

武汉大学 2010-2011 第一学期概率论与数理统计 D 期末试题答案

1、解：(1) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(C)P(A) + P(A)P(B)P(C) = \frac{5}{8}$

(2) $P(C|A \cup B) = P(C \cap (A \cup B)) / P(A \cup B) = (1/8) / (1/4 + 1/4) = 1/4$

2、解： $P(A \text{ 生产}) = \frac{P(A \text{ 生产且次品})}{P(\text{次品})} = \frac{60\% \times 1\%}{60\% \times 1\% + 40\% \times 2\%} = \frac{3}{7}$

3、解：(1) $P(A) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4}$ ；(2) $P(Y=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$

4、解：(1) 由概率的归一化条件的性质： $\int_0^{+\infty} [\int_0^{+\infty} A e^{-(x+2y)} dx] dy = \frac{1}{2} A = 1$ ，得 $A=2$ ；

(2) $f_X(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy = 2e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = e^{-x}$ ； $f_Y(y) = \int_0^{+\infty} 2e^{-(x+2y)} dx = 2e^{-2y}$

(3) 因为 $f_X(x)f_Y(y) = 2e^{-(x+2y)} = f(x, y)$ ；所以变量 X 与 Y 独立

(4) 利用积分转化法有：

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\int_0^{+\infty} h(x+y) 2e^{-(x+2y)} dx] dy &= \int_0^{+\infty} [\int_y^{+\infty} h(z) 2e^{-(z+y)} dz] dy = \int_0^{+\infty} [\int_z^{+\infty} h(z) 2e^{-(z+y)} dy] dz \\ &= \int_0^{+\infty} 2h(z) e^{-z} [\int_z^{+\infty} e^{-y} dy] dz = \int_0^{+\infty} h(z) 2e^{-2z} dz \end{aligned}$$

所以 $Z=X+Y$ 的密度： $f_Z(z) = 2e^{-2z}$

5、解：讨论当 $X \geq Y$ 时，利润是 $W_1 = 500Y + 300(X-Y) = 300X + 200Y$ ；

当 $X < Y$ 时，有利润 $W_2 = 500X - 100(Y-X) = 600X - 100Y$ 。

理论上利润的期望 $W = P(X \geq Y)W_1 + P(X < Y)W_2$

$= \frac{30-Y}{20} (300X + 200Y) + \frac{Y-10}{20} (600X - 100Y)$ ，代入 $X=E(X)=20$ 得：

$W = -15Y^2 - 650Y + 3000 \geq 9280 \Rightarrow 14.5 \leq Y \leq 28.8$ ；所以进货量的最小值是 15 单位。

6、解：首先确定 $f(x, y) = \frac{1}{\int_0^1 [\int_{x^2}^x dy] dx} = 6, 0 < x < 1, x^2 < y < x$ ；

$E(X) = \int_0^1 [\int_{x^2}^x x \times 6 dy] dx = \frac{1}{2}$ ； $E(X^2) = \int_0^1 [\int_{x^2}^x x^2 \times 6 dy] dx = \frac{3}{10}$ ； $E(Y) = \int_0^1 [\int_y^{\sqrt{y}} y \times 6 dx] dy = \frac{2}{5}$

$E(Y^2) = \int_0^1 [\int_y^{\sqrt{y}} y^2 \times 6 dx] dy = \frac{3}{14}$ ； $E(XY) = \int_0^1 [\int_{x^2}^x xy \times 6 dy] dx = \frac{1}{4}$

从而可以得到： $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{20}$ ； $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{20}$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{19}{350}; \quad \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sqrt{1330}}{38} \approx 0.9597$$

7、解：至少要装 103 个。（详细请参考课本 P195 例 5.2.5）

8、解：X,Y 分布率为： M、N 的联合分布率为：

Z=X+Y 的分布律：

| X\Y | 0 | 1 | 2 |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 2 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

| M\N | 0 | 1 | 2 |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| 0 | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| P (Z) | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |