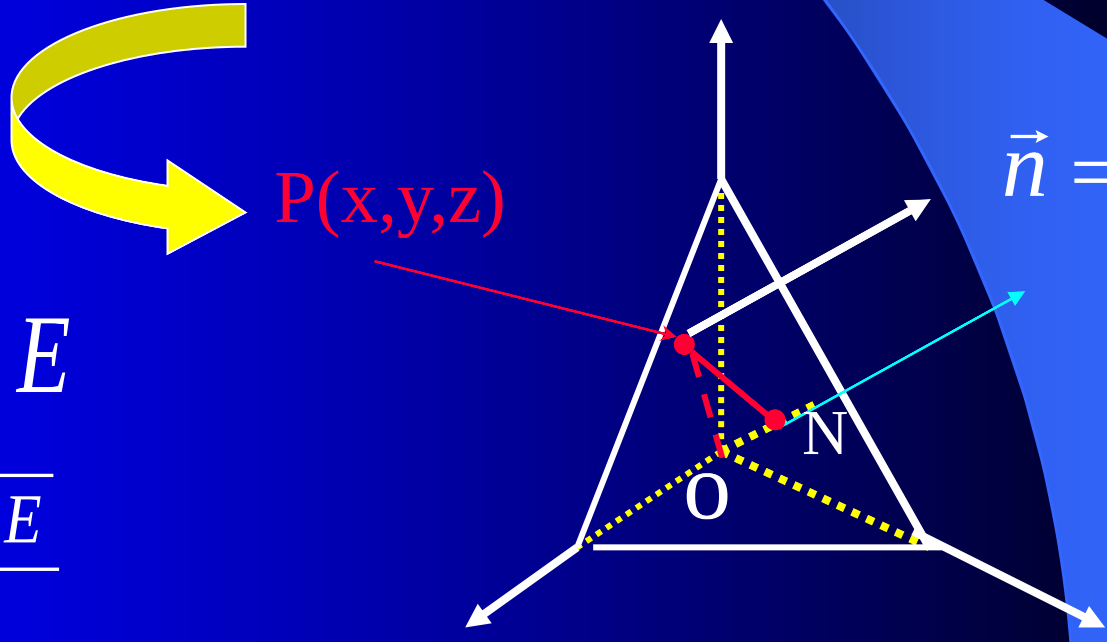
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{2E}}{J} = \left|\overrightarrow{ON}\right|$$

空间平面法线式方程

Summary:

- $\vec{J}$ 即此空间平面法线，故此平面在空间取向不变
- 此平面的交点到坐标原点间距离保持不变

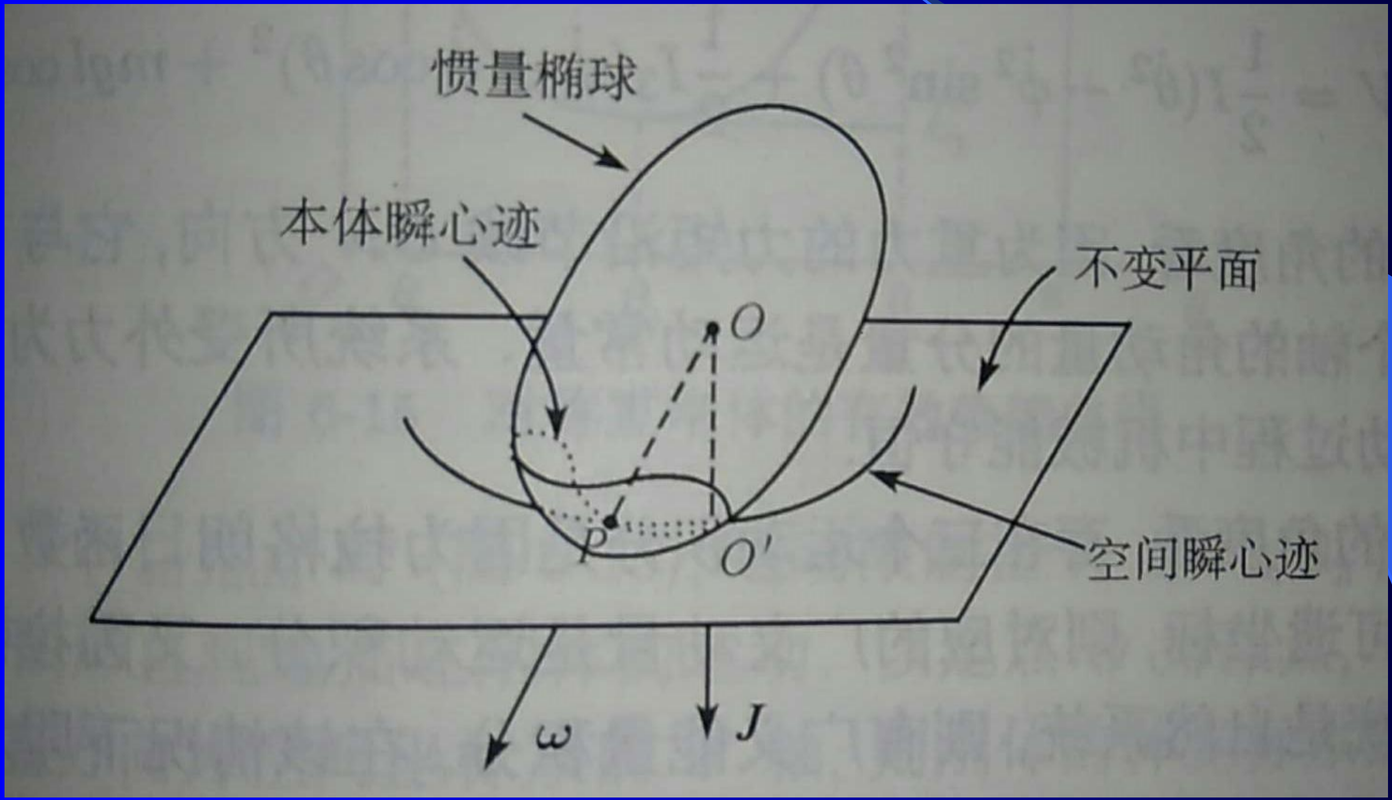
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0$$



