Oblig 2

Fredrik Lillejord

April 2023

1 Oppgave 1

$$B\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$B = M^{-1}AM$$
$$M^{-1}AM\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$AM\vec{x} = \lambda\vec{x}M$$

Definerer vektor y:

$$M\vec{x} = \vec{y}$$

Så da kan vi få:

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y}$$

Da ser vi at λ er en egenvektor for matrisen A.

Videre har vi:

$$BM^{-1}\vec{v} = \lambda M^{-1}\vec{v}$$

Skriver om:

$$M^{-1}AMM^{-1}\vec{v} = \lambda M^{-1}\vec{v}$$

Ganger med M:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Vi ser da at $M^{-1}\vec{v}$ er en egenvektor for matrisen B.

2 Oppgave 2

a) Vi begynner med lineær avhengighet, da fins det c_i s.a:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = 0$$

Ganger inn matrisen A:

$$c_1A\vec{v_1} + c_2A\vec{v_2} = 0$$

Vi kan skrive om:

$$c_1\lambda_1\vec{v_1} + c_2\lambda_2\vec{v_2} = 0$$

Nå kan vi gange inn $-\lambda$ i den første ligningen, og trekke fra den første ligningen med den andre. Vi får da:

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v_2} = 0$$

Men nå kan vi se at siden $c_2 \neq 0$ og $\vec{v_2} \neq 0$, får vi at $\lambda_1 = \lambda_2$, som er feil siden vi får oppgitt i oppgaveteksten at $\lambda_1 \neq \lambda_2$
Dvs. at det ikke er en $C = \boldsymbol{R}^2$
Og $\left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\right\}$ spenner ut et plan som utgjør en basis i $\boldsymbol{R}^2$

b) Siden $\left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\right\}$ utgjør en basis i $\boldsymbol{R}^2$, må søylene i matrisen M være egenvektorene $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$ til A

$$M = \begin{bmatrix}\vec{v_1} & \vec{v_2}\end{bmatrix}$$

c) Vi har matrisen A:

$$A = \begin{bmatrix}1/2 & 0 \\ 10 & 1/4\end{bmatrix}$$

Vi kan finne egenverdiene til A:

$$det(\lambda\boldsymbol{I}_2 - A) = 0$$

$$(\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda) = 0$$

Vi får lambda'ene:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}$$

Finner vektorene $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0 \\ 10 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ y_1\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}x_1 \\ y_1\end{bmatrix}$$

Vi får da: $\vec{v_1} = (1, 40)$

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0 \\ 10 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2 \\ y_2\end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix}x_2 \\ y_2\end{bmatrix}$$

Vi får da: $\vec{v_2} = (0, 1)$

Vi ser på matrisen M, som nå kan skrives som:

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 40 & 1\end{bmatrix}$$

d)

$$\vec{x} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$$
$$A^n\vec{x} = A^n(a\vec{v_1} + b\vec{v_2})$$
$$= A^n a\vec{v_1} + A^n b\vec{v_2}$$

Siden $A^n\vec{v} = \lambda\vec{v}$, skriver vi om:

$$\lambda_1^n a\vec{v_1} + \lambda_2^n b\vec{v_2}$$

Finner lim når $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} A^n\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \lambda_1^n a\vec{v_1} + \lim_{n\to\infty} \lambda_1^n b\vec{v_2}$$

Hvor λ_1 og λ_2 er samme fra oppgave c.

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n a\vec{v_1} + \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{4})^n b\vec{v_2}$$
$$= 0 \cdot a\vec{v_1} + 0 \cdot b\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Her ser vi at når $n \to \infty$, nærmer det seg en null vektor.

3 Oppgave 3

a) På spennet $[0, 2\pi)$ vet vi at det er én runde i enhetsirkelen. Høyden og lengden i enhetsirkelen er 1, så da vet vi at hypotenusen også er 1, siden fra Pytagoras, $a^2 + b^2 = 1$, eller $1^2 + 1^2 = 1$.
Dette danner en trekant, og vi kan finne hosliggende katet ved å ta $cos\theta$, og motstående ved $sin\theta$, så dermed kan vi skrive om til $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

I enkelttilfellene $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, vil enten sin eller cos bli null, og den andre vil bli 1, noe som fortsatt gir hypotenusen = 1

b) Fra oppgave a har vi at $a = cos\theta$ og $b = sin\theta$, og matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Og får oppgitt at $\vec{v}$ er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Danner $A\vec{v}$, hvor jeg har skrevet om a og b til verdiene i oppgave a:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysin\theta \\ xsin\theta + ycos\theta \end{bmatrix}$$

