

武汉大学数学与统计学院

2008—2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷 A 卷

学号：

姓名：

成绩：

注意：所有答案均写在答题纸上，试卷与答题纸一并上交。

1. (8 分) 确定下列集合 A 的幂集：

- (1) \emptyset ; (2) $\{\emptyset\}$; (3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; (4) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ 。

2. (8 分) 求在 1 和 1000 之间 (1 和 1000 包含在内) 不能被 5 或 6, 也不能被 8 整除的数的个数 (提示: 能被 6 整除的数集和能被 8 整除的数集之交是能被 24 整除的数集)。

3. (8 分) 举出集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 R 的例子, 要求画出其关系图, 使它具有以下性质:

- (1) R 同时是对称的且反对称的且传递的;
(2) R 不是对称的且不是反对称的但是传递的;
(3) R 是传递的, 但 $R \cup R^c$ 不是传递的;
(4) R 同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

4. (8 分) 设集合 $A = \{a, b, c, d\}$, 定义集合 A 上的关系 R 为:

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \},$$

求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

5. (8 分) $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, A 上关系 R 定义为:

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \text{ 当且仅当 } |x - y| = |u - v|,$$

证明 R 是等价关系, 并求由 R 确定的 A 的划分。

6. (8 分) 设函数 $f: R \times R \rightarrow R \times R$, f 定义为: $f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$ 。

- (1) 证明 f 是单射; (2) 证明 f 是满射;
(3) 求反函数 f^{-1} ; (4) 求复合函数 $f^{-1} \circ f$ 和 $f \circ f$ 。

7. (8 分) 有理数集 Q 中的 $*$ 定义为: $a * b = a + b - ab$ 。

- (1) $(Q, *)$ 是半群吗? 是可交换的吗?
(2) 求单位元;
(3) $(Q, *)$ 中是否有可逆元? 若有, 指出哪些是可逆元? 并指出逆元是什么?

8. (8 分) 设 R 是全体实数集, $M = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in R, a \neq 0 \}$ 。定义

$$\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle。$$

这时 M 对运算 \circ 构成群吗? 试验证之。

9. (8 分) 设 (L, \vee, \wedge) 是有界分配格, 若元素 x 是有补元, 证明它的补元是惟一的。

10. (10 分) 求公式 $p \wedge (p \rightarrow q) \vee r$ 的主析取范式与主合取范式。

11. (10 分) 在谓词逻辑中, 将下列命题符号化:

- (1) 没有不犯错误的人;
(2) 并不是外语学得好的学生都是三好生, 但外语学得不好的学生一定不是三好生。

12. (8 分) 证明: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$ 为重言式。

2008—2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷 A 卷

答 案

1. (1) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$; (2) $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

(3) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;

(4) $P(\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}\}$ 。

2. 设 1 到 1000 的整数构成全集 U 。用 A, B, C 分别表示由能被 5, 6, 8 整除的数构成的集合, 则 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ 表示不能被 5 或 6, 也不能被 8 整除的数构成的集合。文氏图如图所示。因

$$|A| = [1000/5] = 200$$

$$|B| = [1000/6] = 166$$

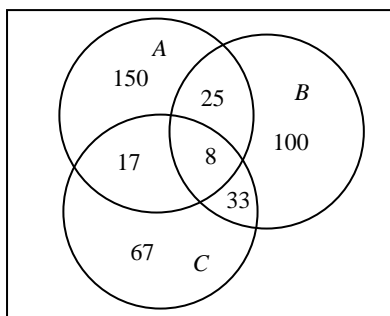
$$|C| = [1000/8] = 125$$

$$|A \cap B| = [1000/30] = 33$$

$$|A \cap C| = [1000/40] = 25$$

$$|B \cap C| = [1000/24] = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = [1000/120] = 8$$



由容斥原理, 有

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 1000 - 200 - 166 - 125 + 33 + 25 + 41 - 8 = 600。$$

3. 有许多组例子可以作为答案, 下面是一组可能的答案:

(1) $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$; (2) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$;

(3) $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ 。 (4) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

4. 求自反闭包, R 不具有自反性, 由自反性的定义, 只需在 R 上添加 I_A , 于是

$$r(R) = R \cup I_A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

其中下画线者为添加元素。

$$s(R) = R \cup \bar{R} = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$$

$$t(R) = R \cup \left\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle \right\}$$

$$= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle\} \quad \blacksquare$$

5. 首先证明 R 是等价的。

a. 对任意的 $\langle x, y \rangle \in A$, 因 $|x - y| = |x - y|$, 故 $\langle x, y \rangle R \langle x, y \rangle$, R 自反。

b. 对任意 $\langle x, y \rangle \in A, \langle u, v \rangle \in A$, 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, 即 $|x - y| = |u - v|$, 则 $|u - v| = |x - y|$, 从而

$\langle u, v \rangle R \langle x, y \rangle$, R 对称。

c . 若 $\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, $\langle u, v \rangle R \langle p, q \rangle$, 即 $|x - y| = |u - v|$, $|u - v| = |p - q|$, 从而 $|x - y| = |p - q|$, 得证 $\langle x, y \rangle R \langle p, q \rangle$ 。 R 传递。

综上所述 , R 是等价关系。

由定理知由 R 的等价类确定对集合 A 的划分。

$$[\langle 1, 1 \rangle]_R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} ; [\langle 1, 2 \rangle]_R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\} ;$$

$$[\langle 1, 3 \rangle]_R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\} ; [\langle 1, 4 \rangle]_R = \{\langle 1, 4 \rangle\} \circ$$

即划分 $\Pi = \{[\langle 1, 1 \rangle]_R, [\langle 1, 2 \rangle]_R, [\langle 1, 3 \rangle]_R, [\langle 1, 4 \rangle]_R\}$ 。

6 . (1) $\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in R \times R$, 若 $f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$, 即

$\langle x_1 + y_1, x_1 - y_1 \rangle = \langle x_2 + y_2, x_2 - y_2 \rangle$, 则 $\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$, 易得 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 从而 f 是单射。

(2) $\forall \langle p, q \rangle \in R \times R$, 由 $f(\langle x, y \rangle) = \langle p, q \rangle$, 通过计算可得 $\begin{cases} x = (p + q)/2 \\ y = (p - q)/2 \end{cases}$, 从而 $\langle p, q \rangle$ 的原

象存在 , f 是满射。

(3) 由上面的证明可知 , f 存在反函数 , 且 $f^{-1}(\langle x, y \rangle) = \left\langle \frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right\rangle$;

(4) $(f^{-1} \circ f)(\langle x, y \rangle) = f\left(\left\langle \frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right\rangle\right) = \langle x, y \rangle$;

$$(f \circ f)(\langle x, y \rangle) = f(\langle x + y, x - y \rangle) = \langle (x + y) + (x - y), (x + y) - (x - y) \rangle = \langle 2x, 2y \rangle \circ$$

7 . (1) $\forall a, b, c \in Q$, 易证 $a * (b * c) = (a * b) * c$, 故 $(Q, *)$ 是半群。因 $a * b = b * a$, $\forall a, b \in Q$, 故 $*$ 可交换。

(2) 设 e 为其单位元 , 则应有 : $\forall a \in Q$, $a * e = e * a = a$, 即 $a + e - ae = a$, 由 a 的任意性 , 有 $e = 0$ 。所以单位元为 0 。

(3) 设 a 有逆元 b , 则应有 : $a * b = a + b - ab = 0$, 故当 $a \neq 1$ 时 , 有逆元为 : $a^{-1} = \frac{a}{a - 1}$,

当 $a = 1$ 时 , 没有逆元。

8 . M 对运算 \circ 构成群 :