$$\vec{n} = \frac{\vec{J}}{J}$$

- $\vec{\omega} \bullet \vec{J} = 2E$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \left|\overrightarrow{ON}\right| = \frac{\sqrt{2E}}{J}$$


惯量椭球
本体瞬心迹
不变平面
O
P
O'
空间瞬心迹
ω
J

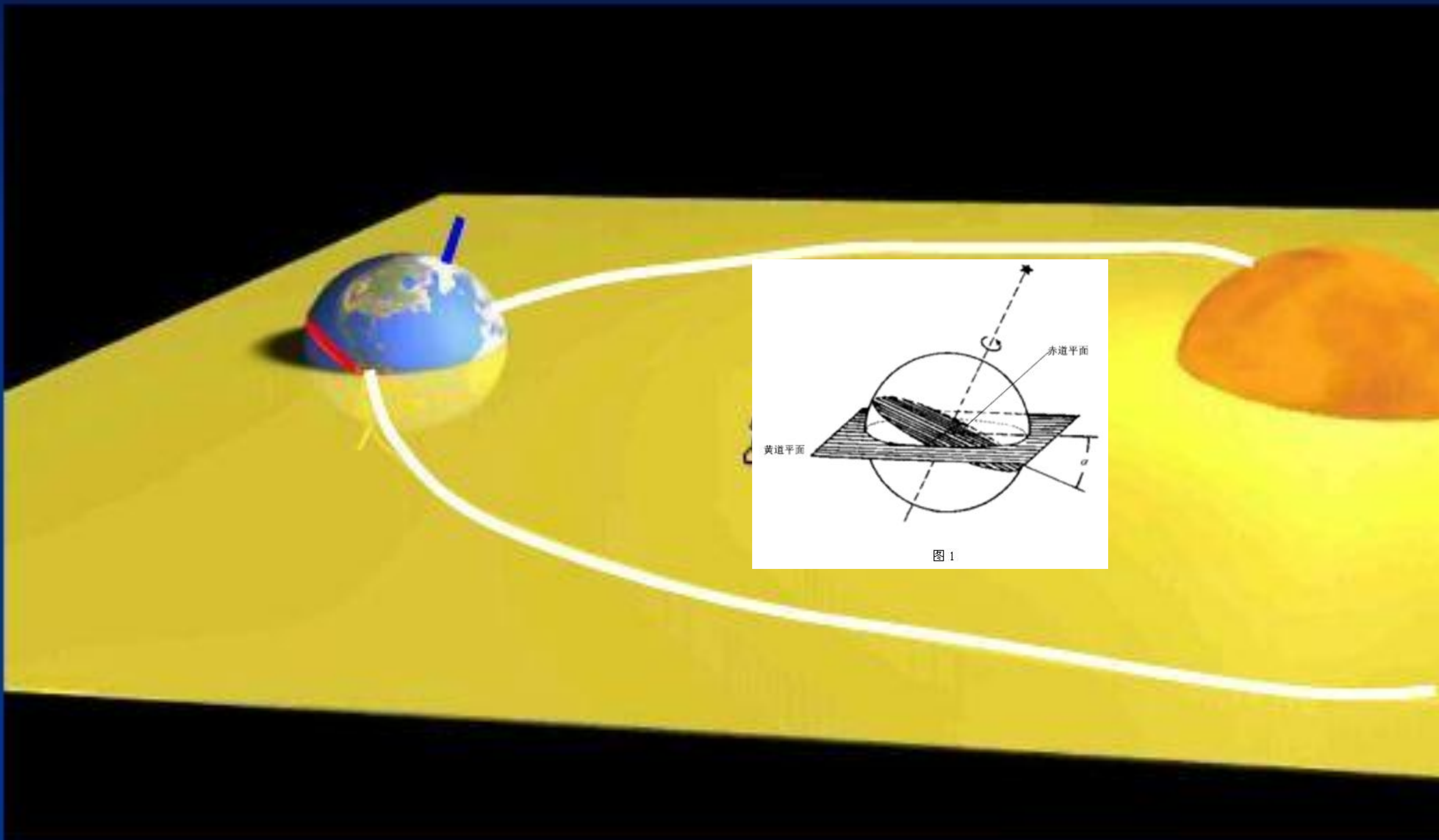


图 1

对称欧拉--班索情况

$I_x = I_y \neq I_z$

$$I_x\dot{\omega}_x - (I_x - I_z)\omega_y\omega_z = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$I_z\dot{\omega}_z = 0 \qquad \ldots(3)$$

$$\omega_z = \Omega(\text{const}) \qquad \ldots(4)$$

将(4)式代入(1)(2)两式中

$$n=\frac{I_Z-I_X}{I_X}\Omega \qquad \ldots(5)$$

$$\dot{\omega}_x=-n\omega_y \qquad \ldots(6)$$

$$\dot{\omega}_y=n\omega_x \qquad \ldots(7)$$

$$\dot{\omega}_x+i\dot{\omega}_y=i\,n\left(\omega_x+i\omega_y\right) \quad \ldots(8)$$

积分得: $$\omega_x + i\omega_y = \omega_0 e^{i(nt+\delta)}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_0 \cos(nt+\delta) & \ldots(9) \\ \omega_y = \omega_0 \sin(nt+\delta) & \ldots(10) \\ \omega_z = \Omega(\text{const}) & \ldots(4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^2 &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\omega_0^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}} = const \end{aligned} \quad \ldots(11)$$

如何求 $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = ? \ \varphi = ? \\ \dot{\theta} = ? \ \theta = ? \\ \dot{\psi} = ? \ \psi = ? \end{cases}$

取 $\vec{J}$ 为静系ζ轴方向 $\vec{\dot{\varphi}} \uparrow\uparrow \vec{J}$且与$\varsigma$轴同向

$$\vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{J} = J\sin\theta\sin\psi\vec{i} + J\sin\theta\cos\psi\vec{j} + J\cos\theta\vec{k}$$

$$= J_x\vec{i} + J_y\vec{j} + J_z\vec{k}$$

$J_z = J\cos\theta$

$J_z = J\cos\theta = I_z\omega_z = I_z\Omega$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{I_z\Omega}{J}\right) = \theta_0(const), \quad \dot{\theta} = 0$$

如何求ψ和 $\dot{\psi}$?

$$\begin{cases} J_x = J\sin\theta\sin\psi = I_X\omega_X = I_X\omega_0\cos(nt+\delta) \\ J_y = J\sin\theta\cos\psi = I_X\omega_y = I_X\omega_0\sin(nt+\delta) \end{cases}$$

$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{ctg}\,(nt+\delta)$

$\psi = \pi/2 - (nt + \delta) \quad \dot{\psi} = -n$

如何求φ和$\dot{\varphi}$？ $\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = \Omega$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\Omega - \dot{\psi}}{\cos\theta} = \sec\theta_0(\Omega + n) \\ \varphi = (\Omega + n)t\sec\theta_0 + \varphi_0 \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{I_z\Omega}{J}\right) = \theta_0(const), \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\psi} = -n \qquad \psi = \pi/2 - (nt + \delta) \end{cases}$$

Summary

1. $\vec{\omega}$ 的大小不变但方向在变

2. $\vec{J}$ 的大小和方向均不变

3. $\vec{\omega} \bullet \vec{k} = |\vec{\omega}| \cos(\vec{\omega}\ \vec{k}) = \omega_z = \Omega$

$\vec{\omega}$和动系z轴夹角不变

4. $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$ 无章动 $\Rightarrow$ 规则进动