$A\vec{v}$ er altså en vektor med en x- og y-verdi, og siden $\vec{v} = z$, kan vi ta ut verdiene fra vektoren:

$$x = xcos\theta - ysin\theta$$

$$y = xsin\theta + ycos\theta$$

Vi fikk opggitt at $z = x + iy$, som gir oss:

$$A\vec{v} = (xcos\theta - ysin\theta) + i(xsin\theta + ycos\theta)$$

$$= x(cos\theta + isin\theta) + y(-sin\theta + icos\theta)$$

Ser nå på $e^{i\theta}$, og kan begynne med å skrive:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

Ganger med $z = x + iy$ for å vise at $A\vec{v} = e^{i\theta}z$:

$$e^{i\theta}z = (cos\theta + isin\theta)(x + iy)$$

$$= i^2ysin\theta + ixsin\theta + iycos\theta + xcos\theta$$

Setter x og y utenfor:

$$x(cos\theta + isin\theta) + y(-sin\theta + icos\theta)$$

Da ser vi at $A\vec{v} = e^{i\theta}z$

c) Begynner med determinanten til A, og skriver det på formen:

$$\lambda^2 - 2\lambda a + a^2b^2 = 0$$

Og så setter inn for a og b:

$$\lambda^2 - 2\lambda cos\theta + 1 = 0$$

Løser for λ:

$$\lambda = \frac{2cos\theta \pm \sqrt{4cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= cos\theta \pm \sqrt{cos^2\theta - 1}$$

$$= cos\theta \pm \sqrt{-sin^2\theta}$$

Så da får vi at λ har egenverdiene; $\lambda = cos\theta$, $\lambda = isin\theta$

For å så finne matrisen M slik at at $M^{-1}AM = D$, skriver vi:

$$AM = MD$$

Som gir oss:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} M = M \begin{bmatrix} cos\theta + isin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta - isin\theta \end{bmatrix}$$

Nå vil vi ha to utrykk som vi kan sammenligne, så da får vi elementene i M: $a = 11$, $b = 12$, $c = 21$, $d = 22$:

$$\begin{bmatrix} acos\theta - csin\theta & bcos\theta - dsin\theta \\ asin\theta + csin\theta & bsin\theta + dsin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acos\theta + aisin\theta & bcos\theta - bisin\theta \\ ccos\theta + cisin\theta & dcos\theta - disin\theta \end{bmatrix}$$

Så nå må vi gjette verdiene, og begynner med a og c:

$$a = i, c = 1$$

Når vi da setter dette inn i utrykket hvor vi har disse variablene, får vi to svar:

$$\mathbf{1} \rightarrow icos\theta - sin\theta = icos\theta - sin\theta$$

$$\mathbf{2} \rightarrow isin\theta + sin\theta = cos\theta + isin\theta$$

Så gjetter vi for b og d:

$$b = 1, d = i$$

$$\mathbf{3} \rightarrow cos\theta - isin\theta = cos\theta - isin\theta$$

$$\mathbf{4} \rightarrow sin\theta + isin\theta = icos\theta + sin\theta$$

Så setter vi opp matrisen M:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

d) Når $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$ vil A bli identitestmatrisen. I disse punktene er sinusverdien null, og cosinus verdien enten 1 eller -1. Så når vi skriver på formen:

$$AM = MA$$

vil dette være det samme som:

$$IM = MI$$

Også negativ:

$$-IM = -MI$$

Så da vil dette si at M kan være hvilken som helst *reel* matrise.

4 Oppgave 4

a) Begynner med å skrive:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Dette vil gi et polynom grunnet av at lambda blir i n'te grad. Dette polynomet vil ha minst ett komplekst nullpunkt, vi kaller det for λ_1.Vi vet også at det må være en vektor $\vec{v}$, siden det er en kompleks egenverdi:

$$det(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

b)

$$B\vec{e_2} = \lambda\vec{e_2}$$

Vi kan skrive om, hvor $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$B\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

B må være nedre trianguler fordi at:

$$B\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Hvor b har verdien 0

c)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Fra oppgave 2b) vil det finnes en matrise M med søyler som består av matrise A sine egenvektorer. Dette betyr da at $M^{-1}AM = D$, er en matrise som er nedre triangulær.

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi begynner med å finne polynomet:

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - I)^2$$

Her må λ være 1, og da vil egenvektoren for matrisen A bli: $\vec{e_2}$ Da blir matrisen M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det finnes ingen invers til denne matrisen, fordi vi vil få null i nevneren ved å bruke verdiene (a,b,c,d) til M, noe som vil si at A ikke kan diagonaliseres fordi det finnes da ingen $M^{-1}AM = D$