武汉大学 2011-2012 概率论与数理统计 D(第一学期)期末试卷答案

一、解：(1)P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+0.4-0.5×0.4=0.7

(2)P((A-B)|(A+B))=P((A-B)∩(A+B))/P(A+B)=[P(A)-P(A)P(B)]/P(A+B)=0.3/0.7=3/7

二、解：

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}(\text{合格且来自甲厂})/\mathrm{P}(\text{合格})$$

$$=(\frac{5}{5+3+2})\times 0.9/[(\frac{5}{5+3+2})\times 0.9+(\frac{3}{5+3+2})\times 0.8+(\frac{2}{5+3+2})\times 0.75]$$

$$=4.5\div(4.5+2.4+1.5)=\frac{15}{28}$$

三、解：(1)由切比雪夫不等式可知：

$$\text{因为：}E(X)=2000,\text{所以}\varepsilon=200$$

$$D(X)=10000(1-0.2)\times 0.2=1600$$

$$P(|X-E(X)|\leq 200)\geq 1-\frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{1600}{40000}=0.96$$

四、解：（1）

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=\frac{1}{2}+x,(0\leq x\leq 1)\\ 0,else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dx=\frac{1}{2}+y,(0\leq y\leq 1)\\ 0,else\end{cases}$$

$$(2)\text{因为}f_X(x)f_Y(y)=(\frac{1}{2}+x)(\frac{1}{2}+y)\neq f(x,y),\text{所以}X,Y\text{不独立；}$$

$$(3)\int_0^1[\int_0^1 h(x-y)f(x,y)dy]dx=\int_0^1[\int_x^{x-1}-h(z)(x+x-z)dz]dx$$

$$=\int_{-1}^0[\int_0^{z+1}h(z)(2x-z)dx]dz+\int_0^1\int_z^1 h(z)(2x-z)dx]dz$$

$$=\int_{-1}^0 h(z)(z^2+z+1)dz+\int_0^1 h(z)(1-z^2-z)dz$$

$$\text{所以}f_Z(z)=\begin{cases}z^2+z+1,-1\le z\le 0\\1-z^2-z,0<z\le 1\\0,else\end{cases}$$

五、解:

$$F_M(m)=(\frac{m}{\theta})^n$$

$$f_M(m)=[(\frac{m}{\theta})^n]'=n(\frac{m}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}$$

$$E(M)=\int_0^\theta f(m)mdm=\frac{n\theta}{n+1}$$

$$E(M^2)=\int_0^\theta f(m)m^2dm=\frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$D(M)=E(M^2)-E^2(M)=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

六、解：根据 n 重伯努利实验 $X_k=\begin{cases}1,\text{第k部电话使用外线通话}\\0,\ \text{第k部电话使用外线通话}\end{cases}$，则 $n_A=\sum_{k=1}^{300}X_k$ 表 示同时使用外线电话的总数。P=P($X_k=1$)=0.04,np=12,np(1-p)=11.52,即求最小值 m，使得：

$P(n_A\le m)\ge 0.95,$ According to **De Moivre-Laplace limit theorem,**

we have： $P(n_A\le m)=\Phi(\frac{m-12}{\sqrt{11.52}})\ge 0.95$,即：$\frac{m-12}{\sqrt{11.52}}\ge 1.65$，m≥17.61 取 m=18，即至少要安装 18 条外线才能保证 95%把握外线畅通。

七、解：先求分布函数如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}=\frac{1}{\iint\limits_D 1d\sigma}=\frac{1}{\pi},x^2+y^2\le 1\\0,else\end{cases}$$ ；再求得：

$$E(x)=\int_{-1}^1[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xf(x,y)dy]dx=0;\quad E(x^2)=\int_{-1}^1[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x^2f(x,y)dy]dx=\frac{1}{4}$$

$$E(y)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} yf(x,y)dx]dy=0;\quad E(y^2)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y^2 f(x,y)dx]dy=\frac{1}{4}$$

$$E(xy)=\int_{-1}^{1}[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xyf(x,y)dx]dy=0;\quad D(X)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{1}{4}$$

$$D(Y)=E(y^2)-E^2(y)=\frac{1}{4}$$

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$$

八、解：设进货量为 X（单位），销售量为 Y（单位），有

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2500},50\le x\le 100,50\le y\le 100\\ 0,else\end{cases}$$

利润：$\omega=\begin{cases}-200(X-Y)+500Y,X>Y\\ 500Y+300(Y-X),X\le Y\end{cases}\Rightarrow \omega=\begin{cases}700Y-200X,X>Y\\ 800Y-300X,X\le Y\end{cases}$

平均利润：

$$E(\omega)=\int_{50}^{100}[\int_{50}^{x}(700y-200x)f(x,y)dy]dx+\int_{50}^{100}[\int_{50}^{y}(800y-300x)f(x,y)dx]dy$$

$$=\frac{1}{25}[\int_{50}^{100}(\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{2}\times 50^2-2x)dx+\int_{50}^{100}(4y^2-4\times 50^2-3y)dy]$$

$$=\frac{1}{25}\times 1231250$$

$$=49250$$