$\theta = \theta_0 \Rightarrow$ 动系z轴和静系ς轴夹角不变

$$5.\ \because \vec{\omega}\bullet\vec{J}=2E(const),\quad \vec{J}\uparrow\uparrow\vec{n}_{\varsigma}$$

$\therefore \vec{\omega}$和静系ς轴夹角不变

$$6.\ \vec{J}\bullet\vec{k}=J_z \Rightarrow \cos(\theta)$$

$$=\frac{J_z}{J}\Rightarrow \theta=\theta_0$$

动系z轴与静系ς轴夹角不变

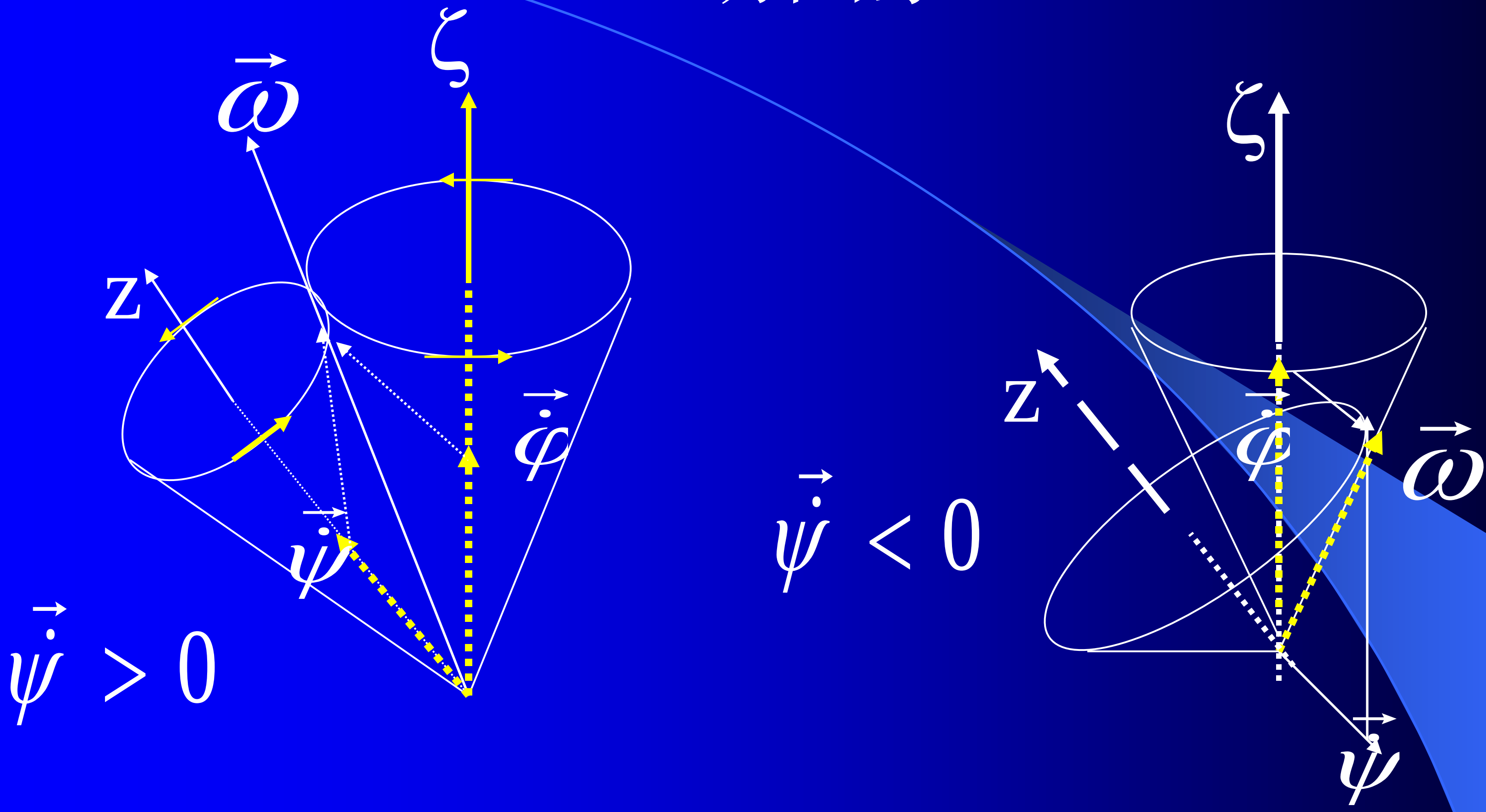
问题：1）M=0, 进动的原因？

2）可否保持无进动、高自旋状态？

Answer：：1）初始状态决定！

2）可以！初始状态决定！

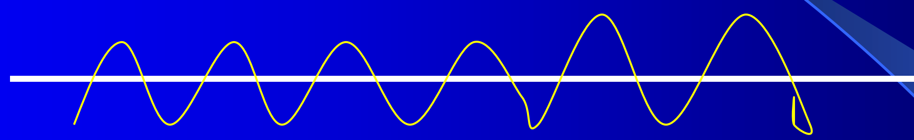
运动图象



demonstration

稳恒转动的稳定性

稳定性的基本含义



稳恒转动的含义 $\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ 的大小方向均不变

若 $\vec{M} = 0$??

