§ 3.3　可测函数与连续函数的关系

$\mathbf{R}^n$ 上的可测函数与我们熟悉的连续函数有密切的联系. 一方面, 可测集上的连续函数是可测的. 另一方面, 本节将证明的 Lusin 定理表明, 可测函数可以用连续函数在某种意义下逼近. 由于连续函数具有较好的性质, 比较容易处理, 因此这个结果在有些情况下是很有用的.

例 1 设 $D(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & 若\, x\, 是有理数,\\ 0, & 若\, x\, 是无理数.\end{cases}$$

$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是可测的, 但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续.

设 $[0,1]$ 中的有理数的全体为 $\{r_1, r_2, \cdots\}$. 对任意 $\delta>0$, 令

$$F_\delta=[0,1]-\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(r_i-\frac{\delta}{2^{i+1}},\ r_i+\frac{\delta}{2^{i+1}}\right).$$

则 F_δ 是 $[0,1]$ 的闭集, 并且

$$m([0,1]-F_\delta)\le m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(r_i-\frac{\delta}{2^{i+1}},\ r_i+\frac{\delta}{2^{i+1}}\right)\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}m\left(r_i-\frac{\delta}{2^{i+1}},\ r_i+\frac{\delta}{2^{i+1}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta.$$

由于 F_δ 中不含有理数, 因此 $D(x)$ 在 F_δ 恒为零. 所以 $D(x)$ 在 F_δ 上的限制所得到的函数 $D|_{F_\delta}$ 在 F_δ 上连续.

下面将要证明的 Lusin 定理表明, 例 2 中出现的情况不是偶然的. 先证明一个引理.

引理 3.2 设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集, $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$. 则简单函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{F_i}(x)$ 是 F 上的连续函数.

证 设 $x_0 \in F$, 则存在 i_0 使得 $x_0 \in F_{i_0}$. 由于 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 互不相交, 故 $x_0 \notin \bigcup_{i \neq i_0} F_i$. 由于 $\bigcup_{i \neq i_0} F_i$ 是闭集, 令 $\delta = d\left(x_0, \bigcup_{i \neq i_0} F_i\right)$, 则 $\delta > 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $d(x, x_0) < \delta$ 并且 $x \in F$ 时, 必有 $x \in F_{i_0}$. 于是

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| = \left| a_{i_0} - a_{i_0} \right| = 0 < \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 这就证明了 $f(x)$ 在 F 上连续. ■

定理 3.13 (Lusin 鲁津) 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, f 是 E 上 a.e.有限的可测函数. 则对任意 $\delta>0$, 存在 E 的闭子集 F_δ, 使得 $m(E-F_\delta)<\delta$, 并且 f 是 F_δ 上的连续函数 (即 $f\big|_{F_\delta}$ 在 F_δ 上连续).

证 分两步证明. (1).先设 f 是简单函数, 即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x),$$

其中 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 E 的一个可测分割.

根据定理 2.6, 对任意给定的$\delta>0$, 对每个$i=1,\cdots,k$, 存在E_i的闭子集F_i使得

$$m(E_i-F_i)<\frac{\delta}{k}\quad (i=1,\cdots,k).$$

令$F_\delta=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$, 则$F_\delta$是$E$的闭子集, 并且

$$m(E-F_\delta)=m\left(\bigcup_{i=1}^{k}(E_i-F_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}m(E_i-F_i)<\delta.$$

由于将f限制在F_δ上时, $f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{F_i}(x)$, 根据引理 3.2, f是F_δ上的连续函数.

(2). 一般情形. 设 f 是 E 上的a.e.有限的可测函数. 显然我们可以设 f 是处处有限的. 令

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\quad (\text{逆变换为} f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}),$$

则 g 是有界可测函数, 并且若 g 在某个闭集 F_δ 上连续, 则 f 也在 F_δ 上连续. 故不妨设 f 有界.

由推论 3.1, 存在简单函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

对任给的 $\delta>0$, 由情形(1)的结论, 对每个 f_k 存在 E 的闭子集 F_k, 使得 f_k 在 F_k 上连续, 并且 $m(E-F_k)<\dfrac{\delta}{2^k}$.

$$m(E-F_k)<\frac{\delta}{2^k}.$$

令 $F_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 F_δ 是 E 的闭子集, 并且

$$m(E-F_\delta)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E-F_k)\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m(E-F_k)<\delta.$$

由于每个 f_k 都在 F_δ 上连续, 并且 $\{f_k\}$ 在 F_δ 上一致收敛于 f, 因此 f 在 F_δ 上连续. ■

下面将给出鲁津定理的另一种形式. 为此, 需要一个引理.

定理 3.14 (Tietze 扩张定理) 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集, f 是定义在 F 上的连续函数. 则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 g, 使得当 $x \in F$ 时 $g(x) = f(x)$, 并且

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|. \tag{3.5}$$

证明 略(不作要求). ■

定理 3.15　(Lusin 鲁津) 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测集, f 是 E 上 a.e. 有限的可测函数. 则对任意 $\delta>0$, 存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 g, 使得

$$m\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta. \tag{3.8}$$

并且

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|g(x)|\le\sup_{x\in E}|f(x)|. \tag{3.9}$$

证　由定理 3.13, 对任意 $\delta>0$, 存在 E 的闭子集 F, 使得 f 在 F 上连续并且 $m(E-F)<\delta$.

由 Tietze 扩张定理, 存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数g, 使得当$x\in F$时$g(x)=f(x)$, 并且

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|\le\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

由于$\{x\in E:f(x)\ne g(x)\}\subset E-F$. 因此

$$m\{x\in E:f(x)\ne g(x)\}\le m(E-F)<\delta.$$

定理证毕. ■

习 题　　24, 25, 27,

B 类, 1, 5.