Universitetet i Oslo

FYS1105 — Klassisk mekanikk

Midtveisprosjekt

Innleveringsfrist: Søndag 26. mars 23:59.

I dette prosjektet skal dere studere et ikke-lineært system, som ikke har noen generell analytisk løsning. Et eksempel på et slikt system kan være koblede pendler (to eller flere).

Dere oppfordres til å jobbe i grupper, men alle må levere individuelt. *Skriv i tekstfeltet for innleveringen din i Canvas hvem du har samarbeidet med.* Man kan godt lage felles kode, men hver enkelt må generere sine egne plott (ved å velge initialbetingelser selv).

Innleveringen skal gjøres i form av én enkelt pdf-fil. Dere trenger ikke å strukturere innleveringen som en ordentlig "labrapport" — det holder å helt enkelt presentere hva du har gjort i hver oppgave.

Kopier koden du har laget i slutten av dokumentet. Denne blir ikke rettet, så du trenger ikke være nøye med strukturering, osv; dette er bare for å se at dere har gjort arbeidet for å lage resultatene.

Oppgave 1

Velg et ikke-lineært system som ikke har en generell analytisk løsning (spør hvis du er usikker). Vi ønsker at systemet skal ha kaotisk oppførsel for visse valg av parametre. Du kan derfor ikke velge en enkelt pendel (med mindre den er både drevet og dempet).

Oppgave 2

Først ser vi på en forenklet/begrenset versjon av systemet, hvor det er mulig å finne en analytisk løsning. Dette gjelder ofte når du velger et spesifikt sett med initialbetingelser; for en dobbeltpendel er det for eksempel mulig å finne en analytisk løsning dersom vi antar små vinkelutslag (se Taylor, kapittel 11.4).

Det kan også skje om vi setter begrensninger på massene til de ulike legemene i systemet. Ta et gravitasjonelt vekselvirkende trelegemesystem som eksempel: Dersom den ene massen er langt mindre enn de to andre vil bevegelsen til de to tyngste legemene være tilnærmet lik bevegelsen til et tolegemesystem, hvor vi har utledet en analytisk løsning i kurset.

Gjør en slik tilnærming for systemet ditt, og finn en analytisk løsning for systemet under denne tilnærmingen.

Oppgave 3

Lag et program som løser Lagrange-likningene for et generelt sett med initialbetingelser. Du kan basere deg på Euler-Cromer-metoden:

Generelt har Lagrange-likningene for et sett med N generaliserte koordinater formen[1]

$$\ddot{q}_j(t) = f_j\left[q_1(t), q_2(t), \ldots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_N(t), t\right], \tag{1}$$

[1] Merk at det kan være noe jobb å få likningene på denne formen, altså å eliminere $\ddot{q}_k$, $k \neq j$ fra uttrykket for $\ddot{q}_j$. I tilfeller hvor dette er for tungvint kan du bruke matrisemetoden som er beskrevet under.

der $j = 1,2,3,\ldots$. Om vi definerer $v_j \equiv \dot{q}_j$, kan vi gjøre om dette fra en andre ordens differensiallikning til to koblede første ordens likninger, gitt ved

$$\dot{q}_j(t) = v_j(t), \tag{2a}$$
$$\dot{v}_j(t) = f_j\big[q_1(t),q_2(t),\ldots,q_N(t),v_1(t),v_2(t),\ldots,v_N(t),t\big]. \tag{2b}$$

For å løse dette numerisk deler vi inn i diskrete tidspunkter t_i, $i = 0,1,2,3,\ldots$, og med gitte initialbetingelser ved tid t_0 kan vi finne en tilnærmet løsning ved:

For $i = 0,1,2,3,\ldots$:

$$v_j(t_{i+1}) = v_j(t_i) + f_j\big[q_1(t_i),q_2(t_i),\ldots,q_N(t_i),v_1(t_i),v_2(t_i),\ldots,v_N(t_i),t_i\big]\Delta t, \quad \text{for } j = 1,2,3,\ldots,N, \tag{3a}$$
$$q_j(t_{i+1}) = q_j(t_i) + v_j(t_{i+1})\Delta t, \text{ for } j = 1,2,3,\ldots,N, \tag{3b}$$

der $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

NB: I en del tilfeller, for eksempel for serier med pendler, kan det være tungvint å komme fram til formen (1); dette gjelder for systemer med flere generaliserte koordinater, hvor akselerasjonen til hver koordinat også avhenger av akselerasjonen til andre koordinater. I dette tilfellet kan bevegelseslikningen skrives på formen

$$\mathbf{M}[\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t]\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{a}[\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t], \tag{4}$$

der $\mathbf{q}$ er en kolonnevektor med elementer q_j, $j = 1,2,3,\ldots,N$, og $\mathbf{M}$ er en $N\times N$-matrise som generelt kan avhenge av koordinatene og deres deriverte, i tillegg til tiden. $\mathbf{a}$ er en kolonnevektor som også avhenger av de samme størrelsene som $\mathbf{M}$ (i praksis vil hvert element av $\mathbf{a}$ være de leddene i hver Euler-Lagrange-likning som er uavhengige av de dobbeltderiverte til koordinatene). Alternativt kan dette skrives som

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t]\mathbf{a}[\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t]. \tag{5}$$

hvor $\mathbf{M}^{-1}$ er den inverse matrisen til $\mathbf{M}$. Om vi som tidligere definerer $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{q}}$ kan vi finne en tilnærmet løsning gitt ved:

For $i = 0,1,2,3,\ldots$:

$$\mathbf{v}(t_{i+1}) = \mathbf{v}(t_i) + \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{q}(t_i),\mathbf{v}(t_i),t_i]\mathbf{a}[\mathbf{q}(t_i),\mathbf{v}(t_i),t_i]\Delta t, \tag{6a}$$
$$\mathbf{q}(t_{i+1}) = \mathbf{q}(t_i) + \mathbf{v}(t_{i+1})\Delta t. \tag{6b}$$

I Python er dette enklest å løse med `numpy.linalg`-modulen ("`from numpy import linalg`"). Her vil da `q`, `v` og `a` være arrayer med form $(N,1)$, mens `M` har form (N,N). Den inverse av M kan finnes med `linalg.inv(M)`.

a) Bruk programmet til å løse Lagrange-likningene numerisk med de tilnærmingene du gjorde i oppgave 2, og sammenlign med det analytiske resultatet du fant der.

Hvordan du gjør denne sammenligningen er opp til deg; en god idé kan være å plotte hver av de generaliserte koordinatene som funksjon av tid, eller, hvis bevegelsen er todimensjonal, vise bevegelsen i det todimensjonale planet.

b) Løs Lagrange-likningene numerisk for det generelle tilfellet, der du ikke gjør noen tilnærminger. Velg minst tre sett med initialbetingelser og sammenlign bevegelsen i hvert tilfelle.