若转轴为惯量主轴才有可能

刚体绕惯量主轴z转动

设t=0

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega_0 \\ \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0 \end{cases}$$

受一扰动

t时刻

$$\begin{cases} \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega}'(t) = \omega_x'\vec{i} + \omega_y'\vec{j} + \omega_z'\vec{k} \\ \dot{\vec{\omega}}(t) = \dot{\omega}_x'\vec{i} + \dot{\omega}_y'\vec{j} + \dot{\omega}_z'\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x' - (I_y - I_z)\omega_y'(\omega_0 + \omega_z') = 0 \quad (1) \\ I_y\dot{\omega}_y' - (I_z - I_x)\omega_x'(\omega_0 + \omega_z') = 0 \quad (2) \\ I_z\dot{\omega}_z' - (I_x - I_y)\omega_y'\omega_x' = 0 \quad (3) \end{cases}$$

略去高阶小量

$$\dot{\omega}_x' = -\frac{(I_z - I_y)}{I_x}\omega_y'\omega_0 \qquad (4)$$

$$\dot{\omega}_y' = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}\omega_x'\omega_0 \qquad (5)$$

$$\ddot{\omega}_x' = -\frac{(I_z - I_x)(I_z - I_y)}{I_x I_y}\omega_0^2\omega_x'$$

$\Omega > 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} I_z > I_y,\ I_z > I_x \\ I_z < I_y,\ I_z < I_x \end{cases}$ $\Rightarrow$ 转动稳定

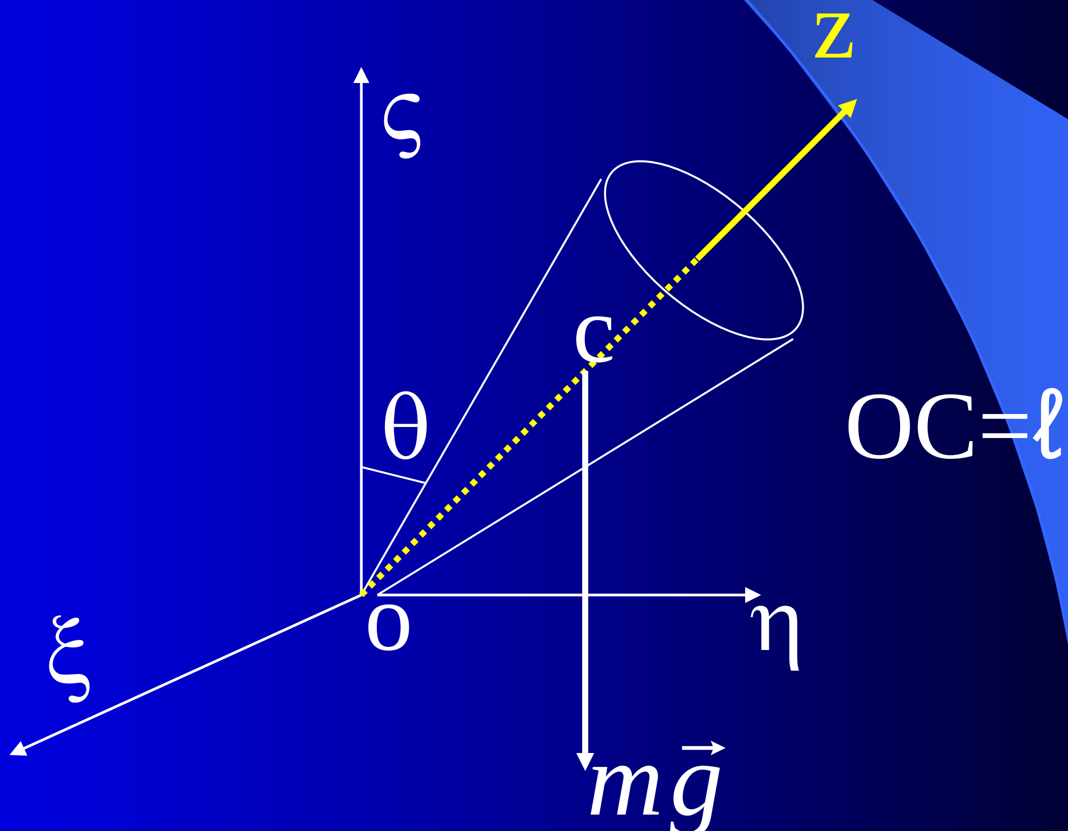
Conclusion:

当刚体绕转动惯量取极值的惯量主轴转动时，转动是稳定的；否则是不稳定的

三. 拉格朗日——泊松情况

A.特点

- 定点非重心
- 外力矩≠0
- $I_x = I_y \neq I_z$



demonstration

B.定量计算与分析

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

动系中 $\vec{r} = l\vec{k}$

$$\vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}$$

$\because \dot{\varphi} \uparrow\uparrow -m\vec{g}$

$$m\vec{g} = -mg\sin\theta\sin\psi\vec{i} - mg\sin\theta\cos\psi\vec{j} - mg\cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & l \\ -mg\sin\theta\sin\varphi & -mg\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta mg \end{vmatrix}$$

欧拉动力学方程

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z=mg\sin\theta\cos\varphi & (1) \\ I_y\dot{\omega}_y-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x=-mg\sin\theta\sin\varphi & (2) \\ I_z\dot{\omega}_z=0 & (3) \end{cases}$$

$\because \vec{M} \perp \zeta_0, \vec{k}$

$$I_Z\omega_Z=J_k\ (conservation) \quad (4)$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

$$I_Z\omega_Z=I_Z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})$$

$$\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\frac{J_k}{I_z} \quad \text{第一个运动积分} \quad (5)$$

$$\dot{\psi}=\frac{J_k}{I_z}-\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$I_x\dot{\omega}_x-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z=mg\sin\theta\cos\varphi \qquad (1)$$

$$I_y\dot{\omega}_y-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x=-mg\sin\theta\sin\varphi \qquad (2)$$

$$I_z\dot{\omega}_z=0 \qquad (3)$$

$$(1)\times\omega_x+(2)\times\omega_y+(3)\times\omega_z$$

$$\frac{d}{dt}[\tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2)]$$

$$=mgl\sin\theta\cos\psi\times\omega_x-mgl\sin\theta\sin\psi\times\omega_y$$

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)\right] = mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = -mgl\cos\theta + E_0$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}I_x(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}I_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 + mgl\cos\theta = E_0$$

(*conservation*) 第2个运动积分 (6)

$$\vec{M}\bullet\vec{\varsigma}_0 = (mgl\sin\theta\cos\vec{i} - mgl\sin\theta\sin\psi\vec{j})$$

$$\bullet(\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \sin\theta\cos\psi\vec{j} + \cos\theta\vec{k})$$

$$= 0$$

$$\vec{J}\bullet\vec{\varsigma}_0 = (I_x\omega_x\vec{i} + I_x\omega_y\vec{j} + I_z\omega_z\vec{k})$$

$$\bullet(\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \sin\theta\cos\psi\vec{j} + \cos\theta\vec{k})$$

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$= J_k$$

$$\because \vec{M}\perp\zeta_0, \vec{k}$$

$$\vec{J}\bullet\vec{\varsigma}_0 = I_x\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta$$

$= J_\varsigma$ (conservation)第三个运动积分(7)

$$\frac{1}{2}I_x(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2+mgl\cos\theta=E_0$$

$$I_z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=J_k \quad \text{第一个运动积分} \quad (5)$$

$$\vec{J}\bullet\vec{\varsigma}_0=I_x\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\cos\theta$$

$$=J_\varsigma(conservation)\text{第三个运动积分}(7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J_\varsigma - J_k \cos\theta}{I_x \sin^2\theta} \qquad (7)$$

欲求 $\dot{\varphi}$和 $\dot{\psi} \Rightarrow$ 关键求 $\theta = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \frac{J_\varsigma - J_k \cos\theta}{I_x \sin^2\theta} \qquad (7) \\ &\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = \frac{J_k}{I_z} \qquad (5) \end{aligned}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2} I_x(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 + mgl\cos\theta = E_0$$

(*conservation*) 第2个运动积分 (6)

$$\frac{I_x}{2}\left[\dot{\theta}^2+\left(\frac{J_\zeta - J_k\cos\theta}{I_x\sin\theta}\right)^2\right]+\frac{J_k}{2I_z}+mgl\cos\theta=E_0$$

$(conservation)$ 第2个运动积分 (6)

$$V_{eff}(\theta)=\frac{(J_\varsigma - J_k\cos\theta)^2}{2I_x\sin^2\theta}+mgl\cos\theta \qquad (9)$$