首先 , $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in M$, 有 $a, b, c, d \in R$, 且 $a, c \neq 0$, 于是 $ac, ad + b \in R$, 且 $ac \neq 0$, 从而 $\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle \in M$, \circ 是 M 上的二元运算。

其次 , $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle \in M$, 有

$(\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle) \circ \langle e, f \rangle = \langle a, b \rangle \circ (\langle c, d \rangle \circ \langle e, f \rangle)$, 结合律成立。

$\langle 1, 0 \rangle$ 是 M 上关于 \circ 的单位元。事实上 , $\forall \langle a, b \rangle \in M$, 有

$$\langle 1, 0 \rangle \circ \langle a, b \rangle = \langle a \cdot 1, a \cdot 0 + b \rangle = \langle a, b \rangle$$

$$\langle a, b \rangle \circ \langle 1, 0 \rangle = \langle 1 \cdot a, 1 \cdot b + 0 \rangle = \langle a, b \rangle$$

最后， $\forall \langle a, b \rangle \in M, \langle a^{-1}, -a^{-1}b \rangle$ 是 $\langle a, b \rangle$ 的逆元。事实上，

$$\langle a, b \rangle \circ \langle a^{-1}, -a^{-1}b \rangle = \langle a \cdot a^{-1}, a \cdot (-a^{-1}b) + b \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\langle a^{-1}, -a^{-1}b \rangle \circ \langle a, b \rangle = \langle a \cdot a^{-1}, a^{-1}b - a^{-1}b \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

得证 (M, \circ) 是群。

9. 设 x 有补元 y 和 z ，即 $x \wedge y = 0$ ， $x \vee y = 1$ ， $x \wedge z = 0$ ， $x \vee z = 1$ ，则

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 \\ &= y \vee (x \wedge z) && \text{由条件 } x \wedge z = 0 \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee z) && \text{分配律} \\ &= 1 \wedge (y \vee z) && \text{由条件 } x \vee y = 1 \\ &= (x \vee z) \wedge (y \vee z) && \text{由条件 } x \vee z = 1 \\ &= z \vee (x \wedge y) && \text{分配律} \\ &= z \vee 0 && \text{由条件 } x \wedge y = 0 \\ &= z \end{aligned}$$

10. $p \wedge (p \rightarrow q) \vee r$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee r$$

析取范式

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$$

化简，去掉矛盾式

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee (r \wedge (p \vee \neg p))$$

使所有变元均在简单合取式中出现

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \vee ((r \wedge p) \vee (r \wedge \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (r \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg q))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q)$$

去掉重复的简单合取式

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

排序

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

最后的公式为原公式的主析取范式，其中共有 5 个极小项 m_1, m_3, m_5, m_6, m_7 ，显然原式有 001, 011, 101, 110, 111 共 5 组赋值使其为真，以外的其它赋值 000, 010, 100 均使其为假。由此还可以看到，原式既不是重言式，也不是矛盾式，而是一个可满足式。

由 $p \wedge (p \rightarrow q) \vee r$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

合取范式

$$\Leftrightarrow (p \vee r \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (q \vee r \vee (p \wedge \neg p)) \text{ 使全部变元均在简单合取式中出现}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \quad \text{排序}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

最后得到主合取范式,其中共有 3 个极大项 M_0, M_2, M_4 与 000,010,100 三组赋值相对应。

只有在这三组赋值下原公式为假,其它任何赋值都使原公式为真。 ■

11.(1) 设 $F(x)$ 表示“ x 犯错误”, $N(x)$ 表示“ x 为人”, 则此语句表示为:

$$\neg \exists x (N(x) \wedge \neg F(x))。$$

(2) 设 $F(x)$ 表示“ x 为外语学得好的学生”, $N(x)$ 表示“ x 为三好生”, 则此语句表示为:

$$\neg \forall x (F(x) \rightarrow N(x)) \wedge \forall x (\neg F(x) \rightarrow \neg N(x))。$$

$$12. \quad \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x Q(x) \vee \neg \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \vee \neg \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow 1。$$