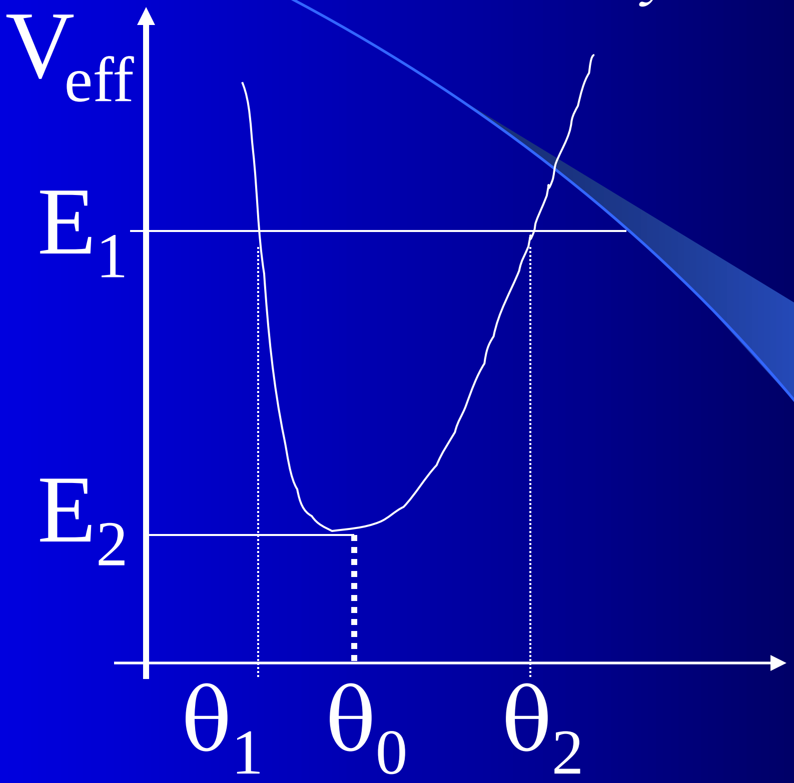
$$E=E_0-\frac{J_k^2}{2I_z}$$

Discussion:

- $V_{eff}(\theta)>0$ 有意义

  $V_{eff}(\theta)<0$ 无意义

- 运动图象　当 $J_k \neq J_\varsigma$

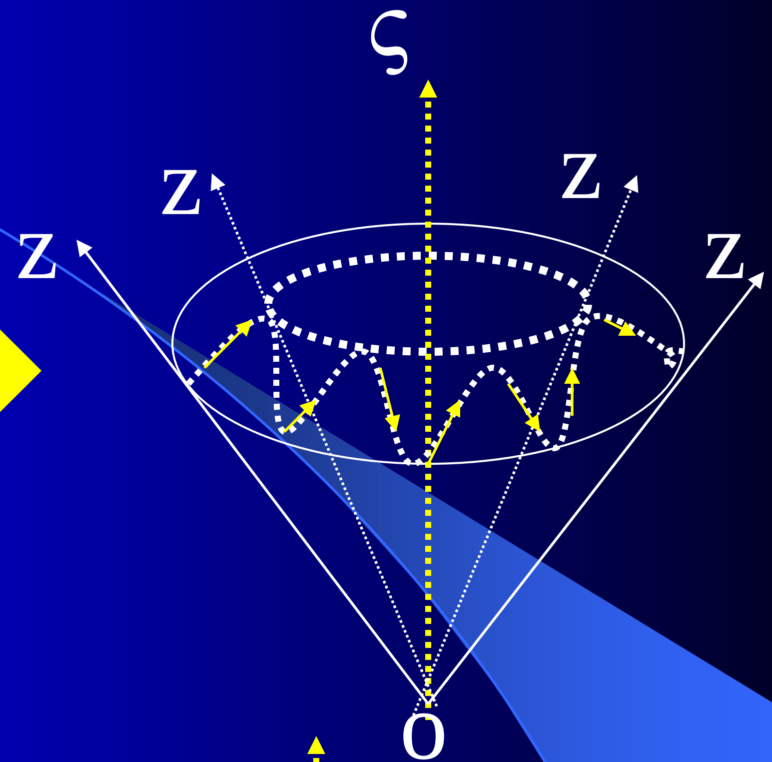


当$\theta=0$, $\theta=\pi \Rightarrow V_{eff} \to \infty$

$E=E_1 \Rightarrow \theta_1 \le \theta \le \theta_2$

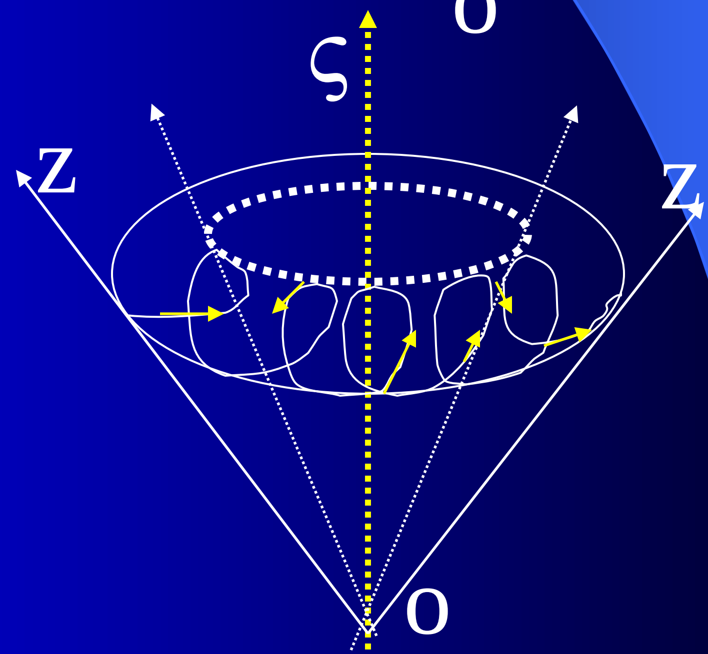
$\dot{\varphi}$在 $(\theta_{1,}\theta_2)$内 不 变 号

demondtration

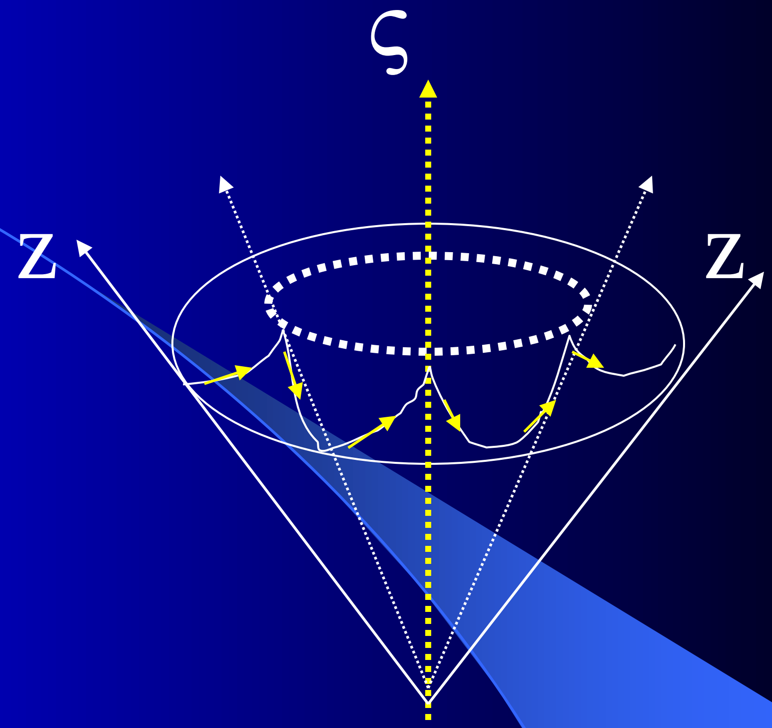


$\dot{\varphi}$在 $\theta_{1,}$变 号

demondtration



$\dot{\varphi}$在 $\theta_{1,} = 0$



demonstration

$E=E_2=V_{eff}$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta} = 0$

$$V_{eff}(\theta) = \frac{(J_{\varsigma} - J_k \cos\theta)^2}{2 I_x \sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{dV_{eff}}{d\theta} = 0$$

$$\cos\theta_0\beta^2-(J_k\sin^2\theta_0)\beta+mglI_x\sin^4\theta_0=0$$

$$\boxed{\beta=J_\varsigma-J_k\cos\theta_0}$$

$$\beta=\frac{J_k\sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0}[1\pm\sqrt{1-\frac{4mglI_x\cos\theta_0}{J_k^2}}]$$

β不 能 为 虚 $1-\dfrac{4mglI_x\cos\theta_0}{J_k^2}>0$

拉格朗日驼螺以固定倾角作稳定运动的条件

$$1-\frac{4mglI_x\cos\theta_0}{J_k^2}>0$$

特殊情行:θ=0

$$\omega_z^2\geq\frac{4mglI_x}{I_z^2}$$

demonstration

拉格朗日驼螺绕竖直轴作稳定近动的条件